

SGA 1 - Revêtements étales et groupe fondamental

Résumé motivé pour un lecteur de niveau Bac+3 en mathématiques

Résumé

Ce document résume l'idée générale du *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie* numéro 1 (SGA 1), dirigé par Alexander Grothendieck en 1960-1961, et intitulé *Revêtements étales et groupe fondamental*. L'objectif est de dégager les *motivations* et les *idées directrices* pour un lecteur qui connaît les bases de l'algèbre commutative et de la topologie algébrique, mais qui n'a pas encore étudié la géométrie algébrique moderne.

Avertissement. Ce résumé s'appuie sur le texte fourni par l'utilisateur, qui contient l'introduction de Grothendieck, la table des matières, le début de l'exposé I, et l'index terminologique. Les exposés II à XIII ne sont pas disponibles *in extenso*; leurs résumés restent donc volontairement généraux et sont signalés comme tels.

Table des matières

1. Contexte général : que cherche Grothendieck ?

1.1. Le problème classique du groupe fondamental

En topologie algébrique, pour un espace topologique connexe X muni d'un point base x , le *groupe fondamental* $\pi_1(X, x)$ mesure les lacets de X à homotopie près. Il classifie les *revêtements* de X : un revêtement connexe correspond à un sous-groupe de $\pi_1(X, x)$, et le revêtement universel à l'élément neutre. C'est la théorie de Galois topologique.

1.2. L'analogie avec la théorie de Galois

En arithmétique, la théorie de Galois classique étudie les extensions finies séparables d'un corps K : elles correspondent aux sous-groupes ouverts du groupe de Galois absolu $\text{Gal}(\bar{K}/K)$. Les deux théories (revêtements topologiques et extensions de corps) ont la *même structure formelle*.

1.3. L'idée directrice de Grothendieck

Grothendieck propose de traiter *sur le même pied* le cas topologique et le cas arithmétique en développant une théorie du groupe fondamental *en géométrie algébrique*, dans le point de vue dit *bien plus que kroneckerien*. Ce point de vue ne s'exprime de façon satisfaisante que dans le langage des *schémas*, développé par Grothendieck et Dieudonné dans les *Éléments de Géométrie Algébrique* (EGA).

Autrement dit : au lieu de considérer séparément

- une variété algébrique sur un corps (objet géométrique), et
- l'anneau des entiers d'un corps de nombres (objet arithmétique),

on les considère tous deux comme des *schémas*, et on développe une théorie du groupe fondamental qui s'applique aux deux.

2. Plan du SGA 1

Le volume comporte treize exposés. D'après la table des matières et l'introduction, voici la structure d'ensemble.

2.1. Exposés I à IV : les briques locales

Motivation. Avant de définir le groupe fondamental, il faut définir les morphismes qui joueront le rôle des *revêtements* en géométrie algébrique : les *morphismes étales*. Un morphisme étale est l'analogue algébrique d'un revêtement localement trivial en topologie.

- **Exposé I - Morphismes étales.** Définit les notions de *morphisme net* (non ramifié), *plat*, *étale*, et *lisse*. Le théorème fondamental (th. 5.1) dit qu'un morphisme étale et radiciel est une immersion ouverte. C'est l'analogue algébrique du fait qu'un revêtement de degré 1 est un homéomorphisme.
- **Exposés II et III - Morphismes lisses.** Généralisent la notion de lissité (analogue algébrique de variété différentiable) : propriétés différentielles (faisceau des différentielles $\Omega_{X/Y}^1$), critère jacobien de lissité, propriétés de relèvement infinitésimal.
- **Exposé IV - Platitude.** La platitude est l'outil technique central : un module plat est un module dont le produit tensoriel préserve l'exactitude. C'est ce qui permet de faire de la *descente*.

2.2. Exposé V : le groupe fondamental abstrait

Motivation. Grothendieck abstrait la théorie de Galois sous forme *axiomatique*. Il définit une *catégorie galoisienne* comme une catégorie $\mathcal{C}$ équivalente à la catégorie $\mathcal{C}(\pi)$ des ensembles finis où opère continûment un groupe profini π . Le théorème 4.1 du SGA 1 énonce que, sous des axiomes (G1)-(G6) portant sur un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}_{\text{fin}}$, on reconstruit un groupe profini π tel que $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}(\pi)$.

C'est l'analogue abstrait du fait qu'en topologie, la catégorie des revêtements finis d'un espace connexe est équivalente à la catégorie des π_1 -ensembles finis.

2.3. Exposés VI à IX : la descente

Motivation. La *descente* est un procédé de *recollement* : si on a un objet défini localement sur un recouvrement, et des isomorphismes de recollement compatibles, on veut reconstruire un objet global. C'est l'analogue algébrique du recollement de faisceaux.

- **Exposé VI - Catégories fibrées et descente.** Développe le langage des catégories fibrées (Giraud, *Méthode de la descente*, 1964). L'exposé VII annoncé n'a pas été rédigé.
- **Exposé VIII - Descente fidèlement plate.** Montre que les modules quasi-cohérents, les préschémas affines, etc. descendent par morphismes fidèlement plats et quasi-compacts.
- **Exposé IX - Descente des morphismes étales.** Application au groupe fondamental. Donne une méthode de calcul du π_1 d'un schéma X à partir d'un morphisme surjectif $X' \rightarrow X$ (théorèmes de type Van Kampen). Contient aussi la suite exacte fondamentale $\pi_1(X_0) \rightarrow \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(S) \rightarrow e$.

2.4. Exposés X à XIII : applications et compléments

- **Exposé X - Spécialisation du groupe fondamental.** Étudie comment π_1 se comporte quand on passe d'une fibre générique à une fibre spéciale d'un morphisme propre et lisse. Résultat frappant : détermination du π_1 d'une courbe algébrique lisse en caractéristique $p > 0$ à partir du cas de caractéristique 0.
- **Exposé XI - Exemples et compléments.** Espaces projectifs, variétés abéliennes, cônes projetants, théories de Kummer et d'Artin-Schreier.
- **Exposé XII - Géométrie algébrique et géométrie analytique** (par Mme M. Raynaud). Compare les revêtements étales d'un schéma sur $\mathbb{C}$ et ceux de l'espace analytique associé (*théorème d'existence de Riemann*).
- **Exposé XIII - Propriété cohomologique** (par Mme M. Raynaud). Généralise les exposés IX et X en utilisant la cohomologie étale de SGA 4. Contient le calcul du groupe fondamental modérément ramifié d'une courbe affine (théorème 2.12) : engendré par $2g + n$ éléments avec une relation.

3. Le contenu de l'exposé I, en détail

Comme le fichier fourni contient le début de l'exposé I, on peut en donner un résumé plus précis.

3.1. Morphismes quasi-finis (n° 2)

Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est *quasi-fini* en x si x est isolé dans sa fibre $f^{-1}(f(x))$. C'est une notion de « finitude locale » plus faible que « fini ».

3.2. Morphismes non ramifiés ou nets (n° 3)

Motivation. En topologie, un revêtement est « sans ramification ». En géométrie algébrique, on veut la même chose : un morphisme *net* (ou non ramifié) est un morphisme dont les fibres sont des extensions finies séparables, et dont le faisceau des différentielles $\Omega_{X/Y}^1$ est nul. C'est l'analogue algébrique d'un revêtement non ramifié.

3.3. Morphismes étales (n° 4)

Définition 4.1. Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ de type fini est *étale* en x s'il est *plat* en x et *net* en x . Intuitivement : étale = plat + non ramifié.

C'est l'analogie algébrique exact d'un revêtement localement trivial.

3.4. La propriété fondamentale (n° 5)

Théorème 5.1. Un morphisme de type fini est une immersion ouverte si et seulement s'il est étale et radiciel.

Interprétation. C'est l'analogie du fait qu'un revêtement de degré 1 est un homéomorphisme. C'est ce théorème qui permet de « recoller » des morphismes étales définis localement (théorème 5.5, dit *de prolongement des relèvements*).

3.5. Application aux anneaux locaux complets (n° 6)

Théorème 6.1. Si A est un anneau local complet noethérien de corps résiduel k , le foncteur $B \mapsto B \otimes_A k$ est une équivalence entre la catégorie des A -algèbres finies étales et celle des k -algèbres finies séparables.

Interprétation. C'est l'analogie algébrique du fait qu'un revêtement d'un espace contractile est trivial.

3.6. Revêtements étales d'un schéma normal (n° 10)

Motivation. Si Y est normal (anneaux locaux intègrement clos), la théorie des revêtements étales de Y se ramène à la théorie de Galois des extensions du corps des fractions de Y qui sont non ramifiées sur Y . C'est un pont explicite entre géométrie et arithmétique.

4. Pourquoi ce texte est difficile (et c'est normal)

- **Le langage des schémas.** Grothendieck suppose connus les trois premiers chapitres des EGA. Pour un Bac+3, il faut d'abord assimiler cette notion (anneaux, localisation, spectre premier, faisceaux quasi-cohérents).
- **Le niveau d'abstraction.** Le SGA 1 n'est pas un livre d'introduction : c'est un séminaire de recherche. Les démonstrations sont souvent esquissées, les références internes nombreuses.
- **La densité.** Chaque exposé couvre plusieurs exposés oraux et des dizaines de résultats. Une lecture sérieuse demande des mois.

Conseil de lecture. Pour un Bac+3 motivé, je recommande l'ordre suivant :

1. Assimiler les bases des schémas (EGA I, ou un livre d'introduction comme Hartshorne, chap. II).
2. Lire l'exposé I du SGA 1 (morphisms étales).
3. Lire l'exposé V (catégories galoisiennes) en parallèle avec la théorie de Galois classique.
4. Aborder les exposés VI à IX (descente), qui sont le cœur technique.
5. Garder les exposés X à XIII pour la fin, comme applications.

5. Ce que ce résumé ne couvre pas

Le texte fourni ne contient pas le corps des exposés II à XIII. Les résumés donnés ci-dessus pour ces exposés reposent sur :

- la table des matières,
- l'introduction de Grothendieck,
- l'index terminologique.

Ils ne prétendent donc pas être exhaustifs ni techniquement précis. Pour une étude sérieuse, il faut se référer au texte complet du SGA 1.

SGA 2 - Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux

Résumé motivé pour un lecteur de niveau Bac+3 en mathématiques

Résumé

Ce document résume l'idée générale du *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie* numéro 2 (SGA 2), dirigé par Alexander Grothendieck en 1962, et intitulé *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux*. L'objectif est de dégager les *motivations* et les *idées directrices* pour un lecteur qui connaît les bases de l'algèbre commutative et de la topologie algébrique, mais qui n'a pas encore étudié la géométrie algébrique moderne.

Avertissement. Ce résumé s'appuie sur le texte fourni par l'utilisateur, qui est *très incomplet* : il contient la préface, la table des matières, et des fragments de la plupart des exposés (I à XIV), mais de nombreuses pages manquent et certaines pages sont corrompues. Les résumés donnés ici sont donc volontairement généraux et *motivacionnels* ; ils ne prétendent pas être exhaustifs ni techniquement précis.

Table des matières

1. Contexte général : que cherche Grothendieck ?

1.1. Le point de départ : la cohomologie locale

En topologie algébrique, étant donné un espace topologique X et un sous-ensemble fermé $Y \subset X$, on peut définir la *cohomologie de X à support dans Y* , notée $H_Y^*(X, \mathcal{F})$. C'est un invariant qui mesure le comportement de X « au voisinage de Y », ou encore « modulo l'ouvert $X - Y$ ». On a une suite exacte longue reliant $H^*(X)$, $H^*(X - Y)$ et $H_Y^*(X)$.

1.2. L'analogue algébrique

Grothendieck veut développer l'analogue de cette théorie en géométrie algébrique, pour un schéma X et un sous-schéma fermé Y . Le faisceau structural est remplacé par un faisceau cohérent $\mathcal{F}$, et la cohomologie locale $H_Y^*(X, \mathcal{F})$ doit s'interpréter comme une « localisation » algébrique.

1.3. Les théorèmes de Lefschetz

Le deuxième objectif majeur du SGA 2 est de démontrer des *théorèmes de Lefschetz* en géométrie algébrique. Le théorème classique de Lefschetz, en topologie algébrique, dit que si X est une variété projective lisse de dimension n et Y une section hyperplane lisse, alors $Y \hookrightarrow X$ induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie π_i pour $i \leq n - 2$, et un épimorphisme pour $i = n - 1$. Grothendieck veut obtenir des analogues algébriques, et notamment des *versions locales* de ce théorème.

2. Plan du SGA 2

D'après la table des matières et l'introduction, voici la structure d'ensemble.

2.1. Exposés I à III : la cohomologie locale

- **Exposé I - Les invariants cohomologiques globaux et locaux relatifs à un sous-espace fermé.** Définit les foncteurs $\Gamma_Z, \underline{\Gamma}_Z$, les groupes $H_Z^*(X, \mathcal{F})$ et les faisceaux $\underline{H}_Z^*(\mathcal{F})$. Démontre les suites exactes fondamentales (théorèmes 2.8 et 2.9) reliant $H_Y^*(X)$, $H^*(X)$ et $H^*(X - Y)$.
- **Exposé II - Application aux faisceaux quasi-cohérents sur les préschémas.** Montre que pour un faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}$ sur un préschéma X , les faisceaux $\underline{H}_Z^*(\mathcal{F})$ sont quasi-cohérents sous des hypothèses de finitude.
- **Exposé III - Profondeur et propriétés topologiques.** Introduit la notion de *profondeur* (au sens de Serre) et la relie à la cohomologie locale : $\text{prof}_Y(\mathcal{F}) \geq n$ si et seulement si $H_Y^i(\mathcal{F}) = 0$ pour $i < n$. Contient le *théorème de Hartshorne* (théorème 3.6) : si $\text{prof } \mathcal{O}_{X,x} \geq 2$ pour tout $x \in Y$, alors $\pi_0(X) \rightarrow \pi_0(X - Y)$ est bijectif.

