Produit égal à somme : le cas $1-s$ et le cas $n-s$
Denise Vella-Chemla pilotant l'ia claude

Je propose à l'ia claude l'image ci-dessous [1], extraite de la traduction de l'article arxiv
https://arxiv.org/pdf/0807.0090
qu'on peut lire ici :
https://denisevellachemla.eu/trad-HR-Xian-Jin-Li-14-oct-2025.pdf

M'a été proposée à la lecture par une IA quelconque me sachant intéressée la version mise à jour en 2025 du texte de Li de 2008 et je l'ai transcrite en LaTeX et fait traduire par Google traduction. La traduction est consultable ici (et dans la traduction est fourni le lien vers la version en anglais).
Je n'ai rien compris mais j'ai trouvé marrante l'égalité en bas de la page 10 entre le produit et la somme de deux termes qui s'avèrent égaux, sous prétexte qu'ils sont d'une forme particulière (on part de ab, et on aboutit à $a+b$).

$$
\begin{aligned}
&\left(1-\left(1-\tfrac{1}{s}\right)^n\right)\left(1-\left(1-\tfrac{1}{1-s}\right)^n\right)\\
&=1-\left(1-\tfrac{1}{s}\right)^n-\left(1-\tfrac{1}{1-s}\right)^n+\left(1-\tfrac{1}{s}\right)^n\left(1-\tfrac{1}{1-s}\right)^n\\
&=1-\left(1-\tfrac{1}{s}\right)^n-\left(1-\tfrac{1}{1-s}\right)^n+\left[\left(1-\tfrac{1}{s}\right)\left(1-\tfrac{1}{1-s}\right)\right]^n\\
&=1-\left(1-\tfrac{1}{s}\right)^n-\left(1-\tfrac{1}{1-s}\right)^n+\left[1-\tfrac{1}{s}-\tfrac{1}{1-s}+\tfrac{1}{s(1-s)}\right]^n\\
&=1-\left(1-\tfrac{1}{s}\right)^n-\left(1-\tfrac{1}{1-s}\right)^n+\left[1-\tfrac{(1-s)}{s(1-s)}-\tfrac{s}{s(1-s)}+\tfrac{1}{s(1-s)}\right]^n\\
&=1-\left(1-\tfrac{1}{s}\right)^n-\left(1-\tfrac{1}{1-s}\right)^n+\left[1-\tfrac{(1-s)+s}{s(1-s)}+\tfrac{1}{s(1-s)}\right]^n\\
&=1-\left(1-\tfrac{1}{s}\right)^n-\left(1-\tfrac{1}{1-s}\right)^n+\left[1-\tfrac{1}{s(1-s)}+\tfrac{1}{s(1-s)}\right]^n\\
&=1-\left(1-\tfrac{1}{s}\right)^n-\left(1-\tfrac{1}{1-s}\right)^n+[1]^n\\
&=1-\left(1-\tfrac{1}{s}\right)^n+1-\left(1-\tfrac{1}{1-s}\right)^n\\
&=\left(1-\left(1-\tfrac{1}{s}\right)^n\right)+\left(1-\left(1-\tfrac{1}{1-s}\right)^n\right)
\end{aligned}
$$

1. Le mécanisme de l'image

Posons, pour $s \neq 0$ et $t \neq 0$,

$$A = 1 - \frac{1}{s}, \qquad B = 1 - \frac{1}{t}, \qquad a = 1 - A^m, \qquad b = 1 - B^m,$$

où m est l'exposant (dans l'image, $m = n$).

Proposition : pour tout $m \geq 1$,

$$ab - (a + b) = (AB)^m - 1.$$

1. Voir également ici : https://milliardsdautres.blogspot.com/2025/11/far-west.html.

Démonstration.

$$ab = (1-A^m)(1-B^m) = 1 - A^m - B^m + (AB)^m, \qquad a+b = 2 - A^m - B^m.$$

En soustrayant, $ab - (a+b) = (AB)^m - 1$. □

Autrement dit, $ab = a+b$ équivaut à $(a-1)(b-1) = 1$, c'est-à-dire $(AB)^m = 1$. Le phénomène de l'image n'est donc pas lié à l'exposant, mais uniquement au produit AB des deux bases.

