

Quel ordre ? (Denise Vella-Chemla, 22.4.2018)

En programmant la fonction de comptage fournie dans le cours d'Alain Connes au Collège de France de l'année 2008-2009 "Le monoïde des classes d'Adèles", consultable ici :

https://www.college-de-france.fr/media/alain-connes/UPL59830_connes_reres0809.pdf,

on s'interrogeait sur la fonction $ordre(\rho)$ intervenant dans la formule¹ :

$$N(q) = q - \sum_{\rho \in Z} ordre(\rho)q^\rho + 1$$

Comme on n'avait pas trop idée de ce que pouvait valoir cette fonction $ordre$, on a choisi une fonction $ordre2(\rho)$ un peu bizarre, qui fait que les calculs donnent des résultats surprenants qu'on voudrait fournir ici.

On définit $ordre2(\rho) = signe(\Im(\rho)) \times rang(\rho)^2$.

Le zéro de zêta de partie imaginaire 14 (on omet de noter les chiffres des parties décimales des parties imaginaires des zéros de zêta) a pour rang 1 et son conjugué -1, le zéro de partie imaginaire 21 a pour rang 2 et son conjugué -2, le zéro de partie imaginaire 25 a pour rang 3 et son conjugué -3, etc.

$rang(\rho) = \#\{\rho' \in Z \text{ tel que } 0 < \Im(\rho') < |\Im(\rho)|\} + 1$. La fonction $D(x)$ vaut, pour $x \in [1, \infty)$ et Z l'ensemble des zéros non-triviaux de la fonction zêta de Riemann :

$$D(x) = x - \sum_{\rho \in Z} ordre2(\rho)x^\rho$$

Le résultat de l'exécution de ce programme peut être trouvé ici :

<http://denisevellachemla.eu/quelordrepourchaquezero.pdf>.

On constate et ça nous surprend que $\Re(x - \sum_{\rho \in Z} ordre2(\rho)x^\rho) = x$. Si on commence à développer la formule avec les 3 premiers zéros, on obtient :

$$\begin{aligned} & 1 \times x^{1/2+14i} - 1 \times x^{1/2-14i} \\ & + 2 \times x^{1/2+21i} - 2 \times x^{1/2-21i} \\ & + 3 \times x^{1/2+25i} - 3 \times x^{1/2-25i} \dots \\ & = \sum_{\rho \in Z, |\Im(\rho)| > 0} rang(\rho) \sqrt{x} (e^{\Im(\rho) \ln x} - e^{-\Im(\rho) \ln x}) \\ & = \sum_{\rho \in Z, |\Im(\rho)| > 0} 2 i rang(\rho) \sqrt{x} (\sin(\Im(\rho) \ln x)) \end{aligned}$$

Le fait qu'on retrouve x en partie réelle du résultat provient de ce que $\sum_{\rho \in Z, |\Im(\rho)| > 0} 2 i rang(\rho) \sqrt{x} (\sin(\Im(\rho) \ln x))$ est de partie réelle toujours nulle (ou imaginaire pur).

Pour résumer, en affectant comme coefficients aux zéros successifs, ordonnés selon les valeurs absolues de leur partie imaginaire, les valeurs 1, -1, 2, -2, 3, -3, etc., on obtient comme résultat du calcul

$$x - \sum 2 i rang(\rho) \sqrt{x} \sin(\Im(\rho) \ln x)$$

qui est un imaginaire pur, tandis qu'en affectant 1 comme coefficient à tous les zéros, la formule qui vaut alors

$$x + 1 - \sum 2 \sqrt{x} \cos(\Im(\rho) \ln x)$$

est égale à x' , qui est un réel pur asymptotiquement de plus en plus proche de x .

1. Alain Connes nous a indiqué plus tard qu'elle valait 1 pour tous les zéros et on a finalement trouvé dans un cours que l'ordre d'un zéro est le nombre de fois qu'apparaissent les couleurs de la palette des arguments quand on tourne autour de lui et on voit sur la représentation graphique de zêta que les couleurs n'apparaissent effectivement qu'une fois chacune autour des zéros non-triviaux.

2. On a $signe(x) = \frac{x}{|x|}$.

```

1 import math
2 from math import *
3 import cmath
4 from cmath import *
5 import mpmath
6 from mpmath import *
7 import scipy
8 from scipy import integrate
9 import numpy
10 from numpy import *
11
12 def prime(atester):
13     pastrouve = True
14     k = 2
15     if (atester == 1): return False
16     if (atester == 2): return True
17     if (atester == 3): return True
18     if (atester == 5): return True
19     if (atester == 7): return True
20     while (pastrouve):
21         if ((k * k) > atester):
22             return True
23         else:
24             if ((atester % k) == 0):
25                 return False
26             else: k=k+1
27
28     """for x in range(1,1000000):
29         if prime(x):
30             print(x)"""
31
32     """zeros=[0.5+ 14.1347251417346937904572519835624766j,
33             0.5- 14.1347251417346937904572519835624766j,
34             0.5+ 21.0220396387715549926284795938969162j,
35             0.5- 21.0220396387715549926284795938969162j,..."""
36
37 zeros=[]
38 with open('leszerosdezeta', 'r') as f:
39     for p in f.readlines():
40         z = float(p.split()[1])
41         zeros.append(0.5+z*j)
42         zeros.append(0.5-z*j)
43 f.close()
44 print('')
45 print('les zeros')
46 """for z in zeros:
47     print(z)"""
48 print('')
49 print('la fonction')
50 for p in range(2,48):
51     if (prime(p)):
52         for l in range(1,12):
53             x = p**l
54             print('')
55             print(x)
56             somme = x
57             order=1
58             for z in zeros:
59                 """print(z.imag)"""
60                 somme = somme - order*(x**z)
61                 if (order%2 == 1):
62                     order=(-1)*order
63                 else:
64                     order=(-1)*order+1
65             print(somme)

```