2.2. Exposés IV et V : la dualité locale

- **Exposé IV - Modules et foncteurs dualisants.** Définit la notion de *module dualisant* pour un anneau local noethérien A : c'est un module I tel que le foncteur $M \mapsto \text{Hom}_A(M, I)$ soit une anti-équivalence sur la catégorie des A -modules de longueur finie. Le théorème 4.7 affirme l'existence et l'unicité (à isomorphisme près) d'un tel module, et le caractérise comme l'enveloppe injective du corps résiduel k de A .
- **Exposé V - Complexes d'homomorphismes et théorème de dualité locale.** Démontre le *théorème de dualité locale* (théorème 2.1) : pour un anneau local régulier A de dimension r , on a un isomorphisme $H_{\mathfrak{m}}^i(M) \simeq D(\text{Ext}^{r-i}(M, A))$, où D est le foncteur dualisant.

2.3. Exposés VI à VIII : Ext et finitude

- **Exposé VI - Les foncteurs Ext_Z^* et $\underline{\text{Ext}}_Z^*$.** Définit les versions locales des foncteurs Ext , avec support dans Z .
- **Exposé VII - Critères de nullité, conditions de cohérence des faisceaux $\text{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.** Étudie quand les faisceaux $\text{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ sont cohérents.
- **Exposé VIII - Le théorème de finitude.** Démontre le *théorème de finitude* (théorème 2.1) : sous des hypothèses de profondeur, les faisceaux $\underline{H}_Y^i(\mathcal{F})$ sont cohérents.

2.4. Exposés IX à XII : applications

- **Exposé IX - Géométrie algébrique et géométrie formelle.** Démontre un *théorème de comparaison* (théorème 1.1) entre la cohomologie de X et celle de son complété formel $\hat{X}$ le long de Y , et un *théorème d'existence* (théorème 2.1) : sous des hypothèses de profondeur, tout faisceau cohérent sur $\hat{X}$ provient d'un faisceau cohérent sur X .

- **Exposé X - Application au groupe fondamental.** Compare les revêtements étales de X et de $X - Y$, et les groupes fondamentaux. Contient le *théorème de pureté de Zariski-Nagata* (théorème 3.4) : un anneau local noethérien régulier de dimension ≥ 2 est *pur*, ce qui signifie que les revêtements étales ne se ramifient pas en codimension ≥ 2 .
- **Exposé XI - Application au groupe de Picard.** Analogie du précédent pour le groupe de Picard, avec la notion d'anneau *parafactoriel*. Contient le théorème d'Auslander-Buchsbaum (théorème 3.13) : un anneau local noethérien régulier est factoriel.
- **Exposé XII - Applications aux schémas algébriques projectifs.** Contient le *théorème de dualité projective* (théorème 1.1, dû à Serre) et les théorèmes de Lefschetz globaux pour un morphisme projectif (théorèmes 2.1 et 3.1).

2.5. Exposés XIII et XIV : problèmes et cohomologie étale

- **Exposé XIII - Problèmes et conjectures.** Grothendieck pose une série de conjectures, notamment sur les théorèmes de Lefschetz locaux et globaux pour les π_i supérieurs, et sur les anneaux locaux « géométriquement factoriels ».
- **Exposé XIV - Profondeur et théorèmes de Lefschetz en cohomologie étale** (par Mme M. Raynaud). Reprend les théorèmes de Lefschetz du point de vue de la cohomologie étale, en utilisant les résultats de SGA 4 et SGA 5. Contient le *théorème de Lefschetz local* (corollaire 4.5) et le *théorème de Lefschetz global* (corollaire 4.6).

3. Le contenu de l'exposé I, en détail

Comme le fichier fourni contient le début de l'exposé I, on peut en donner un résumé plus précis.

3.1. Les foncteurs Γ_Z et $\underline{\Gamma}_Z$ (n° 1)

Soit X un espace topologique, $\mathcal{C}_X$ la catégorie des faisceaux abéliens sur X . Pour une partie fermée Z de X , on définit $\Gamma_Z(\mathcal{F})$ comme le sous-groupe de $\Gamma(X, \mathcal{F})$ formé des sections dont le support est contenu dans Z . On définit aussi le faisceau $\underline{\Gamma}_Z(\mathcal{F})$ sur X par $\Gamma(U, \underline{\Gamma}_Z(\mathcal{F})) = \Gamma_{U \cap Z}(U, \mathcal{F})$.

Proposition 1.3. On a un isomorphisme de bifoncteurs : $\text{Hom}(i_!(\mathcal{G}), \mathcal{F}) \simeq \text{Hom}(\mathcal{G}, i^!(\mathcal{F}))$, où $i : Z \rightarrow X$ est l'inclusion. C'est une adjonction entre les foncteurs $i_!$ (prolongement par zéro) et $i^!$ (sections à support dans Z).

3.2. Les foncteurs $H_Z^*(X, \mathcal{F})$ et $\underline{H}_Z^*(\mathcal{F})$ (n° 2)

On définit $H_Z^*(X, \mathcal{F})$ et $\underline{H}_Z^*(\mathcal{F})$ comme les foncteurs dérivés de Γ_Z et $\underline{\Gamma}_Z$.

Théorème 2.6 (suite spectrale de passage du local au global). On a une suite spectrale $E_2^{p,q} = H^p(X, \underline{H}_Z^q(\mathcal{F})) \implies H_Z^{p+q}(X, \mathcal{F})$.

Théorème 2.8 (suite exacte longue). Soient Z une partie localement fermée de X , Z' une partie fermée de Z et $Z'' = Z - Z'$. On a une suite exacte longue :

$$\cdots \rightarrow H_{Z'}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_Z^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z''}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z'}^{i+1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

Corollaire 2.9. Si A est une partie fermée de X , on a une suite exacte longue :

$$\cdots \rightarrow H_A^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(X - A, \mathcal{F}) \rightarrow H_A^{i+1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

C'est l'analogie algébrique de la suite exacte de cohomologie relative en topologie.

4. Le contenu de l'exposé III, en détail

4.1. Profondeur

Définition 2.3. Soient A un anneau, I un idéal de A , M un A -module. On appelle *I -profondeur de M* , notée $\text{prof}_I(M)$, la borne supérieure des entiers n tels que $\text{Ext}_A^i(N, M) = 0$ pour $i < n$ et pour tout A -module de type fini N annulé par une puissance de I .

Proposition 2.4. Si A est noethérien et M de type fini, $\text{prof}_I(M)$ est aussi la borne supérieure des longueurs des suites M -régulières d'éléments de I .

4.2. Profondeur et cohomologie locale

Proposition 3.3. Soient X un préschéma localement noethérien, Y un sous-préschéma fermé de X , $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module cohérent. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- $H_Y^i(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $i < n$;
- $\text{prof } \mathcal{F}_x \geq n$ pour tout $x \in Y$;
- $\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{O}_X}^i(\mathcal{G}, \mathcal{F}) = 0$ pour $i < n$ et pour tout $\mathcal{O}_X$ -module cohérent $\mathcal{G}$ de support contenu dans Y .

Théorème 3.6 (Hartshorne). Soient X un préschéma localement noethérien, Y un sous-préschéma fermé de X . Supposons que $\text{prof } \mathcal{O}_{X,x} \geq 2$ pour tout $x \in Y$. Alors l'application naturelle $\pi_0(X) \rightarrow \pi_0(X - Y)$ est bijective.

Interprétation. Ce théorème dit qu'on ne peut pas « déconnecter » X en enlevant un fermé Y de codimension ≥ 2 (en termes de profondeur). C'est l'analogie algébrique du fait qu'en topologie, enlever un fermé de codimension ≥ 2 à une variété ne change pas sa connexité.

5. Le contenu de l'exposé IV, en détail

5.1. Modules dualisants

Définition 4.1. Soient A un anneau local noethérien et $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. On appelle *foncteur dualisant* pour A tout foncteur $T : \mathcal{C}_{\mathfrak{m}}^o \rightarrow \mathbf{Ab}$ qui est exact et tel que le morphisme $M \rightarrow T \circ T(M)$ soit un isomorphisme. On dit qu'un A -module I est *dualisant* si le foncteur $M \mapsto \text{Hom}_A(M, I)$ est dualisant.

Théorème 4.7. Soit A un anneau local noethérien.

1. Il existe toujours un module dualisant I .
2. Deux modules dualisants sont isomorphes (par un isomorphisme non canonique).
3. Pour qu'un module I soit dualisant, il faut et il suffit qu'il soit une enveloppe injective du corps résiduel k de A .

Exemple 5.4. Si A est un anneau local noethérien régulier de dimension n , le module dualisant est $I = H_{\mathfrak{m}}^n(A)$, et le foncteur dualisant est $M \mapsto \text{Ext}_A^n(M, A)$.

6. Le contenu de l'exposé IX, en détail

6.1. Théorème de comparaison

Soient $f : X \rightarrow X'$ un morphisme séparé et de type fini, Y' une partie fermée de X' , $Y = f^{-1}(Y')$, $\hat{X}$ et $\hat{X}'$ les complétés formels le long de Y et Y' .

Théorème 1.1. Sous des hypothèses de finitude, les morphismes canoniques

$$(R^i f_*(\mathcal{F}))^\wedge \rightarrow R^i \hat{f}_*(\hat{\mathcal{F}})$$

sont des isomorphismes pour $i \leq n-1$ et des monomorphismes pour $i = n$, sous réserve que certains modules gradués soient de type fini.

6.2. Théorème d'existence

Théorème 2.1. Sous des hypothèses de profondeur, tout faisceau cohérent $\mathfrak{F}$ sur $\hat{X}$ provient d'un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X , c'est-à-dire $\hat{\mathcal{F}} \simeq \mathfrak{F}$.

Interprétation. C'est un théorème d'algébrisation : il dit que sous de bonnes conditions, un objet formel (défini sur le complété) provient d'un objet algébrique (défini sur X).

7. Le contenu de l'exposé X, en détail

7.1. Comparaison des revêtements étales

Proposition 1.1. Le foncteur naturel $\text{Et}(\hat{X}) \rightarrow \text{Et}(Y)$ est une équivalence de catégories. Autrement dit, les revêtements étales du complété formel $\hat{X}$ sont les mêmes que ceux de Y .

Théorème 3.4 (théorème de pureté de Zariski-Nagata).

1. Un anneau local noethérien régulier de dimension ≥ 2 est *pur* : les revêtements étales ne se ramifient pas en codimension ≥ 2 .
2. Un anneau local noethérien de dimension ≥ 3 qui est une intersection complète est pur.

Théorème 3.10. Sous les hypothèses de Lefschetz effective et de pureté, on a $\pi_0(Y) \simeq \pi_0(X)$ et, si X est connexe, $\pi_1(Y) \simeq \pi_1(X)$.

8. Le contenu de l'exposé XI, en détail

8.1. Anneaux parafactoriels

Définition 3.1. Un couple (X, Z) de préschémas est dit *parafactoriel* si, pour tout ouvert V de X , le foncteur $\mathbf{P}(V) \rightarrow \mathbf{P}(V \cap (X - Z))$ est une équivalence de catégories, où $\mathbf{P}$ désigne la catégorie des modules inversibles.

Proposition 3.5. Soit A un anneau local noethérien. Pour qu'il soit parafactoriel, il faut et il suffit que $\text{prof } A \geq 2$ et $\text{Pic}(X' - \{x\}) = 0$, où $X' = \text{Spec}(A)$ et x est le point fermé.

Théorème 3.13.

1. (Auslander-Buchsbaum) Un anneau local noethérien régulier est factoriel (donc parafactoriel si sa dimension est ≥ 2).
2. Un anneau local noethérien de dimension ≥ 4 qui est une intersection complète est parafactoriel.

Corollaire 3.14 (conjecture de Samuel). Un anneau local noethérien A qui est une intersection complète et qui est factoriel en codimension ≥ 3 est factoriel.

9. Le contenu de l'exposé XII, en détail

9.1. Dualité projective

Théorème 1.1 (Serre). Soient k un corps, $X = \mathbf{P}_k^r$ l'espace projectif de dimension r sur k , $\mathcal{F}$ un module cohérent sur X . On a un isomorphisme de ∂ -foncteurs en $\mathcal{F}$:

$$H^i(X, \mathcal{F})' \simeq \text{Ext}^{r-i}(X; \mathcal{F}, \Omega_{X/k}^r),$$

où $\Omega_{X/k}^r = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^r}(-r-1)$.

9.2. Théorèmes de Lefschetz globaux

Théorème 2.1 (comparaison de Grauert). Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme projectif, $\mathcal{O}_X(1)$ un module inversible ample, Y le préschéma des zéros d'une section t de $\mathcal{O}_X(1)$. Sous des hypothèses de profondeur, les homomorphismes canoniques

$$R^i f_*(\mathcal{F}) \rightarrow R^i \hat{f}_*(\hat{\mathcal{F}})$$

sont des isomorphismes pour $i < n$, des monomorphismes pour $i = n$.

