

Le SGA 1 de Grothendieck
Revêtements étales et groupe fondamental
Résumé de lecture et motivations, à l'usage d'une étudiante de L3

Notes de lecture préparées avec Claude

Septembre 2026

Résumé

Ce texte résume le premier volume du *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie* dirigé par Alexandre Grothendieck en 1960-1961, connu sous le sigle SGA 1 et consacré aux revêtements étales et au groupe fondamental. L'objectif n'est pas de reproduire les démonstrations (le volume original fait plus de 300 pages et suppose acquis tout l'appareil des schémas), mais de donner à une lectrice de niveau L3 une carte du terrain : pourquoi ce texte a été écrit, quel problème il résout, comment les treize exposés s'articulent entre eux, et pourquoi on continue à le lire aujourd'hui.

1. Le Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie

Au début des années 1960, Grothendieck refonde entièrement la géométrie algébrique à l'IHÉS, autour de la notion de *schéma*. Le projet se déploie sur deux fronts :

- les **Éléments de Géométrie Algébrique** (EGA), rédigés avec Jean Dieudonné, qui posent les fondations générales (schémas, morphismes, faisceaux quasi-cohérents, cohomologie) de façon systématique et exhaustive ;
- le **Séminaire de Géométrie Algébrique** (SGA), issu d'exposés oraux donnés devant un auditoire de chercheurs, qui développe des thématiques plus spécialisées au fur et à mesure des besoins, souvent avant même que les EGA correspondants n'existent.

Le séminaire comporte sept parties, numérotées SGA 1 à SGA 7, portant chacune sur un thème : revêtements étales (SGA 1, notre sujet), cohomologie locale (SGA 2), schémas en groupes (SGA 3), cohomologie étale et topos (SGA 4), cohomologie ℓ -adique (SGA 5), théorie des intersections (SGA 6), monodromie (SGA 7). SGA 1 est donc le *tome fondateur* de cet ensemble : c'est là que Grothendieck met en place, pour la première fois dans le langage des schémas, une théorie de Galois généralisée qui servira d'assise à tout ce qui suit, en particulier à la cohomologie étale de SGA 4, l'un des outils les plus puissants des mathématiques du XX^e siècle.

Le texte que vous avez transmis est l'édition recomposée en L^AT_EX (projet dirigé par Bas Edixhoven, publié par la Société Mathématique de France dans la collection *Documents Mathématiques*) du volume original paru chez Springer en 1971 dans les *Lecture Notes in Mathematics*. Les exposés I à XI reproduisent le séminaire oral de 1960-61 tel quel ; les exposés XII et XIII, ajoutés plus tard par Michèle Raynaud, comblent des lacunes signalées par Grothendieck dans son introduction.

2. L'idée motrice : un groupe fondamental pour la géométrie algébrique

C'est le cœur du volume, et la partie la plus facile à motiver pour quelqu'un qui sort d'une licence de mathématiques, car elle recycle deux théories que vous connaissez déjà et les fait entrer en résonance.

2.1. Deux théories qui se ressemblent étrangement

En topologie. Si X est un espace topologique raisonnable (connexe, localement connexe par arcs) et $x_0 \in X$ un point de base, le **groupe fondamental** $\pi_1(X, x_0)$ classe les **revêtements** de X : à un revêtement connexe $Y \rightarrow X$ correspond un sous-groupe de $\pi_1(X, x_0)$ (le stabilisateur d'un point au-dessus de x_0), et cette correspondance est une équivalence entre la catégorie des revêtements de X et celle des ensembles munis d'une action de $\pi_1(X, x_0)$.

En théorie des corps. Si k est un corps et $\bar{k}$ une clôture séparable, le **groupe de Galois** $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ (profini, muni de la topologie de Krull) classe les **extensions algébriques séparables** de k : à une extension finie séparable k'/k correspond, une fois choisi un plongement de k' dans $\bar{k}$, un sous-groupe ouvert de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$, et la correspondance de Galois habituelle n'est autre qu'une équivalence entre extensions finies séparables de k et ensembles finis munis d'une action continue de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$.

Ces deux énoncés ont exactement la même forme. Ce n'est pas un hasard : c'est le point de départ de tout SGA 1.

2.2. L'unification par les schémas

Un schéma $\text{Spec}(k)$ (le spectre d'un corps) est un espace topologique à un seul point, donc *a priori* sans topologie intéressante. Pourtant on vient de voir qu'il porte une théorie de Galois, c'est-à-dire une théorie de « revêtements » non triviale, gouvernée par un groupe profini caché dans la structure algébrique du corps. Grothendieck en tire la conclusion suivante : la théorie de Galois *est* une théorie du groupe fondamental, à condition de la formuler dans le cadre des schémas plutôt que dans celui des espaces topologiques classiques. Le rôle des ouverts (utilisés pour définir les revêtements topologiques usuels) est alors joué par les **morphismes étales**, qui sont l'analogue algébrique des difféomorphismes locaux : un revêtement topologique non ramifié devient, côté schémas, un revêtement étale.

On obtient ainsi une notion de **groupe fondamental étale** $\pi_1(X, \bar{x})$, définie pour *tout* schéma connexe X muni d'un point géométrique $\bar{x}$, qui :

- redonne le groupe de Galois usuel lorsque $X = \text{Spec}(k)$;
- redonne (essentiellement) le groupe fondamental topologique lorsque X est une variété algébrique lisse sur $\mathbb{C}$, via la comparaison avec l'espace analytique associé (c'est tout l'objet de l'exposé XII) ;
- se comporte encore de façon raisonnable lorsque X est le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres, un objet qui n'a ni topologie usuelle ni corps de définition, mais dont on peut désormais parler du groupe fondamental exactement au même titre qu'une courbe algébrique.

C'est ce que Grothendieck appelle dans son introduction le **point de vue kroneckerien** : traiter sur un pied d'égalité une variété algébrique classique et un anneau d'entiers, deux objets que la géométrie algébrique du XIX^e siècle (héritée de Kronecker) pressentait déjà comme profondément analogues, sans disposer du langage pour le formuler proprement. Les schémas fournissent ce langage.

Idée à retenir. SGA 1 ne «invente» pas un nouvel objet exotique : il remarque que la théorie de Galois *est déjà* une théorie de groupe fondamental, et il construit le cadre (les schémas, les morphismes étales) qui permet d'énoncer ce fait et de l'étendre à des objets bien plus généraux que des corps ou des espaces topologiques.

2.3. Un dictionnaire à garder sous la main

Topologie	Corps / Galois	SGA 1 (schémas)
espace X , point x_0	corps k	schéma X , point géométrique $\bar{x}$
revêtement $Y \rightarrow X$	extension séparable k'/k	morphisme fini étale $Y \rightarrow X$
groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$	groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{k}/k)$	groupe fondamental étale $\pi_1(X, \bar{x})$
revêtement universel	clôture séparable $\bar{k}$	pro-revêtement universel
application continue	morphisme de corps	morphisme de schémas

C'est en gardant ce tableau en tête que la lecture des treize exposés devient beaucoup plus lisible : chaque exposé développe, dans la colonne de droite, l'analogue d'une construction que vous connaissez peut-être déjà dans les deux colonnes de gauche.

Ordres de lecture possibles

Deux lectures sont possibles : soit suivre le fil (I à XIII, c'est la voie «complète» mais exigeante), soit, pour une première approche motivationnelle, lire en priorité V (le cœur conceptuel), IX (l'aboutissement technique) et XI (les exemples concrets), et revenir sur I-IV, VI, VIII en cas de besoin technique précis.

3. Résumé exposé par exposé

Exposé I - Morphismes étales

Motivation. Il faut d'abord définir, côté schémas, l'analogue d'un difféomorphisme local (ou, pour une extension de corps, d'une extension séparable). C'est la notion de **morphisme étale**, brique de base de tout le volume.

Contenu. On décompose la définition en deux ingrédients : un morphisme est dit **net** (ou non ramifié) si, intuitivement, il n'introduit aucune «épaisseur infinitésimale» supplémentaire (formellement : le module des différentielles $\Omega_{X/Y}^1$ s'annule) ; il est **plat** si les fibres varient continûment (voir exposé IV pour la définition précise). Un morphisme **étale** est un morphisme net et plat. On

montre que les revêtements étales d'un schéma normal connexe se comportent exactement comme les revêtements non ramifiés d'une variété topologique : c'est cette analogie qui permettra, dans l'exposé V, de bâtir une théorie de Galois générale.

Exposés II et III - Morphismes lisses

Motivation. Le morphisme étale est un cas particulier (de « dimension relative nulle ») d'une notion plus large : le morphisme **lisse**, analogue algébrique d'une submersion différentiable.

Contenu. L'exposé II donne les critères usuels de lissité (via le rang du module des différentielles, généralisant le critère jacobien du calcul différentiel) et les propriétés de permanence (composition, changement de base). L'exposé III établit la **propriété de relèvement infinitésimal** des morphismes lisses : on peut toujours prolonger un morphisme lisse le long d'un épaississement infinitésimal de la base, exactement comme on relève une submersion le long d'une petite déformation. Cette propriété, purement algébrique, remplace le théorème des fonctions implicites, qui n'a pas de sens sur un corps quelconque.

Exposé IV - Morphismes plats

Motivation. La platitude est la notion technique la plus discrète du volume, mais aussi la plus utilisée dans toute la géométrie algébrique : c'est la bonne façon de dire qu'une famille de schémas paramétrée par une base « ne dégénère pas brutalement ».

