Deux observations sur le décomposant de Goldbach 3

autour d'une exploration numérique

Denise Vella-Chemla, et claude

22 juin 2026

Résumé

Ce document examine deux observations issues d'une exploration numérique de la conjecture de Goldbach, centrées sur le rôle du nombre premier 3 comme décomposant. La première partie explique, par un argument de congruence élémentaire, pourquoi un test particulier portant sur les décomposants $p \equiv 3 \pmod 4$ ne peut jamais s'appliquer simultanément aux deux décomposants d'un nombre pair $n \equiv 0 \pmod 4$: il s'agit d'un fait vrai mais *vide* (vacuously true), de nature purement arithmétique. La seconde partie étudie une dynamique récursive $x \mapsto (x-3)/2$ suggérée par cette même structure, en identifie la nature exacte (une simple lecture de la valuation 2-adique de $p+3$), et montre numériquement et formellement qu'elle est statistiquement indifférente à la primalité de p : cette piste ne peut donc pas, en l'état, fournir de contrainte exploitable pour Goldbach.

1 Préliminaires et notations

Pour un entier pair $n \geq 4$, on appelle *décomposition de Goldbach* de n tout couple (p, q) de nombres premiers tel que $n = p + q$, avec la convention $p \leq q$. On dit que le nombre premier 3 est un *décomposant de Goldbach (usuel)* de n s'il existe une décomposition de Goldbach de n de la forme $n = 3 + q$ avec q premier, c'est-à-dire si $n - 3$ est premier.

Le point de départ de ce document est différent : on s'intéresse à un test *plus fin*, appliqué non pas à n mais à chacun des décomposants p et q d'une décomposition de Goldbach de n donnée. Pour un entier impair $p \geq 3$, on définit :

$$\delta(p) = \frac{p-3}{2}. \tag{1}$$

Cette quantité est un entier si et seulement si p est impair, ce qui est toujours le cas ici. On dit que p est *testable* si $\delta(p)$ est lui-même pair, et dans ce cas on teste si $\delta(p) - 3$ est premier (on dira alors que "3 est dg de p", dg pour "décomposant de Goldbach" au sens de ce test particulier).

Remarque 1 *Ce test n'est pas équivalent au test usuel "$p - 3$ est premier". C'est un test à deux étages, portant sur une quantité dérivée de p et non sur p lui-même. C'est précisément cette construction, observée par l'auteur de l'exploration numérique à travers un programme Python, qui motive les deux parties qui suivent.*

2 Partie 1 — Pourquoi le test est structurellement vide pour $n \equiv 0 \pmod 4$

2.1 Caractérisation de la testabilité

Lemme 1 *Pour p impair, p est testable si et seulement si $p \equiv 3 \pmod 4$.*

Écrivons $p = 2m + 1$ avec $m \geq 1$. Alors $\delta(p) = \dfrac{p-3}{2} = m - 1$. On a :

$$\delta(p) \text{ pair} \iff m - 1 \text{ pair} \iff m \text{ impair}.$$

Or m impair signifie $p = 2m + 1$ avec $m = 2j + 1$, soit $p = 4j + 3$, c'est-à-dire $p \equiv 3 \pmod 4$. Réciproquement, si $p \equiv 1 \pmod 4$, alors m est pair et $\delta(p)$ est impair, donc p n'est pas testable. Ce lemme confirme et formalise l'observation graphique initiale : la décomposition $p = 2 \cdot (\text{pair}) + 3$ correspond exactement à $p \equiv 3 \pmod 4$, et $p = 2 \cdot (\text{impair}) + 3$ correspond à $p \equiv 1 \pmod 4$. La distinction visuelle proposée (facteur 2 emboîté deux fois) recouvre donc, bit pour bit, la distinction classique modulo 4 : ce n'est pas une simplification au sens où l'information serait moindre, mais une renormalisation équivalente.

2.2 L'obstruction arithmétique

Proposition 1 *Soit n un entier pair et (p, q) une décomposition de Goldbach de n avec p, q impairs. Si $n \equiv 0 \pmod 4$, alors p et q ne peuvent pas être simultanément testables.*

Supposons par l'absurde que p et q soient tous deux testables. Par le Lemme 1, cela signifie $p \equiv 3 \pmod 4$ et $q \equiv 3 \pmod 4$. Alors :

$$n = p + q \equiv 3 + 3 = 6 \equiv 2 \pmod 4.$$

Ceci contredit l'hypothèse $n \equiv 0 \pmod 4$.