Théorème 3.1 (existence). Sous des hypothèses de profondeur, tout module cohérent $\mathfrak{F}$ sur $\hat{X}$ provient d'un module cohérent $\mathcal{F}$ sur X .

10. Le contenu de l'exposé XIV, en détail

10.1. Profondeur étale

Définition 1.2. Soient X un schéma, Y une partie fermée de X , $\mathcal{F}$ un faisceau abélien sur X . On dit que $\mathcal{F}$ est de Y -profondeur étale $\geq n$ si $H_Y^i(\mathcal{F}) = 0$ pour $i < n$.

Théorème 1.10 (semi-pureté cohomologique). Soient X un schéma lisse sur un corps k , ou un schéma régulier excellent de caractéristique nulle, Y une partie fermée de X , L l'ensemble des nombres premiers distincts de la caractéristique de X . Alors

$$\text{prof}_Y^L(X) = 2 \cdot \text{codim}(Y, X).$$

Théorème 1.11 (pureté homotopique). Si X est un schéma localement noethérien régulier et Y une partie fermée de codimension ≥ 2 , alors $\text{prof hop}_Y(X) \geq 3$.

10.2. Théorèmes de Lefschetz en cohomologie étale

Théorème 4.2 (théorème principal). Soient S un schéma excellent de caractéristique nulle, $f : U \rightarrow S$ un morphisme séparé de type fini, $\mathcal{F}$ un complexe de faisceaux de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -modules à cohomologie constructible. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout schéma U_1 étale au-dessus de U , affine sur S , on a $\text{prof}_T(R_! f_1(\mathcal{F}_1)) \geq n$.
2. Pour tout point $u \in U$, on a $\text{prof}_u(\mathcal{F}) \geq n - \delta_T(u)$.

Corollaire 4.5 (théorème de Lefschetz local). Sous les hypothèses du théorème 4.2, avec S local hensélien excellent de caractéristique nulle, X propre sur $S - \{s\}$, U réunion de $c + 1$ ouverts affines, $Y = X - U$, le morphisme canonique

$$H^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(Y, j^* \mathcal{F})$$

est bijectif pour $i < n - c - 1$, injectif pour $i = n - c - 1$.

Corollaire 4.6 (théorème de Lefschetz global). Sous les hypothèses du théorème 4.2, avec $S = \text{Spec}(k)$ pour un corps k , X propre sur k , U réunion de $c + 1$ ouverts affines, $Y = X - U$, le morphisme canonique

$$H^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(Y, j^* \mathcal{F})$$

est bijectif pour $i < n - c - 1$, injectif pour $i = n - c - 1$.

11. Pourquoi ce texte est difficile (et c'est normal)

- **Le langage des schémas et des faisceaux cohérents.** Grothendieck suppose connus les trois premiers chapitres des EGA. Pour un Bac+3, il faut d'abord assimiler ces notions.
- **La cohomologie des faisceaux.** Les groupes $H^i(X, \mathcal{F})$ et les foncteurs dérivés sont des outils techniques qui demandent une certaine familiarité avec l'algèbre homologique.
- **La dualité locale.** La notion de module dualisant et les théorèmes de dualité locale sont abstraits et techniques.
- **La cohomologie étale.** L'exposé XIV utilise la cohomologie étale de SGA 4 et SGA 5, qui est un outil encore plus abstrait.

Conseil de lecture. Pour un Bac+3 motivé, je recommande l'ordre suivant :

1. Assimiler les bases des schémas et des faisceaux cohérents (EGA I-III, ou Hartshorne, chap. II-III).
2. Lire l'exposé I du SGA 2 (cohomologie locale), qui est le plus accessible.
3. Lire l'exposé III (profondeur), qui relie la cohomologie locale à la profondeur.
4. Aborder les exposés IV et V (dualité locale), qui sont plus techniques.
5. Garder les exposés IX à XIV pour la fin, comme applications.

12. Ce que ce résumé ne couvre pas

Le texte fourni est très incomplet. Il contient :

- la préface et la table des matières,
- des fragments des exposés I à XIV (souvent quelques pages seulement, parfois corrompues).

Les résumés donnés ci-dessus reposent sur :

- ces fragments,
- la table des matières et l'introduction,
- l'index terminologique,
- mes connaissances générales sur le SGA 2 (que je connais comme un classique).

Ils ne prétendent donc pas être exhaustifs ni techniquement précis. Pour une étude sérieuse, il faut se référer au texte complet du SGA 2.

Introduction : Qu'est-ce que le SGA 3 ?

Le **Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (SGA)** est une série de séminaires tenus par Alexander Grothendieck et son équipe dans les années 1960. Le **SGA 3** est spécifiquement consacré à la théorie des **schémas en groupes**.

L'objectif principal est de généraliser la théorie classique des **groupes algébriques** (qui sont des groupes dont les éléments sont les points d'une variété algébrique sur un corps, comme le groupe des matrices inversibles GL_n) à un cadre beaucoup plus vaste : celui des **schémas en groupes sur une base arbitraire**.

Les Idées Fondamentales

Pour comprendre le SGA 3, il faut saisir quelques concepts clés de la géométrie algébrique moderne, tous introduits ou popularisés par Grothendieck :

- **Schéma** : Une généralisation de la notion de variété algébrique. Un schéma est un objet géométrique qui peut être collé à partir de “morceaux” affines (définis par des anneaux commutatifs). Il peut avoir des points “épais” (avec des nilpotents) qui capturent des informations infinitésimales.
- **Foncteur** : Une façon de voir un objet géométrique non pas comme un ensemble de points, mais comme une règle qui associe à tout autre objet géométrique T l'ensemble des “points de X à valeurs dans T ”. C'est le **point de vue fonctoriel**, crucial dans le SGA.
- **Faisceau** : Un foncteur qui “colle” les données locales. Par exemple, la notion de fonction sur un espace. Le SGA 3 utilise intensivement la théorie des faisceaux pour définir des quotients et des topologies (comme la **topologie fidèlement plate quasi-compacte**, ou fpqc).

Contenu du Tome II

Le Tome II du SGA 3, dont tu as fourni un extrait, se concentre sur les outils techniques et les exemples fondamentaux qui seront utilisés dans les tomes suivants pour étudier des groupes plus complexes (comme les groupes réductifs).

1. Groupes Diagonalisables (Exposé VIII)

Un **groupe diagonalisable** est un groupe qui, après un changement de base, devient isomorphe à un produit de groupes multiplicatifs $\mathbb{G}_m$. C'est l'analogue d'un groupe de matrices diagonales.

- **Idée clé** : Ces groupes sont très simples et leur théorie est purement algébrique. On montre qu'ils sont en **dualité de Cartier** avec des groupes abéliens de type fini. Le foncteur D qui associe à un groupe M le groupe diagonalisable $D(M) = \text{Hom}(M, \mathbb{G}_m)$ est une anti-équivalence de catégories.
- **Résultat important** : Un groupe diagonalisable est **affine**, **lisse**, et **réflexif** (c'est-à-dire que $D(D(G)) \cong G$).

2. Groupes de Type Multiplicatif (Exposé IX, X, XII)

Un **groupe de type multiplicatif** est un groupe qui est **localement diagonalisable** pour la topologie fidèlement plate et quasi-compacte (fpqc). C'est une généralisation des groupes diagonalisables.

- **Propriété cruciale** : Ces groupes sont **isotriviaux** (ou “quasi-isotriviaux”) : ils deviennent diagonalisables après un revêtement étale fini. Cela permet de les classer par des **modules galoisiens** (des groupes abéliens avec une action du groupe de Galois).
- **Application** : On étudie les **tores maximaux** et les **sous-groupes de Cartan** dans les schémas en groupes lisses et affines. Un résultat fondamental est que dans un groupe lisse et affine sur un corps algébriquement clos, tous les tores maximaux sont conjugués.

3. Extensions Infinitésimales (Exposé III)

Ce sont des techniques pour “déformer” ou “relever” des structures. Par exemple, si on a un groupe sur un schéma S_0 , peut-on le relever en un groupe sur un schéma S qui contient S_0 comme sous-schéma fermé (défini par un idéal nilpotent) ?

- **Idée clé** : Ces problèmes de relèvement sont contrôlés par la **cohomologie des groupes**. On utilise le **complexe de Hochschild** pour calculer des obstructions.
- **Théorème de Cartier** : En caractéristique 0, tout schéma en groupes lisse sur un corps est **lisse** (et donc, localement, isomorphe à un groupe algébrique linéaire). C'est un résultat fondamental qui simplifie énormément la théorie en caractéristique nulle.

4. Construction de Quotients (Exposé V, VI)

Un problème central est de savoir si le quotient d'un schéma en groupes G par un sous-groupe H existe en tant que schéma. Le SGA 3 développe des théorèmes généraux pour construire ces quotients (par exemple, le quotient d'un groupe affine lisse par un sous-groupe fermé lisse est représentable).

- **Technique** : On utilise la **descente fidèlement plate** et la théorie des **relations d'équivalence effectives universelles**.
- **Résultat** : Le quotient G/H est souvent représentable par un schéma, et le morphisme $G \rightarrow G/H$ est un **fibré principal homogène** (ou torseur).

Conclusion

Le SGA 3, Tome II, est un traité technique et exigeant qui pose les fondations de la théorie des schémas en groupes. Il introduit des outils puissants comme la dualité de Cartier, la théorie des tores, et les techniques de relèvement infinitésimal. Pour une néophyte, l'idée maîtresse est la suivante : **En utilisant le langage des schémas et des faisceaux, on peut étendre la théorie classique des groupes algébriques sur un corps à des “familles de groupes” sur une base arbitraire, et cette généralisation permet de résoudre des problèmes profonds en théorie des nombres et en géométrie.**

SGA 4, Tome 1
Théorie des Topos
Résumé généré par l'ia deepseek

1. Introduction Générale

Le SGA 4 (Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie) est un texte fondateur de la géométrie algébrique moderne. Le Tome 1, que nous résumons ici, est entièrement consacré à la **théorie des topos**.

Pour un étudiant de niveau L3, il faut d'abord comprendre l'objectif général. En géométrie algébrique, on étudie des objets géométriques (les schémas) définis par des équations polynomiales. La topologie usuelle (dite de Zariski) sur ces objets est trop "grossière" : elle ne permet pas de capturer certaines propriétés fines, comme les revêtements ou la cohomologie qui se comporte comme la cohomologie singulière en topologie classique.

L'idée géniale de Grothendieck et de son école a été d'introduire une nouvelle topologie, la **topologie étale**, et de développer un cadre mathématique pour l'étudier : la **théorie des topos**. Un **topos** est une généralisation de la notion d'espace topologique. C'est une catégorie qui se comporte comme la catégorie des faisceaux sur un espace.

Ce tome 1 construit toute la théorie des topos "from scratch". Il ne se contente pas de définir les objets, il construit toute la "boîte à outils" : préfaisceaux, faisceaux, topologies, morphismes de topos, points, sous-topos, recollement, et topos annelés. C'est un texte très abstrait, mais dont la maîtrise est indispensable pour comprendre le Tome 2.

2. Exposé I : Préfaisceaux (par A. Grothendieck et J.-L. Verdier)

2.1. Introduction : De quoi parle-t-on ?

Cet exposé pose les fondations de la théorie des catégories de préfaisceaux. C'est le langage de base qui sera utilisé partout par la suite. Il introduit également la notion d'**univers**, qui est une convention technique pour éviter les paradoxes de la théorie des ensembles.

2.2. L'Idée Générale

Soit C une catégorie (par exemple, la catégorie des ouverts d'un espace topologique, ou la catégorie des schémas). Un **préfaisceau** sur C est un foncteur contravariant $F : C^{\circ} \rightarrow \mathcal{U}\text{-Ens}$. C'est une façon de faire varier des données (des ensembles) sur une catégorie.

L'idée de cet exposé est de dire : "Si on a une catégorie, on peut construire une nouvelle catégorie, la catégorie des préfaisceaux sur cette catégorie, qui a de bonnes propriétés (comme l'existence de limites projectives et inductives)." C'est un peu comme passer d'un espace topologique X à la catégorie de tous les faisceaux sur X , mais dans un cadre purement catégorique.

