

Le produit $\prod_{k \geq 1} (1 - i x^k)$: développement, exemples de lecture, table jusqu'à $n = 40$ et loi de rotation

Denise Vella-Chemla pilotant l'ia mistral, texte relu et corrigé par l'ia claude, 16 octobre 2026

Contexte. L'ia mistral a reçu la note

<https://denisevellachemla.eu/questions2016.pdf>

et a développé le produit apparaissant dans le titre de la présente note, qui ressemble à celui d'Euler dans l'article “*Découverte d'une note tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*”, mais avec des coefficients i devant les puissances de x . La rédaction initiale est de mistral ; quelques corrections ont été apportées ci-après.

1. Le produit et ses coefficients

On considère

$$\prod_{k \geq 1} (1 - i x^k) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n.$$

Chaque choix, pour chaque k , du fait de prendre ou non le terme $-i x^k$ décrit exactement une partition λ de n en parts distinctes ; la contribution du choix est $(-i)^{\ell(\lambda)} x^{|\lambda|}$, où $\ell(\lambda)$ est le nombre de parts. D'où

$$c_n = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \text{parts distinctes}}} (-i)^{\ell(\lambda)}. \quad (1)$$

Le poids $(-i)^\ell$ ne dépend que de ℓ modulo 4 : $1, -i, -1, i, 1, \dots$. En notant $E_j(n)$ le nombre de partitions de n en parts distinctes ayant j parts,

$$\Re c_n = \sum_{j \equiv 0 \pmod{4}} E_j(n) - \sum_{j \equiv 2 \pmod{4}} E_j(n), \quad \Im c_n = \sum_{j \equiv 3 \pmod{4}} E_j(n) - \sum_{j \equiv 1 \pmod{4}} E_j(n). \quad (2)$$

La partie réelle compare les partitions dont le nombre de parts est pair (0 contre 2 modulo 4), la partie imaginaire celles dont il est impair (3 contre 1 modulo 4).

2. Exemples de lecture

- $n = 3$. Partitions : $\{3\}$ (poids $-i$), $\{2, 1\}$ (poids -1). Donc $c_3 = -1 - i$.
- $n = 5$. $\{5\} \rightarrow -i$; $\{4, 1\}, \{3, 2\} \rightarrow -1$ chacune : $c_5 = -2 - i$.
- $n = 6$. $\{6\} \rightarrow -i$; $\{5, 1\}, \{4, 2\} \rightarrow -1$; $\{3, 2, 1\} \rightarrow (-i)^3 = i$: $c_6 = -2$. Les partitions à une et trois parts se compensent ($-i + i = 0$).
- $n = 10$. Une partition à une part ($-i$), quatre à deux parts (-1 chacune), quatre à trois parts ($+i$ chacune), une à quatre parts ($+1$) :

$$c_{10} = -i - 4 + 4i + 1 = -3 + 3i.$$

n	partitions (poids)	c_n
1	$\{1\}(-i)$	$-i$
2	$\{2\}(-i)$	$-i$
3	$\{3\}(-i); \{2, 1\}(-1)$	$-1 - i$
4	$\{4\}(-i); \{3, 1\}(-1)$	$-1 - i$
5	$\{5\}(-i); \{4, 1\}, \{3, 2\}(-1)$	$-2 - i$
6	$\{6\}(-i); \{5, 1\}, \{4, 2\}(-1); \{3, 2, 1\}(i)$	-2
7	$\{7\}(-i); \{6, 1\}, \{5, 2\}, \{4, 3\}(-1); \{4, 2, 1\}(i)$	-3
8	$\{8\}(-i); 3 \text{ biparts } (-1); \{5, 2, 1\}, \{4, 3, 1\}(i)$	$-3 + i$
9	$\{9\}(-i); 4 \text{ biparts } (-1); \{6, 2, 1\}, \{5, 3, 1\}, \{4, 3, 2\}(i)$	$-4 + 2i$
10	$\{10\}(-i); 4 \text{ biparts } (-1); 4 \text{ triparts } (i); \{4, 3, 2, 1\}(1)$	$-3 + 3i$

