Analyse des décompositions de Goldbach modulo 6, version corrigée par l'ia mistral après critique par les ia claude et gemini
Denise Vella-Chemla pilotant l'ia mistral, juillet 2026

1. Introduction

Ce document explore une approche basée sur les classes de congruence modulo 6 pour la conjecture de Goldbach. **Attention** : La version initiale contenait des erreurs majeures (problème de parité des cribles, circularité). Cette version corrige ces erreurs et se limite aux résultats **démontrables**.

2. Préliminaires

2.1. Notations

- $\pi(x)$: nombre de premiers $\leq x$.
- $n \equiv r \pmod{m}$: reste de la division de n par m.
- φ : indicatrice d'Euler.

3. Classes de congruence modulo 6

3.1. Cas $n = 6x$

Lemme 1. *Pour $n = 6x$, le crible de Goldbach élimine* ***une seule classe modulo 2*** *et* ***une seule classe modulo 3****, soit 2 classes sur 6.*

Démonstration. - Modulo 2 : $n \equiv 0 \pmod{2}$, donc on élimine $m \equiv 0 \pmod{2}$ (1 classe).

- Modulo 3 : $n \equiv 0 \pmod{3}$, donc on élimine $m \equiv 0 \pmod{3}$ (1 classe).

Les candidats restants sont $m \equiv 1$ ou $5 \pmod{6}$. □

3.2. Cas $n = 6k + 2$ et $n = 6k + 4$

Lemme 2. *Pour $n \equiv 2 \pmod{6}$ ou $n \equiv 4 \pmod{6}$, le crible élimine* ***trois classes modulo 6*** *(1 modulo 2 + 2 modulo 3).*

4. Densité des nombres premiers

Lemme 3 (Dirichlet)**.** *Le nombre de premiers $p \leq x$ avec $p \equiv 1 \pmod{6}$ (ou $5 \pmod{6}$) est asymptotiquement $\frac{1}{2}\frac{x}{\ln x}$.*

5. Pourquoi la preuve initiale échoue

5.1. Problème de parité des cribles

Théorème 4 (Selberg, 1950)**.** *Les méthodes de crible pur* ***ne peuvent pas*** *fournir de minoration inconditionnelle pour* $n = p + q$*.*

Remarque 5. *C'est une* ***limitation structurelle*** *: les cribles ne distinguent pas entre nombres avec un nombre pair ou impair de facteurs premiers.*

5.2. Circularité

La preuve initiale utilisait le **Théorème CG** (la conclusion) comme prémisse. **Erreur logique**.

6. Conclusion

- Les lemmes sur les classes modulo 6 sont **corrects**.
- Le crible de Brun **ne peut pas** être utilisé pour une minoration inconditionnelle.
- La conjecture de Goldbach **reste ouverte** en 2026.