

Lecture structurée de SGA 4 Théorie des topos - Tomes 1 et 2

But de cette synthèse

SGA 4 construit progressivement une théorie dans laquelle les *faisceaux* et les *topos* deviennent des objets mathématiques à part entière. L'idée fondamentale est de remplacer, lorsque cela est nécessaire, l'espace sous-jacent par la catégorie de ses faisceaux.

L'architecture générale peut se résumer ainsi :

$$\begin{aligned} \text{préfaisceaux} &\longrightarrow \text{topologies} \longrightarrow \text{faisceaux} \longrightarrow \text{topos} \\ &\longrightarrow \text{morphismes de topos} \longrightarrow \text{cohomologie} \longrightarrow \text{applications géométriques.} \end{aligned}$$

Le Tome 1 établit principalement les fondations catégoriques et la théorie générale des topos. Le Tome 2 développe la cohomologie, les conditions de finitude, les limites et surtout les applications aux topos étales des schémas.

1. SGA 4, Tome 1 : de la théorie des préfaisceaux aux topos

1.1. Exposé I - Préfaisceaux

L'Exposé I constitue le socle catégorique.

1. Univers et petitesse

Grothendieck commence par introduire les *univers* afin de contrôler les problèmes de taille qui apparaissent naturellement dans les catégories.

Un univers U est stable par les opérations ensemblistes nécessaires : passage aux sous-ensembles, couples, produits, réunions et ensembles de parties. L'objectif n'est pas de faire de la théorie des ensembles pour elle-même, mais de pouvoir parler rigoureusement de catégories "petites" et de catégories dont les ensembles de morphismes sont petits.

Une U -catégorie est une catégorie $\mathcal{C}$ telle que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

soit U -petit pour tous X, Y .

Cette distinction devient importante dès que l'on considère des catégories de foncteurs.

2. Préfaisceaux

Pour une catégorie $\mathcal{C}$, un préfaisceau d'ensembles est un foncteur contravariant

$$F : \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Ens}.$$

La catégorie des préfaisceaux est donc une catégorie de foncteurs :

$$\widehat{\mathcal{C}} = \text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Ens}).$$

Les objets de $\mathcal{C}$ donnent des préfaisceaux représentables

$$h_X = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X).$$

Le résultat fondamental est le lemme de Yoneda :

$$\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(h_X, F) \simeq F(X).$$

Ainsi, $\mathcal{C}$ s'immerge pleinement dans sa catégorie de préfaisceaux. Cette observation est l'un des mécanismes structurants de tout SGA 4.

3. Limites et colimites

Les catégories de préfaisceaux possèdent de très bonnes propriétés d'existence de limites et de colimites. Beaucoup de constructions catégoriques peuvent donc être effectuées “objet par objet”. Cette propriété sera essentielle lorsque l'on passera des préfaisceaux aux faisceaux.

4. Cribles

Un crible sur un objet X formalise une famille de morphismes vers X stable par composition à droite.

Les cribles constituent le langage adapté pour exprimer les conditions de recouvrement sans avoir à choisir une famille particulière de flèches.

Ils seront précisément les objets sur lesquels Grothendieck définira les topologies.

5. Idée essentielle de l'Exposé I

L'Exposé I fournit donc trois outils fondamentaux :

$$\text{foncteurs} \quad + \quad \text{Yoneda} \quad + \quad \text{cribles}.$$

Sans eux, la définition abstraite d'un topos ne peut pas être comprise.

1.2. Exposé II - Topologies et faisceaux

L'Exposé II introduit la condition qui permet de passer des préfaisceaux aux faisceaux.

1. Topologie sur une catégorie

Une topologie de Grothendieck attribue à chaque objet une famille de cribles considérés comme couvrants, sous des axiomes de stabilité.

L'idée est analogue à celle d'une topologie ordinaire : on ne décrit plus des ouverts d'un espace, mais des familles de morphismes qui jouent le rôle des recouvrements.

2. Condition de faisceau

Un préfaisceau F est un faisceau si, pour tout recouvrement, les données locales compatibles se recollent en une donnée globale unique.

Symboliquement :

$$\text{données locales compatibles} \iff \text{donnée globale.}$$

Cette formule est la véritable intuition derrière toute la théorie.

3. Faisceau associé

À tout préfaisceau F , on associe un faisceau aF , appelé faisceau associé.

