

Les sources primaires exactes de l’obstruction de parité, d’où vient l’expression, quelles sont les références de la preuve, et où Selberg parle-t-il de Goldbach en toutes lettres, Denise Vella-Chemla pilotant l’ia Claude, juillet 2026.

## 1 Le mécanisme mathématique : ICM 1950, p. 286-292

Référence complète : A. Selberg, *The general sieve method and its place in prime number theory*, Proc. Internat. Congress Math., Cambridge, Mass. 1950, vol. 1, p. 286-292, Amer. Math. Soc., 1952)<sup>1</sup>

Section 3 de l’article (p. 289-291) : Selberg construit deux ensembles, pour  $\xi = N^\alpha$  :

$$N'(\xi) = \#\{n \leq N : \text{aucun facteur premier} \leq \xi, \text{ nombre } \textit{impair} \text{ de facteurs premiers}\},$$

$$N''(\xi) = \#\{n \leq N : \text{aucun facteur premier} \leq \xi, \text{ nombre } \textit{pair} \text{ de facteurs premiers}\}.$$

Avec  $\alpha = 1/2$ ,  $\xi = N^{1/2}$ , il montre  $N''(\xi) = 1$  (le seul entier possible est 1 lui-même), tandis que  $N'(\xi)$  est de l’ordre de  $N/\log N$  (essentiellement les nombres premiers). Il montre ensuite que le crible, appliqué à ces deux ensembles, ne peut pas les distinguer : la borne obtenue pour  $N'(\xi)$  (les vrais nombres premiers) est nécessairement dégradée d’un facteur constant par rapport à l’ordre exact, exactement comme elle le serait pour  $N''(\xi)$  (qui vaut pourtant 1).

**Remarque** : [Le passage qui concerne directement ton centre d’intérêt] page 291, Selberg écrit explicitement que ce même argument s’applique **au problème des nombres premiers jumeaux et au problème de Goldbach**, les deux étant des cas particuliers de polynôme à deux facteurs irréductibles. Pour  $\xi = N^\alpha$ , il montre que la minoration obtenue par crible devient négative dès que  $\alpha > 1/(1 + e^{3/4})$  : le crible ne peut donc pas résoudre ces deux problèmes. Il donne aussi un exemple chiffré pour les jumeaux : la meilleure borne supérieure atteignable par crible est au moins 4 fois trop grande, et sa propre méthode (§2 de l’article) en donne une 8 fois trop grande — chiffres qui correspondent exactement à ceux mentionnés dans le document précédent sur le crible de Legendre-Selberg.

En 1950, le phénomène est donc *prouvé sur ton problème précis*, mais Selberg n’emploie pas encore le mot “parité”.

## 2 Le nom et l’énoncé général : *Lectures on Sieves*, p. 202-205

Référence complète : A. Selberg, *Lectures on Sieves*, dans *Collected Papers*, vol. II, Springer-Verlag, Berlin, 1991, section 18 “A historical digression, the parity principle and a further example”, p. 202-205.)

---

1. Voir <https://www.mathunion.org/fileadmin/ICM/Proceedings/ICM1950.1/ICM1950.1.ocr.pdf>.

Récit autobiographique : en 1946, en étudiant deux sommes pondérées  $Q_1(\lambda)$ ,  $Q_2(\lambda)$  liées à la fonction de Liouville, Selberg découvre qu’un certain rapport ne peut jamais descendre sous 4, quel que soit son choix de poids. En analysant pourquoi, il constate (p. 203) que ses sommes se répartissent *également* entre les entiers à nombre pair et impair de facteurs premiers — c’est l’observation fondatrice.

À la page 204, il donne le nom, en précisant lui-même ne l’avoir formulé que dans les années 1970 en préparant des cours (“*in the mid seventies, when I did lecture on some of this material*”) : **“the principle of parity”**. Énoncé (paraphrasé) : les ensembles d’entiers tendent à se répartir également selon la parité de leur nombre de facteurs premiers, sauf s’ils ont été spécifiquement construits avec un biais ; ce principe ne se démontre pas en toute généralité, mais sert de guide pour savoir ce qu’une approche par crible peut ou ne peut pas atteindre.

### 3 Chronologie

| Date      | Source                                 | Contenu                                                 |
|-----------|----------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| 1946      | <i>Lectures on Sieves</i> , p. 202-203 | Découverte empirique (récit rétrospectif)               |
| 1949/1950 | ICM Cambridge Mass., p. 289-291        | Preuve du mécanisme, appliquée explicitement à Goldbach |
| ~1975     | <i>Lectures on Sieves</i> , p. 204     | Nom “principle of parity” et énoncé général             |