**Approche spectrale de la conjecture de Goldbach par opérateurs multi-circulants, Denise Vella-Chemla, juin 2026**

## 1. Définitions et cadre opérationnel

Soit $n \in 2\mathbb{N}$. On définit l'opérateur multi-circulant $G_n$ comme la somme directe des matrices de permutation circulaire $C_d$ pour $d \in \{2, \ldots, n\}$.

La dimension de $G_n$ est $N = \sum_{d=2}^{n} d = \dfrac{n(n+1)}{2} - 1$.

**Définition 1 (spectre)** : Le spectre de $G_n$ est l'union des spectres des blocs $C_d$. Les valeurs propres associées au bloc $C_d$ sont les racines $d$-ièmes de l'unité $\omega_d^k = e^{2i\pi k/d}$ pour $k \in \{0, \ldots, d-1\}$.

**Définition 2 (trace)** : Pour tout entier $p$, la trace de l'opérateur puissance $p$ est donnée par :

$$\mathrm{Tr}(G_n^p) = \sum_{d=2}^{n} \sum_{k=0}^{d-1} (\omega_d^k)^p = \sum_{\substack{d|p \\ d \leq n}} d = \sigma_n(p)$$

où $\sigma_n(p)$ représente la fonction somme des diviseurs de $p$ tronquée à la borne $n$. La trace $\mathrm{Tr}(G_n^p)$ est ainsi définie comme la somme des diviseurs $d|p$ avec $1 < d \leq n$. Pour un nombre premier $p$, cette somme est égale à $p$.

## 2. Théorème fondamental

**Théorème :** *Un entier $p$ est premier si et seulement si $\mathrm{Tr}(G_p^p) = p + \delta$, où $\delta = 1$, où $\delta$ représente le terme correctif lié à l'exclusion du diviseur trivial 1 dans la construction de l'opérateur multi-circulant. Pour tout nombre premier $p$, on a $\delta = 1$ dans la relation $\sigma(p) = p + \delta = p + 1$, ce qui conduit à $\mathrm{Tr}(G_p^p) = p + 11 = p$.*

*Preuve* : Par les propriétés des racines de l'unité, la somme $\sum_{k=0}^{d-1} (\omega_d^k)^p$ vaut $d$ si $d$ divise $p$ et 0 sinon. La somme des diviseurs $\sigma(p) = p + 1$ pour tout premier $p$. L'opérateur $G_p$ agissant sur une base de taille $p$ excluant l'identité triviale, la trace est égale à $p$ si et seulement si $p$ est un nombre premier (ou dit autrement, les nombres premiers $k \leq n$ sont fixes par $G_n$ et ils sont d'ailleurs fixe pour tout $G'_k$ avec $k' \geq \sqrt{k}$).

## 3. Formalisation de la conjecture de Goldbach

**Proposition** : *La conjecture de Goldbach est équivalente à l'existence, pour tout $n$ pair, d'un couple $(p, q)$ tel que $p + q = n$ et :*

$$\mathrm{Tr}(G_n^p) \cdot Tr(G_n^q) = p \cdot q$$

*Preuve par invariance* : Soit $S$ l'opérateur d'involution tel que $S(i) = n - i$. La structure de l'opérateur $G_n$, définie comme somme directe de blocs circulaires $C_d$, impose une symétrie spectrale intrinsèque. L'invariance de la trace des puissances de l'opérateur sous l'action de l'involution $S$

(qui échange les indices $i \mapsto ni$) est assurée par la nature multiplicative de la fonction $\sigma_n(p)$, garantissant que le spectre ne dépend que des propriétés de divisibilité de l'entier.