On obtient un foncteur

$$a : \hat{\mathcal{C}} \longrightarrow \text{Sh}(\mathcal{C}),$$

adjoint à l'inclusion

$$i : \text{Sh}(\mathcal{C}) \hookrightarrow \hat{\mathcal{C}}.$$

Ainsi,

$$a \dashv i.$$

Le passage au faisceau est donc une *réflexion catégorique* : on impose la condition de recollement tout en conservant la structure universelle nécessaire.

4. Exactitude

L'Exposé II étudie ensuite les propriétés exactes de la catégorie des faisceaux et l'extension des topologies.

Cette étape est capitale : la catégorie des faisceaux n'est pas seulement une collection d'objets satisfaisant une condition locale ; elle possède elle-même une structure catégorique riche.

5. Faisceaux à valeurs catégoriques

Le mécanisme ne se limite pas aux faisceaux d'ensembles. On peut considérer des faisceaux à valeurs dans une catégorie convenable.

C'est une première indication de la portée générale de la théorie.

1.3. Exposé III - Fonctorialité des catégories de faisceaux

Une fois deux sites donnés, il faut comprendre quand un foncteur entre les catégories sous-jacentes induit un foncteur entre leurs catégories de faisceaux.

C'est l'objet de l'Exposé III.

Les notions de foncteur *continu* et *cocontinu* permettent de contrôler le comportement des recouvrements.

Le lemme de comparaison joue alors un rôle central : il permet, sous des hypothèses appropriées, de remplacer un site par un autre site donnant naissance au même topos.

L'idée importante est donc :

le topos dépend moins du site choisi que de la structure de faisceaux qu'il engendre.

La localisation apparaît également ici comme une opération fondamentale.

1.4. Exposé IV - Topos

C'est le sommet conceptuel du Tome 1.

1. Définition

Un topos est essentiellement une catégorie de faisceaux

$$\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J),$$

mais l'Exposé IV cherche à dégager une caractérisation intrinsèque : le topos doit pouvoir être reconnu sans nécessairement conserver le site qui l'a produit.

Les catégories de préfaisceaux constituent les modèles fondamentaux.

2. Morphismes de topos

Un morphisme de topos

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$$

est décrit par une paire de foncteurs adjoints

$$f^* : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad f_* : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F},$$

avec f^* conservant notamment les limites finies.

L'intuition géométrique est :

$$f^* = \text{tiré-en-arrière}, \quad f_* = \text{image directe}.$$

Cela permet de faire de la catégorie des topos une véritable catégorie géométrique.

3. Points et foncteurs fibres

Un point d'un topos est essentiellement un morphisme

$$\mathbf{Ens} \longrightarrow \mathcal{E}.$$

Le foncteur fibre associé permet d'examiner un faisceau "au voisinage" d'un point. Cette notion sera déterminante dans le Tome 2, notamment pour les topos étales.

4. Localisation et ouverts

Le topos possède des analogues catégoriques des ouverts d'un espace. La localisation permet de passer à une partie du topos sans revenir à un espace topologique sous-jacent.

5. Sous-topos et recollement

Les sous-topos jouent le rôle de sous-espaces ou de sous-structures. Le recollement permet de reconstruire un topos à partir de morceaux.

On obtient ainsi une géométrie interne des topos.

6. Topos annelés

Enfin, on introduit les topos munis d'un faisceau d'anneaux

$$(\mathcal{E}, \mathcal{O}).$$

On peut alors définir des modules, des morphismes de topos annelés, des localisations et des opérations de recollement.

Cette dernière partie prépare directement les applications géométriques ultérieures.

Bilan du Tome 1

Le mouvement conceptuel est :

$$\mathcal{C} \longrightarrow \hat{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J) \longrightarrow \text{topos}$$

puis

$$\text{topos} \longrightarrow \text{points, morphismes, localisations, sous-topos, recollements.}$$

Le point essentiel est que l'on passe progressivement d'une théorie des familles de données locales à une théorie où la *catégorie des faisceaux elle-même devient l'espace géométrique*.

2. SGA 4, Tome 2 : cohomologie et applications

Le Tome 2 prend la structure construite précédemment et lui fait produire des invariants cohomologiques et des résultats géométriques.

Son architecture est :

topos $\longrightarrow$ cohomologie $\longrightarrow$ conditions de finitude $\longrightarrow$ limites $\longrightarrow$ topos étale $\longrightarrow$ applications aux schémas.

2.1. Exposé V - Cohomologie dans les topos

L'Exposé V introduit les invariants cohomologiques commutatifs des topos.

1. Catégories abéliennes

La première étape consiste à disposer du cadre catégorique dans lequel les suites exactes, noyaux, conoyaux et suites spectrales ont un sens.