Théorème 1 (Vacuité du test pour $n \equiv 0 \pmod 4$) *Pour tout $n \equiv 0 \pmod 4$, et pour toute décomposition de Goldbach (p, q) de n, il n'existe aucune situation où le programme affiche simultanément "3 dg du petit" et "3 dg du grand". Plus précisément, le test à deux étages ne s'applique jamais aux deux décomposants en même temps : l'énoncé "si 3 est dg du petit alors 3 n'est pas dg du grand" est vrai pour $n \equiv 0 \pmod 4$, mais il l'est par absence de cas testable des deux côtés, et non parce qu'une exclusion mutuelle réelle entre les propriétés de primalité serait à l'œuvre.*

Conséquence immédiate de la Proposition 1 : si p et q ne sont jamais tous deux testables, alors a fortiori jamais le test n'affiche "dg" des deux côtés à la fois.

Remarque 2 (Statut logique de l'énoncé) *Le Théorème 1 est un énoncé vrai mais logiquement vide : sa forme est "pour tout x vérifiant $P(x)$, $Q(x)$", où l'ensemble des x vérifiant $P(x)$ est vide. Un tel énoncé est vrai par construction, indépendamment du contenu de Q. Il ne révèle donc aucune propriété profonde sur les nombres premiers ; il révèle une propriété de congruence modulo 4 sur les entiers impairs en général.*

2.3 Le cas $n \equiv 2 \pmod 4$: le test n'est pas une loi

Pour $n \equiv 2 \pmod 4$, la situation est strictement différente : l'obstruction de la Proposition 1 disparaît.

Proposition 2 *Pour tout $n \equiv 2 \pmod 4$ avec $n \geq 6$, il existe au moins un couple d'entiers impairs (p, q) avec $p + q = n$ et $p \equiv q \equiv 3 \pmod 4$.*

Il suffit de prendre $p = 3$ (qui vérifie $3 \equiv 3 \pmod 4$) et $q = n - 3$. Comme $n \equiv 2 \pmod 4$, on a $q = n - 3 \equiv 2 - 3 \equiv -1 \equiv 3 \pmod 4$. Le couple $(3, n - 3)$ convient (indépendamment de la primalité de $n - 3$, il s'agit ici d'un résultat purement arithmétique sur les congruences).
Une vérification numérique exhaustive jusqu'à $n = 5000$ confirme que, pour les couples (p, q) *premiers* sommant à un $n \equiv 2 \pmod 4$ et tous deux testables, l'énoncé "si 3 est dg du petit alors 3 n'est pas dg du grand" est en réalité **faux** dans environ 24% des cas testables. Le plus petit contre-exemple est :

$$n = 42 = 19 + 23, \qquad \delta(19) - 3 = 5 \text{ (premier)}, \qquad \delta(23) - 3 = 7 \text{ (premier)}.$$

Le tableau 1 liste les premiers contre-exemples.

n	p (petit)	q (grand)
42	19	23
50	19	31
54	23	31
62	19	43
66	19	47
66	23	43
70	23	47
74	31	43

Table 1 – Premiers contre-exemples à l'énoncé d'exclusion mutuelle, pour $n \equiv 2 \pmod 4$.

Remarque 3 *Ce contraste est important : la propriété perçue ("quand le petit a 3 comme dg, le grand ne l'a pas") tient à 100% pour $n \equiv 0 \pmod 4$ exactement parce qu'elle ne peut jamais être mise à l'épreuve, et tient seulement à 76% environ pour $n \equiv 2 \pmod 4$, là où elle peut réellement être mise à l'épreuve. La très forte présence visuelle du motif dans la sortie du programme (pour les deux types de n confondus, puisqu'on lit la sortie linéairement) explique pourquoi l'impression d'une loi générale s'est formée.*

3 Partie 2 — La descente $x \mapsto (x - 3)/2$: structure réelle et indépendance à la primalité

3.1 La récursion et son interprétation

L'opération $\delta(p) = (p-3)/2$ invite naturellement à itérer : on peut se demander si $\delta(p)$ est lui-même testable, et ainsi de suite. Ceci définit une suite par récurrence descendante :

$x_0 = p, \qquad x_{i+1} = \dfrac{x_i - 3}{2}$ tant que $x_i - 3 \geq 0$ et $x_i \equiv 3 \pmod 4$ (i.e. tant que la division est entière et que

On note $L(p)$ le nombre de termes de cette suite avant blocage (la *longueur de descente*).

Lemme 2 (Linéarisation) *Pour tout i tel que x_{i+1} est défini, on a :*

$$x_i + 3 = 2\,(x_{i+1} + 3).$$

Par définition, $x_{i+1} = \dfrac{x_i - 3}{2}$, donc $2x_{i+1} = x_i - 3$, donc $x_i = 2x_{i+1} + 3$, donc $x_i + 3 = 2x_{i+1} + 6 = 2(x_{i+1} + 3)$.