2. Le cas de l'image : $t = 1 - s$

$$AB = 1 - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} + \frac{1}{s(1-s)}.$$

Or $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{1-s} = \dfrac{(1-s)+s}{s(1-s)} = \dfrac{1}{s(1-s)}$, donc

$$AB = 1 - \frac{1}{s(1-s)} + \frac{1}{s(1-s)} = 1.$$

Ainsi $(AB)^m = 1$ pour tout m et $ab = a+b$. C'est exactement la ligne "$1 - \dfrac{1}{s(1-s)} + \dfrac{1}{s(1-s)} \Rightarrow [1]^n$" de l'image. La condition clé est $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{st}$, soit $s + t = 1$.

3. Le cas $t = n - s$

Ici $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{n-s} = \dfrac{n}{s(n-s)}$, d'où

$$AB = 1 - \frac{n}{s(n-s)} + \frac{1}{s(n-s)} = 1 - \frac{n-1}{s(n-s)}.$$

En général, avec $s + t = N$: $AB = 1 - \dfrac{N-1}{st}$, qui vaut 1 si et seulement si $N = 1$. Pour $N = n$ on a donc $AB = 1$ si et seulement si $n = 1$: le phénomène *disparaît*. On obtient à la place l'identité exacte

$$ab - (a+b) = \left(1 - \frac{n-1}{s(n-s)}\right)^m - 1$$

qui est non nulle dès que $n \geq 2$ et $m \geq 1$ avec $AB \neq \pm 1$.

3.1. Cas particulier $AB = -1$ (m pair)

Si m est pair, $(AB)^m = 1$ reste vrai pour $AB = -1$, c'est-à-dire

$$\frac{n-1}{s(n-s)} = 2 \iff s^2 - ns + \frac{n-1}{2} = 0 \iff s = \frac{n \pm \sqrt{(n-1)^2+1}}{2}.$$

Ces solutions sont réelles, mais $(n-1)^2 + 1$ est un carré parfait seulement pour $n = 1$ (car, pour $n \geq 2$, on a $(n-1)^2 < (n-1)^2 + 1 < n^2$, strictement entre deux carrés consécutifs). Donc s est irrationnel pour $n \geq 2$: pour s entier (ou rationnel), il n'y a *jamais* d'égalité produit = somme.

4. Une variante qui conserve le phénomène

La condition générale est $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ pour $A=1-x$, $B=1-y$ (car $AB=1 \iff x+y=xy$). Avec $x=\frac{n}{s}$ et $y=\frac{n}{n-s}$:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{s}{n}+\frac{n-s}{n}=1.$$

Donc, pour $A=1-\frac{n}{s}=-\frac{n-s}{s}$ et $B=1-\frac{n}{n-s}=-\frac{s}{n-s}$, on a $AB=1$ exactement, et pour tout m :

$$\left(1-\left(1-\frac{n}{s}\right)^m\right)\left(1-\left(1-\frac{n}{n-s}\right)^m\right)=\left(1-\left(1-\frac{n}{s}\right)^m\right)+\left(1-\left(1-\frac{n}{n-s}\right)^m\right).$$

C'est le "bon" analogue pour une paire de décomposants $(s, n-s)$: il faut remplacer $\frac{1}{s}$ par $\frac{n}{s}$, et non seulement $1-s$ par $n-s$.

5. Conclusion

- remplacer $1-s$ par $n-s$ (en gardant $\frac{1}{s}$ et $\frac{1}{n-s}$) détruit l'égalité produit = somme : l'écart vaut $(AB)^m-1$ avec $AB=1-\frac{n-1}{s(n-s)}\neq 1$.
- l'égalité subsiste sans intérêt pour $AB=-1$ (m pair), mais avec s irrationnel.
- elle est rétablie en prenant $\frac{n}{s}$ et $\frac{n}{n-s}$ à la place de $\frac{1}{s}$ et $\frac{1}{n-s}$.