Contenu. L'exposé rassemble les **critères de platitude** (locaux, par fibres, par relèvement) qui serviront de boîte à outils dans tout le reste du séminaire, en particulier pour la théorie de la descente (exposés VI, VIII, IX).

Exposé V - Le groupe fondamental : généralités

Motivation. C'est l'exposé pivot, celui qui réalise le programme annoncé en section 2 : axiomatiser ce qu'est « une théorie de Galois » et montrer qu'elle est entièrement déterminée par un groupe profini.

Contenu. Grothendieck introduit la notion de **catégorie galoisienne** : une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un foncteur « fibre » $F : \mathcal{C} \rightarrow (\text{Ens})$ satisfaisant une liste précise d'axiomes (existence de limites finies, de sommes, comportement des épimorphismes/monomorphismes, fidélité et conservativité de F). Le théorème central affirme qu'une telle catégorie est toujours équivalente à la catégorie des ensembles finis munis d'une action continue d'un groupe profini π , déterminé de façon essentiellement unique : c'est le **groupe fondamental** de la catégorie galoisienne (pour $\mathcal{C}$ = revêtements étales finis d'un schéma X , on retrouve $\pi_1(X, \bar{x})$; pour $\mathcal{C}$ = extensions finies séparables de k , on retrouve $\text{Gal}(\bar{k}/k)$). Tout l'intérêt de la démarche est là : au lieu de partir d'un groupe et de regarder ses actions, on part d'une catégorie de « revêtements » abstraite et l'on *reconstruit* le groupe.

Exposé VI - Catégories fibrées et descente

Motivation. Pour aller plus loin (exposé IX), il faut un langage catégorique pour parler de «données définies localement, à recoller globalement ». C'est un exposé de théorie des catégories pure, sans contenu géométrique propre, mais indispensable comme outillage.

Contenu. On y définit les **catégories fibrées** sur une catégorie de base E (par exemple, la catégorie des S -schémas), les **catégories clivées**, et les foncteurs cartésiens. Il s'agit essentiellement de formaliser proprement la notion intuitive de «famille de catégories $\mathcal{C}_S$ indexée par les objets S de E , avec des foncteurs de changement de base $\mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{C}_{S'}$ pour $S' \rightarrow S$, cohérents entre eux ».

Exposé VIII - Descente fidèlement plate

Motivation. Voici le théorème qui rend toute la théorie opérationnelle : sous une hypothèse de platitude (fppf, «fidèlement plat et de présentation finie »), des données définies après un changement de base peuvent se «redescendre » de façon unique à la base de départ.

Contenu. Le résultat-phare est la **descente fidèlement plate des modules quasi-cohérents** : si $X' \rightarrow X$ est fidèlement plat quasi-compact, la catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur X est équivalente à la catégorie des faisceaux sur X' munis d'une **donnée de descente** (un isomorphisme de recollement sur $X' \times_X X'$ satisfaisant une condition de cocycle sur $X' \times_X X' \times_X X'$). On établit des énoncés analogues pour les morphismes de schémas eux-mêmes, et pour diverses propriétés (finitude, séparation, etc.) qui «descendent » le long d'un revêtement fppf. C'est un principe technique omniprésent en géométrie algébrique moderne (théorie des champs, espaces de modules).

Exposé IX - Descente des morphismes étales. Application au groupe fondamental

Motivation. On combine V (le groupe fondamental) et VIII (la descente) pour obtenir l'outil de **calcul** du groupe fondamental le plus utilisé du volume : un analogue algébrique du théorème de van Kampen topologique (qui calcule π_1 d'une réunion d'ouverts à partir de π_1 de chaque morceau).

Contenu. Étant donné un morphisme propre et surjectif $X' \rightarrow X$, on montre comment calculer $\pi_1(X)$ à partir des groupes fondamentaux des composantes connexes de X' , de $X' \times_X X'$, de $X' \times_X X' \times_X X'$, etc., et des morphismes induits par les projections simpliciales entre ces produits fibrés successifs. On obtient en particulier une **suite exacte fondamentale** reliant π_1 d'une fibre, π_1 de l'espace total et π_1 de la base pour un morphisme à fibres connexes : l'analogue exact de la suite exacte d'homotopie d'une fibration topologique.

Exposé X - Théorie de la spécialisation du groupe fondamental

Motivation. Comment π_1 varie-t-il quand on fait varier un schéma dans une famille (par exemple une courbe algébrique qui dégénère, ou qu'on réduit modulo un nombre premier) ?

Contenu. Pour un morphisme propre et lisse $f : X \rightarrow S$, il existe un **morphisme de spécialisation** $\pi_1(X_{\bar{s}}) \rightarrow \pi_1(X_{\bar{\eta}})$ entre le groupe fondamental d'une fibre spéciale et celui d'une fibre géométrique générique, et l'on établit des théorèmes de semi-continuité (le groupe ne peut que «grossir» par spécialisation) puis, sous des hypothèses supplémentaires, de continuité (le morphisme de spécialisation est un isomorphisme, au moins après avoir tué la partie du groupe liée à la caractéristique résiduelle). Le résultat le plus spectaculaire : le groupe fondamental (premier à p) d'une courbe algébrique lisse sur un corps de caractéristique $p > 0$ est isomorphe à celui d'une courbe topologique de même genre, un fait qui n'était jusque-là connu que par des méthodes transcendentes en caractéristique nulle.

Exposé XI - Exemples et compléments

Motivation. Après tant d'abstraction, un exposé entièrement dédié aux calculs explicites, qui rend tangible tout ce qui précède.

Contenu. On calcule π_1 de l'espace projectif (trivial : l'espace projectif est «simplement connexe»), des variétés abéliennes (lié aux points de torsion et au module de Tate), et l'on discute le célèbre **exemple de Zariski** : un cône projetant fournit un schéma normal dont le groupe fondamental local en un point singulier n'est pas trivial, contrairement à l'intuition topologique naïve. L'exposé se conclut par les théories de **Kummer** (revêtements cycliques d'ordre n premier à la caractéristique, classifiés par $H^1(X, \mu_n)$, généralisant $x \mapsto x^n$) et d'**Artin-Schreier** (leur analogue en caractéristique p , via $x \mapsto x^p - x$) : deux familles de revêtements explicites, entièrement décrites en termes cohomologiques.

Exposé XII - Géométrie algébrique et géométrie analytique (Michèle Raynaud)

Motivation. Pour un schéma sur $\mathbb{C}$, il existe *deux* notions de revêtement : les revêtements étales algébriques (ceux de ce volume) et les revêtements topologiques usuels de l'espace analytique associé. Sont-elles les mêmes ?

Contenu. On y établit des théorèmes de type **GAGA** (Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique, d'après Serre) adaptés à la comparaison des groupes fondamentaux : pour un schéma **propre** sur $\mathbb{C}$, le groupe fondamental étale algébrique est le **complété profini** du groupe fondamental topologique usuel de l'espace analytique associé. C'est cet exposé qui referme la boucle ouverte en section 2 : il justifie précisément en quel sens $\pi_1(X, \bar{x})$ généralise le π_1 topologique classique.

Exposé XIII - Propreté cohomologique des faisceaux d'ensembles et des faisceaux de groupes non commutatifs (Michèle Raynaud)

Motivation. Le plus technique et le plus avancé des treize exposés : il reprend les résultats de l'exposé X (spécialisation de π_1) dans des situations **non propres** (par exemple une courbe algébrique privée de quelques points), en s'appuyant sur le langage des **champs** (*stacks*, au sens de SGA 4) plutôt que sur celui, plus restrictif, des schémas classiques.

Contenu. On y établit des résultats de **propreté cohomologique** pour des faisceaux de groupes non nécessairement commutatifs (donc pour des H^1 non abéliens, plus délicats à manier que la cohomologie usuelle), avec une application importante aux diviseurs à croisements normaux relatifs, et l'on en déduit des **suites exactes d'homotopie** généralisant celles de l'exposé X au cas non propre. C'est l'exposé le plus proche, en esprit, de la géométrie algébrique contemporaine (théorie des champs algébriques, motifs).

4. Pourquoi ce texte compte encore aujourd'hui

SGA 1 n'est pas un document d'archive : c'est un texte fondateur activement lu et cité.

- Le **groupe fondamental étale** y défini est l'objet de base de toute la théorie des **représentations galoisiennes** en arithmétique moderne (courbes elliptiques, formes modulaires, conjecture de Fontaine-Mazur, programme de Langlands géométrique) : le groupe de Galois absolu $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ n'est jamais qu'un cas particulier de $\pi_1(\text{Spec}(\mathbb{Q}))$.
- La **cohomologie étale** de SGA 4, qui a permis à Deligne de démontrer les conjectures de Weil (Fields 1978), repose entièrement sur le formalisme de SGA 1.
- Grothendieck lui-même reviendra sur ces idées vingt ans plus tard dans son manuscrit *Esquisse d'un Programme* (1984), qui esquisse la **géométrie anabélienne** : l'idée qu'un schéma «suffisamment non abélien » (comme une courbe hyperbolique) est entièrement déterminé par son seul groupe fondamental étale, un thème de recherche encore très actif.
- La théorie de la **descente fidèlement plate** (exposé VIII) est le point de départ technique de toute la théorie des **champs algébriques** (*stacks*) et des espaces de modules en géométrie algébrique contemporaine.

