Une tentative, à la manière d'Euler du texte *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*, sur le polynôme $P(x) = (\sum_{p \text{ premier impair}} x^p)^2$ et la conjecture de Goldbach

Denise Vella-Chemla pilotant l'ia claude

Je fournis à chatgpt la transcription de l'article classique d'Euler Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs

https://denisevellachemla.eu/transc-Euler-decouv.pdf

et je lui demande d'employer une méthode similaire pour le polynôme $(\sum_{\substack{p_k \text{ premier} \\ p_k \geq 3}} x^{p_k})^2$ car les coefficients de ce polynôme sont les nombres de décompositions de Goldbach des entiers pairs.

La suite de cette note a été intégralement rédigée par l'ia claude.

1. Résumé

On examine le polynôme (formel)

$$P(x) = x^3 + x^5 + x^7 + x^{11} + \cdots = \sum_{p \text{ premier impair}} x^p,$$

dont le carré $P(x)^2$ a pour coefficient de x^n le nombre de décompositions de Goldbach ordonnées de n en somme de deux nombres premiers impairs (nombre de représentations de Goldbach). On cherche à reproduire, sur cet objet, la méthode par laquelle Euler tire de $\prod_n (1 - x^n)$ sa loi de récurrence pour la somme des diviseurs (*Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres, par rapport à la somme de leurs diviseurs*, 1751, § 9-12).

On montre que le procédé purement algébrique (dérivée logarithmique) se transpose sans difficulté, mais que l'ingrédient qui rendait la méthode d'Euler *féconde* - une seconde expression, close et parcimonieuse, du même objet - n'a pas d'analogue connu ici. On indique enfin le prolongement réel, historique, de cette même idée : la méthode du cercle de Hardy-Littlewood.

2. Le polynôme et le comptage de Goldbach

Soit

$$P(x) \;=\; \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p \geq 3}} x^p \;=\; x^3 + x^5 + x^7 + x^{11} + x^{13} + x^{17} + x^{19} + \cdots$$

Par définition du produit de deux séries formelles,

$$P(x)^2 = \sum_{n \geq 6} g(n)\, x^n, \qquad g(n) = \#\{(p,q) \;:\; p, q \text{ premiers impairs},\; p+q = n\}.$$

Le nombre $g(n)$ est le nombre de décompositions *ordonnées* de n en somme de deux nombres premiers impairs ; le nombre de décompositions non ordonnées vaut $g(n)/2$ si n n'est pas le double

d'un premier, et $(g(n)+1)/2$ sinon (le couple (p,p) n'étant compté qu'une fois).

La conjecture de Goldbach (cas pair) affirme que $g(n) \geq 1$ pour tout entier pair $n \geq 6$.

Quelques valeurs, à titre de vérification (comparer à la table du § 4 d'Euler pour R) :

n	6	8	10	12	14	16	18	20	30	60
$g(n)$	1	2	3	2	3	4	4	4	6	12

Contrairement au cas d'Euler, où $\sigma(n)$ (notée $\int n$ dans son mémoire) est *dissimulée* à l'intérieur du produit $\prod_n (1-x^n)$ et nécessite un artifice pour être mise au jour, $g(n)$ est ici *immédiatement visible* comme coefficient de $P(x)^2$: aucune manipulation n'est requise pour le faire apparaître. C'est une première différence structurelle avec le cas traité par Euler.

3. Pourquoi le procédé d'Euler ne s'applique pas directement au polynôme $P(x)$

La méthode des § 9-12 d'Euler repose sur le fait que $s(x) = \prod_n (1-x^n)$ est un *produit* : le logarithme le transforme en somme,

$$\log s(x) = \sum_n \log(1-x^n),$$

et la dérivée logarithmique $-x\,s'(x)/s(x)$ devient, après développement de chaque terme en série géométrique, la série génératrice de $\sigma(n)$ tout entière :

$$-\frac{x\,s'(x)}{s(x)} = \sum_n \frac{n\,x^n}{1-x^n} = \sum_{n\geq 1} \sigma(n)\,x^n.$$

Rien de tel n'est disponible pour $P(x)$, qui est une *somme* et non un produit : $\log P(x)$ n'a pas de développement utile, et la dérivée logarithmique de $P(x)$ ne conduit à rien d'exploitable. L'analogie casse ici, non par manque d'habileté, mais parce que la structure algébrique de $P(x)$ n'est pas celle d'un produit.

4. Le produit naturellement associé au polynôme $P(x)$

Il existe cependant un produit construit *à partir de* $P(x)$, tout comme le produit d'Euler est lié à la fonction de partition. Considérons la fonction génératrice des partitions en parts premières impaires (répétitions permises) :

$$F(x) \;=\; \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p\geq 3}} \frac{1}{1-x^p} \;=\; \sum_{n\geq 0} q(n)\,x^n,$$

où $q(n)$ est le nombre de façons d'écrire n comme une somme (non ordonnée, répétitions permises) de nombres premiers impairs. L'identité classique "somme de puissances $\leftrightarrow$ produit" donne

$$\log F(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{P(x^k)}{k},$$

qui relie directement F au polynôme $P(x)$ de départ.

