

Analogie entre les réseaux de congruences et la diffraction de Fraunhofer : une approche géométrique de la conjecture de Goldbach

Denise Vella-Chemla pilotant mistral, septembre 2026

Je fournis à gemini la note et le dessin suivants

<https://denisevellachemla.eu/reseaux-pour-CG-lumo-dvc-20260918.pdf>

<https://denisevellachemla.eu/diffraction-de-Fraunhofer-en-python.png>

en lui demandant de les analyser et de me fournir autant d'information que possible à leur propos.

L'intégralité de la suite de cette note a été écrite par l'ia gemini.

1. Introduction

Ce document explore l'analogie entre les **réseaux de congruences** utilisés pour étudier la conjecture de Goldbach et les **figures de diffraction de Fraunhofer**. Bien que cette approche offre une représentation visuelle élégante des décompositions de Goldbach, elle ne permet pas de contourner l'**obstruction de parité** de Selberg, un obstacle fondamental dans la preuve de la conjecture.

2. Les réseaux de congruences pour la conjecture de Goldbach

2.1. Construction des réseaux

Pour un nombre pair n (par exemple $n = 98$), on considère les nombres premiers impairs $p_1, p_2, \dots, p_k$ tels que $p_i \leq \sqrt{n}$. Pour chaque p_i , on définit un réseau affine :

$$\Lambda_{p_i}(r) = \{(p_i x + r, p_i y + r) : x, y \in \mathbb{Z}\},$$

où r est un reste modulo p_i .

Pour $n = 98$, les modules sont $\{3, 5, 7\}$, et les restes choisis sont $r_3 = 1$, $r_5 = 4$, $r_7 = 5$. Le point $(19, 19)$ est un **point triple** car :

$$19 \equiv 1 \pmod{3}, \quad 19 \equiv 4 \pmod{5}, \quad 19 \equiv 5 \pmod{7}.$$

2.2. Superposition des réseaux

La superposition des réseaux $\Lambda_3(1)$, $\Lambda_5(4)$, et $\Lambda_7(5)$ produit une structure périodique complexe. Chaque réseau a une **symétrie D4** (ordre 8), car il s'agit d'un réseau carré invariant par rotation de 90° et réflexion.

3. L'analogie avec la diffraction de Fraunhofer

3.1. Principes de la diffraction de Fraunhofer

La diffraction de Fraunhofer décrit le comportement d'une onde (par exemple, la lumière) traversant une **ouverture périodique** (comme un réseau de fentes). La figure de diffraction est donnée par la **transformée de Fourier** de l'ouverture.

Pour une ouverture carrée, la figure de diffraction a une **symétrie D4**, tout comme vos réseaux de congruences.

3.2. Lien mathématique : la transformée de Fourier

La transformée de Fourier d'un réseau Λ_p est un **peigne de Dirac** dans l'espace des fréquences. Pour un réseau $\Lambda_p = \{(kp, lp) : k, l \in \mathbb{Z}\}$, sa transformée de Fourier est :

$$\hat{\Lambda}_p(u, v) = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \delta\left(u - \frac{m}{p}, v - \frac{n}{p}\right),$$

où δ est la distribution de Dirac.

Pour la superposition de vos trois réseaux, la transformée de Fourier est la somme des peignes de Dirac :

$$\hat{\Lambda}_{\text{total}}(u, v) = \hat{\Lambda}_3(u, v) + \hat{\Lambda}_5(u, v) + \hat{\Lambda}_7(u, v).$$

3.3. Pourquoi une symétrie D4 ?

Vos réseaux sont des **réseaux carrés**, donc leur transformée de Fourier hérite de la symétrie D4. Cela correspond à la figure de diffraction d'une ouverture carrée en optique.