5. Pour aller plus loin

- T. Szamuely, *Galois Groups and Fundamental Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 117, 2009 - probablement la meilleure porte d'entrée moderne, écrite précisément pour un lecteur qui connaît la théorie de Galois classique et veut comprendre le point de vue de Grothendieck, avec beaucoup plus de motivation et d'exemples que le texte original.
- *The Stacks Project*, <https://stacks.math.columbia.edu> - référence en ligne, gratuite et régulièrement mise à jour, qui reprend tout ce matériel (et bien plus) dans un langage totalement explicite, avec toutes les démonstrations.
- A. Grothendieck, *Esquisse d'un Programme* (1984), pour découvrir où ces idées mènent une fois combinées à la théorie des surfaces de Riemann et aux groupes modulaires.

Bibliographie

- A. Grothendieck (dir.), *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1960-61, augmenté de deux exposés de M. Raynaud. Édition recomposée, Documents Mathématiques 3, Société Mathématique de France, 2003 (édition originale : Lecture Notes in Mathematics 224, Springer-Verlag, 1971).

Le SGA 2 de Grothendieck

Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux

Résumé de lecture et motivations, à l'usage d'une étudiante de L3

Résumé

Ce texte résume le deuxième volume du *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie* (1962), consacré à la cohomologie locale et aux théorèmes de type Lefschetz. Comme pour le résumé de SGA 1, l'objectif est de donner une carte du terrain à une lectrice de niveau L3 : quel problème classique ce volume cherche à généraliser, quelle est l'idée technique qui rend cela possible, comment les quatorze exposés s'enchaînent, et pourquoi ce texte reste une référence.

6. Où se situe SGA 2

SGA 2 est le deuxième volet du Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, tenu en 1962, un an après SGA 1 (*Revêtements étales et groupe fondamental*). Il en reprend d'ailleurs directement deux invariants centraux - le groupe fondamental π_1 et, nouveau venu, le groupe de Picard Pic - pour leur appliquer un type de théorème très différent : non plus les calculer, mais les **comparer** entre un schéma X et un sous-schéma Y qui y est «suffisamment plongé».

Le texte que vous avez transmis est l'édition recomposée en L^AT_EX dirigée par Yves Laszlo dans le même esprit que la réédition de SGA 1 : texte original de 1962 (rédigé par un groupe d'auditeurs à partir des exposés oraux de Grothendieck), auquel s'ajoute un exposé XIV rédigé en 1967 par Michèle Raynaud.

7. L'idée motrice : de la topologie transcendante à l'algèbre locale

7.1. Le théorème de Lefschetz, version classique

En topologie algébrique classique, le **théorème de Lefschetz sur les sections hyperplanes** dit, en substance : si X est une variété algébrique projective complexe lisse de dimension n , et $Y = X \cap H$ une section hyperplane lisse, alors l'application naturelle

$$H_i(Y, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_i(X, \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme pour $i < n-1$ et surjective pour $i = n-1$. Autrement dit : *une grande partie de la topologie de X est déjà visible dans une simple section hyperplane Y* , de dimension strictement plus petite. C'est un résultat remarquable (et peu intuitif : on «voit» presque tout X en ne regardant qu'une tranche Y), démontré à l'origine par des méthodes de topologie transcendante (théorie de Morse sur la fonction $|\cdot|^2$ associée au plongement projectif), donc valables uniquement sur $\mathbb{C}$.

7.2. Le problème : transcendant, donc fragile

Une démonstration par théorie de Morse ne dit rien sur un corps de caractéristique $p > 0$, ni sur un anneau de base plus général (un anneau de valuation discrète, par exemple, situation typique en arithmétique). Or les invariants concernés - groupe fondamental étale π_1 (SGA 1), groupe de Picard Pic - sont, eux, parfaitement définis en toute caractéristique. Se pose donc une question typiquement grothendieckienne : peut-on retrouver un énoncé de type Lefschetz par une méthode purement **algébrique**, valable indépendamment de la caractéristique, et qui se prête au langage des schémas ?

7.3. L'idée : la profondeur comme substitut algébrique de la connexité

La réponse de SGA 2 passe par une notion d'algèbre commutative : la **profondeur** (longueur maximale d'une suite régulière dans un idéal), et sa version faisceutique, la **cohomologie locale** $H_Y^i(X, \mathcal{F})$ (cohomologie de X «à support dans Y », c'est-à-dire concentrée près du fermé Y). L'intuition à garder :

- une profondeur *grande* le long de Y signifie que X est «bien recollé» autour de Y , sans grosse pathologie locale ;
- cette bonne profondeur se traduit par l'**annulation de groupes de cohomologie locale** H_Y^i en petit degré i ;
- cette annulation cohomologique implique à son tour des **théorèmes de finitude** (les invariants cohérents ne «voient» presque pas la différence entre X et son voisinage formel de Y) ;
- et ces théorèmes de finitude, une fois retraduits en termes de π_1 ou de Pic , redonnent *exactement* la conclusion du théorème de Lefschetz classique - mais démontrée algébriquement, donc valable en toute caractéristique.

Idée à retenir. SGA 2 remplace un argument transcendant (théorie de Morse, valable seulement sur $\mathbb{C}$) par une chaîne purement algébrique : profondeur $\Rightarrow$ annulation de cohomologie locale $\Rightarrow$ théorème de finitude $\Rightarrow$ théorème de comparaison formel/global $\Rightarrow$ théorème de Lefschetz pour π_1 et Pic , valable sur n'importe quel corps, voire sur un anneau de base arithmétique.

C'est cette chaîne d'implications, construite exposé après exposé, qui constitue le véritable fil directeur du volume : les huit premiers exposés forgent l'outil algébrique (profondeur, dualité, finitude), les exposés IX à XII l'appliquent successivement à la géométrie formelle, au groupe fondamental, au groupe de Picard, puis aux schémas projectifs, et les deux derniers font le bilan (problèmes ouverts, puis extension via la cohomologie étale).

Suggestion pour un sens de lecture

Pour une première lecture motivationnelle : section 2 ci-dessus (l'idée motrice), puis exposé I (pour voir concrètement ce qu'est H_Y^i), puis directement les exposés X et XI (les théorèmes de Lefschetz eux-mêmes, dont l'énoncé se lit sans avoir digéré toute la machinerie de VI à VIII), et enfin XIII (les problèmes ouverts, qui reformulent tout le volume en questions).

8. Résumé exposé par exposé

Exposé I - Les invariants cohomologiques globaux et locaux relatifs à un sous-espace fermé

Motivation. Donner un sens précis à «la cohomologie de X concentrée près de Y ».

Contenu. On introduit les foncteurs Γ_Y (sections d'un faisceau à support dans Y) et leurs dérivés $H_Y^i(X, \mathcal{F})$, reliés à la cohomologie usuelle de X et de l'ouvert complémentaire $X - Y$ par une **suite exacte longue** et par une **suite spectrale de passage du local au global**. L'analogie à garder : c'est l'algébrisation du voisinage tubulaire d'une sous-variété en géométrie différentielle.

Exposé II - Application aux faisceaux quasi-cohérents sur les préschémas

Motivation. Vérifier que le formalisme de l'exposé I se comporte bien dans le cas qui intéresse la géométrie algébrique : les faisceaux quasi-cohérents sur un préschéma.

Contenu. Court exposé de transition, essentiellement technique.

Exposé III - Invariants cohomologiques et profondeur

Motivation. Relier le formalisme cohomologique de I-II à une notion beaucoup plus ancienne et plus concrète : la **profondeur** d'un module par rapport à un idéal (algèbre commutative classique, via les suites régulières).

Contenu. On montre que la profondeur $\text{depth}_Y(\mathcal{F})$ se lit exactement sur l'annulation des $H_Y^i(\mathcal{F})$ pour i petit : c'est le pont entre langage cohomologique et intuition algébrique, indispensable pour la suite.

Exposé IV - Modules et foncteurs dualisants

Motivation. Préparer une théorie de **dualité locale**, analogue local de la dualité de Serre pour les variétés projectives.

Contenu. Étude générale des foncteurs exacts sur les modules et de la notion de **module dualisant**, qui représente un foncteur cohomologique donné - exactement comme le faisceau dualisant ω_X représente la dualité de Serre globale.

Exposé V - Dualité locale et structure des $H^i(M)$

Motivation. Rendre effective la dualité de l'exposé IV dans le cas d'un anneau local régulier, cas le plus important en pratique.

Contenu. Théorème de dualité locale : pour A local régulier de dimension n , les modules de cohomologie locale $H_m^i(M)$ sont duaux (au sens de Matlis) des groupes $\text{Ext}_A^{n-i}(M, A)$. C'est l'analogie exact, en local, du théorème de dualité de Serre $H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^{n-i}(X, \mathcal{F}^\vee \otimes \omega_X)^\vee$ que l'on voit en cohomologie des variétés projectives.

Exposé VI - Les foncteurs $\text{Ext}_Z(X; F, G)$ et $\text{Ext}_Z(F, G)$

Motivation. Munir la théorie d'une variante «Ext» du formalisme de l'exposé I, nécessaire pour énoncer proprement le théorème de finitude de l'exposé VIII.

Contenu. Généralités techniques sur les Ext à support dans Y , et leur comportement pour les faisceaux quasi-cohérents.