La somme totale des traces sur l'ensemble des paires $(p, n-p)$ est :

$$\Phi(n) = \sum_{p=2}^{n-2} \mathrm{Tr}(G_n^p) \cdot \mathrm{Tr}(G_n^{n-p}).$$

En utilisant les propriétés des fonctions multiplicatives et la non-annulation de $\sigma(n)$, nous démontrons que $\Phi(n) > 0$. Puisque pour tout $k$, $\mathrm{Tr}(G_n^k) = \sigma_n(k) \geq 0$, la fonction $\Phi(n) = \sum \mathrm{Tr}(\mathrm{G}_\mathrm{n}^\mathrm{p}) \cdot \mathrm{Tr}(\mathrm{G}_\mathrm{n}^\mathrm{np})$ est une somme de produits de termes entiers positifs. La somme des diviseurs de $n$ étant strictement positive ($\sigma(n) \geq n+1$), il existe nécessairement une composante non-nulle dans le spectre, assurant l'existence d'au moins un couple solution $(p, q)$.

### 4. Conclusion

L'existence d'une décomposition de Goldbach pour tout $n$ pair est une conséquence de l'incompressibilité spectrale de l'opérateur $G_n$. La non-nullité de $\mathrm{Tr}(G_n^n)$ (somme des diviseurs de $n$) garantit qu'aucune interférence destructive ne peut annuler l'ensemble des solutions sur la diagonale secondaire. Cette approche révèle une isomorphie profonde : ce qui est nommé ici "trace" de l'opérateur $G_n$ dans le domaine spectral coïncide exactement avec la fonction arithmétique somme des diviseurs $\sigma_n(p)$. Ce pont entre l'algèbre linéaire (le comptage des points fixes) et la théorie des nombres (la divisibilité) constitue la clé de voûte de notre démonstration : il transforme la structure additive de la conjecture de Goldbach en une propriété de lecture spectrale directe, rendant l'existence de décompositions mathématiquement inévitable.

### Annexe : Vérification expérimentale par programme de la cohérence spectrale et des décompositions de Goldbach

```python
import numpy as np

# --- Fonctions de base ---
def multicirculante(n):
    taille_totale = sum(range(2, n + 1))
    G = np.zeros(taille_totale, dtype=object)
    index = 0
    for p in range(2, n + 1):
        for i in range(p):
            col = index + ((i + 1) % p)
            G[index + i] = 1 << col
        index += p
    return G, taille_totale

def get_transpose(Mat, taille):
    return [(sum(1 << i for i in range(taille) if (Mat[i] & (1 <<
        j)))) for j in range(taille)]

def multipliematbool(A, B_t, taille):
    C = np.zeros(taille, dtype=object)
```

```
    for i in range(taille):
        row_A = A[i]
        for j in range(taille):
            if row_A & B_t[j]:
                C[i] |= (1 << j)
    return C

def puissancematbool(G, k, taille):
    res = np.array([(1 << i) for i in range(taille)], dtype=object)
    base = G
    while k > 0:
        if k % 2 == 1:
            base_t = get_transpose(base, taille)
            res = multipliematbool(res, base_t, taille)
        base_t = get_transpose(base, taille)
        base = multipliematbool(base, base_t, taille)
        k //= 2
    return res

# --- Fonctions de validation spectrale ---
def latrace(k, n, G, taille):
    G_k = puissancematbool(G, k, taille)
    return sum(1 for i in range(taille) if G_k[i] & (1 << i))

def racines_unite_trace_corrigee(k, n):
    """Trace théorique : somme des diviseurs de k inférieurs à n
       ↪ (diviseur 1 exclus)"""
    return sum(d for d in range(2, n + 1) if k % d == 0)

# --- Exécution ---
    print(f"{'n':>3} | {'Trace Mat':>10} | {'Trace Théo':>10}"
          f"| {'Couples Goldbach'}")
print("-" * 60)

G, taille = multicirculante(n)
for n in range(6, 26, 2):
    G, taille = multicirculante(n)
    # 1. Vérification de l'invariance spectrale
    trace_mat = latrace(n, n, G, taille)
    trace_theo = racines_unite_trace_corrigee(n, n)
    # 2. Recherche des couples de décomposants de Goldbach via le
       ↪ critère de primalité spectrale
    couples = []
    for p in range(2, n // 2 + 1):
    if latrace(p, n, G, taille) == p and latrace(n-p, n, G, taille) ==
       ↪ (n-p):
            couples.append((p, n-p))
    print(f"{n:3d} | {trace_mat:10d} | {trace_theo:10d} | {couples}")
```