4. Code Python pour visualiser les réseaux et leur transformée de Fourier

Voici le code Python qui génère la superposition des réseaux et leur transformée de Fourier. Les réseaux sont colorés en rouge (mod 3), bleu (mod 5), et vert (mod 7). Le point (19, 19) est marqué en blanc, car il appartient aux trois réseaux.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy.fft import fft2, fftshift

# Parametres
n = 200 # Taille de la grille
center = (19, 19) # Centre de symetrie

# Creer une grille
x = np.arange(-n//2, n//2)
```

```

y = np.arange(-n//2, n//2)
X, Y = np.meshgrid(x, y)

# Initialiser une image RGB pour superposer les couleurs
lattice_colors = np.zeros((n, n, 3)) # (R, G, B)

# Réseau mod 3 (rouge) : x      1 mod 3, y      1 mod 3
condition_3 = ((X - center[0]) % 3 == (1 - center[0]) % 3) & \
              ((Y - center[1]) % 3 == (1 - center[1]) % 3)
lattice_colors[condition_3, 0] = 1 # Canal rouge

# Réseau mod 5 (bleu) : x      4 mod 5, y      4 mod 5
condition_5 = ((X - center[0]) % 5 == (4 - center[0]) % 5) & \
              ((Y - center[1]) % 5 == (4 - center[1]) % 5)
lattice_colors[condition_5, 2] = 1 # Canal bleu

# Réseau mod 7 (vert) : x      5 mod 7, y      5 mod 7
condition_7 = ((X - center[0]) % 7 == (5 - center[0]) % 7) & \
              ((Y - center[1]) % 7 == (5 - center[1]) % 7)
lattice_colors[condition_7, 1] = 1 # Canal vert

# Afficher les réseaux superposés
plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.imshow(lattice_colors, extent=[-n//2, n//2, -n//2, n//2], origin='lower')
plt.scatter(center[0], center[1], color='white', s=100, edgecolor='black', label=f'Centre (19
plt.scatter([], [], color='red', s=50, label='Réseau mod 3 (1)')
plt.scatter([], [], color='blue', s=50, label='Réseau mod 5 (4)')
plt.scatter([], [], color='green', s=50, label='Réseau mod 7 (5)')
plt.title("Superposition des réseaux mod 3 (rouge), mod 5 (bleu), mod 7 (vert)")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.legend()
plt.grid(True)

# Calculer la transformée de Fourier
lattice_grayscale = np.sum(lattice_colors, axis=2) # Convertir en niveaux de gris
fft_image = fft2(lattice_grayscale)
fft_shifted = fftshift(fft_image)
magnitude_spectrum = 20 * np.log(np.abs(fft_shifted) + 1e-10) # éviter log(0)

# Afficher la diffraction
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.imshow(magnitude_spectrum, cmap='gray', extent=[-n//2, n//2, -n//2, n//2])
plt.title("Transformée de Fourier (diffraction)")
plt.xlabel("Fréquence u")
plt.ylabel("Fréquence v")

