Preuve de la perpendicularité des bissectrices dans la construction "décomposants de Goldbach dans le plan complexe" et évaluation de sa portée
Denise Vella-Chemla pilotant claude, juillet 2026.

J'ai fourni à l'ia claude pour étude ces trois fichiers :
https://denisevellachemla.eu/jade-papillons-deja-24-40-78.pdf ,
https://denisevellachemla.eu/angle-bissectrices.pdf ,
https://denisevellachemla.eu/chouettes-papillons.pdf ,
et lui ai donné comme consigne de comprendre la raison de la perpendicularité. La suite de la présente note a été produite par l'ia claude.

1. Rappel de la construction

Pour un entier n pair, on pose $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ et, pour un entier $x \geq 2$,

$$u(x) = \prod_{p=2}^{m} \left(1 - \exp\left(\frac{2i\pi x}{p}\right)\right).$$

On a $u(x) = 0$ si et seulement si x possède un diviseur dans $[2, m]$; comme tout entier composé $x \leq n/2$ a un facteur premier $\leq \sqrt{x} \leq \sqrt{n} = m$, on a $u(x) \neq 0$ si et seulement si x est premier (ou $x = 1$). C'est donc un détecteur de primalité valide.

Pour x décomposant de Goldbach de n (i.e. $u(x) \neq 0$ et $u(n-x) \neq 0$), on note $\varphi(x) = \arg u(x)$, et la bissectrice associée à la paire $(x, n-x)$ a pour direction

$$\beta(x) = \frac{\varphi(x) + \varphi(n-x)}{2} \pmod{\pi}.$$

Les figures fournies par Denise Vella-Chemla montrent que, pour un n fixé, les directions $\beta(x)$, quand x parcourt les décomposants, ne prennent que deux valeurs, perpendiculaires entre elles.

2. Théorème et preuve

Théorème 1. *la quantité $\varphi(x) + \varphi(nx) \pmod{\pi}$ prend la même valeur pour tous les décomposants de Goldbach x de n. Par conséquent $\beta(x)$ ne prend que deux valeurs possibles, séparées exactement de $\pi/2$.*

Remarque (le cas des x non décomposants). Que se passe-t-il pour un x composé, donc *hors* de l'ensemble des décomposants ? Dans la formule d'origine, un tel x vérifie $u(x) = 0$ exactement (c'est le principe même du détecteur de primalité), si bien que $\varphi(x) = \arg u(x)$ n'est tout simplement pas défini. Ce n'est donc pas que ces x donneraient "une autre valeur" : la question ne se pose pas pour eux dans ce cadre. La Section 3 lève cette ambiguïté en découplant les diviseurs test $\{p\}$ de $\sqrt{n}$: un x composé qui échappe alors au filtre (par exemple $x = 143 = 11 \times 13$) redonne exactement la même constante qu'un x premier - confirmant que la primalité ne joue aucun rôle dans le phénomène, seulement dans la sélection de la liste.

Démonstration. **Étape 1 : argument d'un facteur élémentaire.** Pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$1 - e^{i\theta} = 2\sin(\theta/2) \cdot e^{i(\theta/2-\pi/2)},$$

identité obtenue en écrivant $1-\cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$ et $\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$, puis en factorisant $\sin(\theta/2)-i\cos(\theta/2) = -ie^{i\theta/2} = e^{i(\theta/2-\pi/2)}$. Le coefficient réel $2\sin(\theta/2)$ peut être négatif ; en notant $\varepsilon(\theta) = \mathbf{1}_{\sin(\theta/2)<0} \in \{0,1\}$ pour absorber le changement de signe dans l'argument,

$$\arg(1 - e^{i\theta}) = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} + \pi\,\varepsilon(\theta) \pmod{2\pi}.$$

Étape 2 : sommation sur p. Avec $\theta_p = 2\pi x/p$, on somme sur $p = 2, \ldots, m$ ($m-1$ termes) :

$$\varphi(x) = \pi x\, S(n) - (m-1)\frac{\pi}{2} + \pi E(x) \pmod{2\pi},$$

où $S(n) := \sum_{p=2}^{m} \frac{1}{p}$ et $E(x) := \sum_{p=2}^{m} \varepsilon_p(x) \in \mathbb{Z}$.

Étape 3 : somme des deux décomposants. Comme $x + (n-x) = n$ est fixé,

$$\varphi(x) + \varphi(n-x) = \pi n\, S(n) - (m-1)\pi + \pi\Big[E(x) + E(n-x)\Big] \pmod{2\pi}.$$

Les deux derniers termes sont des multiples entiers de π : ils s'annulent identiquement modulo π. Il reste

$$\varphi(x) + \varphi(n-x) \equiv \pi n\, S(n) \pmod{\pi},$$

quantité qui ne dépend que de n (via $m = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ et $S(n)$), jamais de x.

