

# Approche spectrale de la conjecture de Goldbach

Note complémentaire : une version criblée,  $L_n$ , fondée sur les petits nombres premiers  $p < \sqrt{n}$

Denise Vella-Chemla, en dialogue avec Claude (Anthropic) - juin 2026

## Résumé

Cette note fait suite à *Approche spectrale de la conjecture de Goldbach, note complémentaire : couplage explicite des blocs et reformulation par déterminant* (D. Vella-Chemla, en dialogue avec Claude, juin 2026), où était construite la matrice  $K_n = D_n + J_n D_n J_n$ , de taille  $\sim n^2/2$ , vérifiant  $\det(K_n) = 0 \iff$  Goldbach est vrai pour  $n$ . On propose ici une construction de même architecture, mais fondée sur le crible de Legendre-Eratosthène restreint aux petits nombres premiers  $p < \sqrt{n}$  (au sens du critère de Vella-Chemla, cf. *Deux projections orthogonales*), démontré par Leila Schneps, au lieu de la fonction  $\sigma$  utilisée dans  $K_n$ . La matrice sous-jacente  $M_n$  est de taille  $O(\sqrt{n}/\ln \sqrt{n})$  au lieu de  $O(n)$  : le gain en taille est considérable et vérifié numériquement. La limite de fond reste inchangée et doit être répétée sans ambiguïté :  $\det(L_n) = 0$  est une reformulation strictement équivalente à Goldbach, pas une démonstration, et elle repose sur le même crible élémentaire dont on a établi, dans la note précédente, qu'il se heurte à l'explosion du terme d'erreur et, plus profondément, au mur de parité de Selberg-Bombieri.

## 1 Rappel : la construction $K_n$ et son défaut résolu

Dans la note précédente, on avait construit, pour  $n$  pair et  $k \in I_n = \{2, \dots, n-2\}$  :

- $\delta(k, n) := \sigma_n(k) - k$ , où  $\sigma_n(k)$  est la somme des diviseurs de  $k$  compris entre 2 et  $n$  ; on a  $\delta(k, n) = 0 \iff k$  premier ;
- $J_n$ , l'involution de  $I_n$  définie par  $k \mapsto n - k$  ;
- $K_n := D_n + J_n D_n J_n$ , où  $D_n = \text{diag}(\delta(k, n))_{k \in I_n}$ .

On avait montré que  $K_n$  est diagonale, de coefficient  $(K_n)_{kk} = \delta(k, n) + \delta(n - k, n)$ , nul si et seulement si  $k$  et  $n - k$  sont tous deux premiers, d'où

$$\det(K_n) = 0 \iff \text{Goldbach est vrai pour } n.$$

Le défaut de cette construction n'est pas conceptuel mais *calculatoire* :  $\delta(k, n)$  est calculée à partir de  $\sigma_n(k)$ , qui regarde *tous* les diviseurs de  $k$  jusqu'à  $n$ . La matrice circulante sous-jacente  $G_n = \bigoplus_{d=2}^n C_d$  a une taille totale  $\sum_{d=2}^n d \sim n^2/2$ .

## 2 La construction $L_n$ : même architecture, crible sur les petits premiers

### 2.1 Motivation

Le critère de Vella-Chemla (voir *Deux projections orthogonales*, <https://denisevellachemla.eu/garde-projections.pdf>) caractérise les décomposants de Goldbach  $\geq \sqrt{n}$  par une condition de non-congruence modulo les seuls nombres premiers  $p < \sqrt{n}$  :  $k$  et  $n - k$  sont tous deux premiers si et seulement si, pour tout  $p < \sqrt{n}$ ,  $k \not\equiv 0 \pmod{p}$  et  $k \not\equiv n \pmod{p}$  (à la précision près que pour  $p \mid n$ , les deux classes coïncident).

On peut traduire cette condition, exactement comme on l'a fait pour  $\sigma$ , en langage de traces de matrices circulantes - mais cette fois en n'utilisant que les petites circulantes  $C_p$ ,  $p < \sqrt{n}$  premier, au lieu de toutes les circulantes  $C_2, \dots, C_n$ .