3. Trois observations

3.1. Le cas $t = 1$: Euler et les nombres pentagonaux

Avec $\prod(1 - x^k)$, le théorème des nombres pentagonaux

$$\prod_{k \geq 1} (1 - x^k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m x^{m(3m-1)/2}$$

dit que tout s'annule sauf aux nombres pentagonaux, avec coefficients ± 1 . Avec le poids $(-i)^\ell$, l'annulation n'est que partielle : $|c_n| \leq 3$ pour $n \leq 7$, puis les coefficients croissent. Le facteur i détruit l'annulation d'Euler en séparant les partitions selon le nombre de parts modulo 4 (cf. (2)). On observe que $\Re c_n$ change de signe (pour la deuxième fois) en $n = 16$ et $\Im c_n$ en $n = 28$ ($\Im c_{27} = 0$).

3.2. Une identité exacte

Pour x réel, en multipliant le produit par son conjugué :

$$\prod_{k \geq 1} (1 - ix^k)(1 + ix^k) = \prod_{k \geq 1} (1 + x^{2k}), \quad (3)$$

série génératrice des partitions en parts distinctes paires.

Si $P(x) = \prod_k (1 - ix^k)$, on a donc $|P(x)|^2 = \prod_k (1 + x^{2k})$: P est une sorte de “racine carrée” de (3).

Par ailleurs le q -binôme d'Euler donne

$$\prod_{k \geq 1} (1 - t x^k) = \sum_{m \geq 0} \frac{(-t)^m x^{m(m+1)/2}}{(1-x)(1-x^2) \cdots (1-x^m)}, \quad (4)$$

d'où le cas $t = i$ par substitution. Le théorème pentagonal est le cas $t = 1$ (annulation totale); le cas $t = -1$ donne $\prod_k (1 + x^{2k}) = 1 / \prod_k (1 - x^{2k-1})$ (partitions distinctes = partitions impaires);

l'identité de Gauss $\prod_k \frac{1 - x^{2k}}{1 - x^{2k-1}} = \sum_{m \geq 0} x^{m(m+1)/2}$ en est le pendant triangulaire; $t = i$ est le cas intermédiaire, sans forme close simple connue.

3.3. Croissance

Puisque $|(-i)^\ell| = 1$, on a $|c_n| \leq \mathcal{Q}(n)$, où $\mathcal{Q}(n)$ compte les partitions en parts distinctes, avec $\mathcal{Q}(n) \sim \frac{e^{\pi\sqrt{n/3}}}{4 \cdot 3^{1/4} n^{3/4}}$. (La croissance réelle de $|c_n|$ est bien plus faible, voir § 6.)

4. Table des coefficients jusqu'à $n = 40$ (calcul exact)

n	c_n	n	c_n	n	c_n
0	1	14	$-1 + 9i$	28	$57 - 5i$
1	$-i$	15	$-1 + 10i$	29	$60 - 14i$
2	$-i$	16	$2 + 12i$	30	$68 - 22i$
3	$-1 - i$	17	$3 + 13i$	31	$70 - 34i$
4	$-1 - i$	18	$7 + 15i$	32	$77 - 45i$
5	$-2 - i$	19	$9 + 15i$	33	$76 - 60i$
6	-2	20	$14 + 16i$	34	$82 - 74i$
7	-3	21	$16 + 16i$	35	$78 - 93i$
8	$-3 + i$	22	$23 + 16i$	36	$80 - 110i$
9	$-4 + 2i$	23	$26 + 14i$	37	$72 - 132i$
10	$-3 + 3i$	24	$33 + 13i$	38	$70 - 152i$
11	$-4 + 4i$	25	$37 + 9i$	39	$55 - 177i$
12	$-3 + 6i$	26	$45 + 6i$	40	$48 - 199i$
13	$-3 + 7i$	27	48		

Le coefficient tourne dans le plan complexe (de $-i$ vers -1 , puis vers $+i$, puis vers $+1$ et de nouveau $-i$) ; $\Im c_n$ s'annule exactement en $n = 27$.

