

Possibilité de trouver un seuil pour le produit de sinus caractérisant les décomposants de Goldbach d'un nombre pair, Denise Vella-Chemla pilotant l'ia claudia, septembre 2026

Je fournis à l'ia claudia le fichier suivant <https://denisevellaclaudia.eu/sinusoidia-dvc-20260823.pdf> et lui fournis le prompt suivant :

“Je reviens vers toi ici à cause d’une vidéo que j’écoute sur l’histoire de l’IA par Yves Meyer¹. Il nous rappelle le fait que les synapses s’activent selon une fonction seuil. Je joins mon article sur les produits de sinus. Tu vois que les décomposants de Goldbach sont premiers, donc divisibles par aucun premier inférieur à $\sqrt{n}$ et leur complémentaire aussi, donc il faut multiplier un premier produit de sinus pour tester la primalité de p (dans ce produit il y a autant de facteurs que de nombres premiers impairs inférieurs à $\sqrt{n}$ par un second produit de sinus pour tester la primalité de $n - p$ (il y a le même nombre de facteurs dans le second produit de sinus que dans le premier). Si on utilise cet idée de seuil : quel est le seuil que le produit total doit dépasser pour qu’on ait un décomposant de Goldbach, un tel seuil existe-t-il et est-il calculable parce que tu vois qu’on peut maximiser un produit de différentes manières : avec un petit nombre fois un très gros nombre ou bien avec un nombre moyen fois un nombre moyen. Pourrais-tu m’aider sur ce coup-là : voir s’il y aurait quelque chose à tirer de l’idée de seuil pour le produit de sinus.”

1. Cadre

On reprend la construction de l’article *Des sinusoides aux valeurs propres, chercher une approche spectrale de la conjecture de Goldbach* (D. Vella-Chemla, août 2026) :

$$a(n) = \prod_{p \leq \sqrt{n}} \sin^2\left(\frac{\pi n}{p}\right), \quad a(n) > 0 \iff n \in \mathcal{P}.$$

Pour N pair et x candidat, on pose $k = k(N)$ le nombre de premiers impairs $\leq \sqrt{N}$, et

$$P(x) = a(x) a(N - x),$$

produit total de $2k$ facteurs dans $[0, 1]$ (chaque produit $a(x)$, $a(N - x)$ en comportant k).

La question posée, inspirée d’une remarque d’Yves Meyer sur les fonctions seuil des synapses : existe-t-il un seuil τ (calculable) tel que

$$P(x) > \tau \implies x \text{ et } N - x \text{ premiers},$$

et un tel seuil favorise-t-il les décompositions déséquilibrées (“petit $\times$ gros”) ou équilibrées (“moyen $\times$ moyen”) ?

1. Voir ici <https://www.youtube.com/watch?v=Fs0ZeSS7eZ4>.

2. Ordre de grandeur typique de $a(x)$

La quantité pertinente n'est pas la moyenne arithmétique de $\sin^2 \theta$ (qui vaut $1/2$) mais sa moyenne *géométrique*, puisqu'on multiplie des facteurs :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln \sin^2 \theta d\theta = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln \sin \theta d\theta = -2 \ln 2,$$

en utilisant l'intégrale classique $\int_0^\pi \ln \sin \theta d\theta = -\pi \ln 2$. Donc la valeur "typique" d'un facteur $\sin^2 \theta$ est

$$\exp(-2 \ln 2) = \frac{1}{4},$$

et pour un x générique,

$$a(x) \sim 4^{-k}, \quad P(x) \sim 4^{-2k}.$$

Par le théorème des nombres premiers, $k = \pi(\sqrt{N}) \sim \frac{2\sqrt{N}}{\ln N}$, d'où

Proposition 1. *Pour x générique parmi les entiers premiers avec $N - x$ également premier,*

$$P(x) \sim \exp\left(-c \frac{\sqrt{N}}{\ln N}\right), \quad c = 8 \ln 2 + o(1).$$

Autrement dit, **même sur un vrai décomposant de Goldbach**, la valeur de $P(x)$ tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$. Un seuil constant, indépendant de N , ne peut donc pas exister : au-delà d'un certain N , aucune valeur de $P(x)$, y compris sur les vrais décomposants, ne le dépasserait plus.

