

Nombres pairs n inférieurs à 100 qui ont 3 racines cubiques de l'unité dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dont l'une est un décomposant de Goldbach de n (Denise Vella-Chemla, 24.04.2025)

On fournit ici la liste des nombres pairs n compris entre 6 et 100 qui ont trois racines cubiques de l'unité modulo n , et, quand cela est possible, laquelle(s), parmi ces racine(s) cubique(s), sont des décomposants de Goldbach de n (*note : un décomposant de Goldbach de n est un nombre premier p dont le complémentaire à n , $n - p$, est premier aussi*).

Pour que n ait 3 racines cubiques de l'unité modulo n (il s'agit des nombres x tels que $x^3 \equiv 1 \pmod{n}$), il faut que 3 divise $\varphi(n)$ avec $\varphi(n)$ l'indicatrice d'Euler de n ; l'indicatrice d'Euler d'un nombre n est le nombre de nombres inférieurs à n et premiers à n , i.e. tels que $\text{pgcd}(x, n) = 1$).

Voici la liste L de ces nombres ayant une racine cubique jusqu'à 100 :

$$L = \{14, 18, 26, 28, 36, 38, 42, 52, 54, 56, 62, 70, 72, 74, 76, 78, 84, 86, 90, 98\}.$$

On fournit pour eux un décomposant de Goldbach qui est une de leurs 3 racines cubiques de l'unité (on a noté $2p$ entre parenthèses pour les doubles de premiers, vérifiant la conjecture de Goldbach "trivialement") :

14 ($2p$)	$\rightarrow$	11
18	$\rightarrow$	7
26 ($2p$)	$\rightarrow$	3
28	$\rightarrow$	$\emptyset$
36	$\rightarrow$	13
38 ($2p$)	$\rightarrow$	7
42	$\rightarrow$	37
52	$\rightarrow$	29
54	$\rightarrow$	37
56	$\rightarrow$	$\emptyset$
62 ($2p$)	$\rightarrow$	$\emptyset$
70	$\rightarrow$	11
72	$\rightarrow$	$\emptyset$
74 ($2p$)	$\rightarrow$	47
76	$\rightarrow$	$\emptyset$
78	$\rightarrow$	61
84	$\rightarrow$	37
86 ($2p$)	$\rightarrow$	79
90	$\rightarrow$	31, 61
98	$\rightarrow$	67, 79

Les nombres premiers p de la forme $6k + 1$ (resp. ainsi que leurs puissances) ont eux aussi 3 racines cubiques de l'unité dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (resp. dans $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$).