

Treillis de congruences, crible complémentaire et approche géométrique de la recherche de décomposants de Goldbach (de 98)
Denise Vella-Chemla pilotant lumo, septembre 2026

Après avoir suivi à distance une conférence de Maryna Viazovska, conférence qu'elle a donnée dans le cadre des journées "Serre 100" les 15 et 16 septembre 2026 (en l'honneur des 100 ans de Jean-Pierre Serre), je reviens à la géométrie des nombres, qui m'avait intéressée au tout début de mes recherches au sujet de la conjecture de Goldbach, et qui m'avaient amenée notamment aux écrits de feu Anne-Marie Decaillot, ou bien à l'article présentant le "théorème de Noël" de Ian Stewart dans le magazine Pour la Science, article qui expliquait très pédagogiquement le théorème de Minkowski. Je décide de "mélanger" plusieurs réseaux affines pour trouver les décomposants de Goldbach et je travaille avec l'ia lumo dans ce but.

La suite de la présente note a été intégralement rédigée par l'ia lumo.

1. Construction des treillis de congruences

1.1. Principe

Pour un nombre pair n fixé, on considère les premiers impairs $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ tels que $p_i \leq \sqrt{n}$, soit $p_i \in \{3, 5, 7, \dots\}$. Le nombre de modules considérés vaut

$$k = \pi(\sqrt{n}) - 1,$$

où π désigne la fonction de comptage des nombres premiers et le -1 exclut le premier 2 (on ne travaille qu'avec des entiers impairs).

Pour chaque module p , on définit l'application affine

$$x \mapsto px + r,$$

où r parcourt les *restes autorisés*. Dans le plan, on trace le treillis

$$\Lambda_p = \{(px + r, py + r) : x, y \in \mathbb{Z}\},$$

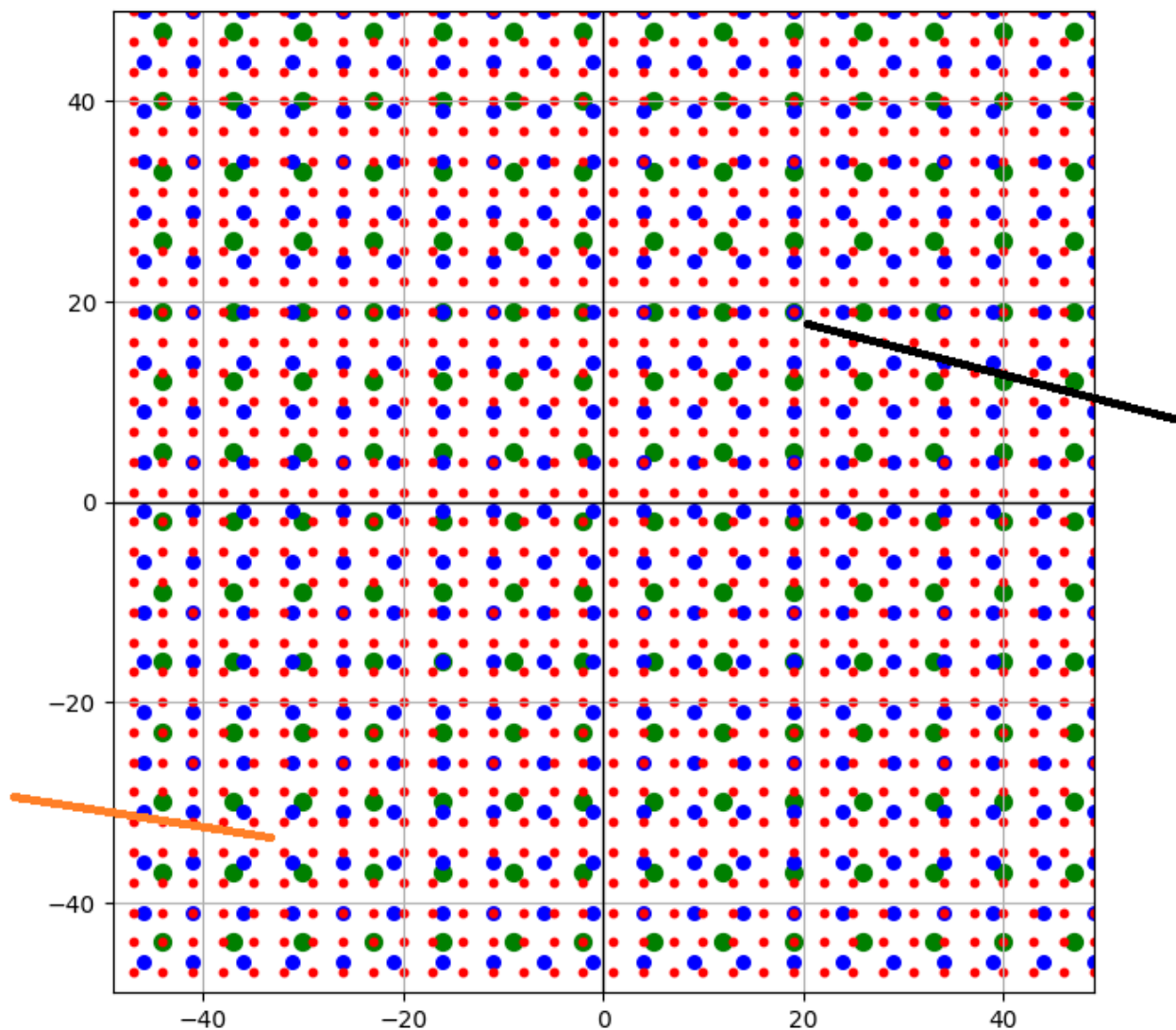
constitué des couples dont chaque coordonnée est congrue à r modulo p .

