Gauss.

Galois.

Riemann.

Laisant.

Leçon inaugurale d'Alain Connes.

Une nouvelle preuve du théorème de Morley par Alain Connes.

Critique du livre Noncommutative geometry d'Alain Connes par Irving Segal.

Formule de Trace en géométrie non-commutative et zéros de la fonction zêta de Riemann d'Alain Connes

Algèbres de Hecke, facteurs de type III et transitions de phase avec brisure spontanée de symétrie en théorie des nombres de Jean-Benoît Bost et Alain Connes

La théorie quantique de l'émission et de l'absorption de radiation de Paul Dirac

Cohomologie cyclique et géométrie différentielle non-commutative d'Alain Connes

L'imagination et l'infini, entretien entre Connes et Prochiantz

Les mathématiques et la pensée en mouvement d'Alain Connes

Un topo sur les topos d'Alain Connes

Conseils au débutant d'Alain Connes

Mes rencontres avec Jacques d'Alain Connes

Gustave Choquet : Les processus mentaux de la création.

Jean Dieudonné : Les grandes lignes de l'évolution des mathématiques.

André Weil : L'avenir des mathématiques.

Entretien : Claude Berge.

Entretien : André Joyal.

Entretien : Nicolaas Kuiper.

Entretien : André Lichnerowicz.

Entretien : Bernard Malgrange.

Entretien : Charles Pisot.

Entretien : Jacques Riguet.

Entretien : René Thom.

Sous-titres en anglais de videos de François Jacob.

Donald Knuth et la mode.

Donald Knuth : 2008.

Donald Knuth : 2011.

Donald Knuth : 2018.

Donald Knuth : 1996.

La géométrie de l'incertitude (article de Dana Mackenzie), © La Recherche n° 307.

Alain Connes : La vérité est mathématique (© Tangente, août-septembre 2000.

Extrait de *Mathématiques, un dépaysement soudain* et du livre *Les déchiffreurs* (©).

Point de vue d'Alain Connes, Dossier Les mathématiciens d'un ancien magazine Pour la Science (©).

Une caractérisation des mots périodiques, Yves Césari, Max Vincent, C.R.A.S. t. 286, 1978.

Un héritage mathématique fertile, Jean Malgoire, Magazine Pour la Science, 467, 2016.

Traduction de l'article *La Conférence de Dartmouth, naissance de l'intelligence artificielle*, Magazine AI, 27, 4, 2006, ©AAAI.

Traduction de l'article *Skolem and pessimism about proof in mathematics* de Paul J. Cohen.

Traduction de l'article *Histoire des mathématiques : pourquoi et comment (ICM 1978)* d'André Weil.

Transcription de l'article *De la métaphysique aux mathématiques* d'André Weil.

Transcription de l'article *"Science française" (ICM 1938)* d'André Weil.

Transcription de l'article *Science française ? (ICM 1955)* d'André Weil.

Annexe 1 : Extrait de la section première des Recherches Arithmétiques de Gauss

1. Si un nombre a divise la différence des nombres b et c, b et c sont dits *congrus* suivant a, sinon *incongrus*. a s'appellera le module ; chacun des nombres b et c, *résidus* de l'autre dans le premier cas, et *non résidus* dans le second.

Les nombres peuvent être positifs ou négatifs, mais entiers. Quant au module il doit évidemment être pris absolument, c'est à dire, sans aucun signe.

Ainsi -9 et $+16$ sont *congrus* par rapport au module 5 ; -7 est *résidu* de 15 par rapport au module 11, et *non résidu* par rapport au module 3.

Au reste 0 étant divisible par tous les nombres, il s'ensuit qu'on peut regarder tout nombre comme congru avec lui-même par rapport à un module quelconque.

2. Tous les résidus d'un nombre donné a suivant le module m sont compris dans la formule $a + km$, k étant un entier indéterminé. Les plus faciles des propositions que nous allons exposer peuvent sans peine se démontrer par là ; mais chacun en sentira la vérité au premier aspect.

Nous désignons dorénavant la congruence de deux nombres par ce signe $\equiv$, en y joignant, lorsqu'il sera nécessaire, le module renfermé entre parenthèses ; ainsi $-16 \equiv 9 \ (mod\, 5)$, $-7 \equiv 15 \ (mod\, 11)$[2].

3. THEOREME : *Soient m nombres entiers successifs a, a+1, a+2, ..., a+m-1 et un autre A, un des premiers sera congru avec A, suivant le module m, et il n'y en aura qu'un.*
[*Démonstration*]

4. Il suit de là que chaque nombre aura un résidu, tant dans la suite
$0, 1, 2, ..., (m-1)$, que dans celle-ci $0, -1, -2, ..., -(m-1)$; nous les appellerons résidus minima ; et il est clair qu'à moins que 0 ne soit résidu, il y en aura toujours deux, l'un positif, l'autre négatif. S'ils sont inégaux, l'un d'eux sera $< \frac{m}{2}$; s'ils sont égaux, chacun d'eux $= \frac{m}{2}$ sans avoir égard au signe ; d'où il suit qu'un nombre quelconque a un résidu qui ne surpasse pas la moitié du module, et que nous appellerons résidu minimum absolu.

Par exemple -13 suivant le module 5, a pour résidu minimum positif 2, qui est en même temps minimum absolu, et -3 pour résidu minimum négatif ; $+5$ suivant le module 7, est lui-même son résidu minimum positif ; -2 est le résidu minimum négatif et en même temps le minimum absolu.

Annexe 2 : une citation extraite des Recherches Arithmétiques de Gauss (p.416)

Le problème où l'on se propose de distinguer les nombres premiers des nombres composés, [...], est connu comme un des plus importants et des plus utiles de toute l'Arithmétique ; [...]. En outre, la dignité de la science semble demander que l'on recherche avec soin tous les secours nécessaires pour parvenir à la solution d'un problème si élégant et si célèbre.

[2]Nous avons adopté ce signe à cause de la grande analogie qui existe entre l'égalité et la congruence. C'est pour la même raison que Legendre, dans des mémoires que nous aurons souvent occasion de citer, a employé le signe même de l'égalité, pour désigner la congruence ; nous en avons préféré un autre, pour prévenir toute ambiguité.