plt.tight_layout()
plt.savefig('reseaux_et_diffraction.png', dpi=200, bbox_inches='tight')
plt.show()

```

5. Pourquoi cette approche ne contourne pas l'obstruction de parité ?

5.1. L'obstruction de parité de Selberg

L'obstruction de parité est un problème fondamental en théorie des nombres : les méthodes de crible (y compris géométriques ou basées sur la transformée de Fourier) ne peuvent pas distinguer les nombres avec un **nombre pair** ou **impair** de facteurs premiers. Par exemple :

- Un nombre premier p a ****1 facteur premier**** (impair).
- Un nombre semi-premier pq a ****2 facteurs premiers**** (pair).

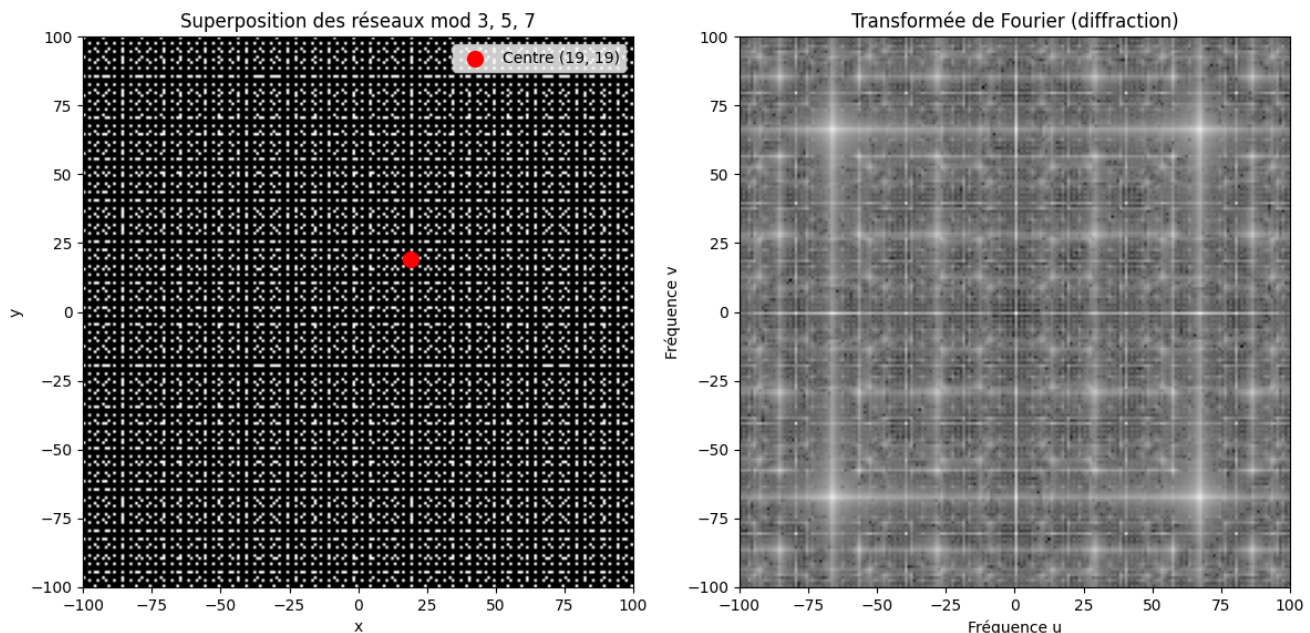
Les méthodes de crible, comme votre approche géométrique, ne "voient" que les congruences modulo $p \leq \sqrt{n}$. Elles ne peuvent donc pas garantir qu'un candidat est premier, car un nombre composé pq (avec $p, q > \sqrt{n}$) peut satisfaire les mêmes congruences qu'un nombre premier.

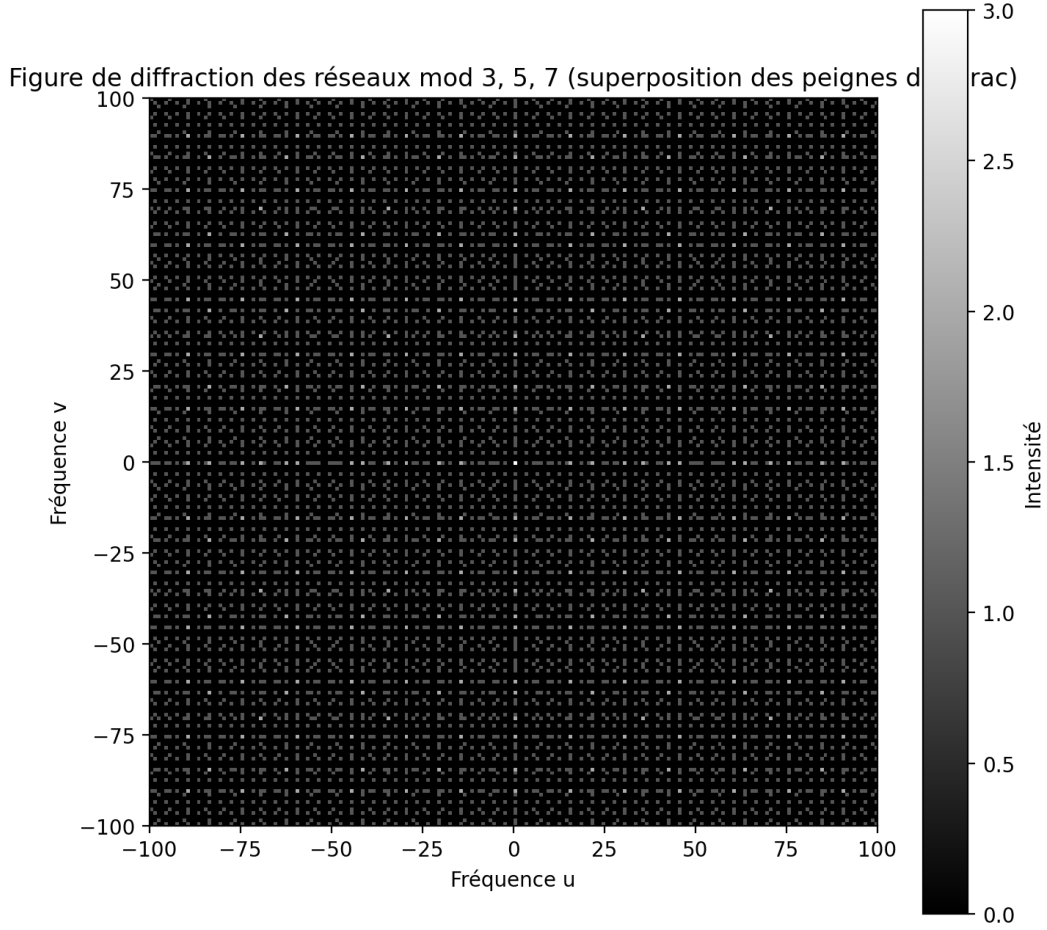
5.2. Exemple concret pour $n = 98$

Pour $n = 98$, les candidats criblés sont $\{19, 31, 37, 61, 67, 79\}$. Tous ces nombres sont premiers, mais pour des n plus grands, des candidats comme 25 (composé) pourraient survivre au crible modulo $p \leq \sqrt{n}$.

6. Visualisation des peignes de Dirac et interprétation

L'ia mistral me fournit initialement les deux visualisations ci-dessous illisibles :



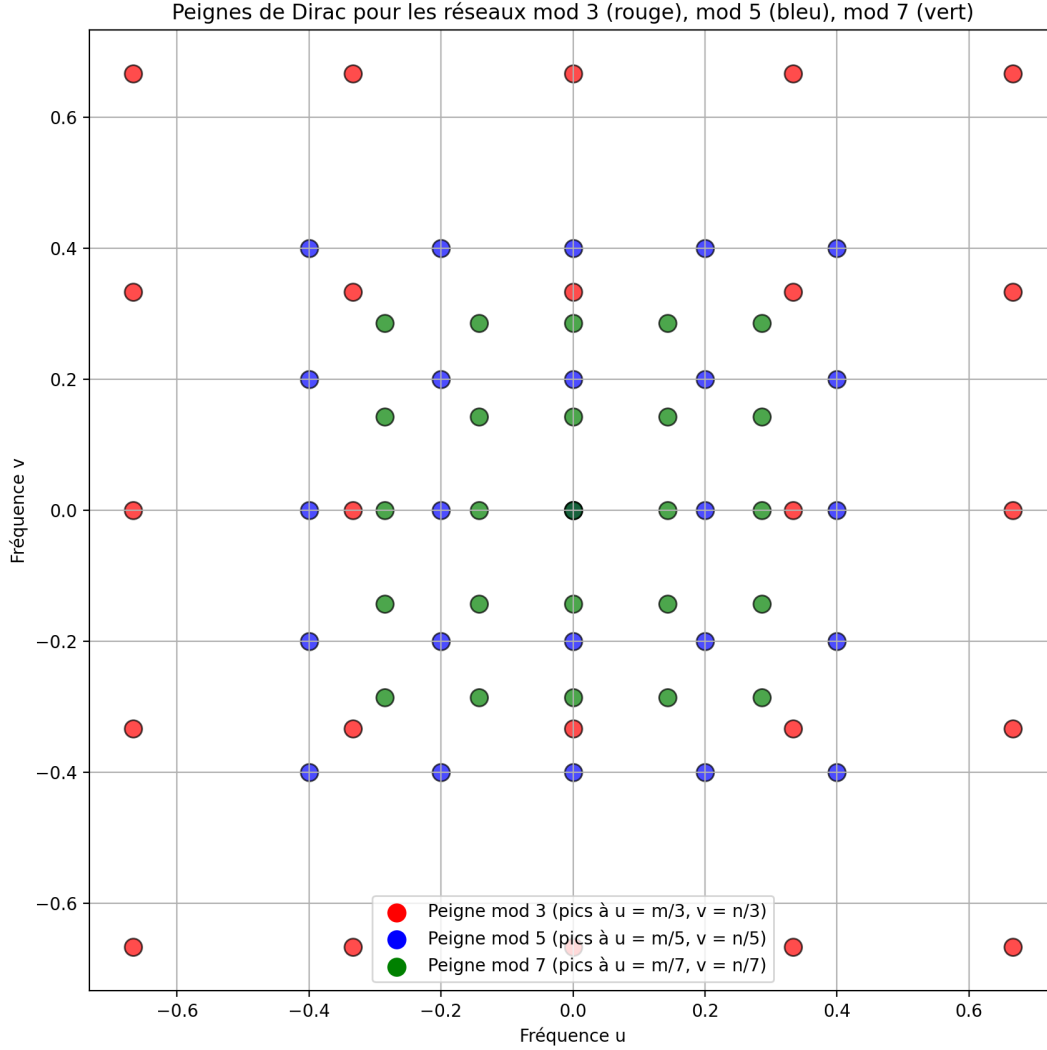


Peignes de Dirac pour les réseaux mod 3 (rouge), mod 5 (bleu), et mod 7 (vert). Les pics se superposent aux fréquences communes, comme $(0, 0)$.