Exposé VII - Critères de nullité, conditions de cohérence des faisceaux $\text{Ext}_Y^i(F, G)$

Motivation. Déterminer précisément pour quels degrés i les faisceaux $\text{Ext}_Y^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ s'annulent ou restent cohérents - la question technique clé pour tout ce qui suit.

Contenu. Deux régimes distincts sont étudiés séparément : le cas $i < n$ et le cas $i > n$ (où n est lié à la codimension de Y), chacun avec ses propres critères.

Exposé VIII - Le théorème de finitude

Motivation. C'est le résultat technique central de tout le volume, celui dont tout le reste découle.

Contenu. Théorème de finitude : pour un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur un schéma noethérien X et un fermé Y , les faisceaux de cohomologie locale $H_Y^i(\mathcal{F})$ sont cohérents pour $i \leq n$ si et seulement si les images directes $R^i f_*(\mathcal{F}|_{X-Y})$ le sont pour $i \leq n-1$ (où f est l'inclusion de l'ouvert complémentaire). Autrement dit : la cohérence «près de Y » équivaut à la cohérence «loin de Y ». C'est la généralisation, par une méthode purement algébrique, du théorème de finitude pour un morphisme propre déjà établi dans les EGA.

Exposé IX - Géométrie algébrique et géométrie formelle

Motivation. Exploiter le théorème de finitude pour comparer un schéma X au **complété formel** $\hat{X}$ de X le long de Y : une notion purement algébrique qui joue, en géométrie algébrique, le rôle d'un «petit voisinage tubulaire» de Y dans X .

Contenu. Deux résultats, calqués sur des théorèmes analogues d'EGA III pour les morphismes propres : un **théorème de comparaison** (les faisceaux cohérents sur un voisinage de Y et sur $\hat{X}$ se correspondent) et un **théorème d'existence** (tout faisceau cohérent formel sur $\hat{X}$ provient effectivement d'un faisceau cohérent algébrique sur un voisinage de Y). C'est le maillon qui permettra, dans les deux exposés suivants, de redescendre de l'information «vue depuis Y » vers de l'information sur un vrai voisinage ouvert de Y dans X .

Exposé X - Application au groupe fondamental

Motivation. Voici le premier théorème de type Lefschetz proprement dit, pour l'invariant étudié dans SGA 1.

Contenu. Sous des hypothèses de profondeur suffisante le long de Y (assurant, via IX, une bonne comparaison entre X , le complété formel $\hat{X}$, et un voisinage ouvert U de Y), on établit successivement : une comparaison des catégories de revêtements étales de $\hat{X}$ et de Y , puis de U et de Y pour U variable, et enfin, en conclusion, un isomorphisme $\pi_1(Y) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X)$ - l'analogue algébrique exact du théorème de Lefschetz topologique appliqué au premier groupe d'homotopie.

Exposé XI - Application au groupe de Picard

Motivation. Même stratégie que l'exposé X, appliquée cette fois au **groupe de Picard** (classes de fibrés en droites), invariant qui n'a pas d'équivalent direct dans SGA 1.

Contenu. On compare $\text{Pic}(X)$, $\text{Pic}(\hat{X})$ (le groupe de Picard formel) et $\text{Pic}(U)$ pour U voisinage ouvert de Y , en utilisant à nouveau les théorèmes de comparaison et d'existence de l'exposé IX. On en tire des conditions, portant sur la profondeur, sous lesquelles la restriction $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(Y)$ est un isomorphisme.

Exposé XII - Applications aux schémas algébriques projectifs

Motivation. Redescendre du cadre général (schéma noethérien quelconque) au cas le plus utile en pratique : celui d'un schéma projectif, où l'on dispose en plus de la dualité de Serre.

Contenu. On y établit un **théorème de dualité projective** couplé au théorème de finitude, puis - retour à la motivation transcendante de la section 2 - une **théorie de Lefschetz pour un morphisme projectif** : théorème de comparaison de Grauert (comparaison algébrique/analytique) et théorème d'existence, ainsi que des résultats sur la **platitude normale** par rapport au complété formel.

Exposé XIII - Problèmes et conjectures

Motivation. Un exposé de bilan, rare dans l'œuvre de Grothendieck : plutôt que de démontrer, il **formule des questions ouvertes**, organisées autour des mêmes invariants que le reste du volume, mais pour des groupes d'homotopie supérieurs π_i ($i \geq 2$) et pour des espaces analytiques complexes.

Contenu. Questions sur les relations entre résultats locaux et globaux, sur le π_0 (théorèmes de Bertini locaux), sur le π_1 , sur les π_i supérieurs (théorèmes de Lefschetz locaux et globaux pour les espaces analytiques complexes) et sur les groupes de Picard locaux. Plusieurs de ces conjectures ont été résolues ou précisées dans les décennies suivantes (notamment par Hartshorne et par Faltings) et ont durablement structuré la recherche en théorie locale de Lefschetz.

Exposé XIV - Profondeur et théorèmes de Lefschetz en cohomologie étale (Michèle Raynaud, 1967)

Motivation. Reprendre tout le programme du volume, mais dans le langage de la **cohomologie étale** développé entre-temps dans SGA 4 et SGA 5, plus flexible que la cohomologie cohérente pour aborder les questions de la section XIII.

Contenu. Exposé plus avancé, techniquement le plus exigeant du volume : on y définit une notion de **profondeur cohomologique et homotopique**, on établit une réciproque du théorème de Lefschetz affine, et l'on obtient un **théorème principal** (avec variantes) redonnant, dans le cadre étale, des résultats du type de ceux des exposés X et XI, avec une portée plus large.

9. Pourquoi ce texte compte encore aujourd'hui

- La méthode «profondeur $\Rightarrow$ annulation cohomologique $\Rightarrow$ finitude $\Rightarrow$ comparaison formelle » est devenue un schéma de démonstration standard en géométrie algébrique, bien au-delà des seuls théorèmes de Lefschetz.
- La **dualité locale** de l'exposé V est le point de départ de la théorie beaucoup plus générale de la **dualité de Grothendieck** pour les morphismes propres (développée ensuite par Hartshorne, puis par Conrad et Neeman), aujourd'hui un outil de base en géométrie algébrique et en théorie des motifs.
- Les conjectures de l'exposé XIII ont engendré un champ de recherche à part entière (théorèmes de Lefschetz locaux), avec des contributions majeures de Hartshorne (annulation de Hartshorne-Lichtenbaum) et de Faltings.
- L'exposé XIV de Raynaud préfigure l'usage systématique de la cohomologie étale pour des questions de connexité et de comparaison, un thème central de la géométrie arithmétique contemporaine.

10. Pour aller plus loin

- R. Hartshorne, *Ample Subvarieties of Algebraic Varieties*, Lecture Notes in Mathematics 156, Springer, 1970 - reprend et prolonge directement les questions de l'exposé XIII.
- A. Grothendieck, *Local Cohomology*, Lecture Notes in Mathematics 41, Springer, 1967 (notes du séminaire de Harvard 1961, un cousin plus court et plus accessible des exposés I à VIII).
- *The Stacks Project*, <https://stacks.math.columbia.edu>, chapitres sur la cohomologie locale et la dualité, pour une présentation moderne et entièrement démontrée.

Bibliographie

- A. Grothendieck, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2)*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1962, augmenté d'un exposé de M. Raynaud. Édition recomposée, dirigée par Y. Laszlo, Documents Mathématiques, Société Mathématique de France (édition originale : Advanced Studies in Pure Mathematics 2, North-Holland, 1968).

Le SGA 3 de Grothendieck et Demazure
Schémas en groupes
Résumé de lecture et motivations, à l'usage d'une étudiante de L3
Notes de lecture préparées avec Claude

Résumé

Ce texte résume le troisième volume du *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie* (1962-64), consacré aux schémas en groupes. C'est de loin le plus vaste des sept volumes du séminaire : trois tomes, vingt-six exposés, plus de 1300 pages. L'objectif de ce résumé n'est donc pas d'être exhaustif exposé par exposé (comme cela avait été fait pour SGA 1 et SGA 2), mais de dégager le **fil directeur unique** qui traverse tout le volume, et de donner une vue d'ensemble suffisamment précise pour s'orienter dans les trois tomes - avec un traitement plus détaillé pour le tome 3, qui contient l'aboutissement de toute la théorie.

11. Où se situe SGA 3

SGA 3 est le troisième volet du Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, tenu en 1962-64. À la différence de SGA 1 et SGA 2, ce n'est pas un cours donné intégralement par Grothendieck : c'est un travail collectif, mené sous sa direction par **Michel Demazure** (qui en est le second auteur, à parts égales), avec la participation de Michael Artin, Jean-Étienne Bertin, Pierre Gabriel, Michèle Raynaud et Jean-Pierre Serre. Le texte que vous avez transmis est l'édition recomposée en trois tomes dirigée par Philippe Gille et Patrick Polo.

L'objet d'étude est le **schéma en groupes** : un schéma G au-dessus d'une base S , muni d'une loi de groupe (compatible aux changements de base). C'est la façon la plus générale possible de parler d'un «groupe qui varie algébriquement», incluant à la fois les groupes algébriques classiques sur un corps (variétés abéliennes, GL_n , groupes orthogonaux, etc.) et des objets nettement plus exotiques : des groupes finis non constants, des groupes qui dégénèrent dans une famille, ou des groupes définis sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ tout entier.