2.3. Points Clés

- **Univers** : Une convention pour avoir un cadre ensembliste “suffisamment grand” pour faire des constructions, mais “suffisamment petit” pour éviter les paradoxes. On travaille avec des $\mathcal{U}$ -catégories (catégories dont les ensembles de morphismes sont $\mathcal{U}$ -petits). L’axiome des univers (A.6) stipule que tout ensemble est élément d’un univers.
- **Préfaisceaux** : Un préfaisceau sur C est un foncteur contravariant $C^\circ \rightarrow \mathcal{U}\text{-Ens}$. La catégorie des préfaisceaux est notée $\hat{C}$ ou $C^\sim$.
- **Foncteur représentable et lemme de Yoneda** : Un préfaisceau $h_X = \text{Hom}(-, X)$ est dit représentable par l’objet X de C . Le lemme de Yoneda dit que la catégorie C se plonge pleinement fidèlement dans la catégorie des préfaisceaux $\hat{C}$ via $h : C \rightarrow \hat{C}$. On a un isomorphisme fonctoriel $\text{Hom}_{\hat{C}}(h(X), F) \cong F(X)$.
- **Limites projectives et inductives** : On définit ces notions dans une catégorie générale. Les préfaisceaux ont la bonne propriété que les limites se calculent “argument par argument” (elles sont représentables). Par exemple, la limite projective d’un foncteur $G : I \rightarrow C$ est le préfaisceau $X \mapsto \text{Hom}_{\text{Fonct}(I, C)}(k_X, G)$.
- **Cribles** : Un crible sur un objet X est une sous-catégorie pleine D de C/X stable par composition. Les cribles sont en bijection avec les sous-préfaisceaux du préfaisceau représentable h_X .
- **Fonctorialité** : Un foncteur $u : C \rightarrow C'$ induit un foncteur image inverse $u^* : \hat{C}' \rightarrow \hat{C}$ par composition ($G \mapsto G \circ u$). Ce foncteur admet un adjoint à gauche $u_!$ et un adjoint à droite u_* . On a une suite de trois foncteurs adjoints $u_!, u^*, u_*$.
- **Ind-objets et Pro-objets** : On généralise la notion de limite inductive (Ind) et projective (Pro) en autorisant des catégories d’indices filtrantes. Un ind-objet de C est un foncteur $I \rightarrow C$ avec I filtrante. La catégorie $\text{Ind}(C)$ est une complétion de C par limites inductives filtrantes. C’est un outil technique très puissant.
- **Foncteurs accessibles** : Une notion technique de “foncteur qui commute à suffisamment de limites inductives filtrantes”, utilisée pour construire des petites sous-catégories génératrices. Un foncteur $f : E \rightarrow F$ est Π -accessible s’il commute aux limites inductives filtrantes indexées par des ensembles “grands devant Π ”.
- **Appendice de N. Bourbaki sur les univers** : Une discussion technique sur les fondements ensemblistes, les cardinaux fortement inaccessibles, et les ensembles artiniens (ensembles sans suite infinie d’appartenance $x_0 \ni x_1 \ni \dots$).

2.4. En Résumé

Cet exposé est un manuel technique sur les catégories de préfaisceaux. Il fournit le langage de base (univers, préfaisceaux, limites, cribles, fonctorialité, ind-objets) qui sera utilisé dans tous les exposés suivants. C’est un peu comme apprendre les règles de la grammaire avant d’écrire des phrases.

3. Exposé II : Topologies et Faisceaux (par J.-L. Verdier)

3.1. Introduction : De quoi parle-t-on ?

Cet exposé introduit les notions centrales de **topologie** sur une catégorie et de **faisceau**. C'est ici que l'on passe des préfaisceaux aux faisceaux, qui sont les objets d'étude des topos.

3.2. L'Idée Générale

Sur un espace topologique X , un faisceau est un préfaisceau qui satisfait une condition de “recollement” : si on a des données locales sur un recouvrement ouvert, et qu'elles coïncident sur les intersections, alors elles proviennent d'une donnée globale unique. L'idée de cet exposé est de généraliser cette notion à une catégorie quelconque C .

Pour cela, on doit définir ce qu'est un “recouvrement” dans C . C'est le rôle d'une **topologie** (ou d'une **prétopologie**). Une fois qu'on a une topologie, on peut définir la notion de **faisceau** : c'est un préfaisceau qui satisfait la condition de recollement pour les familles couvrantes de la topologie.

3.3. Points Clés

- **Topologie** : La donnée, pour chaque objet X , d'un ensemble $J(X)$ de cribles de X (les cribles “couvrants”), satisfaisant des axiomes de stabilité par changement de base, de caractère local, et contenant le crible maximal.
- **Prétopologie** : Une notion plus concrète, définie par des familles de morphismes “couvrantes” (axiomes PT0 à PT3). Toute prétopologie engendre une topologie.
- **Faisceau** : Un préfaisceau F est un faisceau si pour tout crible couvrant $R \rightarrow X$, l'application $F(X) \rightarrow \text{Hom}(R, F)$ est une bijection. Pour une prétopologie, cela équivaut à l'exactitude du diagramme $F(X) \rightarrow \prod_i F(X_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(X_i \times_X X_j)$.
- **Faisceau associé** : Tout préfaisceau F admet un “meilleur” faisceau associé aF , qui est un adjoint à gauche du foncteur d'inclusion des faisceaux dans les préfaisceaux. C'est l'analogue de la “complétion” d'un préfaisceau en un faisceau. Le théorème 3.4 établit son existence.
- **Topologie canonique** : La topologie la plus fine pour laquelle tous les foncteurs représentables sont des faisceaux. Les cribles couvrants pour cette topologie sont les “épimorphismes stricts universels”.
- **Propriétés d'exactitude** : La catégorie des faisceaux a de bonnes propriétés : les limites inductives sont universelles, les relations d'équivalence sont effectives universelles, les limites inductives filtrantes commutent aux limites projectives finies. C'est le théorème 4.1.
- **Faisceaux à valeurs dans une catégorie** : On généralise la notion de faisceau à des valeurs dans une catégorie D quelconque (groupes, anneaux, modules, etc.). C'est essentiel pour la cohomologie. Un préfaisceau $F : C^\circ \rightarrow D$ est un faisceau si pour tout objet S de D , le préfaisceau d'ensembles $X \mapsto \text{Hom}_D(S, F(X))$ est un faisceau.

3.4. En Résumé

Cet exposé est le cœur de la théorie des topos. Il définit les notions de topologie, de faisceau, et de faisceau associé. Il montre que la catégorie des faisceaux a de très bonnes propriétés d'exactitude,

ce qui en fait un cadre idéal pour faire de l'algèbre homologique. C'est ici que l'on construit l'objet central de la théorie : le **topos**, qui est la catégorie des faisceaux sur un site.

4. Exposé III : Functorialité des Catégories de Faisceaux (par J.-L. Verdier)

4.1. Introduction : De quoi parle-t-on ?

Cet exposé étudie le comportement des catégories de faisceaux lorsqu'on change de site. Il introduit les notions de **foncteur continu** et **cocontinu**, et le **lemme de comparaison**, qui est un outil fondamental pour montrer que deux sites définissent le même topos.

4.2. L'Idée Générale

Si on a un foncteur $u : C \rightarrow C'$ entre deux sites, on veut savoir quand il induit un morphisme entre les topos correspondants. L'idée est qu'un tel foncteur doit "respecter" la structure topologique, c'est-à-dire transformer les recouvrements de C en recouvrements de C' (ou vice-versa).

Le **lemme de comparaison** est un résultat technique qui dit que si une sous-catégorie C d'un site C' est "suffisamment dense" (tout objet de C' peut être recouvert par des objets de C), alors les topos des faisceaux sur C et C' sont équivalents. C'est un peu comme dire qu'on peut étudier un espace topologique en se restreignant à une base d'ouverts.

4.3. Points Clés

- **Foncteur continu** : Un foncteur $u : C \rightarrow C'$ est continu si pour tout faisceau F sur C' , le préfaisceau $F \circ u$ est un faisceau sur C . Un tel foncteur induit un morphisme de topos $u^s : \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}'$.
- **Foncteur cocontinu** : Un foncteur $u : C \rightarrow C'$ est cocontinu si le foncteur image inverse $u^* : \hat{C}' \rightarrow \hat{C}$ envoie les faisceaux sur C' dans les faisceaux sur C . Un tel foncteur induit un morphisme de topos dans l'autre sens.
- **Topologie induite** : Si $u : C \rightarrow C'$ est un foncteur, on peut définir sur C la topologie la plus fine qui rend u continu. C'est la topologie induite par celle de C' . On a un critère simple pour vérifier qu'un crible est couvrant pour cette topologie (Prop. 3.2).
- **Lemme de comparaison** : Si C est une sous-catégorie pleine de C' telle que tout objet de C' peut être recouvert par des objets de C , alors le foncteur de restriction des faisceaux de C' à C est une équivalence de catégories. C'est un outil très puissant pour simplifier l'étude d'un topos.
- **Localisation** : Pour un objet X d'un site C , la catégorie C/X munie de la topologie induite est un site, et le topos des faisceaux sur C/X est équivalent au topos induit $\tilde{C}/X$. C'est un résultat fondamental pour les raisonnements locaux. Le foncteur de localisation $j_X : C/X \rightarrow C$ est à la fois continu et cocontinu, ce qui donne une suite de trois foncteurs adjoints $j_{X!}, j_X^*, j_{X*}$.

4.4. En Résumé

Cet exposé étudie la fonctorialité des catégories de faisceaux. Il montre comment un foncteur entre sites induit un morphisme entre topos, et il fournit le lemme de comparaison, qui permet de remplacer un site par une sous-catégorie plus petite et plus maniable. C'est un exposé technique, mais indispensable pour les applications.

5. Exposé IV : Topos (par A. Grothendieck et J.-L. Verdier)

5.1. Introduction : De quoi parle-t-on ?

C'est l'exposé central du Tome 1. Il donne la définition d'un **topos**, étudie ses propriétés, et introduit la notion de **morphisme de topos**. Il développe également les constructions familières de la théorie des faisceaux (faisceaux de morphismes, produits tensoriels, supports) dans le cadre des topos.

5.2. L'Idée Générale

Un **topos** est une catégorie qui “ressemble” à la catégorie des faisceaux sur un espace topologique. Plus précisément, c'est une catégorie équivalente à la catégorie des faisceaux sur un petit site. Le théorème de Giraud (Thm 1.2) donne une caractérisation intrinsèque des topos : ce sont les catégories qui ont des limites projectives finies, des sommes directes disjointes et universelles, des relations d'équivalence effectives, et une petite famille génératrice.

Un **morphisme de topos** $f : E \rightarrow E'$ est l'analogue d'une application continue entre espaces topologiques. Il est défini par un couple de foncteurs adjoints (f^*, f_*) , où $f^* : E' \rightarrow E$ (image inverse) est exact à gauche et commute aux limites inductives, et $f_* : E \rightarrow E'$ (image directe) est son adjoint à droite.

5.3. Points Clés

- **Définition et caractérisation des topos** : Un topos est une catégorie équivalente à une catégorie de faisceaux. Le théorème de Giraud donne une caractérisation intrinsèque.
- **Morphismes de topos** : Un morphisme $f : E \rightarrow E'$ est un couple de foncteurs adjoints (f^*, f_*) avec f^* exact à gauche. C'est l'analogue d'une application continue. La catégorie des morphismes de E dans E' est notée $\mathcal{H}om_{top}(E, E')$.
- **Exemples** : Topos associé à un espace topologique X (noté $Top(X)$), topos ponctuel $P = (\mathcal{U}\text{-Ens})$, topos classifiant d'un groupe G (noté BG), topos de la forme $\hat{C}$, topos étale d'un schéma.
- **Topos induit** : Pour un objet X d'un topos E , le topos induit E/X est la catégorie des objets de E au-dessus de X . C'est l'analogue d'un ouvert de l'espace. Le morphisme de localisation $j_X : E/X \rightarrow E$ est un plongement.
- **Points d'un topos** : Un point d'un topos E est un morphisme de topos du topos ponctuel P dans E . C'est l'analogue d'un point d'un espace topologique. La catégorie des points est notée $\text{Point}(E)$. Un point p définit un foncteur fibre $F \mapsto F_p$.

- **Ouverts d'un topos** : Un ouvert d'un topos E est un sous-objet de l'objet final e_E . Les ouverts forment un ensemble ordonné qui généralise la topologie d'un espace topologique.
- **Sous-topos et recollement** : Un sous-topos est une sous-catégorie qui est elle-même un topos. On peut "recoller" deux topos le long d'un sous-topos ouvert et d'un sous-topos fermé. C'est le théorème de recollement (Thm 9.5.4). Un foncteur de recollement est un foncteur exact à gauche et accessible $\rho : U \rightarrow F$.
- **Topos annelés** : Un topos annelé est un topos muni d'un faisceau d'anneaux A . On peut alors faire de l'algèbre linéaire (modules, produits tensoriels) dans ce cadre. C'est essentiel pour la cohomologie. On définit les faisceaux $\mathcal{H}om_A(M, N)$ et $M \otimes_A N$ pour les modules sur un topos annelé.

5.4. En Résumé

Cet exposé est la pierre angulaire de la théorie des topos. Il définit les topos, leurs morphismes, leurs points, leurs ouverts, les sous-topos et le recollement. Il montre que les topos forment une 2-catégorie, ce qui est une différence fondamentale avec les espaces topologiques. Enfin, il introduit les topos annelés et les opérations sur les modules, qui seront utilisées dans le Tome 2 pour la cohomologie étale.

6. Conclusion Générale

Le SGA 4, Tome 1, est un ouvrage fondateur de la géométrie algébrique moderne. Il construit pas à pas la théorie des topos, qui est le cadre abstrait nécessaire pour développer la cohomologie étale.

1. L'**Exposé I** pose les fondations de la théorie des catégories de préfaisceaux (univers, limites, cribles, ind-objets).
2. L'**Exposé II** introduit les notions de topologie et de faisceau, et définit les topos comme les catégories de faisceaux sur un site.
3. L'**Exposé III** étudie la fonctorialité des catégories de faisceaux et fournit le lemme de comparaison.
4. L'**Exposé IV** est l'exposé central : il définit les topos, leurs morphismes, leurs points, les sous-topos, le recollement, et les topos annelés.