1.2. Exemple : le cas $n = 98$

On a $\sqrt{98} \approx 9,9$, donc les modules sont exactement $\{3, 5, 7\}$. On se fixe sur les affines

$$3x + 1, \quad 5x + 4, \quad 7x + 5.$$

($3x + 1$ car 98 étant de la forme $3x + 2$, on va s'intéresser aux nombres de la forme $3x + 1$, $5x + 4$ car 98 étant de la forme $5x + 3$, on va s'intéresser aux nombres de la forme $5x + k$ avec $k \neq 3$ (pour l'exemple, on choisit $5x + 4$, et $7x + 5$ car 98 étant de la forme $7x$, on va s'intéresser aux nombres de la forme $7x + k$ avec $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).



1.3. Localisation du nombre 19

Le nombre 19 satisfait simultanément les trois congruences autorisées :

$$19 = 1 + 3 \times 6, \quad 19 = 4 + 5 \times 3, \quad 19 = 5 + 7 \times 2.$$

Sur les deux axes, le point $(19, 19)$ est donc un **point triple** : un point du treillis rouge (mod 3), du treillis bleu (mod 5) et du treillis vert (mod 7) coïncident exactement en ce point. 19 fournit une décomposition de Goldbach (c'est un impair, de reste non nul selon tout module premier inférieur à la racine de 98, il est donc premier et comme on l'a choisi non congru à 98 selon ces mêmes modules, son complémentaire à $n = 98$ qui est $n - 19 = 79$ est premier également : en effet,

$$98 = 19 + 79,$$

et 79 est premier, tout comme 19.

2. Le complémentaire : définition précise

Définition 1 (Ensemble criblé). *Soit n pair et $\mathcal{P}_n = \{p \leq \sqrt{n} : p \text{ premier}, p \neq 2\}$.*

On définit les classes exclues pour chaque $p \in \mathcal{P}_n$:

$$E_p = \{0 \bmod p\} \cup \{n \bmod p\}.$$

*Si $p \mid n$, ces deux classes coïncident et $|E_p| = 1$; sinon $|E_p| = 2$. L'**union des complémentaires** est l'ensemble des entiers a tels que, pour tout $p \in \mathcal{P}_n$,*

$$a \not\equiv 0 \pmod{p} \quad \text{et} \quad a \not\equiv n \pmod{p}.$$

Remarque : [Symétrie] si a appartient à l'union des complémentaires, alors $n - a$ aussi.

