

1. Résumé

Ce document reprend une observation faite il y a une quinzaine d'années lors de travaux sur les suites fractales d'entiers : la somme des inverses des primorielles semble converger vers 1,70523 (on peut trouver ce constat à cette page <https://denisevellachemla.eu/primonp.html>). On établit ici une preuve élémentaire de la convergence, un encadrement rigoureux de la queue de la série (afin de distinguer la convergence mathématique de la simple apparence de convergence observée en machine), la valeur numérique certifiée à haute précision, et une comparaison précise avec la constante de Niven, dont la ressemblance numérique est frappante mais qui n'est pas une identité. La suite de la présente note a été produite par l'ia claudie.

2. L'observation de départ

On note $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$ la suite des nombres premiers ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \dots$) et, pour $j \geq 1$, la j -ième *primorielle*

$$p_j\# = \prod_{i=1}^j p_i,$$

avec la convention $p_0\# = 1$ (produit vide, correspondant à $j = 0$).

L'observation porte sur la série

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p_j\#} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{210} + \frac{1}{2310} + \dots$$

C'est cette somme, incluant le terme $j = 0$ (qui vaut 1), qui approche 1,70523. Sans ce terme initial, la somme $\sum_{j \geq 1} 1/p_j\#$ vaut environ 0,70523.

3. Convergence : une preuve élémentaire

L'inquiétude exprimée - qu'une convergence observée numériquement ne prouve rien sur l'infini mathématique - est justifiée en général, mais ici la convergence peut être établie rigoureusement et très simplement, sans outil analytique avancé.

Proposition 1. *Pour tout $j \geq 1$, $p_j \geq j + 1$.*

Démonstration. La suite (p_j) est strictement croissante et à valeurs entières, avec $p_1 = 2$. Une suite strictement croissante d'entiers vérifie $p_j \geq p_1 + (j - 1)$ pour tout $j \geq 1$ (chaque terme gagne au moins 1 sur le précédent). Donc $p_j \geq 2 + (j - 1) = j + 1$. $\square$

Proposition 2. *Pour tout $j \geq 1$, $p_j\# \geq (j + 1)!$.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, $p_i \geq i + 1$ pour tout i , donc

$$p_j\# = \prod_{i=1}^j p_i \geq \prod_{i=1}^j (i+1) = 2 \times 3 \times \cdots \times (j+1) = (j+1)!.$$

□

Théorème 3. *La série $\sum_{j \geq 1} 1/p_j\#$ converge, et*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p_j\#} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!} = e - 2 \approx 0,71828.$$

Démonstration. Comparaison directe avec la série $\sum 1/(j+1)!$, qui converge (c'est une queue de la série exponentielle), et majoration terme à terme d'après la proposition précédente. □

Cette borne $e - 2 \approx 0,71828$ est cohérente avec la valeur numérique observée $\approx 0,70523$: la convergence est donc un fait mathématique établi, indépendant de tout calcul en machine.

Remarque : en réalité la série converge beaucoup plus vite que ne le suggère cette borne élémentaire. Le théorème des nombres premiers donne, via la fonction de Chebyshev $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p \sim x$, l'estimation $\ln(p_j\#) = \theta(p_j) \sim p_j \sim j \ln j$. Le terme général décroît donc plus vite qu'une simple exponentielle en j : il est de l'ordre de $e^{-j \ln j} = j^{-j}$, une décroissance *super-exponentielle*. L'intuition "terme général de l'ordre de l'exponentielle de j " est donc juste, comme minoration qualitative de la vitesse de décroissance, mais la réalité est encore plus favorable.

4. Un encadrement certifié de la queue de la série

Pour distinguer rigoureusement la convergence mathématique de la simple stabilisation apparente des décimales en machine, on peut borner explicitement l'erreur commise en tronquant la série à un certain rang N .