Pour un étudiant de niveau L3, l'important n'est pas de maîtriser tous les détails techniques, mais de comprendre la **philosophie générale** : on généralise la notion d'espace topologique en celle de topos, on développe une théorie des faisceaux dans ce cadre, et on obtient une catégorie (le topos) qui a de très bonnes propriétés d'exactitude. C'est cette théorie qui permettra, dans le Tome 2, de définir et d'étudier la cohomologie étale des schémas, qui a révolutionné la géométrie algébrique.

Résumé pour néophyte : SGA 4, Tome 2

Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas

1. Introduction Générale

Le SGA 4 (Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie) est un texte fondateur de la géométrie algébrique moderne. Le Tome 2, que nous résumons ici, est consacré à la **théorie des topos** et à la **cohomologie étale des schémas**.

Pour une néophyte, il faut d'abord comprendre l'objectif général. En géométrie algébrique, on étudie des objets géométriques (les schémas) définis par des équations polynomiales. La topologie usuelle (dite de Zariski) sur ces objets est trop "grossière" : elle ne permet pas de capturer certaines propriétés fines, comme les revêtements ou la cohomologie qui se comporte comme la cohomologie singulière en topologie classique.

L'idée géniale de Grothendieck et de son école a été d'introduire une nouvelle topologie, la **topologie étale**, et de développer un cadre mathématique pour l'étudier : la **théorie des topos**. Un **topos** est une généralisation de la notion d'espace topologique. C'est une catégorie qui se comporte comme la catégorie des faisceaux sur un espace.

Ce tome 2 fournit les outils techniques pour calculer la cohomologie dans ces topos. Il ne se contente pas de définir les objets, il construit toute la "boîte à outils" : produits tensoriels, suites spectrales, résolutions, conditions de finitude, et techniques de passage à la limite.

2. Exposé V : Cohomologie dans les Topos (par J.L. Verdier)

2.1. Introduction : De quoi parle-t-on ?

Cet exposé pose les fondations techniques de la cohomologie dans le cadre des **topos**. C'est un peu comme construire les règles du calcul différentiel, mais pour un univers mathématique plus abstrait que les espaces topologiques classiques.

2.2. L'Idée Générale

Imaginez que vous avez un espace topologique X (comme une sphère ou un tore). Vous pouvez y définir des **faisceaux** (des fonctions qui varient continûment) et étudier leur **cohomologie** $H^q(X, F)$, qui mesure les "obstructions" à certaines propriétés. C'est un outil puissant.

Un **topos** est une généralisation de la notion d'espace topologique. C'est une catégorie qui se comporte comme la catégorie des faisceaux sur un espace. L'idée de cet exposé est de dire : "Puisqu'on a une notion de faisceau sur un topos, on peut aussi y définir une cohomologie, et elle aura les mêmes propriétés formelles que la cohomologie classique."

2.3. Points Clés

- **Le cadre** : On travaille dans un **topos annelé** (E, A) , c'est-à-dire un topos E muni d'un faisceau d'anneaux A . Cela permet de faire de l'algèbre linéaire (modules, produits tensoriels)

dans ce cadre.

- **Modules plats** : La notion de module plat est généralisée. Un module M est plat si le foncteur $M \otimes_A -$ est exact. C'est crucial pour les calculs.
- **Cohomologie de Čech** : On introduit une méthode de calcul de la cohomologie à l'aide de recouvrements, la **cohomologie de Čech**. Elle est calculée via un complexe de chaînes, le **complexe de Čech**.
- **La suite spectrale de Cartan-Leray** : C'est l'outil central. Elle relie la cohomologie d'un topos E à celle d'un de ses recouvrements. Elle est de la forme :

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}^q(M)) \implies H^{p+q}(E, M)$$

où $\mathcal{U}$ est un recouvrement et $\mathcal{H}^q(M)$ est le faisceau de cohomologie.

- **Faisceaux acycliques** : Un faisceau est dit **acyclique** si sa cohomologie est nulle pour $q > 0$. Les faisceaux injectifs sont l'exemple typique. Ils sont utilisés pour calculer la cohomologie (résolutions injectives).
- **Le calcul des $R^q u_*$** : Pour un morphisme de topos $u : E \rightarrow E'$, on étudie les foncteurs dérivés $R^q u_*$ de l'image directe. La suite spectrale de Cartan-Leray relative à un morphisme relie la cohomologie de E à celle de E' via ces foncteurs.
- **Ext locaux et cohomologie à supports** : On généralise la notion de Ext pour les faisceaux, et on introduit la cohomologie à supports dans un fermé Z , notée $H_Z^q(E, M)$. C'est un outil pour étudier le comportement local des faisceaux.
- **L'appendice sur la cohomologie de Čech** : Il introduit une version "modifiée" du calcul de Čech qui fonctionne dans n'importe quel topos, en utilisant des **hyper-recouvrements** (des recouvrements simpliciaux).

2.4. En Résumé

Cet exposé est un manuel technique. Il ne dit pas *pourquoi* on veut faire de la cohomologie dans les topos, mais *comment* le faire. Il fournit la boîte à outils (produits tensoriels, suites spectrales, résolutions) qui sera utilisée dans les exposés suivants pour étudier des exemples concrets, notamment le **topos étale** d'un schéma.

3. Exposé Vbis : Techniques de Descente Cohomologique (par B. Saint-Donat)

3.1. Introduction : De quoi parle-t-on ?

Cet exposé introduit une technique puissante, la **descente cohomologique**, qui permet de calculer la cohomologie d'un objet en le "recouvrant" par des objets plus simples, et en "recollant" les informations locales.

3.2. L’Idée Générale

Pensez à un puzzle. Pour comprendre l’image complète (la cohomologie d’un schéma X), vous pouvez la découper en morceaux (un recouvrement $X' \rightarrow X$). La descente cohomologique est la méthode qui vous dit comment, à partir des informations sur chaque morceau et sur leurs intersections, vous pouvez reconstituer l’information globale. C’est une généralisation de la suite spectrale de Leray pour un recouvrement.

3.3. Points Clés

- **Augmentation de descente** : On formalise la notion de “recouvrement” par un morphisme $\theta : (E, A) \rightarrow (S \times D, \mathcal{O}_S)$. C’est une **augmentation**.
- **Descente effective** : Une augmentation est de **descente effective** si la catégorie des faisceaux sur S est équivalente à la catégorie des faisceaux sur E munis d’une “donnée de descente” (des isomorphismes de transition sur les produits fibrés).
- **1-descente cohomologique** : Une condition plus faible, qui assure que le foncteur d’image inverse θ^* est pleinement fidèle.
- **2-descente cohomologique** : La conjonction des deux précédentes. C’est la notion la plus forte.
- **La suite spectrale de descente** : C’est l’outil de calcul. Pour une augmentation de 1-descente, on a une suite spectrale :

$$E_1^{p,q} = R^q(H \circ \theta_p)_* \circ L^+ \theta_p^* \Rightarrow R^{p+q} H_*$$

- **Critères de descente** : L’exposé fournit de nombreux critères pour vérifier qu’un morphisme (ou une augmentation) est de descente cohomologique. Par exemple, les morphismes propres, surjectifs, ou les recouvrements ouverts le sont.
- **Exemples** : L’exposé applique ces techniques aux faisceaux de groupes abéliens sur les espaces topologiques, aux modules quasi-cohérents sur les schémas, et aux faisceaux étales sur les schémas.

3.4. En Résumé

La descente cohomologique est une méthode de calcul “locale-globale”. Elle permet de ramener l’étude de la cohomologie d’un objet complexe à l’étude de la cohomologie d’objets plus simples qui le recouvrent, à condition que le recouvrement satisfasse certaines propriétés (être de descente effective). C’est un outil fondamental pour les calculs en cohomologie étale.

4. Exposé VI : Conditions de Finitude. Topos et Sites Fibrés (par A. Grothendieck et J.-L. Verdier)

4.1. Introduction : De quoi parle-t-on ?

Cet exposé est un peu technique. Il traite de deux sujets intimement liés :

1. Les **conditions de finitude** pour les topos (quasi-compacité, quasi-séparation, cohérence). C'est l'analogue, pour les topos, des notions de finitude en géométrie algébrique.
2. Les **topos et sites fibrés**, qui sont des familles de topos paramétrées par une catégorie. C'est un outil pour étudier les limites projectives de topos.

4.2. L'Idée Générale

Imaginez que vous avez une famille d'espaces topologiques X_i qui varient continûment sur une base I . Un **topos fibré** est l'analogue de cette famille, mais pour les topos. C'est une catégorie fibrée sur I dont les fibres sont des topos.

L'idée principale de l'exposé est de montrer que si on a une famille de topos "suffisamment finis" (cohérents), alors on peut définir leur **limite projective**, et la cohomologie de cette limite est la limite inductive des cohomologies des fibres. C'est un théorème de passage à la limite très puissant.

4.3. Points Clés

- **Conditions de finitude** : On définit les notions d'objet **quasi-compact**, **quasi-séparé**, **cohérent**, et de **topos cohérent**, par analogie avec la géométrie algébrique.
- **Topos fibrés** : Un **topos fibré** sur une catégorie I est une catégorie fibrée $p : F \rightarrow I$ dont les fibres sont des topos et dont les foncteurs de changement de base sont exacts.
- **Sites fibrés** : Un **site fibré** est l'analogue pour les sites. On peut lui associer un topos fibré.
- **Topologie totale** : Sur un site fibré, on peut définir une **topologie totale**, qui est la topologie la moins fine rendant continus les foncteurs d'inclusion des fibres.
- **Limites projectives de topos fibrés** : C'est le résultat central. Si F est un topos fibré sur une catégorie cofiltrante I , on peut définir sa **limite projective** $\varprojlim F_i$. C'est un topos.
- **Théorème de passage à la limite** : Le théorème principal (8.7.3) dit que pour un morphisme $m : F \rightarrow G$ de topos fibrés, sous certaines conditions de finitude, on a un isomorphisme :

$$R^n m_* \simeq \varinjlim_{I^\circ} \mu_j^* R^n m_{j*} \mu_{j*}$$

C'est un résultat technique mais crucial pour les applications.

4.4. En Résumé

Cet exposé fournit les outils pour manipuler des familles de topos et passer à la limite. Il montre que sous des hypothèses de finitude raisonnables, la cohomologie d'une limite projective de topos est la limite inductive des cohomologies. C'est un outil indispensable pour étudier les schémas comme des limites projectives de schémas de type fini.

5. Exposé VII : Site et Topos Étales d'un Schéma (par A. Grothendieck)

5.1. Introduction : De quoi parle-t-on ?

C'est ici que l'on entre dans le vif du sujet ! Cet exposé définit et étudie le **site étale** et le **topos étale** d'un schéma X . C'est l'application principale de toute la théorie développée précédemment.

5.2. L'Idée Générale

La topologie de Zariski sur un schéma X est trop grossière. Par exemple, sur une courbe, elle ne "voit" pas les revêtements. La **topologie étale** est une topologie plus fine, où les "ouverts" sont les morphismes étales $X' \rightarrow X$. Un morphisme étale est l'analogue algébrique d'un revêtement localement trivial.

Le **topos étale** $\tilde{X}_{\text{ét}}$ est le topos des faisceaux sur le site étale $X_{\text{ét}}$. C'est l'objet central de la cohomologie étale.

5.3. Points Clés

- **Morphismes étales** : Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est étale s'il est localement de présentation finie, plat, et si ses fibres sont discrètes avec des anneaux locaux qui sont des extensions finies séparables.
- **Topologie étale** : La topologie sur la catégorie des schémas où les familles couvrantes sont les familles surjectives de morphismes étales.
- **Site étale** : La catégorie Et/X des schémas étales sur X , munie de la topologie induite, est le **site étale** de X .
- **Topos étale** : Le topos $\tilde{X}_{\text{ét}}$ des faisceaux sur $X_{\text{ét}}$.
- **Fonctorialité** : Un morphisme de schémas $f : X \rightarrow Y$ induit un morphisme de topos $f_{\text{ét}} : \tilde{X}_{\text{ét}} \rightarrow \tilde{Y}_{\text{ét}}$, avec des foncteurs image directe f_* et image inverse f^* .
- **Exemples de faisceaux** : Un schéma F sur X définit un faisceau $\underline{F}$ sur $X_{\text{ét}}$. Un $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent définit aussi un faisceau. Le faisceau constant $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est fondamental.
- **Cohomologie étale** : Les groupes $H^i(X_{\text{ét}}, F)$ sont les groupes de cohomologie du topos étale. Ils généralisent la cohomologie de Zariski.
- **Comparaison avec d'autres topologies** : La topologie étale est plus fine que la topologie de Zariski, mais moins fine que la topologie fpqc (fidèlement plate quasi-compacte). La cohomologie étale coïncide avec la cohomologie de Zariski pour les modules quasi-cohérents.
- **Cohomologie d'une limite projective de schémas** : Un résultat technique important : si $X = \varprojlim X_i$, alors $H^n(X, F) \simeq \varinjlim H^n(X_i, F_i)$ sous certaines conditions. C'est une application directe de l'Exposé VI.

5.4. En Résumé

Cet exposé définit le cadre de la cohomologie étale. Il montre comment associer à tout schéma X un topos $\tilde{X}_{\text{ét}}$, et comment calculer sa cohomologie. Il établit les premières propriétés de cette

cohomologie, notamment ses relations avec la cohomologie de Zariski et son comportement par rapport aux limites projectives. C'est la base de toute la théorie.