En appliquant *exactement* le procédé du § 10 d'Euler (dérivée logarithmique, multiplication par x) à F :

$$x\,\frac{F'(x)}{F(x)} \;=\; \sum_{p\geq 3} \frac{p\,x^p}{1-x^p} \;=\; \sum_{n\geq 1} \beta(n)\,x^n,$$

$$\beta(n) \qquad := \sum_{p \text{ premier impair}\ p\mid n} p,$$

où $\beta(n)$ est la somme des diviseurs premiers impairs *distincts* de n (un cousin de $\sigma = R$, mais sans multiplicité). On en tire, comme Euler, une identité de coefficients :

Proposition 1. *Pour tout $n \geq 1$,*

$$n\,q(n) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \beta(k)\,q(n-k).$$

Démonstration. On a $xF'(x) = \sum_n n\,q(n)\,x^n$ d'une part, et d'autre part $xF'(x) = F(x)\cdot\sum_n \beta(n)x^n$ par l'identité ci-dessus, dont le coefficient de x^n vaut $\sum_{k=1}^{n}\beta(k)\,q(n-k)$ (produit de Cauchy). On identifie les deux coefficients. □

Table de vérification ($n = 0, \ldots, 20$) :

$$q(0),\ldots,q(20) = 1,0,0,1,0,1,1,1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,5,5,6,7.$$

Par exemple, pour $n = 10$ ($10 = 3{+}7 = 5{+}5$, donc $q(10) = 2$) : $n\,q(n) = 20$, et $\sum_{k=1}^{10}\beta(k)\,q(10{-}k) = 20$ également. La relation a été vérifiée numériquement pour tout $n \leq 20$; elle se démontre en toute rigueur, comme indiqué ci-dessus, sans recours à aucune induction empirique.

5. Le point crucial : ce qui manque, et pourquoi c'est important

Remarque : cette récurrence sur $q(n)$ est entièrement *démontrable*, par simple calcul formel sur les logarithmes - ce n'est pas une loi mystérieuse. Ce n'est d'ailleurs pas, à proprement parler, la découverte profonde d'Euler : le § 10 de son mémoire (le tour logarithmique) est un procédé général et rigoureux, que nous venons d'appliquer nous aussi sans difficulté. Sa découverte *extraordinaire* se trouve au § 9 : le fait empirique - vérifié par une longue induction, prouvé plus tard par Legendre puis rigoureusement par Franklin (1881) au moyen d'une involution combinatoire sur les partitions - que $\prod_n (1-x^n)$ possède une *seconde* expression, close et parcimonieuse : la série des nombres pentagonaux,

$$\prod_n (1-x^n) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \cdots$$

C'est la conjonction des deux expressions du *même* objet qui produit la récurrence sur $\sigma(n)$: l'une donne σ (via le § 10), l'autre donne le dénominateur parcimonieux qu'il faut lui associer pour obtenir une relation finie.

Pour les nombres premiers, on ne dispose que de la moitié de cette recette : le procédé logarithmique fonctionne (section précédente), mais **aucune seconde expression close et parcimonieuse** n'est connue pour $\prod_p (1 - x^p)$, ni pour $P(x)^2$ lui-même. Si une telle identité existait, elle fournirait vraisemblablement une prise directe sur la conjecture de Goldbach - et c'est précisément cette absence qui rend le problème ouvert depuis 1742.

Autrement dit, la démarche proposée suit très exactement le chemin d'Euler, mais bute sur l'ingrédient qui, chez lui, portait le nom de *nombres pentagonaux*, et qui, ici, demeure introuvable.

6. Le prolongement réel de cette idée

L'évaluation de $P(x)$ non pas comme série formelle mais sur le cercle unité, $x = e^{2\pi i\alpha}$ ($\alpha \in [0, 1)$), et l'étude de $P(x)^2$ par analyse de Fourier plutôt que par algèbre formelle, constitue le point de départ effectif de la *méthode du cercle* de Hardy et Littlewood. Cette méthode a permis à Vinogradov (1937) de résoudre le problème de Goldbach ternaire pour les grands nombres impairs, puis à Helfgott (2013) d'en donner une preuve complète pour tous les impairs > 5. Le problème binaire - celui que vise précisément $P(x)^2$ - demeure ouvert. La construction proposée n'est donc en rien naïve : c'est très exactement l'objet autour duquel s'est bâtie toute l'attaque moderne du problème, l'analyse sur le cercle unité prenant simplement la place de l'algèbre des séries formelles.