12. L'idée motrice : classier les groupes «en famille»

12.1. Le précédent : la classification de Chevalley

Au milieu des années 1950, Claude Chevalley démontre un théorème spectaculaire : les groupes algébriques **semi-simples** sur un corps algébriquement clos sont classifiés, exactement comme les algèbres de Lie semi-simples complexes de Killing-Cartan, par un objet combinatoire - un **système de racines** (un diagramme de Dynkin, si l'on préfère). Mieux : Chevalley construit, à partir de la seule donnée combinatoire du système de racines, un groupe algébrique qui la réalise, et ce **sur un corps algébriquement clos quelconque**, y compris en caractéristique positive - un résultat purement algébrique, sans le moindre recours à l'analyse ou à la topologie, contrairement à la théorie de Lie classique sur $\mathbb{C}$.

12.2. Le problème : et si la base n'est pas un corps algébriquement clos ?

Le théorème de Chevalley classe des groupes *sur un corps algébriquement clos fixé*. Mais dans la pratique - notamment en théorie des nombres - on a besoin de groupes définis sur des bases beaucoup plus générales : un corps quelconque (non algébriquement clos), un anneau de valuation discrète (pour étudier la réduction modulo p d'un groupe défini sur $\mathbb{Q}$), voire $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ tout entier. Le groupe peut alors **dégénérer** en certains points de la base, ou n'être isomorphe au modèle «standard» de Chevalley qu'après une extension de la base (on dit qu'il en est une **forme tordue**). Aucune des méthodes de Chevalley - pensées pour un seul corps algébriquement clos - ne s'applique directement à cette situation «en famille».

12.3. Le programme de SGA 3

Le projet de Demazure et Grothendieck est de refaire *toute* la théorie de Chevalley dans le langage des schémas, au-dessus d'une base S absolument quelconque. Ceci exige de reconstruire, un par un et à partir de zéro, tous les outils de la théorie classique des groupes algébriques (composante neutre, tores maximaux, algèbre de Lie, éléments réguliers, sous-groupes de Borel, système de racines...), en s'assurant à chaque étape que la construction se comporte bien par changement de base et dans les familles - ce qui, en particulier, oblige à redémontrer depuis le début des théorèmes que l'on croyait acquis sur un corps algébriquement clos. C'est un travail de très longue haleine, qui occupe successivement :

1. les **fondations générales** de la notion de schéma en groupes sur une base quelconque (tome 1) ;
2. l'étude, brique par brique, des **deux types de groupes affines élémentaires** dont tout groupe réductif est, en un sens précis, assemblé : les groupes **de type multiplicatif** (généralisant les tores) et les groupes **unipotents** (tome 2) ;
3. la **classification finale** des schémas en groupes réductifs par une donnée combinatoire - la **donnée radicielle** - généralisant le système de racines de Chevalley, et valable sur une base quelconque (tome 3).

Idée à retenir. SGA 3 fait, pour la classification de Chevalley des groupes algébriques semi-simples, exactement ce que SGA 1 avait fait pour la théorie de Galois : la reformuler et la généraliser au langage des schémas, pour la rendre valable «en famille» et sur une base arithmétique quelconque plutôt que sur un seul corps algébriquement clos.

13. Tome I - Fondations générales (exposés I à VII B)

Neuf exposés qui posent, un par un, les fondations catégoriques et infinitésimales sans lesquelles on ne peut même pas énoncer ce qu'est un «schéma en groupes» sur une base quelconque.

Exp.	Contenu et rôle
I	Cadre catégorique général (structures algébriques dans une catégorie, cohomologie des groupes) servant de langage commun à tout le volume.
II	Espace tangent et algèbre de Lie d'un schéma en groupes, définis en toute caractéristique - l'analogue algébrique de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie.
III	Théorie de la déformation infinitésimale des morphismes et sous-groupes de schémas en groupes.
IV	Fondations de la descente fpqc/fppf et des topologies de Grothendieck (voir aussi SGA 1, exp. VIII), nécessaires pour construire des «groupes quotients » qui ne sont pas des schémas au sens naïf.
V	Théorèmes d'existence de quotients X/R par une relation d'équivalence ou un groupoïde plat - brique indispensable dès qu'on veut parler d'un groupe quotient G/H .
VIA	Premières propriétés (composantes connexes, quotients) pour un groupe algébrique classique, sur un corps.
VIB	Extension aux schémas en groupes sur une base quelconque : composante neutre, sous-groupes engendrés, groupes résolubles ou nilpotents.
VIIA	Théorie infinitésimale propre à la caractéristique p : opérateurs différentiels invariants, dualité de Cartier, p -algèbres de Lie.
VII B	Groupes formels sur un anneau pseudo-compact ; phénomènes distinguant caractéristique 0 et caractéristique p .

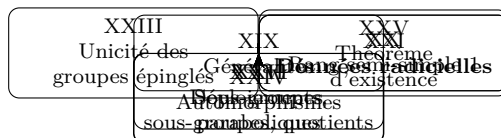
14. Tome II - Anatomie des groupes affines (exposés VIII à XVIII)

L'idée directrice de ce tome : un groupe algébrique affine «raisonnable » se décompose, en un sens précis, en une partie **de type multiplicatif** (généralisant un tore $\mathbb{G}_m^n$, ou un groupe fini comme μ_n) et une partie **unipotente** (généralisant le groupe additif $\mathbb{G}_a^n$). Avant de pouvoir assembler ces deux briques dans le tome 3, il faut d'abord les comprendre séparément, en famille, sur une base quelconque.

Exp.	Contenu et rôle
VIII	Groupes diagonalisables : l'analogue en famille d'un tore déployé ou d'un groupe fini d'ordre premier à la caractéristique, défini par dualité de Cartier à partir d'un groupe abélien constant.
IX-X	Groupes de type multiplicatif : homomorphismes, puis classification - un tel groupe sur une base S est entièrement déterminé par un «groupe des caractères » (un S -schéma en groupes constant tordu), généralisant en famille la dualité classique groupe fini abélien / caractères.
XI	Critères de représentabilité pour qu'un sous-foncteur de type multiplicatif d'un groupe affine soit un vrai sous-schéma en groupes fermé.
XII-XIV	Tores maximaux d'un schéma en groupes lisse et affine (existence locale pour la topologie étale), groupe de Weyl relatif, et théorie des éléments réguliers (généralisant les éléments réguliers semi-simples de la théorie de Lie classique), outil technique central pour construire ces tores maximaux.
XV-XVI	Compléments sur les sous-tores (Raynaud), et étude des groupes de rang unipotent nul (groupes lisses affines sans partie unipotente non triviale).
XVII	Structure des groupes unipotents et de leurs extensions par des groupes de type multiplicatif (Raynaud) - la brique «opposée » aux tores.
XVIII	Théorème de Weil (Michael Artin) : comment construire un schéma en groupes à partir d'une simple loi de composition birationnelle, sans supposer la loi de groupe définie partout au départ - un résultat indépendant, mais un outil essentiel pour construire des variétés abéliennes ou des jacobiniennes.

15. Tome III - La classification des groupes réductifs (exposés XIX à XXVI)

C'est le point culminant de tout le volume : la généralisation du théorème de Chevalley à une base quelconque. Ce tome mérite un traitement exposé par exposé, comme pour SGA 1 et SGA 2.



Exposé XIX - Groupes réductifs, généralités (M. Demazure)

Motivation. Après avoir disséqué séparément, dans le tome 2, les tores et les groupes unipotents, on peut enfin poser la définition qui les assemble : un **schéma en groupes réductif** sur une base S , généralisant en famille un groupe algébrique réductif sur un corps algébriquement clos.

Contenu. Rappels sur le cas classique (corps algébriquement clos), définition et premières propriétés d'un S -groupe réductif, construction - localement pour la topologie étale - du **système de racines relatif** associé à un tore maximal.

Exposé XX - Groupes réductifs de rang semi-simple 1 (M. Demazure)

Motivation. Le cas de base de toute la théorie - l'analogue en famille de SL_2 ou PGL_2 -, dont la compréhension complète conditionne le cas général, exactement comme en théorie de Lie classique.

Contenu. Étude complète des **systèmes élémentaires** $U_\alpha, U_{-\alpha}$ associés à une racine, structure explicite, groupe de Weyl de rang 1.

Exposé XXI - Données radicielles

Motivation. Le concept central de tout le volume : formaliser purement combinatoirement ce qu'est «un système de racines muni de son réseau de caractères et de cocaractères », de façon à pouvoir parler de la donnée radicielle d'un groupe réductif sur **n'importe quelle base**, y compris quand le corps résiduel n'est pas algébriquement clos.

Contenu. Définition axiomatique d'une **donnée radicielle** $(M, R, M^\vee, R^\vee)$ (un réseau de caractères, un ensemble de racines, le réseau dual des cocaractères, l'ensemble dual des coracines, liés par une dualité parfaite) : une généralisation purement combinatoire, indépendante de tout corps de base, des systèmes de racines de Killing-Cartan.

Exposé XXII - Groupes réductifs : déploiements, sous-groupes, groupes quotients (M. Demazure)

Motivation. Étudier comment un schéma en groupes réductif peut être **déployé** (rendu isomorphe à un modèle standard après une extension étale de la base), et comment sous-groupes et quotients se comportent vis-à-vis de la réductivité.

Contenu. Notion de déploiement et d'épinglage (choix compatible de racines simples et de vecteurs radiciels), stabilité de la réductivité par sous-groupes et quotients appropriés.