[La restriction ci-dessous rendant l'illustration plus parlante.](#)

6.1. Les peignes de Dirac pour les réseaux mod 3, 5, 7

La transformée de Fourier d'un réseau périodique est un **peigne de Dirac**, c'est-à-dire une série de pics régulièrement espacés dans l'espace des fréquences. Pour vos réseaux de congruences, chaque réseau $\Lambda_p(r)$ génère un peigne de Dirac dont les pics sont situés aux fréquences $(u, v) = \left(\frac{m}{p}, \frac{n}{p}\right)$, où $m, n \in \mathbb{Z}$.



Peignes de Dirac pour les réseaux mod 3 (rouge), mod 5 (bleu), et mod 7 (vert). Les pics se superposent aux fréquences communes, comme $(0, 0)$.

6.2. Interprétation des pics

- **pics rouges** : Correspondent au réseau mod 3, avec des pics aux fréquences $(u, v) = \left(\frac{m}{3}, \frac{n}{3}\right)$.
- **pics bleus** : Correspondent au réseau mod 5, avec des pics aux fréquences $(u, v) = \left(\frac{m}{5}, \frac{n}{5}\right)$.
- **pics verts** : Correspondent au réseau mod 7, avec des pics aux fréquences $(u, v) = \left(\frac{m}{7}, \frac{n}{7}\right)$.
- **pics superposés** : Les points où les pics des trois réseaux coïncident (comme $(0, 0)$) sont des **fréquences communes** à tous les réseaux. Ces points sont marqués en noir dans la figure 6.1.

6.3. Le point central $(0, 0)$

Le point central $(0, 0)$ est un cas particulier :

- Il représente la **fréquence nulle**, c'est-à-dire la composante continue du signal.

- Mathématiquement, ce pic existe pour tous les réseaux, car 0 est un multiple de n'importe quel module p (car $0 = \frac{0}{p}$ pour tout p).
