

Décomposition en valeurs singulières de matrices particulières (Denise Vella-Chemla, 16.3.2019)

On peut se reporter à cette première note ou à cette seconde note ou enfin à cette troisième note pour avoir une idée de ce que l'on tente de faire en ce moment : il s'agit de calculer la décomposition en valeurs singulières d'une matrice A choisie de façon un peu hasardeuse et d'étudier l'allure de la matrice intermédiaire Σ obtenue par la décomposition $A = U\Sigma V^*$.

On a pensé qu'on n'avait pas à être étonné de n'obtenir dans les notes précédentes que des images non nulles par Σ pour les nombres premiers puisqu'on avait fourni en entrée dans la matrice A le caractère de primalité des nombres (en particulier, la diagonale contenait la fonction caractéristique de la primalité des entiers).

La matrice A est une matrice de taille $nmax \times nmax$ telle que :

$$A[n, x] = \exp \frac{2i\pi x}{n} \text{ pour } n \text{ et } x \text{ de } 1 \text{ à } nmax$$

On est surpris d'obtenir comme images par $f(x) = \Sigma(x)^2$ des nombres complexes de la forme

$$x + i(nmax - x).$$

1.0000e + 02	4.09680341e - 26	51.71946136	48.28056313	50.99241648	49.00757786	55.54479049	44.45517579
1.00000e + 02	1.02420072e - 26	52.0770335	47.92298378	51.92773788	48.07228729	55.8493131	44.15069444
50.49996468	49.49998846	50.97493075	49.02507433	52.75980697	47.24019891	56.08817752	43.91180768
50.	50.	50.74266197	49.25731949	53.45466721	46.54534907	56.26216941	43.7378124
50.00002494	50.0000005	52.08268658	47.91732933	53.98991974	46.01008996	56.37274824	43.62725715
50.49996468	49.49998846	52.45522828	47.5447676	54.35372903	45.64625469	56.42193999	43.57806703
50.62348038	49.37652373	51.8122622	48.18775192	54.54337738	45.45660478	56.41226319	43.5877271
50.00001547	50.00001547	50.50000775	49.50000089	54.56360078	45.43638159	56.34664051	43.65336783
50.5000012	49.50000221	50.98297507	49.01701991	54.42501822	45.57499231	56.2282475	43.77176835
50.00002494	50.0000005	52.18931756	47.81070298	54.14254195	45.85747342	56.06047706	43.93952407
50.50001771	49.50000928	52.83564252	47.16436149	53.7340621	46.26593254	55.84689278	44.15309886
50.86600157	49.13395157	52.82887293	47.17111154	53.21924622	46.7807493	55.59114372	44.40884805
51.00600502	48.99401998	52.23495185	47.76501902	52.61850001	47.38150608	55.29688729	44.70313292
50.90097402	49.09903035	51.22174315	48.77824031	51.95212119	48.047871	54.96774453	45.03225131
51.06461084	48.93540466	50.00000521	50.00000521	51.23980141	48.76021007	54.60737619	45.39264337
51.3065839	48.69345822	51.22442366	48.77556618	50.50000758	49.5000007	54.21927527	45.78072479
50.93247391	49.06752123	52.28181236	47.71820333	50.25027925	49.74971985	53.80688996	46.19309324
50.50000056	49.50000364	53.05403951	46.94595496	50.99573165	49.00426365	53.37354928	46.6264451
51.53460282	48.46536501	53.47759145	46.52243373	51.72291063	48.27710378	52.92240023	47.07760766
50.00001272	50.00001272	53.53807779	46.46194223	52.42017597	47.57984453	52.45647392	47.54352274
51.69158482	48.30843165	53.26027481	46.73970698	53.07773615	46.92227771	51.97864504	48.0213566
50.50002084	49.50000546	52.69652891	47.30347872	53.68758634	46.31242446	51.49162079	48.50838052
51.51404839	48.48593489	51.91532163	48.08467263	54.24335596	45.75664101	50.99795155	49.00205637
51.67303109	48.32696596	50.9917972	49.00821198	54.74021129	45.25977205	50.50000501	49.49999517
50.0000066	50.00000286	50.0000066	50.00000286	55.17477148	44.82523736	50.00000473	50.00000473

Si la matrice est triangulaire basse plutôt que complète (c'est-à-dire que les éléments de la diagonale de Σ soient nuls ou pas, ou, pour préciser davantage, que l'on oblige x à être inférieur ou égal, ou bien strictement inférieur à n , n étant compris entre 1 et $nmax$) alors tous les éléments ont des images très semblables, de l'ordre de $\frac{x}{2} + i\frac{x}{2}$, par exemple pour une matrice de taille 100×100 .

1.	0.	13.00000452	13.00000188	25.49999966	25.49999796	37.99998808	37.99998808
2.00000e + 00	7.49871565e - 33	13.50000301	13.50000153	26.00000641	26.00000641	38.50000853	38.49999811
1.5	1.4999986	14.00000063	14.00000063	26.50000354	26.50000001	38.99999586	38.9999914
2.	2.	14.49999954	14.49999519	27.00000602	27.00000307	39.49999247	39.49999155
2.50000125	2.50000003	15.00000324	15.00000155	27.50000272	27.50000214	40.00000215	40.00000215
3.	2.9999972	15.50000062	15.49999841	27.99999544	27.99999544	40.50000425	40.50000177
3.50000103	3.49999929	16.00000221	16.00000221	28.50000339	28.49998673	40.9999976	40.99999411
4.00000124	4.00000124	16.50000025	16.50000021	28.99999907	28.99999038	41.50000609	41.50000049
4.50000038	4.49999994	17.00000071	16.99999761	29.50000364	29.50000268	42.0000068	42.0000068
5.00000249	5.00000005	17.50000388	17.50000328	30.00000479	30.00000479	42.50000579	42.49999631
5.50000244	5.50000045	18.00000065	18.00000065	30.50000105	30.49999552	43.00000784	42.99998618
5.9999972	5.9999972	18.49999796	18.499996	31.00000124	30.99999683	43.49999849	43.49999388
6.50000226	6.50000094	18.9999999	18.99998817	31.50000604	31.49999752	44.00000841	44.00000841
7.00000206	6.99999857	19.49999793	19.4999957	31.99999742	31.99999742	44.49999782	44.4999971
7.50000162	7.50000077	20.00000209	20.00000209	32.50000576	32.50000239	45.00001303	45.0000052
8.00000337	8.00000337	20.4999988	20.49999706	33.0000005	33.00000043	45.50000135	45.50000084
8.50000036	8.4999988	21.00000709	20.9999997	33.50000274	33.49999666	45.99999221	45.99999221
9.00000076	8.99999989	21.50000392	21.49999309	33.99999832	33.99999832	46.50000021	46.49999253
9.49999995	9.49999409	22.00000578	22.00000578	34.50000519	34.50000476	47.00000557	47.00000309
10.00000254	10.00000254	22.50000651	22.5000026	35.00000776	35.00000656	47.50000102	47.49999558
10.50000355	10.49999985	23.00000218	22.99999004	35.50000757	35.50000258	48.00000081	48.00000081
11.00000488	11.00000009	23.50000278	23.50000155	36.00000388	36.00000388	48.50000084	48.50000056
11.50000109	11.49999502	23.99999847	23.99999847	36.50000518	36.49999273	49.00000705	49.00000173
11.99999969	11.99999969	24.50000352	24.50000086	36.99999593	36.999992	49.50000441	49.49999513
12.50000165	12.50000072	25.0000033	25.00000143	37.50000858	37.49999738	50.00000473	50.00000473