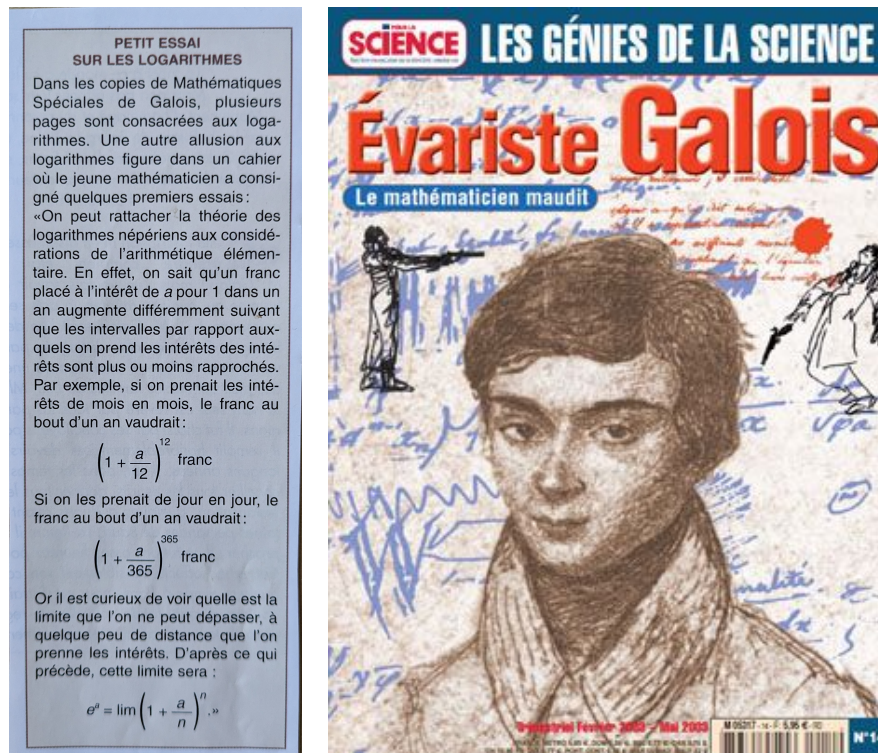


Petite digression inspirée par un encart extrait d'un magazine *Les génies de la science* consacré à Évariste Galois (Denise Vella-Chemla, février 2024)

Ci-dessous, l'image d'un encart extrait du numéro hors-série “*Les génies de la science*” consacré à Évariste Galois (numéro 14, trimestriel février-mai 2003) à côté de l'image de la couverture du magazine. Un internaute signale qu'à l'examen d'entrée à Polytechnique, Galois a été interrogé sur les logarithmes.



On trouve cette formule dans l'article Wikipédia en anglais consacré à la fonction exponentielle :

La fonction exponentielle surgit à chaque fois qu'une quantité grossit ou décroît à un rythme proportionnel à sa valeur courante. Une telle situation est celle des intérêts composés continûment, et en fait, c'est cette observation qui a amené Jacob Bernoulli en 1683 au nombre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

maintenant appelé e. Ultérieurement, en 1697, Johann Bernoulli a étudié le calcul de la fonction exponentielle.

Si un capital de 1 rapporte un intérêt au taux annuel de x composé mensuellement, alors l'intérêt rapporté chaque mois à la valeur courante est $\frac{x}{12}$, donc chaque mois, la valeur initiale 1 est multipliée par $\left(1 + \frac{x}{12}\right)$, et la valeur à la fin de l'année est

$$\left(1 + \frac{x}{12}\right)^{12}.$$

Si au lieu de cela, l'intérêt est composé chaque jour, cela devient

$$\left(1 + \frac{x}{365}\right)^{365}.$$

Faire grandir sans limite le nombre d'intervalles temporels par année amène à cette définition de l'exponentielle comme une limite :

$$\exp x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

donnée pour la première fois par Leonhard Euler.

On vérifie la formule de calcul de l'exponentielle (**exp**) de l'encart (attribuée à Bernoulli et retrouvée par Galois) par le programme python suivant :

```
import math
from math import exp, log

n = 100
print('la formule ')
while n < 10000000000000:
    print(pow(1+3/n,n))
    n = n*100
print('la valeur de exp ')
print(exp(3))
```

Le résultat de ce programme, illustrant le fait que la formule tend vers l'exponentielle, est :

```
la formule
19.218631980856298
20.07650227139987
20.08544653815843
20.085536099119246
20.08554189980412

la valeur de exp
20.085536923187668
```

On cherche une formule similaire pour le logarithme népérien (**ln**) sur la toile. On n'en trouve pas.

En utilisant le fait que les fonctions **exp** et **ln** sont des fonctions réciproques¹, on trouve une formule similaire à celle de l'exponentielle comme limite (il suffit de composer les fonctions appliquées successivement, mais “*en suivant les flèches qui associent les images aux antécédents à l'envers*”, et en inversant les calculs) ; cette formule devrait tendre vers le logarithme népérien.

On teste la formule de calcul du logarithme (**ln**) par le programme suivant :

```
import math
from math import exp, log

n = 100
print('la formule ')
while n < 1000000000000:
    print((-1+pow(3,1/n))*n)
    n = n*100
print('la valeur de log ')
print(log(3))
```

Le résultat de ce programme, illustrant le fait que la formule tend vers le logarithme népérien est :

```
la formule
1.104669193785357
1.0986726383266365
1.0986128922141347
1.0986122900291662
1.0986123122336267

la valeur de log
1.0986122886681098
```

Poursuivons : utilisons la forme d'écriture préfixe polonaise informatique² et écrivons abusivement des signes ∞ à la place des $n \rightarrow \infty$. On obtient :

$$\begin{aligned} \exp x &= \text{puiss} \left(\text{somme} \left(+1, \text{mult} \left(x, \frac{1}{\infty} \right) \right), \infty \right) \\ \ln x &= \text{mult} \left(\text{somme} \left(-1, \text{puiss} \left(x, \frac{1}{\infty} \right) \right), \infty \right) \end{aligned}$$

On voit une jolie correspondance entre les deux écritures : il suffit d'échanger **mult** et **puiss** d'une part et **+1** et **-1** d'autre part.