Annexe 2 : Extraits de la section Quatrième *“Des Congruences du second degré”* des Recherches Arithmétiques

On ne fait ici que recopier des extraits de la section Quatrième des Recherches Arithmétiques qu'il faudrait bien maîtriser pour pouvoir démontrer que l'existence d'un décomposant de Goldbach pour chaque nombre pair découle de l'existence d'au moins une solution pour un certain système de congruences (ou incongruences, c'est quasiment l'opposé) quadratiques, cette dernière existence découlant quant à elle du théorème d'or appliqué aux nombres adéquats. Les articles les plus difficiles, mais peut-être les plus utiles pour notre problème sont **les articles** 104 **et** 105 puis 147**,** 148 **et** 149.

page 69, article 94 : THÉORÈME. Un nombre quelconque m étant pris pour module, il ne peut y avoir dans la suite $1, 2, 3 \ldots m-1$, plus de $\frac{1}{2}m+1$ nombres, quand m est pair, et plus de $\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}$, quand m est impair, qui soient congrus à un carré.

page 70, article 96 : Le nombre premier p étant pris pour module, la moitié des nombres $1, 2, 3 \ldots p-1$, sera composée de résidus quadratiques, et l'autre moitié de non-résidus, c'est-à-dire qu'il y aura $\dfrac{1}{2}(p-1)$ résidus, et autant de non-résidus.

page 72, article 98 : THÉORÈME. Le produit de deux résidus quadratiques d'un nombre premier p est un résidu ; le produit d'un résidu et d'un non-résidu est non-résidu ; enfin le produit de deux non-résidus est résidu.
1°. Soient A et B les résidus qui proviennent des carrés a^2, b^2, ou soient $A \equiv a^2$ $(mod\ p)$ et $B \equiv b^2$, on aura $AB \equiv a^2b^2$, c'est-à-dire qu'il sera un résidu.
2°. Quand A est résidu, ou que $A \equiv a^2$, mais que B est non-résidu, AB est non-résidu. Soit en effet, s'il se peut $AB \equiv k^2$ et $\frac{k}{a}$ $(mod\ p) \equiv b$, on aura $a^2B \equiv a^2b^2$ et partant $B \equiv b^2$, contre l'hypothèse.
Autrement. Si l'on multiplie par A les $\frac{p-1}{2}$ nombres de la suite $1, 2, 3 \ldots p-1$, qui sont résidus, tous les produits seront des résidus quadratiques, et ils seront tous incongrus. Or si l'on multiplie par A un nombre B non-résidu, le produit ne sera congru à aucun des précédents : donc, s'il était résidu, il y aurait $\frac{1}{2}(p+1)$ résidus incongrus, parmi lesquels ne serait pas 0, ce qui est impossible (n^o 96).
3°. Soient A et B deux nombres non-résidus, en multipliant par A tous les nombres qui sont résidus dans la suite $1, 2, 3, \ldots p-1$, on aura $\frac{p-1}{2}$ non-résidus, incongrus entr'eux (2°). Or le produit AB ne peut être congru à aucun de ceux-là ; donc s'il était non-résidu, on aurait $\frac{p+1}{2}$ non-résidus incongrus entr'eux ; ce qui est impossible (n^o 96).
Ces théorèmes se déduisent encore plus facilement des principes de la section précédente. En effet, puisque l'indice d'un résidu est toujours pair, et celui d'un non-résidu toujours impair, l'indice du produit de deux résidus ou non-résidus sera pair, et partant, le produit sera lui-même un résidu. Au contraire, si l'un des facteurs est non-résidu, et l'autre résidu, l'indice sera impair, et le produit non-résidu.
On peut aussi faire usage des deux méthodes pour démontrer ce THÉORÈME[9] : *la valeur de l'expression* $\frac{a}{b}$ *(mod p), sera un résidu, quand les nombres a et b seront tous les deux résidus ou non-résidus. Elle sera un non-résidu, quand l'un des nombres a et b sera résidu et l'autre non-résidu.* On le démontrerait encore en renversant les théorèmes précédents.

page 73, article 99 : Généralement, le produit de tant de facteurs qu'on voudra est un résidu, soit lorsque tous les facteurs en sont eux-mêmes, soit lorsque le nombre de facteurs non-résidus est pair ; mais quand le nombre des facteurs non-résidus est impair, le produit est non-résidu. On peut donc juger facilement si un nombre composé est résidu ou non ; pourvu qu'on sache ce que sont ses différents facteurs. Aussi dans la Table II, nous n'avons admis que les nombres premiers. Quant à sa disposition, les modules sont en marge[10], en tête les nombres premiers successifs ; quand l'un de ces derniers est résidu, on a placé un trait dans l'espace qui correspond au module et à ce nombre ; quand il est non-résidu, on a laissé l'espace vide.

page 73, article 100 : Si l'on prend pour module la puissance p^n d'un nombre premier, p étant $>$ 2, une moitié des nombres non-divisibles par p et $<$ p^n seront des résidus, et l'autre des non-résidus ; c'est-à-dire

[9]Ici, je mets les petites capitales à ce mot bien qu'elles ne soient pas présentes dans les Recherches Arithmétiques dans la mesure où la démonstration de ce théorème n'est pas fournie.
[10]On verra bientôt comment on peut se passer des modules composés.

qu'il y en aura $\frac{p-1}{2}.p^{n-1}$ de chaque espèce.
En effet, si r est un résidu, il sera congru à un carré dont la racine ne surpasse pas la moitié du module (n^o 94) ; et l'on voit facilement qu'il y a $\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)$ nombres $< \frac{p^n}{2}$ et non-divisibles par p. Ainsi il reste à démontrer que les carrés de tous ces nombres sont incongrus, ou qu'ils donnent des résidus différents.
Or si deux nombres a et b non-divisibles par p et plus petits que la moitié du module, avaient leurs carrés congrus, on aurait $a^2 - b^2$ ou $(a+b)(a-b)$ divisible par p^n, en supposant $a > b$, ce qui est permis. Mais cette condition ne peut avoir lieu, à moins que l'un des deux nombres $(a-b)$, $(a+b)$ ne soit divisible par p^n, ce qui est impossible, puisque chacun d'eux est plus petit que p^n, ou bien que l'un étant divisible par p^μ, l'autre le soit par $p^{\nu-\mu}$ ou chacun d'eux par p ; ce qui est encore impossible, puisqu'il s'ensuivrait que la somme $2a$ et la différence $2b$, et partant a et b eux-mêmes seraient divisibles par p, contre l'hypothèse.
Donc enfin parmi les nombres non-divisibles par p et moindres que le module, il y a $\frac{p-1}{2}p^{n-1}$ résidus, et les autres, en même nombre, sont non-résidus.