### 2.2 Définitions

**Définition 1** Soit  $\mathcal{P}(\sqrt{n}) := \{p \text{ premier} : p < \sqrt{n}\}$ . On pose  $M_n := \bigoplus_{p \in \mathcal{P}(\sqrt{n})} C_p$ , où  $C_p$  est la matrice de permutation circulaire  $p \times p$ . On rappelle (propriété déjà établie dans la note initiale) :

$$\text{Tr}(C_p^k) = \begin{cases} p & \text{si } p \mid k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Définition 2** Pour  $k \in I_n = \{2, \dots, n - 2\}$ , on pose

$$\nu(k, n) := \sum_{p \in \mathcal{P}(\sqrt{n}), p \neq k} \frac{1}{p} \text{Tr}(C_p^k),$$

c'est-à-dire le nombre de petits nombres premiers  $p < \sqrt{n}$ ,  $p \neq k$ , qui divisent  $k$ .

**Définition 3** On pose  $\mathcal{D}_n := \text{diag}(\nu(k, n))_{k \in I_n}$ ,  $J_n$  l'involution miroir  $k \mapsto n - k$  (inchangée par rapport à  $K_n$ ), et

$$L_n := \mathcal{D}_n + J_n \mathcal{D}_n J_n.$$

### 2.3 La propriété centrale

**Proposition 1** Pour tout  $k$  avec  $2 \leq k \leq n - 2$ ,  $\nu(k, n) = 0$  si et seulement si  $k$  est premier.

Si  $k$  est premier, son seul diviseur premier est  $k$  lui-même, exclu de la somme par construction ( $p \neq k$ ) :  $\nu(k, n) = 0$ .

Réciproquement, si  $k$  est composé, soit  $q$  son plus petit facteur premier. Alors  $q \leq \sqrt{k}$  (propriété classique : si tous les facteurs premiers de  $k$  étaient  $> \sqrt{k}$ , leur produit dépasserait  $k$ ). Comme  $k \leq n - 2 < n$ , on a  $q \leq \sqrt{k} < \sqrt{n}$ , donc  $q \in \mathcal{P}(\sqrt{n})$ . De plus  $q \neq k$  puisque  $k$  est composé (donc  $q < k$ ). Ainsi  $q$  contribue à la somme :  $\nu(k, n) \geq 1$ .

**Remarque 1** Cette propriété est inconditionnelle sur la plage  $2 \leq k \leq n - 2$  - contrairement à ce qu'on pourrait craindre en lisant le critère de Vella-Chemla, qui ne porte explicitement que sur les décomposants  $\geq \sqrt{n}$ . La raison est que la condition  $k \leq n - 2$  suffit déjà à garantir  $\sqrt{k} < \sqrt{n}$ , donc à garantir que le plus petit facteur premier d'un  $k$  composé est toujours capté par le crible, quelle que soit la taille relative de  $k$  par rapport à  $\sqrt{n}$ . Ce point a été vérifié numériquement sans aucune exception sur  $4 \leq n \leq 2000$  (voir `Ln_crible.py`).

**Proposition 2**  $L_n$  est diagonale, de coefficient  $(L_n)_{kk} = \nu(k, n) + \nu(n - k, n)$ , et

$$\det(L_n) = 0 \iff \text{Goldbach est vrai pour } n.$$

Identique, mutatis mutandis, à la preuve de la proposition analogue pour  $K_n$  : conjuguer une matrice diagonale par une permutation préserve le caractère diagonal, en réarrangeant les coefficients ;  $(L_n)_{kk}$  est une somme de deux quantités  $\geq 0$ , donc nulle si et seulement si les deux le sont, c'est-à-dire (Proposition 1) si et seulement si  $k$  et  $n - k$  sont tous deux premiers ; le déterminant d'une matrice diagonale est nul si et seulement si l'un de ses coefficients l'est.

### 3 Vérification numérique

#### 3.1 Table détaillée pour $n = 20$

Petits premiers  $p < \sqrt{20} \approx 4,47 : \{2, 3\}$ .

$k$	$n - k$	$\nu(k, n)$	$\nu(n - k, n)$	somme	$k, n - k$ premiers ?
2	18	0	2	2	Non
3	17	0	0	0	<b>Oui</b>
4	16	1	1	2	Non
5	15	0	1	1	Non
6	14	2	1	3	Non
7	13	0	0	0	<b>Oui</b>
8	12	1	2	3	Non
9	11	1	0	1	Non
10	10	1	1	2	Non
11	9	0	1	1	Non
12	8	2	1	3	Non
13	7	0	0	0	<b>Oui</b>
14	6	1	2	3	Non
15	5	1	0	1	Non
16	4	1	1	2	Non
17	3	0	0	0	<b>Oui</b>
18	2	2	0	2	Non

Les zéros de la diagonale correspondent exactement aux couples de Goldbach (3, 17) et (7, 13) (chacun apparaissant deux fois par symétrie  $k \leftrightarrow n - k$ ). On a  $\det(L_{20}) = 0$ .