5. La piste sœur : $(1 - x)(1 + x^2)(1 - x^3)(1 + x^4) \dots$

Le produit alterné $\prod_{k \geq 1} (1 + (-1)^k x^k)$ n'est autre que $\prod_k (1 + y^k)$ avec $y = -x$. Chaque partition de n en parts distinctes y compte avec le poids $(-1)^{\#\text{parts impaires}}$; or la somme des parts a la parité du nombre de parts impaires, donc le poids vaut $(-1)^n$: aucune annulation, et

$$\prod_{k \geq 1} (1 + (-1)^k x^k) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \mathcal{Q}(n) x^n. \quad (5)$$

Coefficients pour $0 \leq n \leq 15$: $1, -1, 1, -2, 2, -3, 4, -5, 6, -8, 10, -12, 15, -18, 22, -27$.

Comparaison. Le produit à i (caractère d'ordre 4 : poids selon $\ell \bmod 4$, annulation partielle) est le vrai cousin du théorème pentagonal ; le produit alterné est le cas dégénéré où tout s'additionne. Le produit $\prod_k (1 - k^2 x^k)$ est bien défini, mais les poids $\prod (\text{parts})^2$, de module arbitraire, interdisent tout comptage. Enfin les deux premiers partagent le facteur $\prod (1 + x^{2k}) : |P(x)|^2$ par (3) dans un cas ; dans l'alterné, les indices pairs, d'où

$$\prod_k (1 + (-1)^k x^k) = \prod_k (1 - x^{2k-1}) \cdot |P(x)|^2.$$

6. Zéros et changements de signe : la rotation du coefficient

Calculs exacts (entiers de taille arbitraire) menés jusqu'à $n = 4000$.

6.1. Zéros exacts

- $\Re c_n = 0$ exactement pour $n = 1, 2$ (et rien d'autre jusqu'à 4000) ;
- $\Im c_n = 0$ exactement pour $n = 0, 6, 7, 27$ (et rien d'autre jusqu'à 4000).

Contrairement à $t = 1$, l'annulation totale n'est ici qu'un accident des petits n (27 n'est même pas pentagonal) : pas de “quasi-pentagonaux” récurrents.

6.2. Changements de signe : loi quadratique

Rangs des changements de signe de $\Im c_n$:

$$8, 28, 62, 109, 170, 244, 332, 433, 548, 676, \dots, 2697, 2974, 3263, 3566, 3883$$

de $\Re c_n$:

$$3, 16, 43, 84, 138, 205, 286, 381, 489, 610, \dots, 2564, 2834, 3117, 3413, 3723$$

(en quinconce). Le rapport n_k/k^2 pour $\Im$ vaut 8,00; 7,00; 6,89; 6,81; 6,80; ... et se stabilise vers 6,74 pour $k = 21, \dots, 24$. En mêlant les deux suites, un changement de signe arrive vers $1,68 j^2$, soit : chaque changement de signe de $\Re$ ou $\Im$ correspond à une avance de l'argument de $\pi/2$, et

$$\arg c_n \approx -1,21\sqrt{n} \quad (\text{empirique}). \quad (6)$$

6.3. Explication par la méthode du col (heuristique)

Le prédicteur naïf “terme dominant de (4), $m \approx \sqrt{2n}$, phase $(-i)^m$ ” donne $-(\pi/2)\sqrt{2n} \approx -2,22\sqrt{n}$, ce qui contredit (6). Il n'a pas de fondement : la somme (4) est pleine d'annulations et aucun terme ne domine. La bonne approche est le col. Pour $x = e^{-\varepsilon}$, $\varepsilon \rightarrow 0^+$,

$$\log P(e^{-\varepsilon}) \sim \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \log(1 - ie^{-u}) du = \frac{A}{\varepsilon}, \quad A = -\text{Li}_2(i) = \frac{\pi^2}{48} - iG,$$

où G est la constante de Catalan. Le col donne $c_n \approx \exp(2\sqrt{An})$, avec $\sqrt{A} \approx 0,7565 - 0,6054i$, donc

$$|c_n| \approx e^{1,513\sqrt{n}}, \quad \arg c_n \approx -1,2108\sqrt{n},$$

en accord avec (6). Le k -ième changement de signe de $\Im$ arrive quand l'argument a avancé de $k\pi$, soit

$$n_k \approx \left(\frac{\pi}{1,2108} \right)^2 k^2 \approx 6,73 k^2,$$

cohérent avec le 6,74 mesuré, qui converge lentement. Cette dérivation est heuristique (le préfacteur et les corrections ne sont pas traités) ; une démonstration rigoureuse relève des méthodes de col de Meinardus ou de Richmond.