page 74, article 101 : Tout nombre non-divisible par p, qui est résidu de p, sera aussi résidu de p^n ; celui qui ne sera pas résidu de p ne le sera pas non plus de p^n.
La seconde partie de cette proposition est évidente par elle-même ; ainsi si la première n'était pas vraie, parmi les nombres plus petits que p^n et non-divisibles par p, il y en aurait plus qui fussent résidus de p qu'il n'y en aurait qui le fussent de p^n, c'est-à-dire plus de $\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)$. Mais on peut voir sans peine que le nombre des résidus de p qui se trouvent entre 1 et p^n, est précisément $\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)$.
Il est tout aussi facile de trouver effectivement un carré qui soit congru à un résidu donné, suivant le module p^n, si l'on connaît un carré congru à ce résidu suivant le module p.
Soit en effet a^2 un carré congru au résidu donné A, suivant le module p^μ, on en déduira, de la manière suivante, un carré $\equiv A$, suivant le module p^ν, ν étant $> \mu$ et non plus grand que 2μ. Supposons que la racine du carré cherché soit $\pm a + xp^\mu$; et il est aisé de s'assurer que c'est là la forme qu'elle doit avoir. Il faut donc qu'on ait $a^2 \pm 2axp^\mu + x^2p^{2\mu} \equiv A \ (mod\ p^\nu)$, ou comme $2\mu > \nu$, on aura $\pm 2axp^\mu \equiv A - a^2 \ (mod\ p^\nu)$.
Soit $A - a^2 = p^\mu.d$, on aura $\pm 2ax \equiv d \ (mod\ p^{\nu-\mu})$; donc x sera la valeur de l'expression $\pm\frac{d}{2a} \ (mod\ p^{\nu-\mu})$.
Ainsi étant donné un carré congru à A, suivant le module p, on en déduira un carré congru à A, suivant le module p^2 ; de là au module p^4, au module p^8, etc.
Exemple. Etant proposé le résidu 6 congru au carré 1, suivant le module 5, on trouve le carré 9^2 auquel il est congru suivant le module 25, 16^2 auquel il est congru suivant le module 125, etc.

page 75, article 102 : Quant à ce qui regarde les nombres divisibles par p, il est clair que leurs carrés seront divisibles par p^2, et que partant tous les nombres qui seront divisibles par p et non par p^2, seront non-résidus de p^n. Et en général, si l'on propose le nombre p^kA, A n'étant pas divisible par p, il y aura trois cas à distinguer :
1°. Si $k \geq n$, on aura $p^kA \equiv 0 \ (mod\ p^n)$, c'est-à-dire qu'il sera résidu.
2°. Si $k < n$ et impair, p^kA sera non-résidu.
3°. Si $k < n$ et pair, p^kA sera résidu ou non-résidu de p^n suivant que A sera résidu ou non-résidu de p.

page 76, article 103 : Comme nous avons commencé (n^o 100) par exclure le cas où $p = 2$, il faut ajouter quelque chose à ce sujet. Quand 2 est module, tous les nombres sont résidus, et il n'y en a point de non-résidus. Quand le module est 4, tous les nombres impairs de la forme $4k+1$ sont résidus, et tous ceux de la forme $4k+3$ sont non-résidus. Enfin, quand le module est 8 ou une plus haute puissance de 2, tous les nombres impairs de la forme $8k+1$ sont résidus, et les autres, ou ceux de la forme $8k+3$, $8k+5$, $8k+7$ sont non-résidus ;

page 77, article 104 : Pour ce qui regarde le nombre de valeurs différentes, c'est-à-dire incongrues suivant le module, que peut admettre l'expression $V = \sqrt{A} \ (mod\ p^n)$, pourvu que A soit un résidu de p^n, on déduit facilement de ce qui précède, les conclusions suivantes. Nous supposons toujours que p est un nombre premier et, pour abréger, nous considérons en même temps le cas où $n = 1$.
1^o. Si A n'est pas divisible par p, V n'a qu'une seule valeur pour $p = 2$ et $n = 1$; ce sera $V \equiv 1$; il en a deux quand p est impair, ou bien quand on a $p = 2$ et $n = 2$; et, si l'une est $\equiv \nu$, l'autre sera $\equiv -\nu$; il en a quatre pour $p = 2$ et $n > 2$; et si l'une est $\equiv \nu$, les autres seront $\equiv \nu + 2^{n-1}, -\nu + 2^{n-1}, -\nu$.
2^o. Si A est divisible par p, mais non par p^n, soit $p^{2\mu}$ la plus haute puissance de p qui divise A, car

cette puissance doit être paire (n^o 102), et $A = ap^{2\mu}$; il est clair que toutes les valeurs de V doivent être divisibles par p^μ, et que tous les quotients donnés par ces divisions seront les valeurs de l'expression $V' = \sqrt{a}$ $(mod\ p^{n-2\mu})$; on aura donc toutes les valeurs différentes de V, en multipliant par p^μ, toutes celles de V' contenues entre 0 et $p^{n-\mu}$. Elles seront, par conséquent,
$\nu p^\mu, \nu p^\mu + p^{n-\mu}, \nu p^\mu + 2p^{n-\mu}, \ldots \nu p^\mu + (p^\mu - 1)p^{n-\mu}$,
ν étant une valeur quelconque de V : suivant donc que V' aura 1, ou 2, ou [11] valeurs, V en aura p^μ, ou $2p^\mu$ ou $4p^\mu$ (1^o).
3^o. Si A est divisible par p^n, on voit facilement, en posant $n = 2m$ ou $= 2m - 1$, suivant que n est pair ou impair, que tous les nombres divisibles par p^m sont des valeurs de V, et qu'il n'y en a pas d'autres ; mais les nombres divisibles par p^m sont $0, p^m, 2p^m \ldots (p^{n-m} - 1)p^m$, dont le nombre est p^{n-m}.

page 78, article 105 : Il reste à examiner le cas où le module m est composé de plusieurs modules premiers. Soit $m = abc\ etc.$, a, b, c, *etc.* étant des nombres premiers différents. Il est clair d'abord que si n est résidu de m, il le sera aussi des différents nombres, a, b, c, *etc.*, et que partant il sera non-résidu de m, s'il est non-résidu de quelqu'un de ces nombres. Réciproquement, si n est résidu des différents nombres a, b, c, *etc.*, il le sera de leur produit m ; en effet, si l'on a $n \equiv A^2, B^2, C^2, etc.$, suivant les modules a, b, c, *etc.*, respectivement (n^o 32), on aura $n \equiv N^2$, suivant tous ces modules, et conséquemment suivant leur produit.
Comme on voit facilement que la valeur de N résulte de la combinaison d'une valeur quelconque de A, ou de l'expression $\sqrt{n}$ $(mod\ a)$, avec une valeur quelconque de B, avec une valeur quelconque de C, *etc*, que les différentes combinaisons donneront des valeurs différentes, et qu'elles les donneront toutes ; le nombre des valeurs de N sera égal au produit des nombres de valeurs de A, B, C, *etc.* que nous avons appris à déterminer dans l'article précédent.

page 78, article 106 : On voit par ce qui précède, qu'il suffit de reconnaître si un nombre donné est résidu ou non-résidu d'un nombre premier donné, et que tous les cas reviennent à celui-là.
Un nombre quelconque A, non divisible par un nombre premier $2m + 1$, est résidu ou non-résidu de ce nombre premier suivant que $A^m \equiv +1 ou \equiv -1$ $(mod\ 2m + 1)$.

page 80, article 109 : en effet, il est évident que si r est un résidu, $\dfrac{1}{r}$ $(mod\ p)$ en sera un aussi.