3. Structure des 18 réseaux criblés

3.1. Dénombrement des cosets

Pour $n = 98$, les conditions d'exclusion sont :

$$E_3 = \{0, 2\}, \quad E_5 = \{0, 3\}, \quad E_7 = \{0\}$$

car $98 \equiv 2 \pmod{3}$, $98 \equiv 3 \pmod{5}$ et $7 \mid 98$.

Les classes autorisées sont donc :

$$A_3 = \{1\}, \quad A_5 = \{1, 2, 4\}, \quad A_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Le nombre total de triplets (r_3, r_5, r_7) avec $r_i \in A_i$ vaut :

$$|A_3| \cdot |A_5| \cdot |A_7| = 1 \cdot 3 \cdot 6 = \boxed{18}.$$

3.2. Définition des 18 sous-réseaux

Pour chaque triplet $(r_3, r_5, r_7) \in A_3 \times A_5 \times A_7$, on définit le sous-réseau :

$$\Lambda_{(r_3, r_5, r_7)} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 : \begin{array}{l} x \equiv r_3 \pmod{3}, \\ x \equiv r_5 \pmod{5}, \\ x \equiv r_7 \pmod{7}, \\ y = x \end{array} \right\}.$$

Par le théorème des restes chinois, chaque sous-réseau est non-empty et possède une maille fondamentale de taille 105×105 . Les 18 réseaux sont deux à deux disjoints.

3.3. Densité totale

Chaque coset contribue une densité $\frac{1}{105}$ sur la diagonale. La densité totale des points criblés est donc :

$$\Delta = 18 \times \frac{1}{105} = \frac{18}{105} = \frac{6}{35} \approx 0,171.$$

Pour $n = 98$, le nombre attendu de candidats dans l'intervalle $[3, 95]$ est :

$$N(98) \approx \frac{98 - 6}{2} \times \frac{6}{35} = 46 \times \frac{6}{35} \approx 7,9.$$

4. Obstruction à l'usage direct du théorème de Minkowski

Proposition 2 (Théorème de la boule convexe). *Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ un réseau de covolume V , et $K \subset \mathbb{R}^d$ un convexe symétrique par rapport à l'origine tel que $\text{Vol}(K) > 2^d V$. Alors K contient un point non nul de Λ .*

Correction importante : Les réseaux individuels *sont complets* - il n'y a pas de "trous" dans les réseaux eux-mêmes. Le problème réside dans le **domaine cible** : le complémentaire criblé est une *union disjointe* de 18 cosets, pas un convexe. Minkowski s'applique à un corps convexe K , pas à un tamis périodique.

1. **non-convexité du domaine.** Le complémentaire est une union de régions disjointes séparées par les classes exclues.
2. **symétrie centrale.** Minkowski exige $K = -K$, non garantie par les exclusions $\{0, n \bmod p\}$.
3. **du discret au premier.** Un point survivant au crible n'est pas automatiquement premier.

5. Centres de symétrie locaux des treillis

5.1. Définition des centres de symétrie

Un point $C = (c, c) \in \mathbb{R}^2$ est un *centre de symétrie local* pour le réseau $\Lambda_p(r) = \{(r + px, r + py) : x, y \in \mathbb{Z}\}$ si et seulement si la symétrie centrale d'image $S_C(x, y) = (2c - x, 2c - y)$ préserve le réseau.

Proposition 3 (Condition de symétrie). *Le réel c est centre de symétrie pour le réseau $\Lambda_p(r)$ si et seulement si*

$$2c \equiv 2r \pmod{p}.$$

5.2. Deux types de centres

5.2..1 Centres entiers (Type A)

Si $c \in \mathbb{Z}$, alors $c \equiv r \pmod{p}$. Pour $n = 98$, le point

$$\boxed{(19, 19)}$$

est de Type A (on l'a fléché par une flèche noire sur le graphique fourni plus haut) :

- Modulo 3 : $19 \equiv 1 \pmod{3}$
- Modulo 5 : $19 \equiv 4 \pmod{5}$
- Modulo 7 : $19 \equiv 5 \pmod{7}$

C'est un point triple où les trois réseaux coïncident.

