

Essai d'appliquer la méthode d'Euler du texte *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs* à la conjecture de Goldbach avec une ia, Denise Vella-Chemla pilotant chatgpt, septembre 2026

Je fournis à chatgpt la transcription de l'article classique d'Euler *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*

<https://denisevellachemla.eu/transc-Euler-decouv.pdf>

et je lui demande d'employer une méthode similaire pour le polynôme $(\sum_{\substack{p_k \text{ premier} \\ p_k \geq 3}} x^{p_k})^2$ car les coefficients de ce polynôme sont les nombres de décompositions de Goldbach des entiers pairs.

La suite de cette note a été intégralement rédigée par l'ia chatgpt.

1. Test de la méthode d'Euler appliquée au polynôme des nombres premiers

On considère

$$P(x) = \sum_{p>2} x^p = x^3 A(x^2),$$

où

$$A(y) = \sum_{n \geq 0} a_n y^n, \quad a_n = \begin{cases} 1, & 2n+3 \text{ premier,} \\ 0, & 2n+3 \text{ composé.} \end{cases}$$

Alors

$$P(x)^2 = x^6 A(x^2)^2.$$

Si

$$A(y)^2 = \sum_{n \geq 0} g_n y^n,$$

on a

$$g_n = [x^{2n+6}] P(x)^2$$

et donc

$$g_n = \#\{(p, q) : p, q > 2, p + q = 2n + 6\}.$$

Les coefficients g_n sont ainsi les nombres de représentations de Goldbach ordonnées, avec un décalage d'indice.

1.1. Dérivée logarithmique

L'analogue direct du procédé utilisé par Euler consiste à étudier

$$T(y) = y \frac{A'(y)}{A(y)} = \sum_{n \geq 1} t_n y^n.$$

La comparaison des coefficients dans

$$yA'(y) = A(y)T(y)$$

donne exactement

$$na_n = \sum_{k=1}^n t_k a_{n-k},$$

et, puisque $a_0 = 1$,

$$t_n = na_n - \sum_{k=1}^{n-1} t_k a_{n-k}.$$

Les premiers coefficients obtenus sont

$$\begin{aligned} T(y) = & y + y^2 - 2y^3 + 5y^4 + y^5 - 8y^6 + 15y^7 - 3y^8 \\ & - 20y^9 + 41y^{10} - 32y^{11} - 28y^{12} + 105y^{13} - 97y^{14} \\ & - 32y^{15} + 221y^{16} - 288y^{17} + 46y^{18} + 476y^{19} - 815y^{20} + \dots \end{aligned}$$

Un calcul exact jusqu'à $n = 1000$ donne :

$$t_n \neq 0 \quad (1 \leq n \leq 1000),$$

et tous les t_n calculés sont entiers.

Il n'apparaît pas de sous-ensemble parcimonieux analogue aux nombres pentagonaux généralisés d'Euler, ni de loi simple d'alternance des signes.

1.2. Application au carré et aux coefficients de Goldbach

Comme

$$A(y)^2 = \sum_{n \geq 0} g_n y^n,$$

on a

$$y \frac{(A^2)'(y)}{A(y)^2} = 2y \frac{A'(y)}{A(y)} = 2T(y).$$

La comparaison des coefficients donne

$$ng_n = 2 \sum_{k=1}^n t_k g_{n-k}.$$

Il s'agit d'une récurrence exacte pour les coefficients de Goldbach. Cependant les coefficients t_k sont eux-mêmes denses et très irréguliers. La récurrence ne fournit donc pas, à elle seule, un mécanisme de positivité des g_n .

Les premiers coefficients g_n sont

$$(g_0, \dots, g_{30}) = (1, 2, 3, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 5, 4, 6, 4, 7, 8, 3, 6, 8, 6, 7, 10, 8, 6, 10, 6, 7, 12, 5, 10, 12).$$

1.3. Décomposition en produit d'Euler formel

On peut également écrire formellement

$$A(y) = \prod_{m \geq 1} (1 - y^m)^{-c_m}.$$

Alors

$$y \frac{A'(y)}{A(y)} = \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{d|n} d c_d \right) y^n.$$

Les c_n sont donc déterminés récursivement par

$$n c_n = t_n - \sum_{\substack{d|n \\ d < n}} d c_d.$$

Les premiers exposants sont

$$(c_1, \dots, c_{30}) = (1, 0, -1, 1, 0, -1, 2, -1, -2, 4, -3, -2, 8, -8, -2, 14, \\ -17, 4, 25, -43, 19, 40, -91, 73, 46, -194, 208, 14, -368, 539).$$

Ces exposants deviennent rapidement denses et de grande amplitude. Ils ne présentent pas, dans le calcul effectué jusqu'à 1000, de structure analogue à celle qui rend le produit d'Euler classique exceptionnellement simple.

1.4. Conclusion du test

Le procédé logarithmique d'Euler fournit bien une identité exacte

$$n g_n = 2 \sum_{k=1}^n t_k g_{n-k},$$

mais le calcul jusqu'à 1000 ne révèle pas de structure arithmétique simple des coefficients t_k ou c_k comparable à la structure pentagonale d'Euler.

En particulier, ce calcul ne fournit pas actuellement de voie vers

$$g_n > 0$$

pour tout n .

Le résultat négatif est néanmoins précis : l'analogue direct des paragraphes de dérivation logarithmique d'Euler ne semble pas reproduire, pour la série des nombres premiers, le phénomène de simplification observé pour

$$\prod_{n \geq 1} (1 - x^n).$$