(Les **articles** 108 **à** 124 **des pages** 79 **à** 91 traitent des cas particuliers 1, −1, 2, −2, 3, −3, 5, −5, 7 et −7.)

page 81, article 111 : Si donc r est résidu d'un nombre premier de la forme $4n + 1$, $-r$ le sera aussi, et tous les non-résidus seront encore non-résidus en changeant les signes[12]. Le contraire arrive pour les nombres premiers de la forme $4n + 3$, dont les résidus deviennent non-résidus, et réciproquement quand on change le signe (n^o 98).
Au reste on déduit facilement de ce qui précède cette règle générale : -1 est résidu de tous les nombres qui ne sont divisibles ni par 4, ni par aucun nombre de la forme $4n + 3$. Il est non-résidu de tous les autres.(N^{os} 103 *et* 105).

page 81, article 112 : Passons maintenant aux résidus $+2$ et -2.
Si dans la table II on prend tous les nombres premiers dont le module est $+2$, on trouvera $7, 17, 23, 31, 41, 47, 71, 73, 79, 89, 97$. Or on remarque facilement qu'aucun d'eux n'est de la forme $8n + 3$ ou $8n + 5$.
Voyons donc si cette induction peut devenir une certitude.
Observons d'abord que tout nombre composé de la forme $8n + 3$ ou $8n + 5$ renferme nécessairement un facteur premier de l'une ou l'autre forme ; en effet les nombres premiers de la forme $8n + 1$ et $8n + 7$ ne peuvent former que des nombres de la forme $8n + 1$ ou $8n + 7$. Si donc notre induction est généralement vraie, il n'y aura aucun nombre de la forme $8n + 3$, $8n + 5$, dont le résidu soit $+2$. Or il est bien certain qu'il n'existe aucun nombre de cette forme et au-dessous de 100, dont le résidu soit $+2$; mais s'il y en avait au-dessus de cette limite, supposons que t soit le plus petit de tous ; t sera de la forme $8n + 3$ ou $8n + 5$, et $+2$ sera son résidu ; mais il sera non-résidu de tous les nombres semblables plus petits. Soit $a^2 \equiv 2$ $(mod\ t)$, on pourra toujours prendre a impair et $< t$, car a a au moins deux valeurs positives plus

[11] ici, je crois qu'il manque un mot, le chiffre 4 ?
[12] Ainsi quand nous parlerons d'un nombre, en tant qu'il sera résidu ou non-résidu d'un nombre de la forme $4n + 1$, nous pouvons ne faire aucune attention à son signe, ou lui donner le signe $\pm$.

petites que t, dont la somme $= t$, et dont par conséquent l'une est paire et l'autre impaire (N^{os} 104, 105). Cela posé, soit $a^2 = 2 + ut$ ou $ut = a^2 - 2$, a^2 sera de la forme $8n+1$, et par-conséquent ut de la forme $8n-1$; donc u sera de la forme $8n+3$ ou $8n+5$ suivant que t sera de la forme $8n+5$ ou $8n+3$; mais de l'équation $a^2 = 2 + tu$, on tire la congruence $a^2 \equiv 2 (mod\ u)$, c'est-à-dire que $+2$ serait aussi résidu de u. Il est aisé de voir qu'on a $u < t$; il s'ensuivrait que t ne serait pas le plus petit nombre qui eût $+2$ pour résidu, ce qui est contre l'hypothèse ; d'où suit enfin une démonstration rigoureuse de cette proposition que nous avions déduite de l'induction.
En combinant cette proposition avec celles du n^o 111, on en déduit les théorèmes suivants :
I. $+2$ est non-résidu, et -2 est résidu de tous les nombres premiers de la forme $8n+3$.
II. $+2$ et -2 sont non-résidus de tous les nombres premiers de la forme $8n+5$.

page 82, article 113 : Par une semblable induction on tirera de la Table II, pour les nombres premiers dont le résidu est -2, ceux-ci : $3, 11, 17, 19, 41, 43, 59, 67, 73, 83, 89, 97$[13]. Parmi ces nombres il ne s'en trouve aucun de la forme $8n+5$ ou $8n+7$; cherchons donc si de cette induction nous pouvons tirer un théorème général. On fera voir de la même manière que dans l'article précédent, qu'un nombre composé de la forme $8n+5$ ou $8n+7$, doit renfermer un facteur premier de la forme $8n+5$ ou de la forme $8n+7$; de sorte que si notre induction est généralement vraie, -2 ne peut être résidu d'aucun nombre de la forme $8n+5$ ou $8n+7$; or s'il peut y en avoir de tels, soit t le plus petit de tous, et qu'on ait $-2 = a^2 - tu$. Si l'on prend, comme plus haut, a impair et $< t$, u sera de la forme $8n+5$ ou $8n+7$ suivant que t sera de la forme $8n+7$ ou $8n+5$; mais de ce qu'on a $a < t$ et $ut = a^2 + 2$, il est facile de déduire que u est $< t$; et comme -2 serait aussi résidu de u, il s'ensuivrait que t ne serait pas le plus petit nombre dont -2 est le résidu, ce qui est contre l'hypothèse. Donc -2 sera nécessairement non-résidu de tous les nombres de la forme $8n+5$ ou $8n+7$.
En combinant cette proposition avec celles du n^o 111, on en déduit les théorèmes suivants :
I. -2 et $+2$ sont non-résidus de tous les nombres premiers de la forme $8n+5$; comme nous l'avons déjà trouvé.
II.-2 est non-résidu et $+2$ résidu de tous les nombres premiers de la forme $8n+7$.
Au reste, nous aurions pu prendre a pair dans les deux démonstrations ; mais alors il eût fallu distinguer le cas où a est de la forme $4n+2$, de celui où il est de la forme $4n$; d'ailleurs la marche est absolument la même et n'est sujette à aucune difficulté.

page 83, article 114 : Il nous reste encore à traiter le cas où le nombre premier est de la forme $8n+1$; mais il échappe à la méthode précédente et demande des artifices tout-à-fait particuliers.
Soit, pour le module premier $8n+1$, une racine primitive quelconque a, on aura (n^o 62) $a^{4n} \equiv -1$ ($mod\ 8n+1$) ; cette congruence peut se mettre sous la forme $(a^{2n}+1)^2 \equiv 2a^{2n}$ ($mod\ 8n+1$), ou $(a^{2n}-1)^2 \equiv -2a^{2n}$; d'où il suit que $2a^{2n}$ et $-2a^{2n}$ sont résidus de $8n+1$; mais comme a^{2n} est un carré non-divisible par le module, $+2$ et -2 seront aussi résidus (n^o 98).

page 84, article 116 : Au reste on tire facilement de ce qui précède la règle générale suivante : $+2$ est résidu de tout nombre qui n'est divisible ni par 4 ni par aucun nombre premier de la forme $8n+3$ ou $8n+5$, et non-résidu de tous les autres, par exemple, de tous ceux de la forme $8n+3$, $8n+5$, tant premiers que composés.

page 91, article 125 : Tout nombre premier de la forme $4n+1$ soit positif, soit négatif, est non-résidu de quelques nombres premiers, et même de nombres premiers plus petits que lui (il est évident qu'il faut éviter $+1$).

