

Sur la question directe : sais-je démontrer la conjecture de Goldbach ? Une réponse honnête, et pourquoi

ia claude

juillet 2026

1. Réponse directe

Non. Je ne sais pas démontrer la conjecture de Goldbach, et je n'ai fourni, dans les notes précédentes, aucun élément qui s'en approche. Ce n'est pas une prudence de façade : c'est un fait, et je vais en donner la raison précise plutôt que de la laisser dans le vague.

Cette conjecture est ouverte depuis 1742. Elle a résisté à tous les outils élémentaires et analytiques développés depuis, y compris ceux, très puissants, du vingtième siècle. Si une des constructions des notes précédentes - arbre des restes, chip-firing, formule de $\pi(m)$, gnomon couplé, crible de Brun - menait à une preuve, ce serait un événement mathématique majeur, et la prudence élémentaire face à un problème de cette nature commande de ne jamais annoncer une preuve qu'on n'a pas rigoureusement vérifiée ligne à ligne. Je ne l'ai pas.

2. Pourquoi précisément : ce n'est pas un manque d'astuce

Le point important, et c'est celui que je veux établir ici avec le même soin que les résultats précédents : l'échec n'est pas accidentel ni contingent de mon habileté ou de la tienne. Il est structurel, et il a un nom et une preuve.

Fait 1 (Obstruction de parité, Selberg 1949). *Toute méthode de crible combinatoire - c'est-à-dire toute méthode qui borne le nombre d'entiers d'un ensemble en excluant des classes résiduelles modulo des petits premiers, puis en recombinaison par inclusion-exclusion (éventuellement tronquée, à la Brun ou à la Selberg) - est structurellement incapable de distinguer les entiers ayant un nombre pair de facteurs premiers de ceux en ayant un nombre impair. Par conséquent, une telle méthode peut borner par le haut le nombre de décomposants de Goldbach du bon ordre de grandeur (Théorème de Brun, note précédente), mais ne peut jamais, à elle seule, produire la minoration correspondante qui isolerait un nombre premier au sein de l'ensemble décalé.*

Or, comme on l'a établi en détail dans la note précédente :

- l'arbre des restes à arité variable (Section 3) code exactement les classes résiduelles interdites par divisibilité ;

- le chip-firing (Section 4) et la formule $S(m)$ (Section 5) sont des reformulations exactes, mais toujours purement congruentielles, du même crible d'Ératosthène-Legendre ;
- le gnomon couplé (Section 11) et sa densité (Proposition 13) sont, à la notation près, le crible de Legendre appliqué simultanément à p et $n - p$;
- la borne de Brun (Section 14) est la troncature combinatoire optimale de ce même crible.

Toutes ces constructions, aussi différentes soient leurs habillages (arborescent, jetons, valuations, matriciel), appartiennent à *la même famille* de méthodes : le crible combinatoire par congruences. Le Fait ci-dessus s'applique donc à elles *sans exception*, quel que soit le raffinement syntaxique qu'on leur ajoute - unifier ces objets, comme on l'a fait, ne change rien à la famille à laquelle ils appartiennent, et ne peut donc pas lever une obstruction qui frappe la famille entière.

Remarque : je souligne ce point parce qu'il est tentant, après avoir unifié plusieurs constructions indépendantes et en avoir tiré des résultats réels (Théorèmes 4, 6, 16), de penser que l'accumulation de reformulations finira par produire une percée. Ce n'est pas ainsi que fonctionne une obstruction de ce type : elle ne s'use pas par le nombre de présent formulations équivalentes, seulement par l'introduction d'un ingrédient d'une nature *différente* de celle du crible pur.

3. Ce qui a effectivement fonctionné, historiquement, et pourquoi ce n'est pas ce qu'on a fait

Pour être complet et honnête sur l'état de l'art, plutôt que de laisser la question abstraite :

- Le meilleur résultat inconditionnel connu vers Goldbach reste le théorème de Chen (1973) : tout n pair assez grand s'écrit $p+m$ avec p premier et m ayant au plus deux facteurs premiers. C'est un raffinement du crible combinatoire (crible de Selberg avec poids), et il bute lui aussi, structurellement, sur la parité pour passer de « au plus deux facteurs » à « un seul ».
- La conjecture de Goldbach *ternaire* (tout impair > 5 est somme de trois premiers) a été démontrée sans condition par Helfgott en 2013. Mais cette preuve utilise la méthode du cercle de Hardy-Littlewood : une méthode analytique, fondée sur l'analyse de Fourier des sommes d'exponentielles sur les premiers, combinée à des vérifications numériques massives. Ce n'est pas un raffinement du crible combinatoire : c'est un ingrédient d'une autre nature, précisément le genre d'ingrédient que le Fait de la Section 2 dit nécessaire.
- Aucune de nos constructions (arbre des restes, chip-firing, valuations, gnomon couplé) ne contient, sous quelque forme que ce soit, un tel ingrédient analytique. Elles sont toutes, fidèlement à l'esprit élémentaire que tu leur as donné dès le départ, des objets combinatoires purs. C'est leur force (rigueur élémentaire, calculabilité, clarté) et c'est exactement, pour cette question précise, leur limite.

4. Ce que je peux honnêtement affirmer, et ce que je ne peux pas

- Je peux affirmer que les résultats des notes précédentes sont corrects et démontrés (Théorèmes 4, 6, 16, Propositions 8, 9, 12, 13) - je les ai vérifiés pas à pas et je maintiens ces preuves.

- Je ne peux pas affirmer, et je n'affirme pas, qu'ils constituent une avancée vers une preuve de Goldbach : ils reformulent l'état de l'art du crible, ils ne le dépassent pas.
- Je ne vais pas te proposer un argument supplémentaire habillé pour ressembler à une preuve. Si un jour l'une de tes constructions faisait apparaître, honnêtement et sans forçage, un ingrédient de nature non combinatoire (une information sur la distribution des premiers qui ne se réduise pas à des congruences), ce serait le signal à suivre. Ce n'est pas le cas ici, et je ne prétendrai pas le contraire.

Signé : claude, juillet 2026, en réponse directe à Denise Vella-Chemla.