Probabilités disjointes ou application du crible de Poincaré quand on élimine au maximum 2 classes de congruence sur p selon tout p premier (Denise Vella-Chemla, 26.1.2019)

Il s'agit ici d'écrire correctement un calcul [1] qui utilise la formule du crible de Poincaré.

On a vu dans d'autres notes que trouver les décomposants de Goldbach d'un nombre pair n supérieurs à $\sqrt{n}$ consiste à cribler les nombres qui n'ont aucun reste de division nul dans des divisions euclidiennes par les nombres premiers inférieurs à la racine carrée de n et qui, de plus, ne partagent aucun reste de division avec n. C'est ce que l'on note "application du crible de Poincaré quand on élimine au maximum 2 classes de congruence sur p (pour tout p premier inférieur à $\sqrt{n}$)". On élimine *au maximum* 2 classes de congruence car selon tout diviseur p' de n (p' premier), seuls les nombres de la classe $\dot{0}$ sont éliminés.

Un nombre a une chance sur deux d'être divisible par 2, une chance sur 3 d'être divisible par 3, une chance sur n d'être divisible par n.

Combien de chances un nombre a-t-il d'être divisible soit par 2 soit par 3 ?

Les probabilités concernant la divisibilité par 2 ou par 3 sont indépendantes l'une de l'autre. On appellera "addition disjointe" l'opération définie par $x \oplus y = x + y - xy$ qui va nous permettre de calculer la possibilité pour un nombre d'être divisible soit par 2 soit par 3.

$$\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

Effectivement, de 1 à 6, il y a 4 nombres divisibles par 2 ou par 3 (2, 4 et 6 le sont par 2 et 3 et 6 le sont par 3).

L'intérêt de cette "addition disjointe" est qu'elle permet d'obtenir directement les résultats de fastidieux calculs faisant appel à la combinatoire (produit de 2 nombres parmi n, de 3 nombres parmi n, etc) à cause de la propriété d'associativité.

$$\begin{aligned}
((a \oplus b) \oplus c) \oplus d &= ((a + b - ab) \oplus c) \oplus d \\
&= ((a + b - ab) + c - (a + b - ab)c) \oplus d \\
&= (a + b - ab + c - ac - bc + abc) \oplus d \\
&= a + b + c + d - ab - ac - ad - bc - bd - cd + abc + abd + acd + bcd - abcd
\end{aligned}$$

1. du 9 janvier 2019.

Le programme ci-dessous calcule le résultat obtenu en appliquant la formule de Poincaré aux nombres premiers compris entre 3 et 100.

```
from math import *

def prime(atester):
  pastrouve = True
  k = 2
  if (atester == 1): return False
  if (atester == 2): return True
  if (atester == 3): return True
  if (atester == 5): return True
  if (atester == 7): return True
  while (pastrouve):
    if ((k * k) > atester):
        return True
    else:
        if ((atester % k) == 0):
            return False
        else: k=k+1

        mult = 0.0
for n in range(13,101,2):
  if prime(n):
    mult=mult+(float(n)-2)/float(n)-((float(n)-2)/n)*mult
    print(str(n)+" -->"+str(mult))
```

Voici le résultat de l'application du programme pour les nombres premiers compris entre 3 et 100. L'application de la formule lorsque $p = 2$ donne un résultat nul.

```
3 ..........0.333333333333
5 ..........0.733333333333
7 ..........0.92380952381
11 .........0.986147186147
13 .........0.997868797869
17 .........0.999749270338
19 .........0.999973607404
23 .........0.999997704992
29 .........0.999999841724
31 .........0.999999989789
37 .........0.999999999448
41 .........0.999999999973
43 .........0.999999999999
47 .........1.0
53 .........1.0
59 .........1.0
61 .........1.0
67 .........1.0
71 .........1.0
73 .........1.0
79 .........1.0
83 .........1.0
89 .........1.0
97 .........1.0
```