Proposition 4. *Notons $t_j = 1/p_j\#$. On a $t_{j+1}/t_j = 1/p_{j+1}$, une quantité strictement décroissante en j . Par conséquent, pour tout $N \geq 1$,*

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} t_j \leq t_N \cdot \frac{1}{p_{N+1} - 1}.$$

Démonstration. Puisque $p_{N+1} < p_{N+2} < \cdots$, on a $t_j \leq t_N/p_{N+1}^{j-N}$ pour $j > N$, donc la queue est majorée par une série géométrique de raison $1/p_{N+1}$:

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} t_j \leq t_N \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p_{N+1}} \right)^m = t_N \cdot \frac{1}{p_{N+1} - 1}.$$

□

Par exemple, à $N = 10$ ($p_{11} = 31$), l'erreur de troncature est déjà inférieure à $t_{10}/30 \approx 5 \times 10^{-12}$. À $N = 20$, elle est inférieure à 10^{-30} . C'est cette borne, et non la simple observation de décimales stables, qui garantit que la valeur numérique calculée est fiable.

5. Programme et valeur numérique certifiée

Le calcul a été mené en précision arbitraire (bibliothèque `mpmath`), en s'arrêtant lorsque le terme courant descend sous 10^{-50} - ce qui, d'après l'encadrement de la section précédente, garantit une précision très supérieure à celle affichée.

```
import mpmath as mp
mp.mp.dps = 50
from sympy import primerange

primes = list(primerange(2, 2000))
primorial = mp.mpf(1)
total = mp.mpf(1)          # terme j=0 : 1/1 = 1
for p in primes:
    primorial *= p
    term = mp.mpf(1) / primorial
    total += term
    if term < mp.mpf(10)**-50:
        break

print(total) # somme incluant le terme j=0
```

Résultat (50 décimales) :

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p_j\#} = 1,7052301717918009651474316828882485137435776391092\dots$$

Cette valeur est référencée dans l'*On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (suite A064648, pour la version sans le terme $j = 0$, soit 0,7052301717918...), et Wikipédia rapporte que Martin Griffiths a démontré en 2015 (*The Mathematical Gazette*) que cette constante est irrationnelle. Il n'existe en revanche pas, à la connaissance de l'ia claudé, d'expression close de cette constante en termes d'autres constantes classiques (π , e , ζ , ...) : comme pour beaucoup de constantes liées à la répartition des nombres premiers, elle reste "seulement" calculable à précision arbitraire, sans fermeture algébrique connue.

6. Comparaison avec la constante de Niven

La constante de Niven C (moyenne asymptotique du plus grand exposant dans la décomposition en facteurs premiers d'un entier) est définie par

$$C = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\zeta(k)}\right).$$

Calculée à la même précision :

$$C = 1,7052111401053677642885514534345081607620276516535\dots$$

La ressemblance avec S est frappante sur les quatre premières décimales (1,7052... dans les deux cas), mais les deux constantes divergent dès la cinquième décimale :

$$S - C = 0,0000190316864332 \dots \approx 1,9 \times 10^{-5}.$$

Il s'agit donc d'une coïncidence numérique remarquable sur les premières décimales, mais **pas** d'une identité : S et C sont deux constantes distinctes, sans relation algébrique connue entre elles. Leur proximité tient sans doute au fait que les deux quantités sont construites à partir des mêmes ingrédients (les nombres premiers et leur répartition), mais via des mécanismes différents - l'une par les primorielles, l'autre par la fonction zêta de Riemann et les exposants de factorisation.

7. Conclusion

L'observation empirique est confirmée et solidement établie : la série des inverses des primorielles converge, sa convergence peut être démontrée élémentairement (comparaison à $\sum \frac{1}{(j+1)!}$), sa vitesse de convergence peut être bornée explicitement (garantissant la fiabilité de la valeur numérique indépendamment de tout "infini informatique"), et sa valeur 1,70523... est un fait mathématique établi, référencé dans la littérature (OEIS A064648) et démontré irrationnel. La ressemblance avec la constante de Niven, bien que numériquement saisissante sur quatre décimales, ne va pas au-delà d'une coïncidence : les deux constantes sont distinctes.