Proposer une formule simple, Denise Vella-Chemla, février 2026.

$$\boxed{\text{Valeurs des zéros non triviaux de } \zeta \approx \frac{2\pi\ x}{W\left(\dfrac{x}{e}\right)}}$$

avec $W(x)$ la fonction de Lambert, et e la base pour le calcul du logarithme népérien ($e \approx 2.71...$).

Je dois un peu mieux expliquer d'où vient cette formule que je propose : en novembre 2024 [1], j'avais programmé une formule trouvée dans un article de França, LeClair et Mussardo [2]. Cette formule fait intervenir la fonction de Lambert. En fouillant la bibliographie, j'ai trouvé une référence de Knuth et al. [3] et à la page 10 de cette référence [4], on trouve ces deux formules, qui interpellent par leur simplicité.
Cette image (Figure 1) interpelle parce qu'on y voit des log (ou des exp), que le nombre de nombres premiers $\pi(x)$ inférieurs à un nombre x donné s'exprime par le logarithme intégral, qui est l'intégrale du logarithme de x à l'infini de l'inverse du logarithme ; et également parce que Riemann avait utilisé une sorte de schéma récursif, pour calculer une fonction qui aurait approximé la fonction de comptage des nombres premiers et que pour cela, Riemann avait choisi d'ajouter $\dfrac{1}{2}$ quand on croisait un carré de nombre premier, d'ajouter $\dfrac{1}{3}$ quand on croisait un cube de nombre premier, etc, et on se dit que le logarithme ou l'exponentielle, de la façon dont ils sont étudiés dans cette note qu'on a écrite à propos d'un petit encart au sujet de Galois [5], nous semble en analogie dans leur fonctionnement à cette idée de Riemann.

1. Voir https://denisevellachemla.eu/decalages.pdf.
2. Voir les différentes références de leur travail autour de la fonction ζ de Riemann :
(https://arxiv.org/pdf/1307.8395,
https://arxiv.org/pdf/1407.4358,
https://arxiv.org/pdf/1410.3520,
https://arxiv.org/pdf/1502.06003 *,
https://arxiv.org/pdf/1509.03643,
https://arxiv.org/pdf/1809.06158,
https://arxiv.org/pdf/2101.10336,
https://arxiv.org/pdf/2406.01828).
3. Voir ici https://denisevellachemla.eu/a-sequence-of-series-for-the-Lambert-W-function.pdf.
4. référence qu'on a du mal à retrouver, en fait, l'article de même titre existe sous différentes versions, qui ne contiennent pas toutes la formule qui m'a interpelée.
5. Voir https://denisevellachemla.eu/souvenir-Gal.pdf.

6 A Final Pair of Expansions

The iterations (76–77) may be used to show that $W(z)$ can be written as

$$W(z) = \cfrac{z}{\exp \cfrac{z}{\exp \cfrac{z}{\exp \cfrac{z}{\ddots}}}} \tag{98}$$

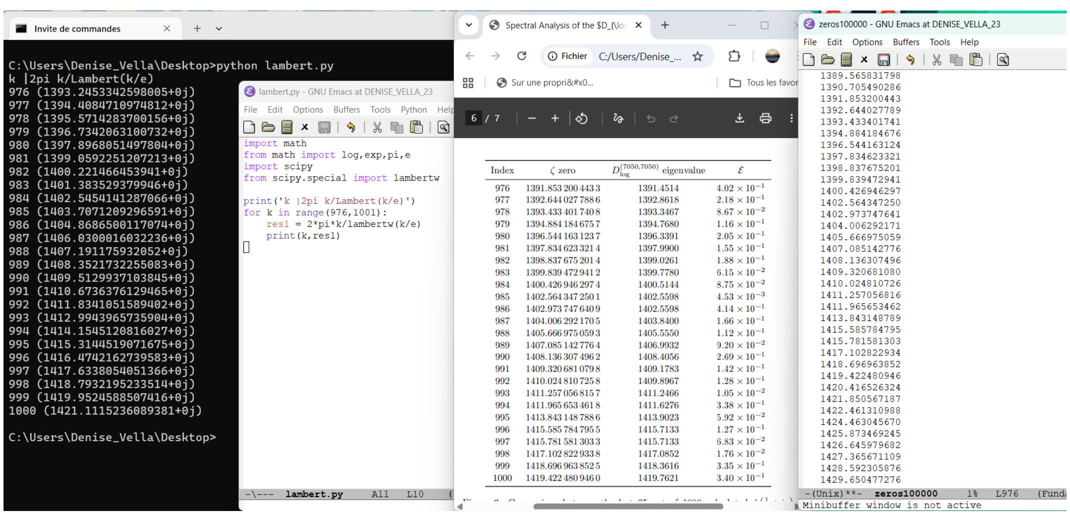
or

$$W(z) = \ln \cfrac{z}{\ln \cfrac{z}{\ln \cfrac{z}{\ddots}}} \tag{99}$$

according as $|W(z)| < 1$ or $|W(z)| > 1$. These curious formulae are just the iterated exponential in disguise, and indeed are naturally discovered from rewriting $W(z) = z/\exp W(z)$ and $W(z) = \ln(z/W(z))$ as iterations.

Figure 1 : expressions de la fonction de Lambert par applications répétitives du logarithme ou de l'exponentielle.

La comparaison du calcul de cette fonction qu'on propose et des zéros de ζ se fait par un petit programme, dont on colle ci-dessous le résultat, pour le calcul des zéros de 976 à 1000, au hasard (voir l'image agrandie à cette adresse : comparaison formule simple et zéros de ζ).



À mon niveau, je ne peux rien démontrer. D'aucuns diraient "Alors la ferme !", mais comme Galois a dit d'écrire, à chaque fois qu'on pensait qu'il fallait le faire, "Je ne sais pas le reste...", eh bien, je laisse cette formule simple, pour un jour ultérieur.