page 95, article 129 : Théorème. Si a est un nombre premier de la forme $8n+1$, il y aura nécessairement au-dessous de $2\sqrt{a}$ un nombre premier dont a est non-résidu.

page 95, article 130 : Maintenant que nous avons démontré que tout nombre premier de la forme $4n+1$ positif ou négatif, est toujours non-résidu d'un nombre premier au moins plus petit que lui...

page 98, au milieu du article 132 : mais, avant tout, il faut observer que tout nombre de la forme $4n+1$ ne renfermera aucun facteur de la forme $4n+3$, ou en renfermera un nombre pair parmi lesquels

[13] En considérant -2 comme le produit de $+2$ par -1 ; voyez n^o 111.

il pourra y en avoir d'égaux ; tandis que tout nombre de la forme $4n+3$ doit en renfermer un nombre impair. Le nombre des facteurs de la forme $4n+1$ reste indéterminé.

pages 108 et suiv., articles 146 à 150 : Au moyen du théorème fondamental [14] et des propositions relatives à -1, ± 2, on peut toujours déterminer si un nombre donné quelconque est résidu ou non-résidu d'un nombre premier donné.

Ensuite, dans l'**article 146**, Gauss généralise et explique la méthode permettant, étant donnés deux nombres quelconques P et Q, de trouver si l'un d'eux est résidu ou non-résidu de l'autre. Pour cela, il étudie la relation qui lie Q à chaque puissance de premier qui intervient dans la factorisation de P. Ce qui retient l'attention, c'est le début du point III de cet article 146, qui explique comment s'effectue le passage du second degré au premier degré :
On cherchera de la manière suivante la relation d'un nombre quelconque Q à un nombre premier a impair : quand $Q > a$, on substituera à Q son *résidu minimum positif* suivant le module a, ou, ce qui est quelquefois avantageux, son *résidu minimum absolu*, qui aura avec a la même relation que Q.
Or si l'on résoud Q, ou le nombre pris à sa place, en facteurs premiers p, p', p'', *etc.*, auxquels il faut joindre le facteur -1, quand Q est négatif, il est évident que la relation de Q à a dépendra de la relation des facteurs p, p', p'', *etc.* à a : de sorte que, si parmi eux il y en a $2m$ non-résidus de a, on aura QRa[15] ; mais s'il y en a $2m+1$, on aura QNa. Au reste, on voit facilement que si parmi les facteurs p, p', p'', *etc.*, il y en a un nombre pair d'égaux entre eux, on peut les rejeter, puisqu'ils n'influent en rien sur la relation de Q à a.

Dans les **articles** 147**,** 148 **et** 149, Gauss résoud le problème suivant : Etant proposé un nombre quelconque A, on peut trouver certaines formules qui contiennent tous les nombres premiers à A dont A est résidu, ou tous ceux qui sont diviseurs des nombres de la forme $x^2 - A$, x^2 étant un carré indéterminé. Nous appellerons simplement ces nombres *diviseurs* de $x^2 - A$; l'on voit facilement ce que sont les *non-diviseurs*. Mais pour abréger nous ne considérerons que les diviseurs qui sont impairs et premiers à A, les autres cas se ramenant sans peine à celui-là.

On recopie intégralement ces trois articles qui nous semblent très liés à l'idée que l'on cherche à développer.

Suite de l'article 147, page 110 : Soit d'abord A un nombre premier positif de la forme $4n+1$, ou négatif de la forme $4n-1$. Suivant le théorème fondamental, tous les nombres premiers qui, pris positivement, sont résidus de A, seront diviseurs de $x^2 - A$; mais tous les nombres premiers non-résidus de A seront non-diviseurs de $x^2 - A$, si pourtant on en excepte 2, qui est toujours diviseur. Soient r, r', r'', *etc.*, tous les résidus de A qui sont plus petits que lui, et n, n', n'', *etc.*, tous les non-résidus ; alors tout nombre premier contenu dans une des formes $Ak+r$, $Ak+r'$, $Ak+r''$, *etc.*, sera diviseur de $x^2 - A$; mais tout nombre premier contenu dans une des formes $Ak+n$, $Ak+n'$, *etc.*, sera non-diviseur de $x^2 - A$, k étant un nombre entier indéterminé. Nous appellerons les premières *formes des diviseurs* de $x^2 - A$ et les dernières *formes des non-diviseurs*. Le nombre de chacune d'elles sera égal au nombre de résidus r, r', *etc.* ou de non-résidus n, n', *etc.*, et partant, (n^o 96) $= \frac{1}{2}(A-1)$. Or si B est un nombre composé impair et que l'on ait ARB, tous les facteurs premiers de B seront contenus dans une des premières formes, et par conséquent, B lui-même ; donc tout nombre composé impair qui sera contenu dans la forme des non-diviseurs sera non-diviseur de $x^2 - A$; mais on ne peut pas dire que les non-diviseurs de $x^2 - A$ sont tous compris dans la forme des non-diviseurs, car en supposant B non-diviseur de $x^2 - A$, et si le nombre de ces facteurs est pair, B sera compris dans quelque forme de diviseurs (n^o 93).
Ainsi, soit $A = -11$; on trouvera que les formes des diviseurs de $x^2 + 11$ sont $11k+1$, 2, 3, 4, 5, 9, et que celles des non-diviseurs sont $11k+2$, 6, 7, 8, 10. Ainsi -11 sera résidu de tous les nombres premiers contenus dans une des premières formes et non-résidu de ceux qui sont contenus dans une des dernières.
On peut trouver des formes semblables pour les diviseurs et les non-diviseurs de $x^2 - A$, quel que soit A ; mais on voit aisément qu'on n'a à considérer que les valeurs de A qui ne sont divisibles par aucun carré ; car si $A = a^2 A'$, tous les diviseurs de $x^2 - A$ premiers avec A, seront diviseurs de $x^2 - A'$, et de même pour les non-diviseurs. Or nous distinguerons trois cas : 1°. quand A est de la forme $4n+1$ ou $-(4n-1)$; 2°. quand A est de la forme $4n-1$ ou $-(4n+1)$; 3°. quand A est pair ou de la forme $\pm(4n+2)$.

[14] communément appelé actuellement la *"loi de réciprocité quadratique"*.