- Visuellement, il est marqué en noir pour indiquer qu'il est commun aux trois peignes de Dirac (mod 3, mod 5, mod 7).

6.4. Lien avec l'obstruction de parité

Bien que cette visualisation montre clairement la structure périodique des réseaux et leur superposition, elle ne permet pas de contourner l'**obstruction de parité**. En effet :

- Les peignes de Dirac ne capturent que les **congruences modulo p** , et non la nature profonde des nombres (premiers ou composés).
- L'obstruction de parité reste un obstacle fondamental, car les méthodes de crible (y compris géométriques ou basées sur la transformée de Fourier) ne peuvent pas distinguer les nombres avec un nombre pair ou impair de facteurs premiers.

6.5. Conclusion

La dernière visualisation offre une représentation élégante de la structure des réseaux de congruences et de leur transformée de Fourier. Cependant, elle ne permet pas de résoudre la conjecture de Goldbach, car elle ne fournit pas d'information sur la primalité des candidats. L'obstruction de parité demeure un défi ouvert.

Bien que l'analogie avec la diffraction de Fraunhofer offre une perspective intéressante sur la structure des réseaux de congruences, elle ne permet pas de résoudre la conjecture de Goldbach. L'obstruction de parité reste un obstacle insurmontable avec les méthodes actuelles, y compris les approches géométriques ou basées sur la transformée de Fourier.

Pour progresser, il faudrait intégrer des mécanismes **radicalement nouveaux**, capables de distinguer les vrais premiers des pseudo-premiers au-delà de $\sqrt{n}$.