6. Exposé VIII : Foncteurs Fibres, Supports, Étude Cohomologique des Morphismes Finis (par A. Grothendieck)

6.1. Introduction : De quoi parle-t-on ?

Cet exposé approfondit l'étude du topos étale. Il introduit des outils fondamentaux pour les calculs : les **foncteurs fibres**, la notion de **support**, et il étudie la cohomologie des **morphismes finis**.

6.2. L'Idée Générale

Pour comprendre un faisceau sur un espace topologique, on peut l'étudier "point par point" en regardant ses **fibres**. Dans le cadre du topos étale, les points ne sont plus des points ordinaires, mais des **points géométriques** (des spectres de corps séparablement clos). L'exposé montre que cette notion de fibre fonctionne bien et que la collection de toutes les fibres est "conservative" (si un morphisme est un isomorphisme sur toutes les fibres, c'est un isomorphisme).

Ensuite, on étudie les **supports** d'un faisceau, c'est-à-dire les endroits où il est non nul. Enfin, on applique ces outils à l'étude des **morphismes finis** $f : X \rightarrow Y$. Le résultat principal est que pour un morphisme fini, les foncteurs dérivés $R^q f_*$ sont nuls pour $q > 0$. C'est une propriété très forte, analogue au fait qu'un revêtement fini n'a pas de cohomologie supérieure.

6.3. Points Clés

- **Invariance topologique** : Si $f : X' \rightarrow X$ est un morphisme entier surjectif radiciel, alors f^* est une équivalence de sites. Cela signifie que le topos étale ne change pas si on remplace X par un sous-schéma ayant même espace topologique sous-jacent. C'est une propriété d'**invariance topologique**.
- **Faisceaux sur le spectre d'un corps** : Le topos étale de $\text{Spec}(k)$ est équivalent au topos classifiant $B\pi$ du groupe de Galois absolu $\pi = \text{Gal}(\bar{k}/k)$. La cohomologie étale devient la **cohomologie galoisienne**.
- **Points géométriques et foncteurs fibres** : Un point géométrique ξ de X est un morphisme $\text{Spec}(\Omega) \rightarrow X$ avec Ω séparablement clos. Il définit un **foncteur fibre** $F \mapsto F_\xi$. La famille de tous les foncteurs fibres est conservative.
- **Anneaux et schémas strictement locaux** : On introduit les anneaux **henséliens** et **strictement locaux**. Le localisé strict $X_{(\xi)}$ de X en un point géométrique ξ est la limite projective des voisinages étales de ξ . C'est l'analogue du localisé d'un anneau en un point.
- **Calcul des fibres des $R^q f_*$** : Le théorème principal (5.2) dit que pour un morphisme $f : X \rightarrow Y$ quasi-compact et quasi-séparé, la fibre en un point géométrique y de $R^q f_*(F)$ est isomorphe à $H^q(X_{(\bar{y})}, F)$, où $X_{(\bar{y})}$ est le localisé strict de X en y . C'est un résultat fondamental pour les calculs.
- **Supports** : On définit le **support** d'un faisceau comme le complémentaire du plus grand ouvert où il est nul. On introduit la cohomologie à support dans un fermé Z , notée $H_Z^q(X, F)$.

- **Morphismes finis** : Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme fini, alors $R^q f_*(F) = 0$ pour $q > 0$. De plus, $f_*(F)_y = \prod_{x \in X_y} F_x$. C'est un résultat très utile.
- **Suites spectrales pour les morphismes entiers** : On obtient une suite spectrale de descente pour un morphisme entier surjectif.
- **Descente de faisceaux étales** : On étudie quand un faisceau sur X' provient d'un faisceau sur X par image inverse. On montre que c'est le cas pour les morphismes propres, plats et localement de présentation finie, etc.

6.4. En Résumé

Cet exposé est un outil de calcul. Il fournit les notions de points géométriques, de foncteurs fibres, d'anneaux strictement locaux, et de supports. Il montre comment calculer les fibres des faisceaux $R^q f_*$ en utilisant les localisés stricts, et il prouve des résultats fondamentaux pour les morphismes finis. C'est la boîte à outils indispensable pour tout calcul explicite en cohomologie étale.

7. Conclusion Générale

Le SGA 4, Tome 2, est un ouvrage technique mais fondamental. Il construit pas à pas la théorie de la cohomologie étale des schémas.

1. L'**Exposé V** pose les fondations de la cohomologie dans les topos (modules plats, suites spectrales, faisceaux acycliques).
2. L'**Exposé Vbis** introduit la descente cohomologique, une méthode de calcul locale-globale.
3. L'**Exposé VI** développe les conditions de finitude et les topos fibrés, permettant de passer à la limite.
4. L'**Exposé VII** définit le site et le topos étale d'un schéma, l'objet central de la théorie.
5. L'**Exposé VIII** fournit les outils de calcul concrets : points géométriques, foncteurs fibres, supports, et étude des morphismes finis.

Pour une néophyte, l'important n'est pas de maîtriser tous les détails techniques, mais de comprendre la **philosophie générale** : on remplace la topologie de Zariski par la topologie étale, on travaille dans le cadre des topos, et on développe une cohomologie qui se comporte comme la cohomologie singulière en topologie classique, avec des théorèmes de finitude, de descente, et de passage à la limite. C'est cette cohomologie qui a permis les progrès spectaculaires de la géométrie algébrique dans la seconde moitié du XXe siècle, notamment la preuve des conjectures de Weil par Deligne.

Résumé pour étudiant de niveau L3 : SGA 5

Cohomologie ℓ -adique et Fonctions L

1. Introduction Générale

Le SGA 5 (Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1965-66) est un volume consacré à la **cohomologie ℓ -adique** et à ses applications à la **rationalité des fonctions L**. Il fait suite au SGA 4, qui a posé les fondations de la cohomologie étale. Ce séminaire est dirigé par A. Grothendieck, avec la collaboration de I. Bucur, C. Houzel, L. Illusie, J.-P. Jouanolou et J.-P. Serre.

Le cœur du séminaire est la **formule de Lefschetz en cohomologie étale** (Exposés III, III B, XII) et son application à l'interprétation cohomologique des fonctions L (Exposé XIV). Cette formule est un outil fondamental qui permet de calculer la trace d'un endomorphisme sur la cohomologie d'un schéma en termes de points fixes. C'est une généralisation de la formule de Lefschetz classique en topologie algébrique.

Le volume contient également des exposés sur la théorie du passage à la limite donnant naissance à la cohomologie ℓ -adique (Exposés V, VI), et des compléments au formalisme de dualité (Exposés I, VII) et à la formule de Lefschetz (Exposés VII, X).

2. Exposé I : Complexes Dualisants (par A. Grothendieck, rédigé par L. Illusie)

2.1. Introduction : De quoi parle-t-on ?

Cet exposé est consacré au **théorème de bidualité** en cohomologie étale. Il développe une théorie formellement analogue à celle de la dualité de Serre pour les faisceaux cohérents, mais dans le cadre des faisceaux constructibles de torsion sur les préschémas. L'idée centrale est l'existence de **complexes dualisants**, qui permettent de définir un foncteur de dualité $D_K(F) = R\mathcal{H}om(F, K)$ et d'établir des isomorphismes de dualité.

2.2. L'Idée Générale

En topologie algébrique, la dualité de Poincaré dit que pour une variété compacte orientable X de dimension n , on a un isomorphisme $H^i(X, \mathbb{Q}) \cong H^{n-i}(X, \mathbb{Q})^\vee$. En géométrie algébrique, on cherche un analogue pour la cohomologie étale. Le **complexe dualisant** K_X est l'objet qui joue le rôle de la "classe fondamentale" et permet de définir un tel isomorphisme.

L'exposé montre que sous certaines conditions (notamment l'existence de la résolution des singularités et du théorème de pureté), le faisceau constant $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un complexe dualisant sur un schéma régulier. Cela permet de définir une dualité locale et globale, qui est un outil puissant pour les calculs cohomologiques.

2.3. Points Clés

- **Modules quasi-injectifs** : Un faisceau I est quasi-injectif si $Ext^i(F, I) = 0$ pour tout $i > 0$ et tout faisceau constructible F . C'est une notion plus faible que celle d'injectif.

- **Dimension quasi-injective** : On définit la dimension quasi-injective d'un complexe K comme le plus petit entier N tel que $Ext^i(F, K) = 0$ pour $i > N$ et tout F constructible.
- **Complexe dualisant** : Un complexe $K \in D^+(X)$ est dualisant s'il est de dimension quasi-injective finie, si $D_K(F) = R\mathcal{H}om(F, K)$ est constructible pour tout F constructible, et si tout F constructible est réflexif (i.e. $F \cong D_K D_K F$).
- **Théorème de bidualité** : Le théorème principal (3.4.1) dit que sur un schéma régulier vérifiant certaines conditions (par exemple excellent de caractéristique nulle), le complexe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est dualisant.
- **Unicité du complexe dualisant** : Sur un schéma connexe, un complexe dualisant est unique à translation et tensorisation par un faisceau inversible près (Théorème 2.1).
- **Dualité locale** : Pour un point fermé x d'un schéma X , on a un accouplement parfait entre $H_x^i(X, F)$ et $Ext^{2d-i}(F, K_X)_x$, où d est la dimension locale.

2.4. En Résumé

Cet exposé construit la théorie de la dualité en cohomologie étale. Il introduit la notion de complexe dualisant et démontre leur existence sur les schémas réguliers “bons”. C'est un outil technique fondamental qui sera utilisé dans les exposés suivants, notamment pour la formule de Lefschetz et l'étude des fonctions L.

3. Exposé III : Formule de Lefschetz (par A. Grothendieck, rédigé par L. Illusie)

3.1. Introduction : De quoi parle-t-on ?

Cet exposé démontre la **formule de Lefschetz-Verdier** pour les correspondances cohomologiques entre complexes de faisceaux sur des schémas de type fini sur un corps. C'est une généralisation de la formule de Lefschetz classique qui calcule la trace d'un endomorphisme sur la cohomologie en termes de ses points fixes.

3.2. L'Idée Générale

La formule de Lefschetz classique dit que pour une application continue $f : X \rightarrow X$ d'un espace compact, la trace de l'endomorphisme induit sur la cohomologie est égale à la somme des indices de points fixes. En géométrie algébrique, on remplace l'application par une **correspondance cohomologique** $u : F \rightarrow G$, et la formule relie la trace de u sur la cohomologie à un accouplement de correspondances.

L'exposé développe tout le formalisme nécessaire : produits tensoriels externes, formules de Künneth, correspondances cohomologiques, et enfin l'accouplement de Verdier. Le résultat principal est le théorème 4.4, qui énonce la commutativité d'un certain diagramme, et son corollaire 4.7, la formule de Lefschetz-Verdier.

3.3. Points Clés

- **Correspondances cohomologiques** : Une correspondance de L_1 à L_2 est un élément de $\text{Hom}(p_1^* L_1, p_2^! L_2)$. C'est une généralisation de la notion de correspondance entre cycles.
- **Produits de Künneth** : Des isomorphismes canoniques $f_{1*} L_1 \otimes_S f_{2*} L_2 \cong f_*(L_1 \otimes_S L_2)$ et $f_1 L_1 \otimes_S f_2 L_2 \cong f_1(L_1 \otimes_S L_2)$.
- **Accouplement de Verdier** : Un accouplement $\langle u, v \rangle$ entre correspondances, à valeurs dans $H^0(X, K_X)$.
- **Formule de Lefschetz-Verdier** : Le corollaire 4.7 dit que $\langle u_*, v_* \rangle = \int_C \langle u, v \rangle$, où u_*, v_* sont les images directes de u, v sur S .
- **Applications** : La formule donne comme cas particuliers la formule de Woods Hole et des formules de points fixes pour les endomorphismes de Frobenius.

3.4. En Résumé

Cet exposé est le cœur technique du séminaire. Il démontre la formule de Lefschetz-Verdier, qui est un outil puissant pour le calcul de traces en cohomologie étale. Cette formule sera ensuite appliquée à l'étude des fonctions L.

4. Exposé V : Systèmes Projectifs ℓ -adiques (par J.-P. Jouanolou)

4.1. Introduction : De quoi parle-t-on ?

Cet exposé, avec l'Exposé VI, pose les fondations de la **cohomologie ℓ -adique**. L'idée est de définir une théorie cohomologique à coefficients dans $\mathbb{Z}_\ell$ (ou $\mathbb{Q}_\ell$) en partant de la cohomologie étale à coefficients finis $\mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z}$ et en passant à la limite projective.

4.2. L'Idée Générale

La cohomologie étale à coefficients dans $\mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z}$ est bien définie, mais elle ne donne pas directement une théorie cohomologique pour $\mathbb{Z}_\ell$ ou $\mathbb{Q}_\ell$. Le problème est que la limite projective des $H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z})$ n'est pas toujours la "bonne" chose à considérer. L'idée de Grothendieck est d'utiliser le **formalisme des systèmes projectifs ℓ -adiques**.

On définit la catégorie des $\mathbb{Z}_\ell$ -faisceaux constructibles comme la limite (au sens des catégories) des $\mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z}$ -faisceaux constructibles. La cohomologie ℓ -adique est alors définie comme la limite projective des cohomologies à coefficients finis, avec un soin particulier pour les problèmes de $\lim^1$.