¹J'aimais bien les “moulinettes” que nous avait enseignées mon maître de CE2, M. Lavergne, des sortes d’“opérateurs” pour les petits !

²Rappel obtenu en interrogeant Chat-GPT : “En informatique, le fait d'écrire $\text{mult}(a,b)$ plutôt que $a \times b$, où l'opérateur est placé en premier, est souvent appelé une notation préfixe ou notation polonaise préfixe (NPP). Ce type de notation a été popularisé par le mathématicien polonais Jan Łukasiewicz, d'où le nom de *notation polonaise préfixe*.”

Il aurait fallu écrire :

$$\exp x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left((1) + \left(x \times \frac{1}{n} \right) \right)^n$$

$$\ln x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left((-1) + \left(x^{\frac{1}{n}} \right) \right) \times n$$

Annexe : démonstration de l'existence de la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ (source : traduction d'un extrait du livre de Richard Courant et Herbert Robbins *What is mathematics ? an elementary approach to ideas and methods*^{3 4})

Le nombre e a une place bien établie en mathématiques depuis la publication en 1748 de l'*Introductio in Analysin Infinitorum* d'Euler. Il fournit une excellente illustration de la façon dont le principe des séries monotones peut servir à définir un nouveau nombre réel. En utilisant l'abréviation

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n$$

pour le produit des n premiers entiers, on considère la séquence $a_1, a_2, a_3, \dots$ où

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Les termes a_n forment une suite croissante monotone, puisque a_{n+1} est l'addition de a_n et d'un incrément positif $\frac{1}{(n+1)!}$. De plus, les valeurs des a_n sont bornées supérieurement :

$$a_n < B = 3.$$

On a

$$\frac{1}{s!} = \frac{1}{2} \frac{1}{3} \dots \frac{1}{n} < \frac{1}{2} \frac{1}{2} \dots \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{s-1}},$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} a_n &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 1 + 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 3, \end{aligned}$$

en utilisant la formule *connue*⁵ pour la somme des n premiers termes d'une série géométrique. Par conséquent, par le principe des séries monotones, a_n doit approcher une limite lorsque n tend vers

³Seconde édition, revue par Ian Stewart, Oxford University Press, 1996 ; édition originale : 1941.

⁴référence retrouvée grâce au livre "*e, l'histoire d'un nombre*", d'Eli Naor (Princeton University Press).

⁵Ce mot est à remplacer par *fournie page 13* dans le livre de Courant et Robbins.

l'infini et on appelle cette limite e . Pour exprimer le fait que $e = \lim a_n$, on peut écrire e comme la "série infinie"

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \dots$$

Cette "égalité" avec des points de suspension en fin de ligne, est simplement une autre façon d'exprimer le contenu des deux assertions

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

et

$$a_n \rightarrow e \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Traduction de la démonstration du livre de Naor (l'appendice 2)

On montre d'abord que la série

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

converge vers une limite lorsque n tend vers l'infini. Cette somme croît à chaque terme ajouté, donc on a $S_n < S_{n+1}$ pour tout n , c'est-à-dire que la série S_n croît de façon monotone.

En commençant par $n = 3$, on a également $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n > 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^{n-1}$; par conséquent

$$S_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

pour $n = 3, 4, 5, \dots$. Maintenant, dans cette dernière somme, les termes à partir du second forment une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$. La somme de cette progression est

$$\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) < 2.$$

On a donc $S_n < 1 + 2 = 3$, ce qui montre que la série S_n est bornée supérieurement par 3 (c'est-à-dire que les valeurs de S_n n'excèdent jamais 3). On utilise maintenant un théorème bien connu d'analyse :

Toute série croissante, bornée, monotone tend vers une limite lorsque $n \rightarrow \infty$.

Donc S_n converge vers une limite S . La preuve montre également que S est compris entre 2 et 3.

Considérons maintenant la série $T_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$.

On va montrer que cette série converge vers la même limite que S_n . Par le théorème binomial,

$$\begin{aligned} T_n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{1}{2!} + \dots + \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n} \right) \cdot \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

Puisque l'expression dans chaque paire de parenthèses est inférieure à 1, on a $T_n \leq S_n$ (en fait, on a effectivement $T_n < S_n$ en commençant par $n = 2$). Donc la série T_n est aussi limitée supérieurement. De plus, T_n croît de façon monotone, parce qu'il suffit de remplacer n par $n + 1$ pour faire croître la somme. Donc T_n converge également vers une limite lorsque $n \rightarrow \infty$. On appelle cette limite T .

On montre maintenant que $S = T$. Puisque $S_n \geq T_n$ pour tout n , on a $S \geq T$. On va montrer qu'on a en même temps $S \leq T$. Soit $m < n$ un entier fixé. Les $m + 1$ premiers termes de T_n sont

$$1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2!} + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{m!}.$$

Puisque $m < n$ et puisque tous les termes sont positifs, cette dernière somme est moindre que T_n . Si on fait maintenant tendre n vers l'infini alors que m reste fixe, la somme va tendre vers S_m alors que T_n tendra vers T . On a donc $S_m \leq T$, et par conséquent, $S \leq T$. Puisqu'on a déjà montré que $S \geq T$, il en découle que $S = T$, qui est l'assertion qu'on souhaitait démontrer. La limite T , bien sûr, est le nombre e .