Produit eulérien pour enfants, ou mais pourquoi prennent-ils l'inverse de l'inverse de l'inverse..., Denise Vella-Chemla, 31 décembre 2024

On veut calculer

$$(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)$$

On calcule les facteurs un par un, ça donne

$$(-1).(-2).(-3).(-4) = 24$$

Ou bien, on développe le produit du premier par le deuxième, et le produit du troisième par le quatrième, et on voit si on retombe sur ses pattes.

$$(1-2-3+6)(1-4-5+20) = 2 \times 12 = 24$$

Ou bien, on développe la totalité du produit, on est patient, le 1 apparaître une fois, en positif, les nombres 2, 3, 4 et 5 une fois, en négatif, etc. On obtient (on voit bien par ligne que le nombre de facteurs correspond au coefficient binomial (1,4,6,4,1 ici) car il s'agit de choisir tant de nombres parmi tant d'autres pour construire les produits)

$+1$					
-2	-3	-4	-5		
$+2 \times 3$	$+2 \times 4$	$+2 \times 5$	$+3 \times 4$	$+3 \times 5$	$+4 \times 5$
$-2 \times 3 \times 4$	$-2 \times 3 \times 5$	$-2 \times 4 \times 5$	$-3 \times 4 \times 5$		
$+2 \times 3 \times 4 \times 5$					

Ce qui donne

$$+1 - 14 + 71 - 154 + 120 = -168 + 192 = 24.$$

Ouf !