Théorème 2 (Identification avec la valuation 2-adique) *Soit p un entier impair et soit $v_2(p+3)$ la valuation 2-adique de $p+3$ (le plus grand entier k tel que $2^k \mid p+3$). Alors la longueur de descente $L(p)$ vérifie :*

$$L(p) = v_2(p+3) + 1.$$

Par le Lemme 2, la suite $(x_i + 3)_i$ est obtenue à partir de $p+3$ par divisions successives par 2 : $x_i + 3 = (p+3)/2^i$, tant que ce quotient reste entier, ce qui équivaut à $i \leq v_2(p+3)$. La suite (x_i) contient donc les termes $x_0, x_1, \ldots, x_{v_2(p+3)}$, ce qui donne exactement $v_2(p+3)+1$ termes.

Remarque 4 *Ce théorème dévoile la nature exacte de la structure perçue intuitivement comme "fractale, à base de 2 et de 3" : il s'agit très précisément de la lecture, étage par étage, des bits de poids faible de l'écriture binaire de $p+3$. Le "3" n'intervient que comme décalage (translation) ; la structure auto-similaire vient uniquement du système binaire et de la division par 2, qui est bien une dynamique fractale au sens propre (auto-similarité par changement d'échelle d'un facteur 2), mais qui est indépendante du contenu arithmétique (primalité) du nombre étudié.*

3.2 Indépendance statistique vis-à-vis de la primalité

La question naturelle est de savoir si le fait que p soit premier influence la distribution de $L(p)$, ou de manière équivalente de $v_2(p+3)$. L'intuition fractale suggérerait une telle interaction ; nous montrons qu'il n'y en a pas.

Proposition 3 (Distribution de $v_2(p+3)$ sur les entiers impairs) *Pour p impair uniformément distribué, $v_2(p+3)$ suit (exactement, par un argument de comptage direct) une loi géométrique sur $\{1, 2, 3, \ldots\}$ de paramètre $1/2$:*

$$\Pr[v_2(p+3) = k] = \frac{1}{2^k}.$$

Comme p est impair, $p+3$ est pair, donc $v_2(p+3) \geq 1$. Parmi les entiers pairs, exactement une proportion $1/2$ a une valuation 2-adique égale à 1 (ceux $\equiv 2 \pmod 4$), une proportion $1/4$ a une valuation égale à 2 (ceux $\equiv 4 \pmod 8$), et plus généralement une proportion $1/2^k$ a une valuation égale à k, par un argument de comptage standard sur les classes résiduelles modulo 2^{k+1}.

Théorème 3 (Indépendance empirique à la primalité) *Pour N suffisamment grand, la distribution empirique de $v_2(p+3)$ restreinte aux nombres premiers $p < N$ coïncide, à l'erreur d'échantillonnage près, avec la distribution géométrique de paramètre $1/2$ — c'est-à-dire avec la distribution observée sur l'ensemble de tous les entiers impairs.*

$k = v_2(p+3)$	fréquence théorique $1/2^k$	% parmi tous les impairs	% parmi les premiers
1	50,00%	50,00%	50,08%
2	25,00%	25,00%	24,83%
3	12,50%	12,50%	12,50%
4	6,25%	6,25%	6,22%
5	3,13%	3,13%	3,12%
6	1,56%	1,56%	1,65%
7	0,78%	0,78%	0,78%

TABLE 2 – Distribution de $v_2(p+3)$, sur les entiers impairs $p < 200\,000$ contre les seuls nombres premiers $p < 200\,000$.

[Vérification numérique] Un calcul direct sur tous les entiers impairs $p < 200\,000$ (soit 99 999 valeurs, dont 17 983 premières) donne les fréquences du Tableau 2, qui concordent avec la loi géométrique $1/2^k$ à moins de 0,1 point de pourcentage près pour les premières valeurs de k, et restent cohérentes (à l'erreur d'échantillonnage attendue) sur les valeurs plus rares.

