

Référence de l'énoncé de René Descartes de 1701 (31 mars 1596 - 11 février 1650) d'une conjecture proche de la conjecture dite "de Goldbach" et qui est antérieure à la lettre de Goldbach à Euler du 7 juin 1742 dans laquelle cette conjecture est énoncée.

La citation de René Descartes peut être lue dans [1] ; elle transcrit du latin un extrait des *Excerpta ex Mss. Des-Cartes*, publiés en 1701, à la fin des *Opuscula posthuma*.

Ci-dessous, la traduction française de l'extrait en latin :

Chaque nombre est composé d'un, deux ou trois nombres triangulaires.

De même, d'un, deux, trois ou quatre carrés.

De même, d'un, deux, trois, quatre ou cinq pentagones.

De même, d'un, deux, trois, quatre ou six hexagones.

Et ainsi de suite à l'infini.

Ce que je n'ai cependant pas encore démontré.

Mais tout nombre pair est composé d'un, deux ou trois nombres premiers.

Tout nombre triangulaire est huit fois inférieur à l'unité par un carré parfait.

Ce qui se démontre facilement : le nombre triangulaire est égal à : $\frac{1}{2}(1 + 2n)$; donc $1 + 2n = 8\Delta$; et si la racine est doublée, elle devient $1 + 4n = 8\Delta$; où la racine est $-1 + \sqrt{8\Delta + 1}$. Par conséquent, $\sqrt{8\Delta + 1}$ est nécessairement un nombre rationnel par construction. Donc, 8Δ est inférieur à 1 d'un carré parfait.

Ci-dessous, l'extrait en latin :

Transcription en L^AT_EX : Denise Vella-Chemla, 12 février 2026.

Je remercie M. Vincent Carraud, qui m'a fourni cette référence ; ainsi que Harald Helfgott [4], Leonard Eugene Dickson [3], et, à titre posthume Paul Tannery et Charles Adam [2], qui m'ont amenée à la chercher.

Omnis numerus constat vel uno, vel duobus, vel tribus numeris triangularibus.

Item, vel uno, vel duobus, vel tribus, vel quatuor quadratis.

Item, vel uno, vel duobus, vel tribus, vel 4, vel 5 pentagonis. 298

Item, vel 1, vel 2, vel 3, vel 4, vel 6 hexagonis.

Et sic in infinitum.

Quod tamen nondum demonstraui.

Sed et omnis numerus par fit ex uno vel duobus vel tribus primis.

Omnis ^a numeri triangularis octuplum minor est unitate aliquo numero quadrato. Quod facile demonstratur : est enim numerus triangularis $\infty \frac{1}{2}(1 \mathfrak{Z} + 1 \mathfrak{Z})$; ergo $1 \mathfrak{Z} \infty - 1 \mathfrak{Z} + \text{bis } \Delta$; et si duplicetur radix, fit $1 \mathfrak{Z} \infty - 2 \mathfrak{Z} + 8 \Delta$; ubi radix est $-1 + \sqrt{8 \Delta + 1}$. Atqui $\sqrt{8 \Delta + 1}$ debet esse numerus rationalis ex constructione. Ergo 8Δ minor erat unitate aliquo numero quadrato.

a. Note de bas de page de Paul Tannery : Démonstration algébrique de la proposition connue des anciens, que, si t est un nombre triangulaire, $8t + 1$ est un carré. Cette note a dû être écrite en même temps que la précédente, comme résultat des premières réflexions de Descartes sur la question, avant qu'il l'eût abandonnée. Remarquons qu'il avait dû étudier plus ou moins, dans sa jeunesse, Diophante d'après la traduction de Xylander; mais il ne connaît pas celle de Bachet, et depuis 1620 il ne s'est pas occupé des questions numériques. Elles sont presque neuves pour lui. (P. T.).

Trianguli vero cujus unus angulus est 120 graduum, et tria latera sunt numeri rationales, latera facile inveniuntur ex superioribus: nam basi eadem remanente, duo minora latera trianguli 60 graduum sunt duo latera hujus.

Nempe basis sit $\alpha q + 1 \text{ z} - \alpha \text{ z}$:

unum latus est $\alpha q - 1 \alpha \text{ z}$,

et aliud $2 \alpha \text{ z} - 1 \text{ z}$. |

Vel si basis sit $3 \text{ z} + 3 \alpha \text{ z} + \alpha q$:

latera sunt $3 \text{ z} + 2 \alpha \text{ z}$ et $2 \alpha \text{ z} + \alpha q$.

297

Ex quibus infinita theoremata deduci possunt, et facile exponi possunt progressionibus arithmeticae, quae bases vel latera omnium ejusmodi triangulorum comprehendant, ad imitationem Cabalae Germanorum.

III

NUMERI POLYGONI

Omnis numerus constat vel uno, vel duobus, vel tribus numeris triangularibus.

Item, vel uno, vel duobus, vel tribus, vel quatuor quadratis. |

Item, vel uno, vel duobus, vel tribus, vel 4, vel 5 pentagonis.

298

Item, vel 1, vel 2, vel 3, vel 4, vel 6 hexagonis.

Et sic in infinitum.

Quod tamen nondum demonstravi.

Sed et omnis numerus par fit ex uno vel duobus vel tribus primis.