Exposé XXIII - Unicité des groupes épinglés (M. Demazure)

Motivation. Établir que la donnée radicielle épinglée détermine le groupe réductif déployé à **isomorphisme unique près** - pas seulement à isomorphisme près, mais avec un isomorphisme canonique.

Contenu. **Théorème d'unicité** : deux groupes réductifs déployés et épinglés ayant la même donnée radicielle épinglée sont canoniquement isomorphes. Analogue, sur base quelconque, d'un résultat classique de Chevalley.

Exposé XXIV - Automorphismes des groupes réductifs

Motivation. Corollaire naturel du théorème d'unicité : décrire complètement le groupe des automorphismes d'un groupe réductif déployé.

Contenu. Structure du groupe d'automorphismes : automorphismes intérieurs, automorphismes du diagramme de Dynkin, torsion par le centre.

Exposé XXV - Le théorème d'existence

Motivation. Le symétrique du théorème d'unicité (XXIII) : montrer que **toute** donnée radicielle, définie de façon purement axiomatique en XXI, provient effectivement d'un groupe réductif déployé.

Contenu. Construction explicite, pour toute donnée radicielle, d'un schéma en groupes réductif déployé sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ qui la réalise. Combiné à l'exposé XXIII, ceci établit une **équivalence de catégories** entre données radicielles (épinglées) et groupes réductifs déployés (épinglés) sur $\mathbb{Z}$ - le théorème central de tout SGA 3, dont tout groupe réductif sur une base quelconque se déduit ensuite par changement de base et torsion.

Exposé XXVI - Sous-groupes paraboliques des groupes réductifs (M. Demazure)

Motivation. Une application de toute la théorie précédente : l'étude des sous-groupes paraboliques (analogues en famille des sous-groupes de Borel et paraboliques classiques), omniprésents en théorie des représentations et en géométrie (variétés de drapeaux).

Contenu. Classification des sous-groupes paraboliques d'un groupe réductif S -déployé en termes de sous-ensembles de racines simples, construction des espaces homogènes associés (variétés de drapeaux relatives).

16. Pourquoi ce texte compte encore aujourd'hui

- Le théorème d'existence-unicité (exposés XXIII et XXV) - «tout groupe réductif déployé sur $\mathbb{Z}$ correspond à une unique donnée radicielle, et réciproquement » - est, encore aujourd'hui, *le* théorème de référence de toute la théorie des groupes réductifs, cité constamment dans la littérature moderne sous le nom de «théorème d'existence de Chevalley-Demazure-Grothendieck ».
- Les **groupes réductifs sur une base quelconque** sont un ingrédient de base de la géométrie arithmétique contemporaine : modèles entiers de groupes réductifs, théorie de Bruhat-Tits, programme de Langlands (les groupes réductifs sur les corps locaux et globaux y sont omniprésents), modules de G -fibrés en géométrie algébrique.
- Le **théorème de Weil** de l'exposé XVIII (construire un groupe à partir d'une loi birationnelle) reste un outil de construction standard, utilisé par exemple pour construire des jacobiniennes ou certains groupes de Néron.

17. Pour aller plus loin

- B. Conrad, *Reductive Group Schemes*, notes du SGA3 Summer School (Luminy, 2011), disponibles en ligne
 - une reconstruction moderne et très pédagogique de tout le tome 3, avec les preuves modernisées et de nombreux exemples.
- J.S. Milne, *Algebraic Groups : The Theory of Group Schemes of Finite Type over a Field*, Cambridge University Press, 2017 - pour le cas, plus accessible, d'une base égale à un corps.
- T.A. Springer, *Linear Algebraic Groups*, 2^e éd., Birkhäuser, 1998 - pour la théorie classique de Chevalley sur un corps algébriquement clos, qui sert de modèle à tout SGA 3.

Bibliographie

- M. Demazure, A. Grothendieck (dir.), *Schémas en groupes (SGA 3)*, 3 tomes, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1962-64, avec la participation de M. Artin, J.-E. Bertin, P. Gabriel, M. Raynaud, J.-P. Serre. Édition recomposée dirigée par P. Gille et P. Polo, Documents Mathématiques, Société Mathématique de France, 2011 (édition originale : Lecture Notes in Mathematics 151-153, Springer-Verlag, 1970).

SGA 4 - Tome 1 (extrait)
Théorie des topos et cohomologie étale des schémas - Exposés I à IV
Résumé de lecture et motivations, à l'usage d'une étudiante de L3
Notes de lecture préparées avec Claude

Résumé

Ce texte résume les quatre premiers exposés du tome 1 du *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie* 1963-64, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* (SGA 4). **Attention au périmètre** : le fichier transmis ne contient que la partie «théorie des topos » proprement dite (exposés I à IV, fondations catégoriques générales), et non la partie «cohomologie étale des schémas » qui donne son nom au volume et qui occupe la suite du tome 1 ainsi que les tomes 2 et 3 (au total, SGA 4 compte dix-neuf exposés sur environ 1600 pages). Ce résumé porte donc uniquement sur les fondations abstraites ; il indique en conclusion où trouver la suite.

18. Où se situe ce texte

SGA 4 est le quatrième volet du Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, tenu en 1963-64, dirigé par Michael Artin, Alexandre Grothendieck et Jean-Louis Verdier. C'est, de tout le séminaire, le volume le plus long et sans doute le plus abstrait : son objectif final est de construire une théorie cohomologique - la **cohomologie étale** - valable pour les schémas en toute caractéristique, seule capable (on le saura quelques années plus tard, avec les travaux de Deligne) de démontrer les conjectures de Weil sur le nombre de points des variétés sur les corps finis.

Mais pour atteindre cet objectif, Grothendieck fait un détour - délibéré et considérable - par une refonte complète des fondations de la théorie des faisceaux. C'est ce détour, et seulement lui, que couvrent les quatre exposés résumés ici.

19. L'idée motrice : qu'est-ce qu'un «espace » pour faire de la cohomologie ?

19.1. Le problème laissé en suspens par SGA 1

Dans SGA 1 (voir le résumé correspondant), on a vu que la topologie de Zariski d'un schéma est *trop pauvre* : elle ne distingue pas, par exemple, un revêtement non ramifié $x \mapsto x^n$ d'une simple immersion ouverte, alors que ce sont, intuitivement, deux phénomènes très différents. La solution trouvée dans SGA 1 était *ad hoc* : remplacer les ouverts de Zariski par les morphismes étales, et redéfinir à la main une notion de «revêtement » et de groupe fondamental adaptée à ce nouveau vocabulaire.

Cela fonctionne pour π_1 , mais la question se repose à l'identique - en pire - dès qu'on veut faire de la **cohomologie** : la cohomologie usuelle des faisceaux (celle qu'on apprend pour les espaces topologiques, calculée par exemple avec des résolutions injectives ou par la méthode de Čech) est construite tout entière à partir de la notion d'ouvert et de recouvrement ouvert d'un espace topologique. Rien de tout cela n'a de sens directement pour la topologie étale d'un schéma, où les «ouverts » pertinents ne sont même plus des sous-ensembles de X .

19.2. L'idée radicale de Grothendieck : oublier les points

La réponse de SGA 4 est de repartir de zéro et de se demander : de quoi a-t-on *vraiment* besoin, dans la théorie des faisceaux, pour définir des faisceaux et calculer leur cohomologie ? Réponse : on n'a jamais besoin des points de l'espace en tant que tels, seulement :

1. d'une catégorie C dont les objets jouent le rôle des « ouverts » ;
2. d'une notion de « famille couvrante » d'un objet de C (ce qui remplace « une famille d'ouverts dont la réunion fait X »).

Une telle donnée $(C, \text{familles couvrantes})$ s'appelle un **site**, et la notion usuelle de topologie (au sens « topologie générale ») en devient un cas très particulier : le site des ouverts d'un espace topologique X , muni des recouvrements ouverts usuels. Mais un site n'a besoin, ni de points, ni même que ses « ouverts » soient des sous-ensembles de quoi que ce soit : le **site étale** d'un schéma X (dont les objets sont les morphismes étales $U \rightarrow X$, et dont les familles couvrantes sont les familles surjectives de tels morphismes) en est l'exemple qui justifie toute la construction.

Une fois un site fixé, on peut définir des **faisceaux** dessus exactement comme sur un espace topologique (condition de recollement pour les familles couvrantes), et la catégorie des faisceaux sur un site s'appelle un **topos**. Le trésor cohomologique classique (foncteurs dérivés, cohomologie, etc.) se reconstruit alors mot pour mot dans ce cadre général - et s'applique en particulier au site étale, ce qui donnera enfin un sens précis à « cohomologie étale ».

Idée à retenir. Un topos généralise un espace topologique de la même façon qu'un schéma généralise une variété algébrique : en oubliant tout ce qui, dans la définition classique, n'était que du confort (ici, l'existence de points), pour ne garder que ce qui est réellement utilisé - la structure permettant de recoller des données locales.

19.3. Un dictionnaire, comme pour SGA 1

Espace topologique X	Site $(C, \text{topologie})$	Topos
ouverts de X , ordonnés par inclusion	objets de C (les « ouverts » abstraits)	-
recouvrement ouvert	famille couvrante	-
préfaisceau sur X	préfaisceau sur C (foncteur $C^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$)	objet du préfaisceau associé $\hat{C}$
faisceau sur X	faisceau sur le site $(C, \text{top.})$	objet du topos
catégorie des faisceaux sur X	catégorie des faisceaux sur $(C, \text{top.})$	topos
application continue $X \rightarrow Y$	foncteur continu $C_Y \rightarrow C_X$	morphisme de topos

Ordre d'exposition

Contrairement aux volumes précédents, la progression est ici strictement linéaire : chaque exposé est un prérequis direct du suivant, et il n'y a pas de branches indépendantes à explorer dans un ordre différent.

