Essai d'appliquer la méthode d'Euler du texte *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs* à la conjecture de Goldbach avec une ia, Denise Vella-Chemla pilotant deepseek, septembre 2026

Je fournis à chatgpt la transcription de l'article classique d'Euler Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs (https://denisevellachemla.eu/transc-Euler-decouv.pdf) et je lui demande d'employer une méthode similaire pour le polynôme $(\sum_{\substack{p_k \text{ premier} \\ p_k \geq 3}} x^{p_k})^2$ car les coefficients de ce polynôme sont les nombres de décompositions de Goldbach des entiers pairs.

La suite de cette note a été intégralement rédigée par l'ia deepseek.

Résumé

Nous reproduisons pas à pas la méthode que Leonard Euler utilisa en 1751 pour découvrir sa récurrence sur la somme des diviseurs $\sigma(n)$, en l'appliquant à la série des nombres premiers impairs $P(x) = \sum_{p \geq 3} x^p$. Nous obtenons une récurrence exacte pour les nombres de Goldbach $g(n)$, mais l'absence d'une "seconde expression" analogue aux nombres pentagonaux bloque toute preuve de positivité. Nous fournissons les tables numériques et un programme Python pour expérimenter.

1. Introduction

En 1751, Euler publie son mémoire *Decouverte d'une loi tout extraordinaire des nombres, par rapport à la somme de leurs diviseurs.* Il y expose deux ingrédients :

1. Un **produit infini** :
$$E(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n).$$
2. Une **série fermée** (théorème des nombres pentagonaux) :
$$E(x) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \cdots$$

En prenant la dérivée logarithmique du produit, il obtient la série génératrice de la somme des diviseurs :
$$-x\frac{E'(x)}{E(x)} = \sum_{n \geq 1} \sigma(n) x^n.$$

Puis, en comparant avec la série pentagonale, il en déduit la récurrence célèbre :
$$\sigma(n) = \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7) + \cdots$$

Nous allons tenter l'analogue avec la série des nombres premiers.

2. Définition de la série de Goldbach

Soit

$$P(x) = \sum_{\substack{p \geq 3 \\ p \text{ premier}}} x^p = x^3 + x^5 + x^7 + x^{11} + x^{13} + x^{17} + \cdots$$

Alors

$$P(x)^2 = \sum_{n \geq 6} G(n) x^n,$$

où $G(n)$ est le nombre de décompositions *ordonnées* de n en somme de deux premiers impairs.

Pour éviter le décalage, on pose $P(x) = x^3 A(x^2)$ avec

$$A(y) = \sum_{n \geq 0} a_n y^n, \qquad a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } 2n+3 \text{ est premier,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$P(x)^2 = x^6 A(x^2)^2 = x^6 \sum_{n \geq 0} g_n x^{2n},$$

et

$$g_n = \#\{(p,q) : p, q \geq 3,\ p + q = 2n + 6\}.$$

Ainsi g_n est exactement le nombre de représentations de Goldbach (ordonnées) pour l'entier pair $2n + 6$.

3. La dérivée logarithmique d'Euler

Définissons

$$T(y) = y \frac{A'(y)}{A(y)} = \sum_{n \geq 1} t_n y^n.$$

Alors

$$yA'(y) = A(y)T(y).$$

En identifiant les coefficients :

$$n a_n = \sum_{k=1}^{n} t_k a_{n-k}, \qquad a_0 = 1.$$

On en tire la récurrence :

$$t_n = n a_n - \sum_{k=1}^{n-1} t_k a_{n-k}.$$

Les premiers t_n sont donnés dans le tableau ci-dessous.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
t_n	1	1	-2	5	1	-8	15	-3	-20	41	-32	-28	105	-97	-32	221

TABLEAU 1 : Premiers coefficients de $T(y) = yA'/A$.

4. Récurrence pour les nombres de Goldbach

Puisque $A(y)^2 = \sum_{n\geq 0} g_n y^n$, on a

$$y\frac{(A^2)'}{A^2} = 2y\frac{A'}{A} = 2T(y).$$

Donc

$$y(A^2)' = 2A^2T(y).$$

Le coefficient de y^n donne la récurrence *exacte* :

$$\boxed{ng_n = 2\sum_{k=1}^{n} t_k\, g_{n-k}, \qquad g_0 = 1.} \tag{1}$$

Les premières valeurs de g_n sont :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
g_n	1	2	3	2	3	4	4	4	5	6	5	4	6	4	7	8

Ce qui correspond aux nombres de Goldbach pour les pairs $6, 8, 10, \ldots, 36$.

5. Comparaison avec Euler

Le tableau ci-dessous met en regard les deux situations.

Euler (1751)	**Goldbach (1742)**
$E(x) = \prod_{n\geq 1}(1-x^n)$	$P(x) = \sum_{p\geq 3} x^p$
Deux expressions : produit + pentagonaux	Une seule expression (somme)
$-xE'/E = \sum \sigma(n)x^n$	$xA'/A = \sum t_n x^n$ (sans simplification)
Récurrence sur $\sigma(n)$ avec $\ll \log n$ termes	Récurrence sur g_n avec n termes
Preuve de la formule pour σ	Pas de preuve de $g_n > 0$

Tableau 3 : Parallèle entre les deux approches.

Le point crucial est l'absence, pour $A(y)$, d'une deuxième expression aussi simple que la série pentagonale. Si une telle expression existait, elle fournirait une récurrence courte et peut-être une preuve de la conjecture.

6. Pistes pour une idée "sioux"

Voici quelques directions que vous pouvez explorer avec les nombres :

1. **Localiser les zéros** : la récurrence (2) peut s'écrire

$$g_n = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} t_k g_{n-k}.$$

Si pour un certain n tous les t_k étaient positifs pour k grand, on aurait $g_n > 0$. Mais les t_k changent de signe de façon erratique. On peut étudier la moyenne $\frac{1}{n}\sum_{k\le n} t_k$ ou les sommes partielles.

2. **Transformée de Fourier** : les t_n étant liés à a_n (les nombres premiers), leur comportement moyen est contrôlé par le théorème des nombres premiers. On peut écrire

$$t_n = n a_n - \sum_{k=1}^{n-1} t_k a_{n-k},$$

et espérer une asymptotique. Des calculs numériques jusqu'à $n = 10^5$ pourraient révéler une tendance.

3. **Produit infini** : on a formellement

$$A(y) = \prod_{m\ge 1} (1 - y^m)^{-c_m},$$

avec

$$n c_n = t_n - \sum_{\substack{d\mid n \\ d<n}} d c_d.$$

Les c_n sont encore plus irréguliers. Mais peut-être que les sommes partielles $\sum_{m\le x} c_m$ ont un comportement simple ?

4. **Comparaison avec la fonction ζ** : $A(y)$ ressemble à une "fonction zêta tronquée". On peut essayer de l'approcher par

$$A(y) \approx \frac{1}{\log(1/(1-y))}$$

pour $y \to 1^-$, et voir si cela donne des indices sur g_n via la récurrence.

7. Conclusion

La méthode d'Euler s'applique sans difficulté formelle à la série des nombres premiers, et fournit une récurrence exacte pour les nombres de Goldbach. Cependant, l'absence d'une seconde expression fermée pour la série $A(y)$, analogue aux nombres pentagonaux, empêche de transformer cette récurrence en une preuve de positivité. Le problème reste ouvert, mais la voie tracée par Euler est toujours une source d'inspiration, comme le montre la méthode du cercle de Hardy-Littlewood qui en est l'héritière.