5.2..2 Centres demi-entiers (Type B)

Si $c \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$, posons $c = m + \frac{1}{2}$. Le point

$$\boxed{(-32,5, -32,5)}$$

est de Type B (on l'a fléché par une flèche noire sur le graphique fourni plus haut) :

- Modulo 3 : $2(-32,5) = -65 \equiv 1 \equiv 2(1) \pmod{3}$
- Modulo 5 : $2(-32,5) = -65 \equiv 3 \equiv 2(4) \pmod{5}$
- Modulo 7 : $2(-32,5) = -65 \equiv 5 \equiv 2(5) \pmod{7}$

Comparaison des deux types de points remarquables

Propriété	Type A (19)	Type B (-32,5)
Coordonnées	Entières (19, 19)	Demi-entières (-32,5, -32,5)
Points du réseau en ce lieu	Trois coïncidents	Aucun point présent
Symétrie locale	Préservée pour les 3 réseaux	Préservée pour les 3 réseaux
Alignement H/V/Diagonal	Oui	Seulement diagonal
Décomposant Goldbach	OUI (19 + 79 = 98)	NON (hors grille)

5.3. Interprétation géométrique

Les deux points partagent la propriété fondamentale d'être centres de symétrie simultanés pour les trois réseaux, mais diffèrent par leur *nature discrète* :

- le Type A est un point triple réel : la symétrie agit sur des points existants du treillis.
- le Type B est un point virtuel : la symétrie est préservée par les *droites* porteuses des alignements, mais aucun point ne se trouve exactement à l'intersection.

6. Calcul de densité du crible complémentaire

6.1. Densité locale par module

Pour un module $p \in \mathcal{P}_n$, la proportion d'entiers autorisés est :

$$\delta_p = \begin{cases} \frac{p-2}{p} & \text{si } p \nmid n, \\ \frac{p-1}{p} & \text{si } p \mid n \quad (\text{classes confondues}). \end{cases}$$

6.2. Densité globale par le théorème chinois

Par le théorème des restes chinois, les conditions modulo les différents $p \in \mathcal{P}_n$ sont indépendantes. La densité de l'union des complémentaires dans $\mathbb{Z}$ vaut donc

$$\delta(n) = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} \delta_p.$$

Application à $n = 98$. Les modules sont $\{3, 5, 7\}$:

$$\delta(98) = \underbrace{\frac{1}{3}}_{\substack{p \nmid n \\ 2 \text{ exclus}}} \cdot \underbrace{\frac{3}{5}}_{\substack{p \nmid n \\ 2 \text{ exclus}}} \cdot \underbrace{\frac{6}{7}}_{\substack{p \mid n \\ 1 \text{ exclu}}} = \frac{18}{105} = \frac{6}{35}.$$

TABLE 1 – Les 18 cosets et leurs solutions mod 105

Coset	r_3	r_5	r_7	$x \pmod{105}$
1	1	1	1	1
2	1	1	2	16
3	1	1	3	31
4	1	1	4	46
5	1	1	5	61
6	1	1	6	76
7	1	2	1	22
8	1	2	2	37
9	1	2	3	52
10	1	2	4	67
11	1	2	5	82
12	1	2	6	97
13	1	4	1	64
14	1	4	2	79
15	1	4	3	94
16	1	4	4	4
17	1	4	5	19
18	1	4	6	34

Remarque : chaque entier satisfait **un seul** triplet de congruences - les 18 cosets sont disjoints. Le nombre 19 appartient UNIQUEMENT au coset 17 (1, 4, 5).

6.3. Nombre attendu de candidats

Grâce à la symétrie de la remarque 1, tout a criblé fournit le couple $(a, n - a)$ entier. Le nombre attendu de candidats $a \in [3, n - 3]$ est donc

$$N(n) \approx \frac{n}{2} \cdot \delta(n).$$

Pour $n = 98$: $N(98) \approx 49 \times \frac{6}{35} = 8,4$.