Les catégories abéliennes fournissent ce cadre.

2. Modules plats

La platitude est étudiée dans les topos annelés.

L'idée reste celle de l'algèbre commutative : un module M est plat lorsque le foncteur

$$- \otimes M$$

préserve l'exactitude.

Dans le cadre des topos, cette notion doit être reformulée et adaptée à la géométrie catégorique.

3. Cohomologie de Čech

À partir d'un recouvrement, on construit un complexe de Čech et donc des groupes de cohomologie. Mais SGA 4 insiste sur un point important :

$$\text{cohomologie de Čech} \neq \text{cohomologie des faisceaux}$$

en général.

Pour obtenir la cohomologie des faisceaux dans un topos quelconque, il faut notamment introduire des recouvrements simpliciaux, ou hyper-recouvrements.

4. Suites spectrales

La suite spectrale de Cartan-Leray relie les différentes étapes cohomologiques.

De façon schématique :

$$E_2^{p,q} \implies H^{p+q}.$$

Les suites spectrales deviennent ainsi le mécanisme permettant de combiner des informations cohomologiques obtenues à différents niveaux.

5. Foncteurs dérivés

L'Exposé introduit les foncteurs

$$R^q f_*,$$

associés aux foncteurs images directes.

Le point important est que l'Exposé V développe ces constructions sans faire des catégories dérivées le langage principal. Il fournit donc une présentation élémentaire des mécanismes qui seront ensuite généralisés.

6. Cohomologie à supports

On introduit également la cohomologie relative à un support.

Cela permet de mesurer non plus seulement la cohomologie globale, mais la contribution provenant d'une partie donnée de l'espace géométrique abstrait.

2.2. Exposé Vbis - Descente cohomologique

La descente consiste à reconstruire une donnée globale à partir de données définies localement et munies de conditions de compatibilité.

La logique est parallèle à celle des faisceaux, mais appliquée à des objets cohomologiques plus riches. Schématiquement :

$$\text{donnée locale} + \text{compatibilités} \implies \text{donnée globale}.$$

Les critères de descente permettent de déterminer quand cette reconstruction est possible.

2.3. Exposé VI - Conditions de finitude et limites

L'Exposé VI étudie les conditions de finitude des objets, des morphismes et des topos.

Cette partie est nécessaire pour contrôler les passages à la limite.

Un problème central est de savoir quand un foncteur cohomologique commute avec une limite inductive filtrante :

$$H^i(X, -) \quad \text{et} \quad \varinjlim.$$

Les catégories fibrées fournissent le langage adapté pour organiser les familles de catégories dépendant d'un paramètre.

L'Exposé traite également des limites inductives et projectives de catégories fibrées et des topos fibrés.

Le message général est :

la cohomologie et les opérations catégoriques doivent être compatibles avec les passages à la limite sous des h

2.4. Exposé VII - Site et topos étales d'un schéma

On passe maintenant à la géométrie algébrique.

À un schéma X , on associe son site étale, dont les objets sont essentiellement les morphismes étales

$$U \longrightarrow X.$$

Les faisceaux sur ce site forment le topos étale de X :

$$X_{\text{ét.}}$$

Cette construction permet d'interpréter une partie de la géométrie algébrique sous forme de théorie des faisceaux.

L'Exposé étudie :

- la topologie étale ;
- des exemples de faisceaux ;
- les générateurs du topos étale ;
- les comparaisons avec d'autres topologies ;
- le comportement cohomologique lors de passages à la limite.

Le point conceptuel est particulièrement important :

$$X \rightsquigarrow X_{\text{ét}}$$

remplace l'étude directe du schéma par l'étude d'une catégorie de faisceaux qui encode sa géométrie étale.

2.5. Exposé VIII - Foncteurs fibres, supports et morphismes finis

L'Exposé VIII développe les conséquences de cette construction.

1. Points géométriques

Les points géométriques d'un schéma donnent des foncteurs fibres sur son topos étale.

On retrouve ainsi une idée déjà préparée dans le Tome 1 :

$$\text{point géométrique} \longrightarrow \text{foncteur fibre.}$$

2. Spectre d'un corps

L'étude du topos étale de $\text{Spec}(k)$ permet de relier les faisceaux étales à la théorie galoisienne.

Le topos étale devient ainsi un intermédiaire entre géométrie algébrique et théorie des groupes.

3. Anneaux et schémas strictement locaux

Les anneaux et schémas strictement locaux permettent de comprendre le comportement local des faisceaux étales.