[15] Gauss utilise la lettre R pour signifier *"est résidu quadratique de"* et la lettre N pour signifier *"est non-résidu quadratique de"*.

page 111, article 148 : *Premier cas.* Quand A est de la forme $4n+1$ ou $-(4n-1)$. On résoudra A en facteurs premiers a, b, c, d, *etc.*, en affectant du signe $+$ ceux de la forme $4n+1$, et du signe $-$ ceux de la forme $4n-1$ qui seront en nombre pair ou impair, suivant que A sera de la forme $4n+1$ ou $-(4n-1)$ (n^o 132). On distribuera en deux classes les nombres plus petits que A et premiers avec lui ; en mettant dans la première ceux qui ne sont non-résidus d'aucun diviseur de A, ou qui sont non-résidus d'un nombre pair de ces diviseurs, et dans la seconde ceux qui sont non-résidus d'un nombre impair des mêmes diviseurs. Désignons les premiers par r, r', r'', *etc.* et les seconds par n, n', n'', *etc.* ; alors $Ak+r$, $Ak+r'$, *etc.* sont les formes des diviseurs de x^2-A, et $Ak+n$, $Ak+n'$, *etc.* celles des non-diviseurs. C'est-à-dire que tout nombre premier, excepté 2, sera diviseur ou non-diviseur de x^2-A, suivant qu'il sera contenu dans l'une des premières ou l'une des dernières formes.

En effet, si p est un nombre premier résidu ou non-résidu d'un des facteurs de A, ce facteur sera résidu ou non-résidu de p (théor. fond.) ; donc si parmi les facteurs de A, il y en a m dont p soit non-résidu, il y en aura autant qui seront non-résidus de p, et partant, lorsque p sera contenu dans l'une des premières formes, m sera pair et ARp, et lorsque p sera contenu dans une des dernières, p sera impair et ANp.

Exemple. Soit $A=+105=(-3)\times(+5)\times(-7)$[16] ;

les nombres r, r', r'', *etc.* sont :

1, 4, 16, 46, 64, 79, qui ne sont non-résidus d'aucun facteur. ;

2, 8, 23, 32, 53, 92, qui sont non-résidus de 3 et 5 ;

26, 41, 59, 89, 101, 104, ... 3 et 7 ;

23, 52, 73, 82, 97, 103, ... 5 et 7 ;

les nombres n, n', n'', *etc.* sont :

11, 29, 44, 71, 74, 86, non-résidus de 3 ;

22, 37, 43, 58, 67, 88, ... de 5 ;

19, 31, 34, 61, 76, 94, ... de 7 ;

17, 38, 47, 62, 68, 83, ... de 3, 5 et 7 ;

On déduit facilement de la théorie des combinaisons et des $n^{os}(32,96)$ que la multitude des nombres r, r', *etc.* sera

$$t\Big(1+\frac{l(l-1)}{1.2}+\frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{1.2.3.4}+etc.\Big)$$

et celle des nombres n, n', *etc.*

$$t\Big(l+\frac{l(l-1)(l-2)}{1.2.3}+\frac{l(l-1)(l-2)(l-3)(l-4)}{1.2.3.4.5}+etc.\Big)$$

l désignant le nombre des facteurs a, b, c, d, *etc.*, t étant
$=2^{-l}(a-1)(b-1)(c-1)etc.$, et chaque série devant être continuée jusqu'à ce qu'elle s'arrête d'elle-même. (En effet il y a t nombres résidus de a, b, c, d, *etc.*, $t.\frac{l.(l-1)}{1.2}$ non-résidus de deux de ces facteurs, etc. Mais pour abréger, nous sommes forcés de ne pas donner plus de développement à la démonstration). Or chacune des séries a pour somme $l.2^{l-1}$; car la première provient de
$1+\frac{l-1}{1}+\frac{(l-1)(l-2)}{1.2}+\frac{(l-1)(l-2)(l-3)}{1.2.3}+etc.$ en prenant le premier terme, puis la somme du second et du troisième, puis la somme du quatrième et du cinquième, etc. : la seconde provient aussi de la même série, en joignant le premier terme au second, le troisième au quatrième, etc. Il y a donc autant de formes de diviseurs de x^2-A, que de formes de non-diviseurs ; et ils sont en nombre $2^{l-1}.t$ de chaque espèce, ou $\frac{1}{2}(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)etc.$

page 113, article 149 : Nous pouvons traiter ensemble le second et le troisième cas. En effet on pourra toujours poser $A=(-1)Q$, ou $=(+2)Q$, ou $=(-2)Q$, Q étant un nombre de la forme $4n+1$ ou $-(4n-1)$. Soit généralement $A=\alpha Q$, de sorte que α soit ou -1 ou ± 2. Alors A sera résidu de tout nombre dont α et Q seront tous deux résidus, ou tous deux non-résidus : au contraire il sera non-résidu de tout nombre dont l'un d'eux seulement sera non-résidu. De là on déduit sans peine les formes des diviseurs et des non-diviseurs de x^2-A. Si $\alpha=-1$; nous partagerons tous les nombres plus petits que $4A$ et premiers avec lui, en deux classes. La première renfermera ceux qui sont dans quelque forme des diviseurs de x^2-Q, et en même temps de la forme $4n+1$, et aussi ceux qui sont dans quelque forme des non-diviseurs de x^2-Q et en même temps de la forme $4n-1$: la seconde renfermera tous les autres. Soient r, r', r'', *etc.* les premiers et n, n', n'', *etc.* les derniers ; A sera résidu de tous les nombres premiers contenus dans une

[16] Cela peut surprendre d'utiliser ainsi des nombres négatifs dans la factorisation mais Gauss explique qu'il affecte systématiquement les nombres premiers de la forme $4n+3$ du signe $-$ et ceux de la forme $4n+1$ du signe $+$ à cause de leur comportement démontré par le théorème fondamental.

des formes $4Ak+r$, $4Ak+r'$, $4Ak+r''$, *etc.*, et non-résidu de tous les nombres premiers contenus dans une des formes $4Ak+n$, $4Ak+n'$, $4Ak+n''$, *etc.* Si $\alpha = \pm 2$, nous distribuerons tous les nombres plus petits que $8Q$ et premiers avec lui en deux classes : la première renfermera tous ceux qui sont contenus dans quelque forme des diviseurs de $x^2 - Q$, et qui sont de la forme $8n+1$ ou $8n+7$, pour le signe supérieur, et de la forme $8n+1$ ou $8n+3$ pour le signe inférieur ; cette classe comprendra aussi tous ceux qui sont contenus dans quelque forme de non-diviseurs de $x^2 - Q$ et qui sont, pour le signe supérieur, de la forme $8n+3$, $8n+5$, et pour le signe inférieur, de la forme $8n+5$, $8n+7$, et la seconde tous les autres. Alors désignant les nombres de la première classe par r, r', r'', *etc.*, ceux de la seconde par n, n', n'', *etc.*, $\pm 2Q$ sera résidu de tous les nombres premiers contenus dans les formes $8Qk+r$, $8Qk+r'$, $8Qk+r''$, *etc.* et non-résidu de tous ceux contenus dans les formes $8Qk+n$, $8Qk+n'$, $8Qk+n''$, *etc.* Au reste, on peut démontrer facilement qu'il y a autant de formes de diviseurs qu'il y en a de non-diviseurs.
Exemple. On trouve ainsi que 10 est résidu de tous les nombres premiers contenus dans les formes $40K+1$, +3, +9, +13, +27, +31, +37, +39, et non-résidu de tous les nombres premiers contenus dans les formes $40K+7$, +11, +17, +19, +21, +23, +29, +33.

