99,718 % n'est pas 100 % (Denise Vella-Chemla, 22.07.2022)

1. Une fonction polynomiale du 3$^{\text{ème}}$ degré.

Dans une note précédente[1], on a démontré qu'un nombre premier supérieur à $\sqrt{n}$ et inférieur ou égal à $n/2$, et qui n'est jamais congru à n modulo tout nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$ est un décomposant de Goldbach de n.

Il s'agit de démontrer qu'un tel nombre existe toujours et on a essayé d'étudier si des résultats d'analyse permettraient de savoir si l'existence d'un décomposant de Goldbach est toujours garantie, lorsqu'on élimine au maximum 2 classes de congruence par module [2].

Ici, on teste une tout autre idée, algébrique : on cherche une fonction polynomiale $x \mapsto f(x)$, qu'on applique aux nombres impairs de 3 à $n/2$ pour n un nombre pair. On souhaiterait que cette fonction rende fixe un décomposant de Goldbach au moins, ou bien qu'elle envoie un décomposant de Goldbach sur son complémentaire à n, tout en envoyant les non décomposants de Goldbach sur d'autres nombres que leur complémentaire à n ; ou bien, on teste si la fonction polynomiale considérée envoie un certain décomposant de Goldbach de n sur un autre décomposant de Goldbach de n, tout ceci ayant lieu dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

On a trouvé une telle application polynomiale "sympathique" : $x \mapsto x^3 - x^2 + 1$. On considère que l'image de p est "satisfaisante" si et seulement si on a à la fois p premier et $n - p$ premier et $f(p)$ premier et $f(n-p)$ premier (en acceptant que $f(p)$ puisse être égal à p ou bien à $n - p$).

Mais pour 10 % des nombres jusqu'à 100, aucun nombre entier impair de $[3, n/2]$ n'a une image satisfaisante. Ce qui est un pourcentage conséquent.

Pour 9.03 % des nombres jusqu'à 1000 (resp. 2,60 % des nombres jusqu'à 10^4), même chose.

Ce ratio décroît bien à 0,282 % seulement des nombres jusqu'à 100 000, pour lesquels l'application polynomiale ne permet pas de trouver un décomposant de Goldbach de n. Jusqu'à 10^5, on parvient à trouver (par programme) au moins un décomposant de Goldbach dont l'image par l'application est satisfaisante dans 99,718 % des nombres pairs.

On essaie de caractériser les nombres qui posent problème pour voir s'ils ont des propriétés particulières (en terme de factorisation par exemple), on n'y parvient pas[3]. De plus, ça semble aussi difficile de démontrer qu'un nombre premier a pour image un nombre premier par cette application

[1] http://denise.vella.chemla.free.fr/jade1.pdf.

[2] Puisqu'on peut trouver un décomposant de Goldbach en criblant (éliminant) au maximum deux classes de congruences selon tout nombre premier p inférieur à $\sqrt{n}$, on peut essayer d'utiliser le produit $\displaystyle\prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \leq \sqrt{n}}} \left(1 - \frac{2}{p}\right)$. Voir la note http://denise.vella.chemla.free.fr/deux-en-moins.pdf.

[3] Voici les factorisations de certains nombres pour lesquels l'application polynomiale n'amène à rien : $\{4{\cdot}8641, 2 \cdot 41 \cdot 419, 2^2 \cdot 6961, 2^6 \cdot 311, 2\dot{3}7 \cdot 227, 2^2 \cdot 3533, 2 \cdot 41 \cdot 163, 2^3 \cdot 1627, 2^4 \cdot 797, 2 \cdot 31 \cdot 197, etc.\}$.

que de démontrer la conjecture sans en passer par ce détour.

2. Une fonction polynomiale du 2^d degré.

On a également fait des tests avec cette autre fonction :

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} -x^2 + \left(\dfrac{n}{2} - 1\right) x & \text{si } x \text{ est de la forme } 4k+2; \\[2ex] -x^2 + \dfrac{n}{2} x & \text{si } x \text{ est de la forme } 4k \end{cases}$$

Le rendement de cette fonction est moins bon. Les taux de ratage sont de 12,24 % jusqu'à 1000, 9,6718 % jusqu'à 10^3, 3,06 % jusqu'à 10^4 et enfin 0,33801 % jusqu'à 10^5 ($>$ 0,282 % trouvé pour la fonction du troisième degré). Ces échecs sont problématiques de toute façon, de par leur nombre, et de par le fait qu'on n'arrive pas à comprendre dans quels cas particuliers ils se produisent.