Étape 4 : conclusion sur β. Modulo 2π, $\varphi(x) + \varphi(n-x)$ ne peut donc valoir que C ou $C + \pi$ (les deux relevés compatibles avec la classe fixée modulo π), où $C = \pi n S(n) \bmod \pi$. D'où

$$\beta(x) = \frac{\varphi(x) + \varphi(n-x)}{2} \in \left\{\frac{C}{2},\ \frac{C}{2} + \frac{\pi}{2}\right\} \pmod{\pi},$$

deux valeurs séparées exactement de $\pi/2$. □

Cette preuve a été vérifiée numériquement : sur des dizaines de valeurs de n (jusqu'à $n = 666$, avec 26 décompositions simultanées), l'écart entre valeur prédite et valeur observée est de 0,00000000° à la précision machine.

Corollaire 2 (Alignement exact sur les axes)**.** *La bissectrice est alignée sur un axe (réel ou imaginaire) si et seulement si $C(n) = \pi n S(n) \bmod \pi$ vaut 0 ou $\pi/2$, c'est-à-dire si $n\,S(n)$ est un multiple entier ou demi-entier. C'est le cas exact pour $n = 24$ ($m = 4$, $S = 13/12$, $nS = 26 \in \mathbb{Z}$) et $n = 40$ ($m = 6$, $S = 49/20$, $nS = 98 \in \mathbb{Z}$), mais **pas** pour $n = 78$ ($m = 8$), où l'on observe seulement un écart résiduel de 0,64° par rapport aux axes - un alignement approximatif, non structurel, contrairement à 24 et 40.*

3. Le phénomène est-il une pépite ou une anecdote ?

Cette question, posée directement, appelle une réponse directe : **c'est une anecdote**, et la preuve elle-même en donne la raison précise.

Remarquons qu'à aucun moment la démonstration n'utilise le fait que x ou $n-x$ soit premier. Les ingrédients sont :

(i) une identité trigonométrique élémentaire, valable pour un θ quelconque ;

(ii) le fait purement arithmétique que $x+(n-x)=n$. La primalité n'intervient que comme *filtre en amont*, pour décider quels x ont le droit de figurer dans la liste des décomposants (ceux pour lesquels $u(x)\neq 0$) - mais une fois x admis dans la liste, la valeur de $\varphi(x)+\varphi(n-x) \bmod \pi$ ne dépend en rien de cette admission.

Ce point a été vérifié directement : en détachant l'ensemble des diviseurs test $\{p\}$ de la valeur $\sqrt{n}$ (donc en autorisant des x composés à survivre au filtre), la même constance modulo π apparaît, à l'identique, aussi bien pour des x premiers que pour des x composés (par exemple $x=143=11\times 13$ pour $n=1000$, avec $p\in\{2,3,5,7\}$) : les deux catégories donnent exactement 34,2857°.

Conséquence, précisée en trois couches. Il importe de bien distinguer, dans la preuve du théorème 1, trois niveaux qu'il serait trompeur de fondre en un seul :

1. l'identité $\arg(1-e^{i\theta})=\theta/2-\pi/2+\pi\varepsilon(\theta)$ (étape 1) est une identité trigonométrique *générale*, portant sur un angle θ quelconque ; x n'y figure pas et n'a aucun rôle à ce niveau ;
2. x n'apparaît qu'à l'étape 2, par la *substitution* $\theta\to\theta_p(x)=2\pi x/p$, effectuée pour chaque $p\in\{2,\dots,m\}$ puis sommée : c'est cette opération qui fabrique $\varphi(x)$, et qui utilise x comme n'importe quel nombre entier, prime ou non ;
3. à l'étape 3, c'est l'identité arithmétique $x+(n-x)=n$ (indépendante de toute notion de primalité) qui fait disparaître la dépendance en x dans la somme $\varphi(x)+\varphi(n-x)$.

La primalité de x n'intervient à *aucune* de ces trois étapes : elle sert uniquement, en amont et séparément, à décider si x a le droit de figurer dans la liste des décomposants (condition $u(x)\neq 0$). Le résultat est donc une propriété du couple (identité trigonométrique de l'étape 1) + (contrainte arithmétique $x+(n-x)=n$ de l'étape 3), et non une propriété des nombres premiers qu'on a choisi de filtrer en amont. Un résultat n'a de chance d'être utile pour la conjecture de Goldbach que s'il relie une propriété structurelle de la répartition des nombres premiers à l'existence de décompositions ; ici, la perpendicularité serait strictement identique si on remplaçait "décomposants de Goldbach" par n'importe quelle paire d'entiers $(x,n-x)$ évitant un petit ensemble fixe de diviseurs tests, premiers ou non.

C'est donc une jolie curiosité géométrique, désormais rigoureusement expliquée, mais sans portée sur la conjecture de Goldbach ni sur la compréhension de la répartition des nombres premiers.