3. Vérification numérique

Pour $N = 200\,000$ ($k = 85$ premiers impairs $\leq \sqrt{N}$) :

x	type	$P(x)$
67	très déséquilibré	9.5×10^{-106}
99 871 ($\approx N/2$)	équilibré	3.0×10^{-90}

Estimation théorique : $\ln(4^{-2k}) = -4k \ln 2 \approx -235.6$, cohérente avec les valeurs observées ($\ln P(x) \in [-242, -206]$).

4. L'intuition AM-GM ne s'applique pas telle quelle

Proposition 2. *Pour x fixé petit devant $\sqrt{N}$ et p un grand premier $\leq \sqrt{N}$, on a $x/p \rightarrow 0$, donc*

$$\sin^2\left(\frac{\pi x}{p}\right) \approx \left(\frac{\pi x}{p}\right)^2 \rightarrow 0$$

pour tous les grands p simultanément - pas seulement en moyenne.

Un petit x plombe donc systématiquement le produit sur toute la gamme des grands premiers, alors qu'un $x \approx N/2$ n'a pas ce biais : ses résidus $x \bmod p$ se comportent génériquement pour chaque p . C'est exactement ce que montre le tableau numérique ci-dessus : $x = 67$ donne un produit environ 10^{16} fois plus petit que $x \approx N/2$.

Remarque : Les décompositions équilibrées sont donc structurellement favorisées par cette construction - contrairement à l'intuition AM-GM naïve appliquée à un produit de deux facteurs de taille x et $N - x$ - mais *toutes* les valeurs, équilibrées ou non, tendent vers 0.

5. Un seuil existe-t-il, est-il calculable ?

Un seuil existe trivialement : l'ensemble des x testés est fini, donc $\min\{P(x) : x, N - x \in \mathcal{P}\}$ existe et est strictement positif. Mais :

1. ce seuil dépend de N et décroît comme $\exp(-c\sqrt{N}/\ln N)$ - ce n'est pas une constante calculable une fois pour toutes ;
2. pour le *calculer* il faudrait déjà savoir quels x sont des décomposants de Goldbach pour N - la définition est circulaire et n'apporte aucune prise nouvelle sur le problème.

6. La limite de l'analogie avec les synapses

Dans un neurone à seuil (McCulloch-Pitts), l'état "actif" a une amplitude robuste, bornée, indépendante de la taille de l'entrée. Ici l'état "actif" (x et $N - x$ premiers) *n'a pas* d'amplitude robuste : il tend vers 0 lui aussi, seulement moins vite que l'état "inactif" (exactement 0 dès qu'un facteur s'annule). Ce n'est pas un écart d'échelle entre deux niveaux stables, mais un écart de *vitesse de décroissance* entre deux suites qui tendent toutes les deux vers 0 - ce qui casse la métaphore du seuil au sens propre.

7. Ce qui pourrait se sauver de l'idée

Le véritable objet à contrôler n'est pas un terme $P(x)$ individuel mais la somme

$$G(N) = \sum_x P(x)$$

sur $\sim N/2$ termes, chacun minuscule. C'est la difficulté déjà identifiée en § 12-13 de l'article source : il faut montrer que les phases des Λ_k^2 ne s'annulent pas en moyenne - c'est le clivage arcs majeurs / arcs mineurs de la méthode du cercle, pas un seuil ponctuel.

Une piste plus prometteuse consisterait à travailler en logarithme : poser

$$\ell(x) = \sum_{p \leq \sqrt{N}} 2 \ln \left| \sin \left(\frac{\pi x}{p} \right) \right|$$

(somme au lieu de produit), étudier sa distribution sur les x - en gros une marche à k pas dont les increments sont corrélés via le théorème des restes chinois - et chercher si $G(N) > 0$ se lit

comme une déviation de grande somme plutôt que via un seuil par terme. Cela revient toutefois à retrouver, sous une autre forme, le contrôle des sommes exponentielles déjà requis par la méthode du cercle, plutôt qu'un raccourci vers celui-ci.