### 3.2 Vérification systématique

Le script `Ln_crible.py` (joint) vérifie, pour tout  $n$  pair de 4 à 2000 :

- $\det(L_n) = 0 \iff$  Goldbach est vrai pour  $n$  : **aucun désaccord** sur les 999 valeurs testées;
- aucun “faux positif” : tout coefficient diagonal nul correspond bien à un couple de nombres premiers (conséquence directe de la Proposition 1, donc ce point est en réalité démontré, pas seulement vérifié).

### 3.3 Gain en taille

$n$	taille de $G_n$ ( $\sim n^2/2$ )	taille de $M_n$	ratio
20	209	5	41,8
50	1 274	17	74,9
100	5 049	17	297,0
500	125 249	77	1 626,6
1 000	500 499	160	3 128,1
10 000	50 004 999	1 060	47 174,5
100 000	5 000 049 999	9 206	543 129,5

Le gain croît rapidement avec  $n$ , conformément à ce qu’on attend du passage d’une taille  $\Theta(n^2)$  à une taille  $\Theta(\sqrt{n}/\ln \sqrt{n})$  (somme des nombres premiers inférieurs à  $\sqrt{n}$ , par le théorème des nombres premiers).

## 4 Bilan comparatif

	$K_n$ (note précédente)	$L_n$ (cette note)
Information de primalité	$\delta(k, n) = \sigma_n(k) - k$	$\nu(k, n)$ , crible sur $p < \sqrt{n}$
Couplage additif	$J_n : k \mapsto n - k$	$J_n : k \mapsto n - k$ (inchangé)
Taille de la matrice sous-jacente	$\Theta(n^2)$	$\Theta(\sqrt{n}/\ln \sqrt{n})$
$\det = 0 \iff$ Goldbach( $n$ )	Oui (vérifié $n \leq 40$ )	Oui (vérifié $n \leq 2000$ )
Nature du résultat	reformulation équivalente	reformulation équivalente

## 5 Limites (inchangées, à répéter sans ambiguïté)

Comme pour  $K_n$ , et comme pour toute reformulation de Goldbach :

- $\det(L_n) = 0 \iff$  Goldbach pour  $n$  est une équivalence *exacte*, donc strictement aussi difficile à établir pour tout  $n$  que la conjecture elle-même.
- $L_n$  encode *exactement* le même crible élémentaire que le critère de Vella-Chemla (intersection des classes de non-congruence modulo les petits premiers), ni plus ni moins. Ce n’est pas un contournement du crible, c’est une réécriture spectrale du même crible.
- On a déjà établi (note du 19 juin 2026, échange sur le Snurpf) que ce crible élémentaire se heurte à deux obstacles distincts :

- l'explosion du terme d'erreur dans l'inclusion-exclusion brute (la somme alternée sur les  $2^{|\mathcal{P}(\sqrt{n})|}$  sous-ensembles de petits premiers accumule une erreur qui croît plus vite que la quantité estimée) ;
  - le *mur de parité* (Selberg, Bombieri) : tout crible construit à partir de poids ne dépendant que de la divisibilité par les petits premiers est, par construction, structurellement incapable de distinguer un nombre premier d'un nombre ayant exactement deux facteurs premiers.
- $L_n$  n'apporte donc *aucun* gain conceptuel sur ces deux obstacles : on a seulement réécrit le même objet ( $D(n)$  de Vella-Chemla) sous une forme spectrale (déterminant d'une matrice diagonale) plutôt que sous forme ensembliste (cardinal d'une intersection). Le gain est réel mais de nature calculatoire et pédagogique (taille de matrice, lien avec le formalisme spectral déjà construit pour  $G_n$  et  $K_n$ ), pas mathématique au sens de la difficulté de fond.

## Références

Cette note s'inscrit dans la suite directe de *Approche spectrale de la conjecture de Goldbach par opérateurs multi-circulants* (D. Vella- Chemla, révisée avec Mistral, juin 2026) et de sa note complémentaire en dialogue avec Claude (Anthropic). Elle doit également au document *Deux projections orthogonales*, qui contient la démonstration par Leila Schneps du critère de Vella-Chemla utilisé en Section 2.