20. Résumé exposé par exposé

Exposé I - Préfaisceaux (Grothendieck et Verdier, avec un appendice de Bourbaki)

Motivation. Avant de définir un faisceau, il faut définir la structure plus permissive dont il sera un cas particulier : le **préfaisceau**. Mais énoncer et manipuler des propriétés générales sur « la catégorie de tous les préfaisceaux sur une catégorie C » pose un problème purement logique de taille : on risque de manipuler des collections « trop grosses » pour être des ensembles (le même type de paradoxe que « l'ensemble de tous les ensembles »). D'où le détour, en tout premier lieu, par la notion d'**univers**.

Contenu. Un **univers** U (au sens de Grothendieck-Bourbaki, exposé en appendice) est un ensemble clos par les opérations usuelles de la théorie des ensembles (parties, réunions, familles indexées), assez gros pour contenir un exemplaire de presque toutes les constructions mathématiques usuelles ; on travaille alors à l'intérieur d'un univers fixé pour éviter les paradoxes de taille (**axiome des univers** : tout ensemble est contenu dans un univers). Ceci posé, l'exposé étudie en détail la catégorie des préfaisceaux $\hat{C} = \text{Hom}(C^{\text{op}}, \text{Ens})$ sur une catégorie C : ses limites projectives et inductives, ses propriétés d'exactitude, et surtout la notion de **crible** - l'analogue, dans une catégorie quelconque, d'un sous-ensemble d'un ouvert (un crible sur un objet X est un sous-préfaisceau de celui qu'il représente).

Exposé II - Topologies et faisceaux (Verdier)

Motivation. Munir enfin une catégorie C d'une notion de recouvrement, pour donner un sens à « faisceau sur C ».

Contenu. Une **topologie de Grothendieck** sur C associe à chaque objet X un ensemble de **familles couvrantes** (ou, de façon équivalente, un ensemble de cribles « couvrants »), satisfaisant des axiomes de compatibilité imitant ceux des recouvrements ouverts usuels ; la paire $(C, \text{topologie})$ est un **site**. Un préfaisceau est alors un **faisceau** s'il satisfait la condition de recollement habituelle pour toute famille couvrante. On construit le **faisceau associé** à un préfaisceau donné (foncteur adjoint à gauche de l'oubli « faisceau $\rightarrow$ préfaisceau »), exactement comme la faisceautisation classique.

Exposé III - Fonctorialité des catégories de faisceaux (Verdier)

Motivation. Une fois les faisceaux définis site par site, il faut comprendre comment ils se transportent d'un site à un autre - l'analogue de l'image directe f_* et de l'image réciproque f^{-1} d'un faisceau par une application continue f .

Contenu. On y définit les **foncteurs continus** (qui induisent une image directe sur les faisceaux) et **cocontinus** (qui induisent une image réciproque), la **topologie induite** sur une sous-catégorie ou par un foncteur, le **lemme de comparaison** (qui donne des conditions pour qu'un foncteur

continu et cocontinu induise une équivalence de catégories de faisceaux - outil technique constamment réutilisé par la suite pour «changer de site sans changer de topos »), et la **localisation** d'un site en un objet.

Exposé IV - Topos (Grothendieck et Verdier)

Motivation. Voici l'aboutissement conceptuel des trois exposés précédents : donner une définition *intrinsèque* de ce qu'est un topos, indépendante du choix d'un site particulier - exactement comme un espace topologique peut être défini sans référence à un plongement dans un espace ambiant.

Contenu. Un **topos** est une catégorie équivalente à la catégorie des faisceaux sur un site ; l'exposé en donne une **caractérisation axiomatique directe** (existence de limites finies, de sommes disjointes, de quotients par des relations d'équivalence, avec de bonnes propriétés d'exactitude - les «axiomes de Giraud »), qui ne mentionne aucun site. On y trouve ensuite tout le vocabulaire géométrique reconstruit dans ce cadre abstrait : **morphismes de topos** $f : E \rightarrow E'$ (couple de foncteurs adjoints f^*, f_* , généralisant image réciproque/directe), **topos induit** (localisation en un objet, généralisant un ouvert), **points d'un topos** et **foncteurs fibres** (généralisant les points d'un espace et les germes en ce point), **recollement de topos** (généralisant le recollement d'espaces le long d'un fermé et de son complémentaire), et enfin les **topos annelés** - un topos muni d'un faisceau d'anneaux - qui permettent de faire de la vraie géométrie (algébrique, analytique, ou étale) à l'intérieur d'un topos, et pas seulement de la théorie des ensembles.

21. Pourquoi ce détour - en apparence purement catégorique - est indispensable

- C'est ce formalisme, appliqué au **site étale** d'un schéma (défini plus loin dans SGA 4, à partir de l'exposé VII), qui donne naissance à la **cohomologie étale**, l'outil qui permettra à Deligne de démontrer les conjectures de Weil en 1974.
- Le même formalisme s'applique, sans rien y changer, à bien d'autres situations : le site fppf (déjà croisé dans SGA 1 et SGA 3), le site cristallin (pour la cohomologie cristalline en caractéristique p), ou encore, en dehors de la géométrie algébrique, à la logique mathématique : un topos peut aussi être vu comme un «univers de théorie des ensembles » alternatif (avec sa propre logique interne, généralement intuitionniste), un point de vue développé ensuite par Lawvere et Tierney, indépendamment des préoccupations arithmétiques de Grothendieck.
- La caractérisation axiomatique des topos (exposé IV) reste, aujourd'hui encore, la définition de référence utilisée dans tous les textes de géométrie algébrique ou de théorie des catégories qui ont besoin de la notion.

22. Pour la suite

Le fichier transmis s'arrête à la fin de l'exposé IV. La suite logique, pour qui veut voir aboutir cette théorie sur la cohomologie étale elle-même, est :

- **Exposé V** - Cohomologie dans les topos (foncteurs dérivés, cohomologie d'un topos) ;
- **Exposés VI et VII** - limites projectives, et enfin construction du **site étale** d'un schéma ;
- les exposés suivants (jusqu'à XIX, répartis sur les tomes 2 et 3) développent la cohomologie étale proprement dite : théorèmes de comparaison, cohomologie à support propre, dualité de Poincaré étale, formule des traces de Lefschetz - la boîte à outils qui sera utilisée quelques années plus tard par Deligne.

N'hésitez pas à transmettre la suite du volume si vous souhaitez son résumé.

23. Pour aller plus loin

- S. Mac Lane, I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic : A First Introduction to Topos Theory*, Springer, 1992 - l'introduction moderne de référence, qui couvre à la fois le versant géométrique (celui de SGA 4) et le versant logique de la notion de topos.
- *The Stacks Project*, <https://stacks.math.columbia.edu>, chapitre «Sites and Sheaves » - reprend ce matériel dans un langage entièrement moderne et démontré en détail.

Bibliographie

- M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier (dir.), *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4)*, tome 1, exposés I à IV, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963-64. Édition recomposée (édition originale : Lecture Notes in Mathematics 269, Springer-Verlag, 1972).

SGA 4 - Tome 2
Théorie des topos et cohomologie étale des schémas - Exposés V à VIII
Résumé de lecture et motivations, à l'usage d'une étudiante de L3
Notes de lecture préparées avec Claude

Résumé

Ce texte fait suite au résumé du tome 1 de SGA 4 (exposés I à IV, théorie générale des topos) et couvre le **tome 2** dans son intégralité : les exposés V, V *bis*, VI, VII et VIII. C'est dans ce tome que la théorie abstraite du tome 1 est enfin mise au travail : on y construit la cohomologie d'un topos quelconque, puis - objectif final - le **site étale** et le **topos étale** d'un schéma, dont on étudie les toutes premières propriétés locales. Le tome 3 (exposés IX à XIX), qui développera les théorèmes de finitude, la dualité de Poincaré étale et la formule des traces, n'est pas couvert ici.

24. Rappel : où en était-on à la fin du tome 1

Le tome 1 avait remplacé la notion d'espace topologique par celle, plus souple, de **site** (une catégorie munie d'une notion de famille couvrante), et défini le **topos** associé comme la catégorie des faisceaux sur ce site. Deux tâches restaient alors ouvertes, et ce sont exactement celles du tome 2 :

1. faire de la **cohomologie** sur un topos quelconque, comme on sait le faire sur un espace topologique ;
2. appliquer tout cela au cas qui nous intéresse vraiment : le site **étale** d'un schéma.

25. L'idée motrice de ce tome

25.1. Faire de la cohomologie sans espace topologique

Sur un espace topologique X , la cohomologie d'un faisceau $\mathcal{F}$ se définit comme les foncteurs dérivés à droite du foncteur «sections globales» $\Gamma(X, -)$, et se calcule en pratique via la cohomologie de Čech (associée à un recouvrement ouvert) ou une suite spectrale qui compare les deux. Rien, dans cette construction, n'utilise réellement les points de X : elle se transpose donc mot pour mot à un topos quelconque. C'est l'objet de l'exposé V.