page 114, article 150 : Ces formes ont plusieurs propriétés assez remarquables ; nous n'en citerons cependant qu'une seule. Si B est un nombre composé premier avec A, tel qu'un nombre $2m$ de ses facteurs premiers soient compris dans quelque forme de non-diviseurs de $x^2 - A$, B sera contenu dans quelque forme de diviseurs de $x^2 - A$; mais si le nombre de facteurs premiers de B contenus dans quelque forme de non-diviseurs de $x^2 - A$ est impair, B sera aussi contenu dans quelque forme de non-diviseurs. Nous omettons la démonstration, qui n'a rien de difficile[17]. Il suit de là que non-seulement tout nombre premier ; mais aussi tout nombre composé impair et premier avec A est non-diviseur dès qu'il est contenu dans une des formes de non-diviseur ; car nécessairement quelque facteur premier de ce nombre sera non-diviseur.

page 116, article 152 : Jusqu'à présent nous n'avons traité que la congruence simple $x^2 \equiv A (mod\ m)$, et nous avons appris à reconnaître les cas où elle est résoluble. Par le n^o 105, la recherche des racines elles-mêmes est ramenée au cas où m est un nombre premier, ou une puissance d'un nombre premier ; et par le n^o 101, ce dernier cas est ramené à celui où m est un nombre premier. Quant à celui-ci, en comparant ce que nous avons dit (n^{os} 61 et suiv.) avec ce que nous enseignerons sect. V et VIII, on aura presque tout ce qui peut se faire par les méthodes générales. Mais dans les cas où elles sont applicables, elles sont infiniment plus longues que les méthodes indirectes que nous exposerons dans la section VI, et partant elles sont moins remarquables par leur utilité dans la pratique que par leur beauté.

Annexe 3 : Deux extraits de la lettre de Carl Frédéric Gauss à Sophie Germain du 30 avril 1807 (extrait des Oeuvres philosophiques de Sophie Germain, 1879, p. 274-282)

Voici une autre proposition relative aux residus quarrés, dont la demonstration est moins cachée : je ne l'ajoute pas, pour ne pas vous derober le plaisir de la developper vous-même, si vous la trouverez digne d'occuper quelques moments de votre loisir.
Soit p un nombre premier. Soient les $p-1$ nombres inférieurs à p partagés en deux classes :
$A.....1, 2, 3, 4....\frac{1}{2}(p-1)$
$B.....\frac{1}{2}(p+1), \frac{1}{2}(p+3), \frac{1}{2}(p+5), ...p-1$ Soit a un nombre quelconque non divisible par p. Multipliés tous les nombres A par a; prenés-en les moindres residus selon le module p, soient, entre ces residus, α appartenants à A, et β appartenants à B, de sorte que $\alpha + \beta = \frac{1}{2}(p-1)$. Je dis que a è residu quarré de p lorsque β è pair, non residu lorsque β è impair.

Le second extrait est davantage *"connu"*

Le goût pour les sciences abstraites en général et surtoût pour les mysteres des nombres est fort rare : on ne s'en étonne pas ; les charmes enchanteurs de cette sublime science ne se decelent dans toute leur

[17]On suppose donc que Gauss l'a faite, dans une quelconque marge...

beauté qu'à ceux qui ont le courage de l'approfondir. Mais lorsqu'une personne de ce sexe, qui, par nos moeurs et par nos préjugés, doit rencontrer infiniment plus d'obstacles et de difficultés, que les hommes, à se familiariser avec ces recherches epineuses, sait neansmoins franchir ces entraves et penétrer ce qu'elles ont de plus caché, il faut sans doute, qu'elle ait le plus noble courage, des talens tout à fait extraordinaires, le génie supérieur. En effet, rien ne pourroit me prouver d'une manière plus flatteuse et moins équivoque, que les attraits de cette science, qui ont embelli ma vie de tant de jouissances, ne sont pas chimériques, que la predilection, dont vous l'avez honorée.

Annexe 1 : Articles 75 à 78 des Recherches arithmétiques de Carl-Friedrich Gauss

75. Avant d'abandonner ce sujet, nous présenterons quelques propositions qui ne nous paraissent pas indignes d'attention, à cause de leur simplicité.
Le produit de tous les termes de la période d'un nombre quelconque est $\equiv 1$ *quand leur nombre ou l'exposant auquel appartient le nombre dont il s'agit est impair, et* $\equiv -1$ *quand il est pair.*
Par exemple, pour le module 13, la période de 5 est composée des termes $1, 5, 12, 8$ dont le produit $480 \equiv -1$ $(mod\ 13)$, suivant le même module, la période de 3 est composée des termes $1, 3, 9$, dont le produit $27 \equiv 1$ $(mod\ 13)$.
Soit t l'exposant auquel le nombre appartient ; on peut toujours trouver (n°71) une base pour laquelle l'indice du nombre soit $\dfrac{p-1}{t}$. Or l'indice du produit de tous les termes sera

$$(1 + 2 + 3 + etc. + t - 1)\frac{p-1}{t} = \frac{(t-1)(p-1)}{2};$$

donc il sera $\equiv 0$ $(mod\ p-1)$, quand t est impair et $\equiv \dfrac{p-1}{2}$ quand t est pair. Dans le premier cas, le produit est $\equiv 1$ $(mod\ p)$; dans le second, $\equiv -1$ $(mod\ p)$.

76. Si le produit du théorème précédent est une racine primitive, sa période comprendra tous les nombres $1, 2, 3, 4, \ldots p-1$, dont le produit sera par conséquent toujours $\equiv -1$; car $p-1$ est toujours pair, excepté dans le cas où $p = 2$, et alors on a indifféremment $+1$ ou -1. Ce théorème élégant qu'on énonce ordinairement de cette manière : *Le produit de tous les nombres plus petits qu'un nombre premier étant augmenté de l'unité, est divisible par ce nombre premier,* a été publié par *Waring* qui l'attribue à *Wilson* (*Meditationes Algeb. Ed. 3, p. 380*) ; mais aucun des deux n'a pu le démontrer, et *Waring* avoue que la démonstration lui en semble d'autant plus difficile qu'il n'y a point de *notation* par laquelle on puisse exprimer un nombre premier ; pour nous, nous pensons que la démonstration de cette sorte de vérités doit être puisé dans les principes plutôt que dans la notation. *Lagrange* en a depuis donné une démonstration (*Nouv. Mém. de l'Ac. de Berlin, 1771)*, dans laquelle il s'appuie sur la considération des coefficients que l'on trouve en développant le produit

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3) \ldots (x + p - 1) :$$

et il fait voir qu'en supposant ce produit

$$= x^{p-1} + Ax^{p-2} + Bx^{p-3} + etc. + Mx + N,$$

les coefficients A, B, etc. M sont divisibles par p ; or

$$N = 1.2.3 \ldots p - 1$$

Maintenant si $x = 1$, le produit est divisible par p, mais alors il sera $\equiv 1 + N$ $(mod\ p)$ donc $1 + N$ est divisible par p.
Enfin Euler *(Opusc. analyt. T.1, p.329)* en a donné une démonstration qui rentre dans celle que nous venons d'exposer ; ainsi puisque de tels hommes n'ont

pas cru ce sujet indigne de leurs méditations, nous espérons qu'on ne nous désapprouvera pas d'offrir encore ici une autre manière de démontrer ce théorème.