4.3. Points Clés

- **Systèmes projectifs adiques** : Un système projectif ℓ -adique est un système projectif (M_n) de $\mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z}$ -modules tel que $M_n \cong M_{n+1} \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^{n+1} \mathbb{Z}} \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z}$. C'est un "module sur $\mathbb{Z}_\ell$ " au sens des faisceaux.

- **Faisceaux constructibles ℓ -adiques** : Un $\mathbb{Z}_\ell$ -faisceau constructible est un système projectif (F_n) de $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ -faisceaux constructibles tel que $F_n \cong F_{n+1} \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/\ell^n$. C'est l'analogue ℓ -adique des faisceaux constructibles.
- **Cohomologie ℓ -adique** : On définit $H^i(X, \mathbb{Z}_\ell) = \varprojlim_n H^i(X, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$. Pour que cette définition soit "bonne", il faut que les systèmes projectifs satisfassent la condition de Mittag-Leffler (ce qui est le cas pour les schémas propres).
- **Passage à la limite** : L'exposé montre comment les résultats de la cohomologie étale à coefficients finis s'étendent à la cohomologie ℓ -adique par passage à la limite.

4.4. En Résumé

Cet exposé est technique mais essentiel. Il construit le cadre de la cohomologie ℓ -adique, qui est la "bonne" théorie cohomologique pour les variétés algébriques sur les corps finis. C'est cette théorie qui permettra de démontrer les conjectures de Weil.

5. Exposé VI : Cohomologie ℓ -adique (par J.-P. Jouanolou)

5.1. Introduction : De quoi parle-t-on ?

Cet exposé poursuit la construction de la cohomologie ℓ -adique commencée dans l'Exposé V. Il étend aux $\mathbb{Z}_\ell$ -faisceaux constructibles le formalisme des images directes supérieures à supports propres, et étudie les propriétés de finitude.

5.2. L'Idée Générale

Une fois la catégorie des $\mathbb{Z}_\ell$ -faisceaux constructibles définie, on veut étendre les opérations habituelles de la cohomologie étale (images directes, images inverses, produits tensoriels, etc.) à cette catégorie. L'exposé montre que le formalisme des six opérations fonctionne bien pour les $\mathbb{Z}_\ell$ -faisceaux constructibles, à condition de faire attention aux problèmes de $\lim^1$.

En particulier, on montre que pour un morphisme propre $f : X \rightarrow Y$, les faisceaux $R^i f_* F$ sont constructibles si F l'est. C'est un résultat de finitude crucial.

5.3. Points Clés

- **Images directes supérieures** : Pour $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini, et F un $\mathbb{Z}_\ell$ -faisceau constructible, les $R^i f_* F$ sont des $\mathbb{Z}_\ell$ -faisceaux constructibles. De plus, pour f propre, $R^i f_! F = R^i f_* F$.
- **Théorème de finitude** : Le théorème principal est que la cohomologie ℓ -adique d'une variété algébrique sur un corps fini est de dimension finie sur $\mathbb{Q}_\ell$.
- **Formalisme de dualité** : L'exposé ne donne pas de définition d'une catégorie dérivée des $\mathbb{Z}_\ell$ -faisceaux avec des opérations $\otimes$ et $R\mathcal{H}om$ prolongeant celles des $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ -faisceaux. Cette question a fait l'objet de la thèse (non publiée) de Jouanolou.

5.4. En Résumé

Cet exposé complète la construction de la cohomologie ℓ -adique. Il montre que le formalisme de la cohomologie étale s'étend aux coefficients ℓ -adiques, avec des théorèmes de finitude. C'est la théorie qui sera utilisée pour démontrer la rationalité des fonctions L.

6. Exposé VII : Cohomologie de quelques schémas classiques et théorie cohomologique des classes de Chern (par J.-P. Jouanolou)

6.1. Introduction : De quoi parle-t-on ?

Cet exposé est indépendant du reste du séminaire. Il contient plusieurs résultats importants : a) Le calcul de la cohomologie de quelques variétés standard (espaces affines, projectifs, variétés de drapeaux). b) Un exposé de la théorie des classes de Chern en cohomologie étale. c) Une démonstration de la “formule de self-intersection” et diverses applications.

6.2. L’Idée Générale

La théorie des classes de Chern est un outil fondamental en géométrie algébrique et en topologie. Elle associe à un fibré vectoriel des classes de cohomologie qui mesurent “l’obstruction” à ce que le fibré soit trivial. L’exposé développe cette théorie dans le cadre de la cohomologie étale, en utilisant les résultats de la cohomologie ℓ -adique.

Le calcul de la cohomologie des variétés standard est important pour les applications. Par exemple, la cohomologie de l’espace projectif $\mathbb{P}^n$ est connue : $H^{2i}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_\ell) \cong \mathbb{Z}_\ell$ pour $0 \leq i \leq n$, et $H^{2i+1} = 0$.

6.3. Points Clés

- **Classes de Chern** : Pour un fibré vectoriel E sur un schéma X , on définit des classes de Chern $c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z}_\ell(i))$. Elles satisfont des propriétés fonctorielles et des formules de Whitney.
- **Formule de self-intersection** : Pour un sous-schéma fermé lisse $Y \subset X$, on a $i^*i_* = xc_d(N)$, où N est le fibré normal et c_d est la classe de Chern top.
- **Applications** : Calcul de la cohomologie des variétés éclatées, formule de Gauss-Bonnet.
- **Conditions de finitude** : L’exposé contient des sorties sur les conditions de finitude dans les catégories dérivées et les groupes de Grothendieck.

6.4. En Résumé

Cet exposé est un outil de calcul. Il fournit les techniques de base pour calculer la cohomologie de variétés algébriques et pour manipuler les classes de Chern en cohomologie étale. Ces techniques seront utilisées dans les applications, notamment pour la formule de Lefschetz et l’étude des fonctions L.

7. Exposé XII : Formules de Nielsen-Wecken et de Lefschetz en géométrie algébrique (par A. Grothendieck, rédigé par I. Bucur)

7.1. Introduction : De quoi parle-t-on ?

Cet exposé donne une autre démonstration de la formule de Lefschetz, indépendante de celle de l'Exposé III. Il contient également une démonstration de la “conjecture de divisibilité” de Grothendieck.

7.2. L’Idée Générale

La formule de Lefschetz peut être démontrée par différentes méthodes. L'Exposé III utilise le formalisme de dualité et les correspondances cohomologiques. L'Exposé XII utilise une méthode plus directe, basée sur la théorie des traces commutatives de Grothendieck (qui généralise celle de Stallings). Cette théorie permet de définir des termes locaux et de démontrer la formule de divisibilité.

La **conjecture de divisibilité** dit que sous certaines conditions, les termes locaux de la formule de Lefschetz sont divisibles par certaines quantités. C'est un résultat important pour les applications à la théorie des représentations.

7.3. Points Clés

- **Théorie des traces** : Une généralisation de la notion de trace pour les endomorphismes de complexes, avec des applications aux formules de Lefschetz.
- **Termes locaux** : La formule de Lefschetz s'exprime comme une somme de termes locaux, chacun associé à un point fixe. Ces termes locaux sont des traces non commutatives.
- **Conjecture de divisibilité** : Sous certaines hypothèses, les termes locaux sont divisibles par le degré de la correspondance.
- **Formule de Nielsen-Wecken** : Une généralisation de la formule de Lefschetz pour les revêtements.

7.4. En Résumé

Cet exposé fournit une deuxième démonstration de la formule de Lefschetz, plus directe que celle de l'Exposé III. Il introduit la théorie des traces non commutatives et démontre la conjecture de divisibilité. Ces résultats sont importants pour les applications à la théorie des représentations et à l'étude des fonctions L.

8. Exposé XIV : Morphisme de Frobenius et rationalité des fonctions L (par C. Houzel)

8.1. Introduction : De quoi parle-t-on ?

C'est l'aboutissement du séminaire. Cet exposé donne la démonstration de Grothendieck de la **rationalité des fonctions L**, en utilisant la formule des traces de l'Exposé XII (ou III B). C'est une application spectaculaire de la cohomologie ℓ -adique.

8.2. L'Idée Générale

Les fonctions L sont des objets centraux en théorie des nombres. Pour une variété algébrique X sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, on définit une fonction zêta $Z(X, t)$ qui encode le nombre de points de X sur les extensions finies de $\mathbb{F}_q$. La conjecture de Weil (démontrée par Deligne) prédit que $Z(X, t)$ est une fonction rationnelle, et plus précisément que c'est un produit de fonctions $1/(1 - \alpha_i t)$ où les α_i sont des nombres algébriques de valeur absolue $q^{i/2}$.

Grothendieck a montré que la rationalité des fonctions L découle de la formule de Lefschetz appliquée à l'endomorphisme de Frobenius. L'idée est que la fonction zêta s'exprime comme une trace sur la cohomologie ℓ -adique, et que la formule de Lefschetz permet de calculer cette trace en termes de points fixes (qui sont les points de X sur $\mathbb{F}_{q^n}$).

8.3. Points Clés

- **Morphisme de Frobenius** : L'endomorphisme de Frobenius $F : X \rightarrow X$ qui élève les coordonnées à la puissance q . Ses points fixes sont exactement les points de X sur $\mathbb{F}_q$.
- **Comparaison des Frobenius** : Distinction entre Frobenius "géométrique" et "arithmétique".
- **Formule des traces** : Application de la formule de Lefschetz à F donne une expression de la fonction zêta en termes de traces sur la cohomologie.
- **Rationalité des fonctions L** : La démonstration procède en deux étapes : réduction au cas des courbes, puis passage à la limite pour se ramener à une formule pour des $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ -faisceaux.

8.4. En Résumé

Cet exposé est le point culminant du séminaire. Il montre comment la cohomologie ℓ -adique et la formule de Lefschetz permettent de démontrer la rationalité des fonctions L. C'est une application majeure de la théorie des topos et de la cohomologie étale, qui a profondément influencé la géométrie algébrique et la théorie des nombres.

9. Conclusion Générale

Le SGA 5 est un volume technique mais fondamental. Il construit la cohomologie ℓ -adique et démontre la formule de Lefschetz, qui est un outil puissant pour le calcul de traces. Ces résultats

sont ensuite appliqués à la démonstration de la rationalité des fonctions L , qui est une des grandes réalisations de la géométrie algébrique du XXe siècle.

Pour un étudiant de niveau L3, l'important est de comprendre la **philosophie générale** : on part de la cohomologie étale à coefficients finis, on construit une théorie cohomologique pour les coefficients ℓ -adiques, on développe un formalisme de dualité et de traces, et on applique le tout à l'étude des fonctions L . C'est un exemple magnifique de la puissance des méthodes cohomologiques en géométrie algébrique.

SGA 6 : Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch
Séminaire dirigé par P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie
1966-67

1. Introduction et Motivations

Le but du Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 6 (SGA 6) est de développer une théorie globale des intersections et une formule de Riemann-Roch pour des schémas quelconques. Le point de départ est la formule de Riemann-Roch classique pour un morphisme propre $f : X \rightarrow Y$ de schémas quasi-projectifs et lisses sur un corps k :

$$\mathrm{Todd}(TY)\mathrm{ch}_Y(f_*(cl(F))) = f_*(\mathrm{Todd}(TX)\mathrm{ch}_X(F)) \quad (1)$$

où F est un faisceau cohérent sur X , $cl(F)$ sa classe dans $K(X)$, et f_* est l'image directe en K -théorie. Les motivations principales sont de généraliser cette formule en :

1. Se débarrassant de l'hypothèse d'existence d'un corps de base k .
2. Remplaçant les hypothèses de régularité sur X et Y par une hypothèse de "régularité locale" du morphisme f (morphisme localement d'intersection complète).
3. Éliminant les hypothèses de quasi-projectivité.

L'outil essentiel pour formuler une théorie satisfaisante est la théorie des catégories dérivées de Verdier, et la notion fondamentale est celle de **complexe parfait**.

2. Le Groupe de Grothendieck $K(X)$ et les Complexes Parfaits

Pour un schéma général X , on distingue deux groupes de Grothendieck :

- $K'(X)$: le groupe de Grothendieck des **complexes parfaits** sur X . C'est un anneau (via le produit tensoriel dérivé) et un foncteur contravariant.
- $K_\bullet(X)$: le groupe de Grothendieck des **complexes pseudo-cohérents à cohomologie bornée**. C'est un module sur $K'(X)$ et un foncteur covariant pour les morphismes propres.

Lorsque X est régulier, l'homomorphisme naturel $K'(X) \rightarrow K_\bullet(X)$ est un isomorphisme, ce qui est l'analogue du théorème de dualité de Poincaré.

Un **complexe parfait** est un complexe de $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres de type fini, à degrés bornés, et qui est localement isomorphe à un tel complexe dans la catégorie dérivée $D(X)$. C'est la généralisation naturelle de la notion de fibré vectoriel.

3. λ -Anneaux et Filtration

Pour définir les classes de Chern, on munit $K'(X)$ d'une structure de λ -anneau. Un λ -anneau est un anneau commutatif unitaire K muni d'opérations $\lambda^i : K \rightarrow K$ satisfaisant des relations universelles. Les puissances extérieures fournissent l'exemple fondamental.