Parmi eux figurent effectivement les décompositions premiers :

$$98 = 19 + 79 = 31 + 67 = 37 + 61.$$

7. Formules finales et conclusion

7.1. Formules générales

Pour un nombre pair n , soient :

$$\mathcal{P}_n = \{p \text{ premier} : p \leq \sqrt{n}, p \neq 2\}$$

$$P(\sqrt{n}) = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} p \quad (\text{primorielle})$$

Le nombre de cosets criblés est donné par :

$$K(n) = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} \begin{cases} p-2 & \text{si } p \nmid n \\ p-1 & \text{si } p \mid n \end{cases}$$

La densité des points criblés sur la diagonale est :

$$\Delta(n) = \frac{K(n)}{P(\sqrt{n})}$$

Le nombre attendu de candidats dans l'intervalle $[3, n-3]$ (en tenant compte de la symétrie $a \leftrightarrow n-a$) est :

$$N(n) \approx \frac{n-6}{2} \cdot \Delta(n)$$

7.2. Application numérique à $n = 98$

Pour $n = 98$:

- $\mathcal{P}_{98} = \{3, 5, 7\}$
- $P(\sqrt{98}) = 3 \times 5 \times 7 = 105$
- $K(98) = 1 \times 3 \times 6 = 18$
- $\Delta(98) = \frac{18}{105} = \frac{6}{35} \approx 0,171$
- $N(98) \approx 46 \times \frac{6}{35} \approx 7,9$

On observe effectivement 3 décompositions premières : $19 + 79$, $31 + 67$, $37 + 61$.

7.3. Pourquoi l'espérance ne garantit rien

La valeur $N(n)$ est une **espérance statistique**, pas un comptage exact. Les raisons fondamentales sont :

1. **discrétisation**. Les cosets sont des ensembles discrets (un point tous les $P(\sqrt{n})$ entiers).
2. **périodicité**. La position des points est périodique de période $P(\sqrt{n})$.
3. **fluctuations**. L'intervalle $[3, n - 3]$ ne couvre qu'une portion incomplète d'une période.

Conséquemment, certains nombres pairs pourraient n'avoir **aucun** candidat dans leur intervalle, même si l'espérance est élevée. Les méthodes de crible fournissent des **bornes asymptotiques**, pas des garanties ponctuelles.

7.4. Limite fondamentale : l'obstruction de parité de Selberg

Même en présence de plusieurs candidats criblés, aucune de ces méthodes ne peut **garantir** que ces candidats sont vraiment premiers. En effet :

Les méthodes de crible classiques ne peuvent distinguer efficacement entre les nombres ayant un nombre PAIR ou IMPAIR de facteurs premiers. Elles voient indifféremment les nombres premiers (1 facteur) et les semi-premiers pq (2 facteurs).

Votre approche géométrique, bien qu'élégante, reste fondamentalement une méthode de crible. Elle se heurte donc à la même obstruction. Le meilleur résultat connu dans ce sens (Chen Jingrun, 1973) démontre que tout grand entier pair est somme d'un premier et d'un nombre à au plus 2 facteurs premiers - on est encore loin de garantir **deux** premiers.

7.5. Apports positifs de cette approche

Malgré cette limitation, cette construction géométrique offre :

- une **représentation visuelle** nouvelle du crible classique.
- la découverte de **structures algébriques** (centres de symétrie Type A et Type B).
- une **classification complète** des 18 cosets pour $n = 98$.
- des **bornes quantitatives** calculables explicitement.
- une **intuition géométrique** qui pourrait inspirer de nouvelles méthodes.

7.6. Conclusion

Cette étude a mis en lumière la richesse structurelle cachée derrière la conjecture de Goldbach. La dualité entre points triples réels (Type A, décomposants potentiels) et centres de symétrie virtuels (Type B, intersections géométriques sans réalité arithmétique) ouvre des perspectives intéressantes. Cependant, l'obstruction de parité de Selberg demeure l'obstacle central qui empêche toute méthode de crible - y compris celle-ci - de fournir une démonstration complète de la conjecture.

Pour progresser, il faudra probablement intégrer des mécanismes **radicalement nouveaux**, sortant du cadre du simple comptage de congruences, et capables de discriminer les vrais premiers des pseudo-premiers au-delà de $\sqrt{n}$.