Omnis numeri triangularis octuplum minor est unitate aliquo numero quadrato. Quod facile demonstratur: est enim numerus triangularis = $\frac{1}{2}(1 \text{ z} + 1 \text{ z})$; ergo $1 \text{ z} = -1 \text{ z} + 2 \Delta$; et si duplicetur radix, fit $1 \text{ z} = -2 \text{ z} + 4 \Delta$; ubi radix est $-1 + \sqrt{8 \Delta + 1}$. Atqui $\sqrt{8 \Delta + 1}$ debet esse numerus rationalis ex constructione. Ergo 8Δ minor erat unitate aliquo numero quadrato. |

²⁶ Il riferimento alla 'cabala dei tedeschi' richiama il contesto di alcune opere di Johann Faulhaber (1580-1635), in cui il matematico tedesco si serve di questo tipo di progressioni, sfruttandole anche per scopi magico-cabalistici: *Andeutung einer unerhörten neuen Wunderkunst, welche der Geist Gottes in etlichen prophetischen und biblischen Geheimnuszahlen bis auf die letzte Zeit hat wollen versiegelt und verborgen halten* (Abraham Wagenmann, Nürnberg, 1613) e *Himlische geheime Magia oder Neue cabalistische Kunst und Wunderrechnung vom Gog und Magog* (Wagenmann, Nürnberg, 1613). Le due opere furono tradotte subito in latino da Johann Remmelin.

²⁷ Il titolo è aggiunto da AT sulla base dell'indice di A.

Però per il triangolo che ha un angolo di 120 gradi e tre lati del quale sono numeri razionali, i lati si trovano facilmente da quanto detto sopra: infatti, rimanendo la medesima la base, i due lati minori del triangolo di 60 gradi sono due dei suoi lati.

Cioè, sia la base $\alpha q + 1 \text{ s} - \alpha^2$:

un lato è $\alpha q - 1 \alpha^2$,

e l'altro $2\alpha^2 - 1 \text{ s}$. |

297 O, se la base è $3 \text{ s} + 3\alpha^2 + \alpha q$

I lati sono $3 \text{ s} + 2\alpha^2$ e $2\alpha^2 + \alpha q$.

Da queste cose si possono dedurre infiniti teoremi e si possono facilmente esporre le progressioni aritmetiche che comprendano le basi o i lati di tutti i triangoli di questo tipo, ad imitazione della cabala dei tedeschi²⁶.

III

NUMERI POLIGONI²⁷

Ogni numero è costituito da 1, 2, o tre numeri triangolari.

Parimenti o da 1, o da 2, o da 3, o da 4 quadrati. |

298 Parimenti, o da 1, o da 2, o da 3, o da 4, o da 5 pentagoni.

Parimenti o da 1, o da 2, o da 3, o da 4, o da 6 esagoni.

E così all'infinito.

E tuttavia non l'ho ancora dimostrato.

Ma ogni numero pari è fatto di uno o due o tre numeri primi²⁸.

L'ottuplo di ogni numero triangolare è minore di una unità di un qualche numero quadrato. Il che si dimostra facilmente: infatti un numero triangolare $= \frac{1}{2}(1 \text{ s} + 1^2)$; quindi $1 \text{ s} = -1^2 + 2\Delta$; e se si duplica la radice sia $1 \text{ s} = -2^2 + 8\Delta$; dove la radice è $-1 + \sqrt{8\Delta + 1}$. Ora, $\sqrt{8\Delta + 1}$ deve essere un numero razionale per costruzione. Dunque 8Δ ²⁹ è più piccolo di una unità di un qualche numero quadrato³⁰. |

²⁸ Questa e la nota precedente (da «Quod tamen...» a «...tribus primis») non si trovano in A.

²⁹ Il simbolo Δ sta qui ad indicare il numero triangolare.

³⁰ Il testo che precede (da «Omnis numeri ...») è riportato da AT sulla base di L. A presenta un testo con alcune varianti: «Omnis numerus triangularis octuplum plus unitate est quadratum, quod facile demonstratur. Est enim numerus triangularis $(x + xx)/2$, ergo octuplum $(8x + 8xx)/2$ seu $4x + 4xx$, cui si addatur 1, fiet $1 + 4x + 4xx$, cujus radix $1 + 2x$ » (L'ottuplo di ogni numero triangolare più l'unità è un quadrato, il che si dimostra facilmente. Infatti un numero triangolare è $(x + xx)/2$, quindi l'ottuplo è $(8x + 8xx)/2$, ovvero $4x + 4xx$, cui se si aggiunge l'unità si ottiene $1 + 4x + 4xx$, la cui radice è $1 + 2x$), p. 4.

Références

- [1] Giulia Belgioioso, avec la collaboration de Igor Agostini, Francesco Marrone et Massimiliano Savini, *René Descartes : Opere Posthume 1650-2009*, eds Bompiani – il pensiero occidentale, p. 1010, Excerpta ex Mss Des-Cartes, édit. 1701, III : Numeri polygони).
- [2] Charles Adam, Paul Tannery, *Œuvres de Descartes - Physico-mathematica, Compendium Musicae, Regulae ad directionem ingenii - Recherche de la vérité, Supplément à la Correspondance*, vol. X, Excerpta ex Mss Des-Cartes, édit. 1701, III : Numeri polygони, eds. Cerf, Paris, 1908, p. 298.
- [3] Leonard Eugene Dickson, *History of the theory of numbers*, Vol. 1, Divisibility and primality, Chelsea publishing company, New York, 1952, p. 421.
- [4] Harald Helfgott, *Le problème ternaire de Goldbach*, Instantanés de recherche mathématique d'Oberwolfach, n° 3/2014.