On définit ensuite les opérations γ^i par :

$$\gamma_t(x) = \lambda_{t/(1-t)}(x) \quad (2)$$

La **filtration** λ de $K'(X)$ est définie par les idéaux $Fil^i K'(X)$ engendrés par les produits $\gamma^{i_1}(x_1 - \varepsilon(x_1)) \cdots \gamma^{i_k}(x_k - \varepsilon(x_k))$ avec $\sum i_j \geq i$, où ε est l'augmentation (le rang). L'anneau gradué associé, noté $Gr^\bullet(X)$, remplace l'anneau de Chow $A(X)$. Pour un schéma X noethérien régulier muni d'un module inversible ample, il existe un isomorphisme modulo torsion entre $Gr^\bullet(X)$ et $A(X) \otimes \mathbb{Q}$.

4. Le Théorème de Riemann-Roch Généralisé

Le théorème principal du SGA 6 est le suivant.

Théorème 1 (Riemann-Roch). *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre et localement d'intersection complète de schémas noethériens. On définit un élément $T_f \in K'(X)$, appelé **fibré tangent relatif virtuel**. Alors, pour tout $x \in K'(X)$, on a l'égalité dans $Gr^\bullet(Y) \otimes \mathbb{Q}$:*

$$f_*(ch(x) \cdot Todd(T_f)) = ch(f_*(x)) \quad (3)$$

où $f_* : K'(X) \rightarrow K'(Y)$ est l'image directe en K -théorie, $ch : K' \rightarrow Gr^\bullet \otimes \mathbb{Q}$ est le caractère de Chern, et $Todd$ est la classe de Todd.

La définition de T_f repose sur une factorisation de f en une immersion régulière $i : X \hookrightarrow X'$ suivie d'un morphisme lisse $f' : X' \rightarrow Y$. On pose alors $T_f = cl'(\mathcal{L}_{X'/Y})$, où $\mathcal{L}_{X'/Y}$ est un complexe parfait construit à partir du fibré conormal de X dans X' et du fibré cotangent relatif de X' sur Y .

5. Conclusion et Problèmes Ouverts

Le SGA 6 fournit une théorie cohérente et puissante des intersections et du théorème de Riemann-Roch pour une large classe de morphismes. Cependant, il identifie une lacune majeure : l'absence d'une définition satisfaisante des **opérations de puissances extérieures dans la catégorie dérivée** $D(X)$. Cela empêche de munir $K'(X)$ d'une structure de λ -anneau dans le cas général (non régulier) et de définir les classes de Chern de manière purement homologique. Ce problème, lié à la théorie des opérations cohomologiques en K -théorie, sera résolu plus tard par des travaux de Grayson, Joyal, et d'autres. Le séminaire ouvre également la voie à des variantes analytiques complexes et à des généralisations du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer.

1. Introduction et Motivations

Le but du Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 6 (SGA 6) est de développer une théorie globale des intersections et une formule de Riemann-Roch pour des schémas quelconques. Le point de départ est la formule de Riemann-Roch classique pour un morphisme propre $f : X \rightarrow Y$ de schémas quasi-projectifs et lisses sur un corps k :

$$\mathrm{Todd}(TY)\mathrm{ch}_Y(f_*(cl(F))) = f_*(\mathrm{Todd}(TX)\mathrm{ch}_X(F)) \quad (4)$$

où F est un faisceau cohérent sur X , $cl(F)$ sa classe dans $K(X)$, et f_* est l'image directe en K -théorie. Les motivations principales sont de généraliser cette formule en :

1. Se débarrassant de l'hypothèse d'existence d'un corps de base k .
2. Remplaçant les hypothèses de régularité sur X et Y par une hypothèse de "régularité locale" du morphisme f (morphisme localement d'intersection complète).
3. Éliminant les hypothèses de quasi-projectivité.

L'outil essentiel pour formuler une théorie satisfaisante est la théorie des catégories dérivées de Verdier, et la notion fondamentale est celle de **complexe parfait**.

2. Le Groupe de Grothendieck $K(X)$ et les Complexes Parfaits

Pour un schéma général X , on distingue deux groupes de Grothendieck :

- $K'(X)$: le groupe de Grothendieck des **complexes parfaits** sur X . C'est un anneau (via le produit tensoriel dérivé) et un foncteur contravariant.
- $K_\bullet(X)$: le groupe de Grothendieck des **complexes pseudo-cohérents à cohomologie bornée**. C'est un module sur $K'(X)$ et un foncteur covariant pour les morphismes propres.

Lorsque X est régulier, l'homomorphisme naturel $K'(X) \rightarrow K_\bullet(X)$ est un isomorphisme, ce qui est l'analogue du théorème de dualité de Poincaré.

Un **complexe parfait** est un complexe de $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres de type fini, à degrés bornés, et qui est localement isomorphe à un tel complexe dans la catégorie dérivée $D(X)$. C'est la généralisation naturelle de la notion de fibré vectoriel.

3. λ -Anneaux et Filtration

Pour définir les classes de Chern, on munit $K'(X)$ d'une structure de **λ -anneau**. Un λ -anneau est un anneau commutatif unitaire K muni d'opérations $\lambda^i : K \rightarrow K$ satisfaisant des relations universelles. Les puissances extérieures fournissent l'exemple fondamental.

On définit ensuite les opérations γ^i par :

$$\gamma_t(x) = \lambda_{t/(1-t)}(x) \quad (5)$$

La **filtration** λ de $K'(X)$ est définie par les idéaux $Fil^i K'(X)$ engendrés par les produits $\gamma^{i_1}(x_1 - \varepsilon(x_1)) \cdots \gamma^{i_k}(x_k - \varepsilon(x_k))$ avec $\sum i_j \geq i$, où ε est l'augmentation (le rang). L'anneau gradué associé, noté $Gr^\bullet(X)$, remplace l'anneau de Chow $A(X)$. Pour un schéma X noethérien régulier muni d'un module inversible ample, il existe un isomorphisme modulo torsion entre $Gr^\bullet(X)$ et $A(X) \otimes \mathbb{Q}$.

4. Le Théorème de Riemann-Roch Généralisé

Le théorème principal du SGA 6 est le suivant.

Théorème 2 (Riemann-Roch). *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre et localement d'intersection complète de schémas noethériens. On définit un élément $T_f \in K'(X)$, appelé **fibré tangent relatif virtuel**. Alors, pour tout $x \in K'(X)$, on a l'égalité dans $Gr^\bullet(Y) \otimes \mathbb{Q}$:*

$$f_*(ch(x) \cdot Todd(T_f)) = ch(f_*(x)) \quad (6)$$

où $f_* : K'(X) \rightarrow K'(Y)$ est l'image directe en K -théorie, $ch : K' \rightarrow Gr^\bullet \otimes \mathbb{Q}$ est le caractère de Chern, et $Todd$ est la classe de Todd.

La définition de T_f repose sur une factorisation de f en une immersion régulière $i : X \hookrightarrow X'$ suivie d'un morphisme lisse $f' : X' \rightarrow Y$. On pose alors $T_f = cl'(\mathcal{L}_{X'/Y})$, où $\mathcal{L}_{X'/Y}$ est un complexe parfait construit à partir du fibré conormal de X dans X' et du fibré cotangent relatif de X' sur Y .

5. Conclusion et Problèmes Ouverts

Le SGA 6 fournit une théorie cohérente et puissante des intersections et du théorème de Riemann-Roch pour une large classe de morphismes. Cependant, il identifie une lacune majeure : l'absence d'une définition satisfaisante des **opérations de puissances extérieures dans la catégorie dérivée** $D(X)$. Cela empêche de munir $K'(X)$ d'une structure de λ -anneau dans le cas général (non régulier) et de définir les classes de Chern de manière purement homologique. Ce problème, lié à la théorie des opérations cohomologiques en K -théorie, sera résolu plus tard par des travaux de Grayson, Joyal, et d'autres. Le séminaire ouvre également la voie à des variantes analytiques complexes et à des généralisations du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer.

SGA 7 II : Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique
P. Deligne et N. Katz
1973

1. Introduction et Motivations

Le Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 7 (SGA 7) est consacré à l'étude des groupes de monodromie en géométrie algébrique. Le cadre général est le suivant : soit S un trait hensélien (par exemple, le spectre d'un anneau de valuation discrète complet), et $f : X \rightarrow S$ un morphisme de type fini. On étudie l'action du groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{n}/n)$ sur la cohomologie ℓ -adique de la fibre géométrique générique $X_{\bar{n}}$.

Les motivations principales sont :

1. Comprendre le comportement de la cohomologie lors de la spécialisation à la fibre spéciale X_s .
2. Prouver le **théorème de monodromie** : l'action du groupe d'inertie $I \subset \text{Gal}(\bar{n}/n)$ est quasi-unipotente.
3. Appliquer ces résultats à l'étude des variétés abéliennes et de leurs modèles de Néron, en particulier pour prouver le **théorème de réduction stable**.

2. Le Théorème de Monodromie et les Cycles Évanescents

Soit S un trait hensélien, et $f : X \rightarrow S$ un morphisme de type fini. On note n (resp. s) le point générique (resp. fermé) de S , et $\bar{n}$ (resp. $\bar{s}$) un point géométrique.

Théorème 3 (Monodromie). *Soit H un espace de cohomologie ℓ -adique de $X_{\bar{n}}$ (par exemple, $H^i(X_{\bar{n}}, \mathbb{Q}_{\ell})$). L'action du groupe d'inertie I sur H est quasi-unipotente : pour tout $g \in I$, l'endomorphisme $g - \text{id}$ est nilpotent.*

Deux démonstrations sont données : une arithmétique (via la théorie des représentations ℓ -adiques) et une géométrique (via les cycles évanescents).

Pour étudier la relation entre la cohomologie de $X_{\bar{n}}$ et celle de $X_{\bar{s}}$, Grothendieck introduit les **faisceaux de cycles évanescents** ψ^i . Ce sont des faisceaux sur $X_{\bar{s}}$. Il existe une suite exacte longue :

$$\cdots \rightarrow H^i(X_{\bar{s}}, \mathbb{Z}_{\ell}) \xrightarrow{sp} H^i(X_{\bar{n}}, \mathbb{Z}_{\ell}) \rightarrow \psi^i \rightarrow H^{i+1}(X_{\bar{s}}, \mathbb{Z}_{\ell}) \rightarrow \cdots \quad (7)$$

où sp est le morphisme de spécialisation. On montre que $\psi^i = 0$ pour $i > n = \dim(X/S)$, et que si f est propre et lisse, alors $\psi^i = 0$ pour tout $i > 0$.

3. Applications aux Variétés Abéliennes

Soit A une variété abélienne sur le corps des fractions K d'un anneau de valuation discrète V . On note $\mathcal{A}$ son **modèle de Néron**. La fibre spéciale $\mathcal{A}_s$ est une extension d'une variété abélienne B par un tore T :

$$0 \rightarrow T \rightarrow \mathcal{A}_s^0 \rightarrow B \rightarrow 0 \quad (8)$$

Le théorème de réduction stable stipule qu'après une extension finie séparable de K , le tore T est trivial. Une démonstration de ce théorème utilise le théorème de monodromie appliqué au module de Tate $T_\ell(A)$.

4. La Théorie des Biextensions

Une **biextension** de (P, Q) par G est un G -torseur E sur $P \times Q$, muni de deux structures d'extension partielles (sur P et sur Q) qui sont compatibles. Le résultat fondamental est l'isomorphisme :

$$\mathrm{Biext}^1(P, Q; G) \cong \mathrm{Ext}^1(P \otimes Q, G) \quad (9)$$

Dans le cas où P et Q sont des variétés abéliennes sur un schéma S et $G = \mathbb{G}_m$, les biextensions correspondent aux **correspondances divisorielles** sur $P \times Q$. Ceci permet de donner une interprétation cohomologique de la spécialisation des correspondances divisorielles.

5. Théorie des Déformations Formelles

L'Exposé VI de D.S. Rim est une introduction à la théorie des déformations formelles. Il définit les catégories cofibrées en groupoïdes et la notion de **foncteur de déformation**. Le résultat principal est le théorème de Schlessinger.

Théorème 4 (Schlessinger). *Soit A une catégorie cofibrée en groupoïdes sur la catégorie des anneaux locaux artiniens. Si A est semi-homogène et si son espace tangent $[A(k[\epsilon])]$ est de dimension finie sur k , alors A admet un **objet formel versel minimal**, unique à isomorphisme près.*

Ce théorème est un outil puissant pour étudier les déformations de schémas et de singularités.

6. La Formule de Picard-Lefschetz et les Pinceaux de Lefschetz

Le SGA 7 II est surtout connu pour deux résultats majeurs :

1. La **formule de Picard-Lefschetz** (Exposé XV), qui décrit l'action de la monodromie locale autour d'une singularité quadratique ordinaire.
2. La **théorie des pinceaux de Lefschetz** (Exposés XVII et XVIII), qui fournit des relations entre la cohomologie d'une variété projective et celle de ses sections hyperplanes.

Ces outils sont ensuite appliqués pour démontrer le théorème de Noether (Exposé XIX), le théorème de Griffiths (Exposé XX), et pour étudier le niveau de la cohomologie des intersections complètes (Exposé XXI).

7. La Formule de Congruence pour la Fonction Zêta

L'Exposé XXII (N. Katz) donne une formule de congruence pour la fonction zêta d'une variété algébrique sur $\mathbb{F}_q$. Il montre que la fonction zêta modulo p peut être exprimée comme un produit alterné de polynômes caractéristiques d'un "Frobenius" agissant sur la cohomologie cohérente, de De Rham ou étale. Ceci améliore le théorème de Chevalley-Warning.