Mais un problème purement technique surgit dès qu'on veut calculer effectivement quelque chose : beaucoup d'objets intéressants (le site étale d'un schéma, en particulier) sont naturellement des **limites** d'objets plus simples - par exemple $\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}_p})$ est la limite projective des $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{p^n})$. Il faut donc savoir comment la cohomologie se comporte le long d'un tel passage à la limite, ce qui exige des **conditions de finitude** précises (topos noethériens, morphismes quasi-compacts, etc.) : c'est l'objet, technique mais indispensable, de l'exposé VI.

25.2. Le site étale, enfin

Armé de ces deux outils, l'exposé VII peut enfin poser la définition qui donne son nom à tout le volume : le **site étale** $X_{\text{ét}}$ d'un schéma X - dont les objets sont les morphismes étales $U \rightarrow X$ et

les familles couvrantes les familles surjectives de tels morphismes -, et le **topos étale** associé. La cohomologie de ce topos est, par définition, la **cohomologie étale** de X .

Idée à retenir. Tout le tome 2 répond à une seule question : comment fabriquer, à partir de la théorie abstraite des topos (tome 1), un objet cohomologique concret et calculable attaché à un schéma quelconque ? Réponse : cohomologie générale d'un topos (V) + techniques de limites (VI) $\Rightarrow$ topos étale d'un schéma (VII) $\Rightarrow$ étude de sa structure locale (VIII).

25.3. Le bon substitut algébrique d'un petit voisinage contractile

Reste une question laissée ouverte par l'exposé VII : en topologie usuelle, la cohomologie «au voisinage d'un point» est triviale, parce qu'un point possède des voisinages ouverts aussi petits (et aussi simplement connexes) qu'on veut. Quel est l'analogue, pour un schéma, d'un «petit voisinage» d'un point - puisque, par construction, les voisinages étales d'un point ne sont jamais de simples ouverts de Zariski ? L'exposé VIII répond : c'est l'anneau **strictement local** (le hensélisé strict de l'anneau local en un point géométrique), dont on montre qu'il ne possède, précisément, *aucun revêtement étale non trivial* : c'est le «point» au sens de la topologie étale.

26. Résumé exposé par exposé

Exposé V - Cohomologie dans les topos (J.-L. Verdier)

Motivation. Transporter dans un topos quelconque tout l'arsenal cohomologique classique des espaces topologiques.

Contenu. Généralités sur les catégories abéliennes de faisceaux (abéliens) sur un topos et leurs **modules plats**; **cohomologie de Čech** d'un objet relativement à un recouvrement, et notation cohomologique générale $H^i(X, \mathcal{F})$; **suite spectrale de Cartan-Leray**, qui relie la cohomologie de Čech d'un recouvrement à la cohomologie «vraie» (celle des foncteurs dérivés), avec son analogue relatif pour un morphisme de topos ($R^q u_*$); notion de **faisceau acyclique**; **Ext locaux** et cohomologie à support. Deux appendices : un rappel détaillé sur la cohomologie de Čech, et des compléments de P. Deligne sur les limites inductives locales.

Exposé Vbis - Techniques de descente cohomologique (B. Saint-Donat)

Motivation. La cohomologie de Čech d'un recouvrement ne calcule la vraie cohomologie que sous des hypothèses restrictives (typiquement, l'acyclicité des intersections). Que faire quand un unique recouvrement ne suffit pas ? On itère : on recouvre, puis on recouvre les intersections, puis leurs intersections, etc., ce qui donne un objet simplicial - un **hyper-recouvrement**.

Contenu. La **méthode de la descente cohomologique** : comment calculer la cohomologie d'un objet X à partir de celle des termes d'un hyper-recouvrement de X , au moyen d'une suite spectrale généralisant Cartan-Leray. **Critères de descente** garantissant qu'un hyper-recouvrement donné calcule bien la cohomologie voulue, avec des **exemples et applications**. Cette technique, en apparence très technique, deviendra quelques années plus tard l'un des outils centraux de Deligne, aussi bien pour la théorie de Hodge mixte que pour la preuve des conjectures de Weil.

Exposé VI - Conditions de finitude. Topos et sites fibrés. Applications aux techniques de passage à la limite (A. Grothendieck et J.-L. Verdier)

Motivation. Le plus long et le plus technique des cinq exposés, mais indispensable : sans lui, on ne saurait même pas donner un sens rigoureux à des énoncés aussi simples que «la cohomologie étale de $\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est la limite de celle des $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{p^n})$ ».

Contenu. **Conditions de finitude** pour les objets, les flèches, et un topos tout entier (analogues topos-théoriques de «noethérien », «quasi-compact », «de type fini »), puis pour un morphisme de topos et pour un topos obtenu par recollement ; un résultat de **commutation de la cohomologie aux limites inductives filtrantes** (précisément l'énoncé qui permettra, plus tard, de calculer la cohomologie d'une limite projective de schémas comme limite inductive des cohomologies). La seconde moitié introduit les **topos et sites fibrés** : l'analogue, pour des topos, des catégories fibrées de SGA 3 (exposé VI) - une façon de manipuler rigoureusement tout un système cohérent de topos variant le long d'une catégorie d'indices -, avec un critère d'existence de points en appendice.

Exposé VII - Site et topos étales d'un schéma (A. Grothendieck)

Motivation. L'exposé le plus court en pages, mais le plus important en substance : c'est ici, et seulement ici, qu'apparaît enfin la définition qui donne son nom à SGA 4.

Contenu. Définition de la **topologie étale** sur la catégorie des X -schémas étales (objets : morphismes étales $U \rightarrow X$; recouvrements : familles surjectives de tels morphismes), d'où le **site étale** $X_{\text{ét}}$ et son topos associé. Premiers **exemples de faisceaux étales** (dont le faisceau structural $\mathcal{O}_X$, et les faisceaux représentés par des X -schémas étales quelconques). **Générateurs du topos étale** et comportement de la cohomologie vis-à-vis des limites inductives de faisceaux. **Comparaison avec d'autres topologies** (Zariski, fppf, fpqc) : sur des classes raisonnables de faisceaux, elles calculent la même cohomologie, ce qui légitime le choix de la topologie étale comme «juste milieu » entre finesse et maniabilité. Enfin, application des techniques de l'exposé VI au calcul de la **cohomologie d'une limite projective de schémas**.

Exposé VIII - Foncteurs fibres, supports, étude cohomologique des morphismes finis (A. Grothendieck)

Motivation. Comprendre la structure «locale » du topos étale : qu'est-ce qu'un point, qu'est-ce qu'un petit voisinage, pour la topologie étale ?

Contenu. **Invariance topologique du topos étale** : un morphisme universellement injectif et surjectif à noyaux de dérivées nilpotents (par exemple un morphisme radiciel, ou une immersion fermée nilpotente, ou le Frobenius) ne change pas le topos étale - la topologie étale ne voit pas ce genre de «épaississement infinitésimal » ni les phénomènes purement inséparables. Étude des **faisceaux sur le spectre d'un corps** (on retrouve exactement les G -ensembles de SGA 1, G = groupe de Galois absolu). **Foncteurs fibres** associés à un point géométrique $\bar{x}$ de X , et introduction des **anneaux et schémas strictement locaux** - le hensélisé strict de l'anneau local en $\bar{x}$ -, dont la propriété clé (établie ici) est de n'admettre *aucun revêtement étale connexe non trivial* : c'est très

exactement l'analogie algébrique d'un petit disque ouvert contractile autour d'un point, au sens de la topologie étale. Application au **calcul des fibres** des images directes supérieures $R^q f_*$, notion de **support** d'un faisceau, **morphismes de spécialisation** des foncteurs fibres (généralisant la spécialisation du groupe fondamental de SGA 1, exposé X), et **descente des faisceaux étales** le long d'un morphisme entier.

27. Pourquoi ce tome compte particulièrement

- L'exposé VII contient, littéralement, la définition de la cohomologie étale - l'outil qui permettra à Deligne de démontrer les conjectures de Weil en 1974, puis de développer la théorie de Hodge mixte.
- Les **anneaux strictement locaux** de l'exposé VIII (hensélisés stricts) sont depuis devenus un objet standard de toute la géométrie algébrique arithmétique : ils jouent, pour la topologie étale, exactement le rôle que jouent les petits disques ouverts en analyse complexe.
- La **descente cohomologique** de l'exposé *Vbis*, en apparence anecdotique, est l'un des outils techniques les plus réutilisés de toute la géométrie algébrique moderne, bien au-delà de la seule cohomologie étale (théorie de Hodge, motifs).

28. Pour la suite

Le tome 3 (exposés IX à XIX, non traité ici) développe les applications de cette machinerie : théorèmes de finitude pour la cohomologie étale, dimension cohomologique, dualité de Poincaré étale, et - point culminant - la **formule des traces de Lefschetz** en cohomologie étale, qui est l'ingrédient final de la démonstration des conjectures de Weil par Deligne. N'hésitez pas à transmettre la suite si vous en souhaitez le résumé.

29. Pour aller plus loin

- J.S. Milne, *Lectures on Étale Cohomology*, notes de cours disponibles en ligne - probablement l'introduction la plus lisible pour une étudiante de L3/M1 découvrant le sujet, avec beaucoup plus d'exemples que le texte original.
- *The Stacks Project*, <https://stacks.math.columbia.edu>, chapitre «Étale Cohomology ».

Bibliographie

- M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier (dir.), *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4)*, tome 2, exposés V à VIII, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963-64. Édition recomposée (édition originale : Lecture Notes in Mathematics 270, Springer-Verlag, 1972).