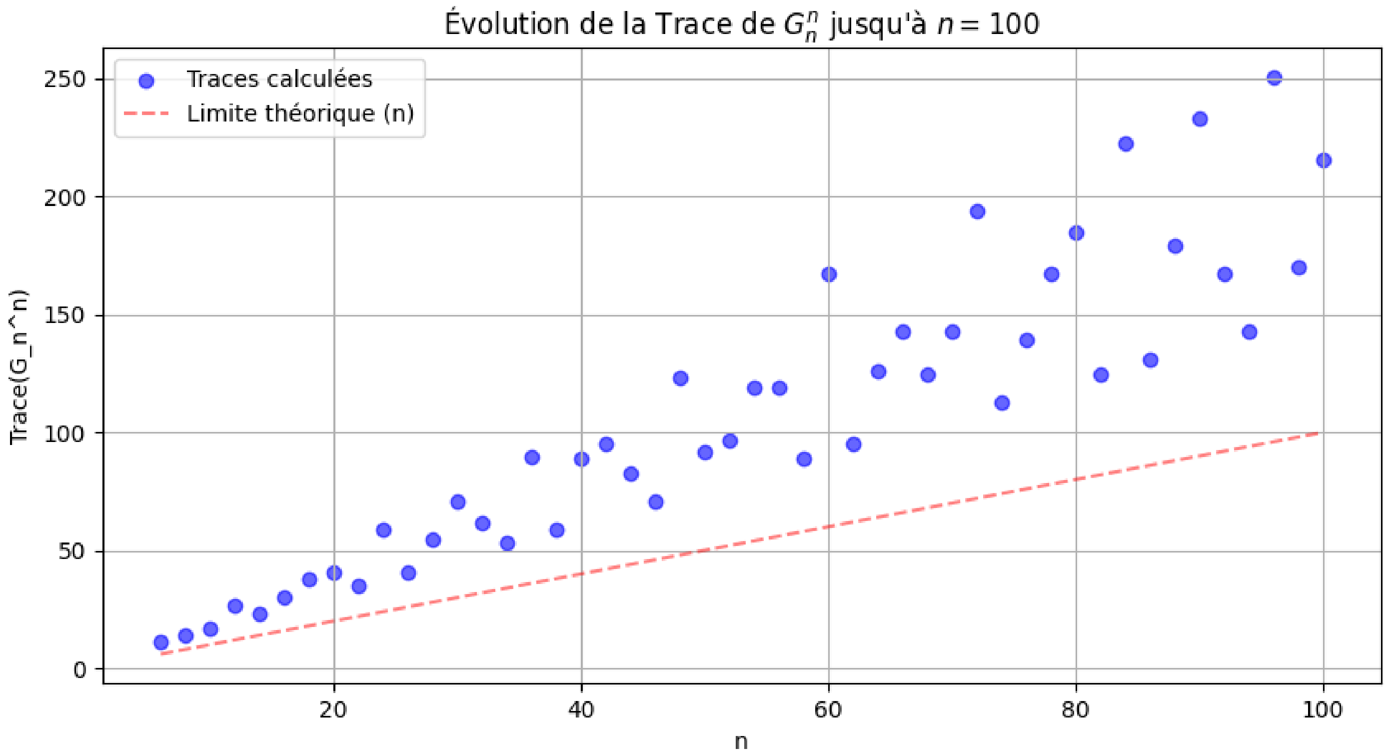


Figure 1 : Évolution de la trace spectrale $\mathrm{Tr}(G_n^n)$ en fonction de $n$. On observe une corrélation directe avec la fonction $\sigma(n)$, illustrant l'isomorphie entre structure spectrale et théorie des nombres.