Remarque 5 (Pourquoi ce résultat était attendu) *Ce résultat n'est pas surprenant a posteriori : la quantité $v_2(p+3)$ ne dépend que de la classe de p modulo des puissances de 2 arbitrairement grandes, c'est-à-dire d'une information purement "2-adique". Le théorème de Dirichlet sur les nombres premiers en progression arithmétique garantit precisément que les nombres premiers se répartissent de façon équidistribuée dans les classes de congruence modulo 2^k (pour la partie première à 2, ce qui est automatique ici), de sorte qu'aucune classe de valuation 2-adique de $p+3$ n'est favorisée par la primalité. La récursion "-3 puis $/2$" est donc, par construction, une opération aveugle à la primalité : elle ne fait que déplisser les bits binaires d'un décalage constant de p, sans jamais réinjecter la moindre information sur les diviseurs impairs de p.*

3.3 Conséquence pour le programme heuristique de Goldbach

Remarque 6 (Conclusion de la Partie 2) *Empiler des étages supplémentaires de la récursion $x \mapsto (x-3)/2$, et tester la primalité au dernier étage atteint, ne produit pas un test plus discriminant pour repérer un comportement structurel des décomposants de Goldbach. À chaque étage, la quantité testée pour la primalité (x_i) change, mais le choix de l'étage auquel on s'arrête ($L(p)$) est lui-même une fonction purement 2-adique de p, sans rapport avec la primalité de p ni d'aucun des x_i intermédiaires. Toute structure "fractale" perçue dans les données est donc une structure réelle de l'arbre binaire des entiers décalés de 3, mais elle ne porte aucune information supplémentaire sur la distribution des nombres premiers eux-mêmes : elle ne peut donc pas, en l'état, constituer le germe d'une démonstration de la conjecture de Goldbach ou d'un résultat apparenté.*

3.4 Une tentative supplémentaire : corrélation entre $v_2(p+3)$ et $v_2(q+3)$

On peut se demander si, à défaut d'aider directement, la structure 2-adique pourrait au moins révéler une corrélation entre les deux décomposants p et q d'une même décomposition de Goldbach $n = p + q$, indépendamment de l'hypothèse de Riemann (généralisée ou non). Une exploration numérique sur $n = 100\,000$ fait apparaître une corrélation très nette entre $v_2(p+3)$ et $v_2(q+3)$:

en particulier, le cas $v_2(p+3) = v_2(q+3)$ n'apparaît jamais parmi les décompositions premières testées.
Cette corrélation s'avère toutefois être, une fois encore, un artefact purement arithmétique de l'addition, sans rapport avec la primalité.

Lemme 3 (Inégalité ultramétrique pour v_2) *Soient x, y deux entiers non nuls. Si $v_2(x) \neq v_2(y)$, alors $v_2(x+y) = \min(v_2(x), v_2(y))$. Si $v_2(x) = v_2(y)$, alors $v_2(x+y) \geq v_2(x) + 1$.*

Proposition 4 *Soit n un entier pair fixé, et p, q deux entiers impairs quelconques (premiers ou non) tels que $p + q = n$. Posons $a = v_2(p+3)$ et $b = v_2(q+3)$. Alors $\min(a, b) \leq v_2(n+6)$, avec égalité stricte de a et b possible seulement dans des cas exceptionnels liés à des retenues (carry) dans l'addition binaire.*

Il suffit d'appliquer le lemme à $x = p + 3$ et $y = q + 3$, en remarquant que $x + y = n + 6$.

Remarque 7 *Cette propriété est valable pour tous les couples d'entiers impairs sommant à n, qu'ils soient premiers ou non : une vérification numérique sur des couples d'entiers tirés au hasard (sans aucune contrainte de primalité) reproduit exactement le même motif de corrélation. La structure 2-adique de $p + 3$ est donc entièrement déterminée par les lois de l'addition dès que $n = p + q$ est fixé, et le filtre "être premier" n'a, par construction, aucune prise sur cette structure. Ceci confirme, sous un angle différent et indépendamment de toute hypothèse de Riemann, la conclusion de la Section 3.3 : la récursion 2-adique ne peut révéler aucune information spécifique aux nombres premiers, ni aider à contraindre la conjecture de Goldbach.*

4 Conclusion générale

Les deux parties de ce document illustrent un même phénomène méthodologique sous deux formes différentes : une observation numérique frappante ("le test ne montre jamais deux fois dg pour $n \equiv 0 \pmod 4$" ; "la structure de descente semble fractale et profonde") se révèle, après analyse, être une conséquence directe et entièrement explicable de la combinatoire des congruences modulo 2 et 4, sans lien démontrable avec la distribution des nombres premiers. Ce n'est pas un résultat négatif au sens d'un échec : isoler précisément la part "purement arithmétique" (vraie pour tout entier, premier ou non) de la part "spécifique aux premiers" dans une observation empirique est une étape utile et nécessaire de tout travail exploratoire sur la conjecture de Goldbach, en ce qu'elle permet d'éviter d'investir du temps de preuve dans des structures qui, par construction, ne peuvent rien dire des nombres premiers.