

Faire des sommes (Denise Vella-Chemla 22.1.2022)

On calcule toutes les sommes différentes de 2 nombres premiers différents que l'on peut faire à partir de l'ensemble $E = \{7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$. Les voici.

$7 + 11 = 18$					
$7 + 13 = 20$	$(11 + 13)$				
$7 + 17 = 24$	$11 + 17 = 28$	$(13 + 17)$			
$7 + 19 = 26$	$(11 + 19)$	$13 + 19 = 32$	$(17 + 19)$		
$7 + 23 = 30$	$11 + 23 = 34$	$(13 + 23)$	$(17 + 23)$	$(19 + 23)$	
$7 + 29 = 36$	$11 + 29 = 40$	$13 + 29 = 42$	$17 + 29 = 46$	$19 + 29 = 48$	$23 + 29 = 52$

On a mis entre parenthèses les sommes égales à une somme déjà trouvée dans une colonne plus à gauche du tableau (les redondances).

Noter qu'on a "raté" les nombres pairs 22, 38, 44, 50, 52, 54 et 56, strictement compris entre 14, le double de 7, et 58, le double de 29. Les redondances posent problème : on souhaite calculer le nombre minimum de sommes différentes de 2 nombres premiers différents que l'on peut calculer.

Puisque $a < b$ et $c < d$ ont pour conséquence $a + c < b + d$, on peut, à partir des $k = 7$ nombres que contient l'ensemble E , fabriquer au moins $(k - 1) + (k - 2) = 2k - 3$ sommes différentes de 2 nombres premiers différentes suivantes :

$7 + 7 = 14$	
	$7 + 11 = 18$
$11 + 11 = 22$	
	$11 + 13 = 24$
$13 + 13 = 26$	
	$13 + 17 = 30$
$17 + 17 = 34$	
	$17 + 19 = 36$
$19 + 19 = 38$	
	$19 + 23 = 42$
$23 + 23 = 46$	
	$23 + 29 = 52$
$29 + 29 = 58$	

Entre 6 et $2p_k$, il y a $\frac{2p_k - 4}{2} = p_k - 2$ nombres pairs différents. On a (voir [1]) $p_k \cong k(\log k + \log \log k - 1)$ (éno

Si on disposait de davantage de sommes différentes de 2 nombres premiers différents que de nombres pairs à calculer, on obtiendrait que la conjecture de Goldbach est vraie par le principe des tiroirs. Mais on ne dispose pas de suffisamment de sommes différentes : $2k - 3 < k \left(\log k + \log \log k - \frac{1}{2} \right)$.

Référence

[1] J. B. Rosser et L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, dedicated to Hans Rademacher for his seventieth birthday, Illinois J. Math., Volume 6, Issue 1 (1962), 64-94.