Ils fournissent le cadre dans lequel les fibres et les propriétés locales peuvent être calculées.

4. Fibres des $R^q f_*$

L'étude des fibres des foncteurs dérivés

$$R^q f_*$$

permet de relier la cohomologie globale à des calculs locaux.

Les supports et les morphismes de spécialisation complètent cette description.

5. Morphismes finis et suites spectrales

Les morphismes entiers et finis donnent lieu à des suites spectrales permettant d'organiser les informations cohomologiques.

La descente des faisceaux étales apparaît alors comme une conséquence naturelle de toute cette machinerie.

3. Vue d'ensemble : ce que construit réellement SGA 4

Les deux tomes peuvent être lus comme une seule construction.

Niveau 1 : représenter

On part d'une catégorie $\mathcal{C}$ et on considère

$$\widehat{\mathcal{C}} = \text{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Ens}).$$

Le lemme de Yoneda permet d'y représenter les objets de $\mathcal{C}$.

Niveau 2 : imposer la localité

On choisit une topologie de Grothendieck J et on extrait

$$\text{Sh}(\mathcal{C}, J) \subset \widehat{\mathcal{C}}.$$

La condition de faisceau impose le recollement des données locales.

Niveau 3 : oublier le site

On étudie les propriétés intrinsèques de la catégorie

$$\mathcal{E} = \text{Sh}(\mathcal{C}, J).$$

C'est le passage à la notion de topos.

Niveau 4 : faire de la géométrie avec les topos

On dispose alors de :

morphismes, points, fibres, localisations, sous-topos, recollements.

La catégorie $\mathcal{E}$ joue le rôle d'un espace géométrique.

Niveau 5 : mesurer la géométrie

On introduit la cohomologie :

$$H^q(\mathcal{E}, F), \quad R^q f_* F,$$

les suites spectrales et la cohomologie à supports.

La géométrie du topos devient ainsi mesurable par des invariants cohomologiques.

Niveau 6 : contrôler les limites

Les conditions de finitude permettent de déterminer quand ces invariants se comportent bien vis-à-vis des limites.

C'est une condition essentielle pour les applications.

Niveau 7 : appliquer à la géométrie algébrique

Enfin, pour un schéma X :

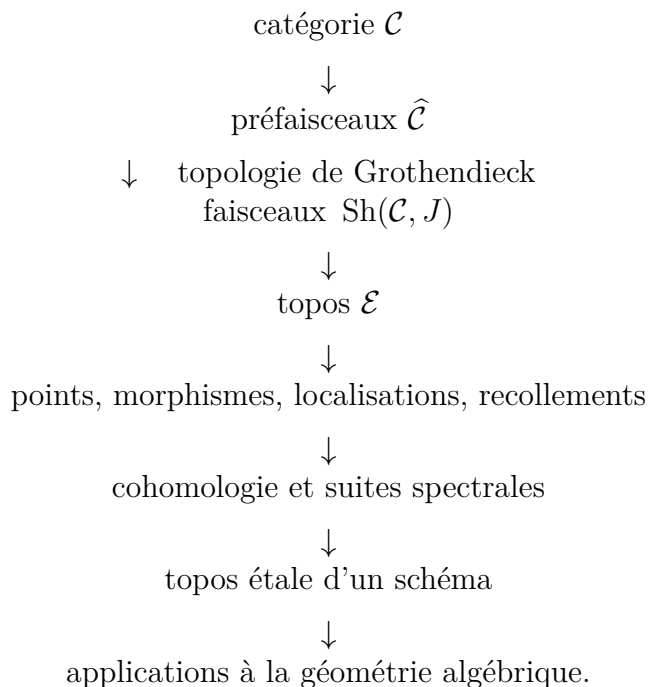
$$X \longrightarrow X_{\text{ét}}$$

permet de transférer la géométrie du schéma dans son topos étale.

Les points géométriques, les fibres, les supports et les morphismes finis peuvent alors être étudiés à l'aide de la machinerie générale construite dans les exposés précédents.

La substantifique moelle

Si l'on devait retenir seulement le fil mathématique des deux tomes, ce serait celui-ci :



La rupture conceptuelle majeure de SGA 4 est donc la suivante :

un espace peut être étudié par la catégorie de ses faisceaux,

et cette catégorie peut ensuite être considérée elle-même comme un objet géométrique.

Le Tome 1 construit le langage permettant de faire cette identification. Le Tome 2 montre que ce langage produit une théorie cohomologique et des applications concrètes, notamment au topos étale des schémas.