77. Nous dirons que deux nombres sont *associés*, comme l'a fait *Euler*, lorsque leur produit sera congru à l'unité. Cela posé, par la section précédente, tout nombre positif moindre que p, aura toujours un nombre associé moindre que p et il n'en aura qu'un ; or il est facile de prouver que parmi les nombres $1, 2, 3, -1$, il n'y a que 1 et $p-1$ qui soient eux-mêmes leurs associés, car ceux qui jouiront de cette propriété seront donnés par la congruence $x^2 \equiv 1$ qui ne peut avoir que 2 racines 1 et $p-1$. Supprimant donc ces deux nombres, les autres $2, 3, 4 \dots p-2$, seront associés deux à deux, donc leur produit sera $\equiv 1$; enfin multipliant par $p-1$, le produit de tous $1.2.3.4 \dots p-1 \equiv p-1 \equiv -1$.
Par exemple, pour $p = 13$, les nombres $2, 3, 4, 5, \dots 11$ s'associent de la manière suivante : 2 avec 7, 3 avec 9, 4 avec 10, 5 avec 8, 6 avec 11 ; donc $2.3.4 \dots 11 \equiv 1$, et partant......... $1.2.3 \dots 12 \equiv 12 \equiv -1$.

78. Le théorème de *Wilson* peut être rendu plus général en l'énonçant comme il suit : *Le produit de tous les nombres premiers avec un nombre donné A et moindres que ce nombre, est congru suivant A, à l'unité prise positivement ou négativement.* L'unité doit être prise négativement quand A est de la forme p^m ou $2p^m$, p étant un nombre premier différent de 2, ou encore quand $A = 4$; et positivement dans tous les autres cas. Le théorème de Wilson est contenu dans le premier cas. *Exemple.* Pour $A = 15$, le produit des nombres $1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$ est $\equiv 1$ (mod 15). Nous supprimons, pour abréger, la démonstration. Nous observerons seulement qu'on peut y parvenir comme dans l'article précédent, excepté que la congruence $x^2 \equiv 1$ peut avoir plus de 2 racines, ce qui demande certaines considérations particulières. On pourrait aussi la tirer de la considération des indices, comme dans le n°75, si l'on y joint ce que nous dirons tout à l'heure des modules composés.

Annexe 2 : Article 41 des Recherches arithmétiques de Carl-Friedrich Gauss

Dans l'article 41 des Recherches arithmétiques de Gauss, on retrouve la notion de permutations et on pense aux travaux de Galois à venir.

41. *Si p est un nombre premier, et qu'on ait p choses parmi lesquelles il peut s'en trouver un certain nombre d'égales entre elles, pourvu que toutes ne le soient pas : le nombre des permutations de ces choses sera divisible par p.*

Par exemple, cinq choses A, A, A, B, B peuvent se disposer de dix manières différentes.

La démonstration de ce théorème se déduit facilement de la théorie connue des permutations. En effet, supposons que parmi ces p choses, il y en ait a égales à A, b égales à B, c égales à C etc., de sorte qu'on ait $a + b + c + etc = p$, les nombres a, b, c,etc. pouvant aussi désigner l'unité. Le nombre de permutations sera $= \dfrac{1.2.3 \dots p}{1.2 \dots a.1.2 \dots b.1.2 \dots c.etc.}$; or le numérateur est évidemment divisible par le dénominateur, puisque le nombre des permutations est entier ; mais il est divisible par p, tandis que le dénominateur, qui est composé de facteurs plus petits que p, n'est pas divisible par p (n°15) ; donc le nombre des permutations sera divisible par p.

Nous espérons cependant que la démonstration suivante ne déplaira pas à quelques lecteurs.

Lorsque dans deux permutations l'ordre des choses ne différera qu'en ce que celle qui tient la première place dans l'une, en occupe une différente dans l'autre, mais que du reste toutes les autres choses, à partir de celle-là, suivent le même ordre dans chacune des permutations, de manière que la dernière de l'une se trouve placée immédiatement avant la première, dans l'autre ; nous les appellerons permutations semblables[3]. Ainsi $ABCDE$ et $DEABC$, $ABAAB$ et $ABABA$ seront semblables.

Or comme chaque permutation est composée de p choses, il est clair qu'on pourra en trouver $p-1$ semblables à une quelconque d'entre elles, si l'on met successivement à la seconde, à la troisième place, etc., la chose qui occupait la première ; donc si aucunes de ces permutations semblables ne sont identiques, il est évident que le nombre total des permutations sera égal à p fois le nombre des permutations dissemblables, et conséquemment sera divisible par p. Supposons que deux permutations semblables $PQ\dots TV\dots, V\dots YZPQ\dots T$ puissent être identiques, et que P qui occupe la première place dans la première, occupe la $n+1^{\text{ième}}$ dans la seconde : on aura dans la dernière série le $n+1^{\text{ième}}$ terme égal au 1^{er}, le $n+2^{\text{ième}}$ égal au $2^{\text{ième}}$, etc., d'où résulte que le $2n+1^{\text{ième}}$ est encore égal au premier et par conséquent le $3n+1^{\text{ième}}$, et généralement le $kn+m^{\text{ième}}$ égal au $m^{\text{ième}}$ (où quand $kn=m>p$, il faut imaginer qu'on reprenne toujours par le commencement, la série $V\dots T$, à moins qu'on ne retranche de $kn+m$, le multiple de p, qui en approche le plus en moins). Cela posé, si on détermine k de manière que $kn \equiv 1 \ (mod\, p)$, ce qui peut toujours se faire, puisque p est premier, il suivra de là que généralement le $m^{\text{ième}}$ terme serait égal au $m+1^{\text{ième}}$, c'est à dire qu'un terme quelconque serait égal au suivant, ou que tous les termes seraient égaux entre eux, ce qui est contre l'hypothèse.

[3]Si l'on écrivait en cercle les permutations semblables, de manière que la dernière chose touchât la première, il n'y aurait aucune différence entre elles, parce qu'aucune place ne peut s'appeler la première ni la dernière.

wikisource Manuscrits de Galois, édition Tannery 1908, Introduction

INTRODUCTION

Les manuscrits de Galois ont été remis à Joseph Liouville par Auguste Chevalier : Liouville a légué sa bibliothèque et ses papiers à l'un de ses gendres, M. de Blignières [1]. Mme de Blignières s'occupe pieusement de classer les innombrables papiers de son mari et de son illustre père. Elle a recherché et su retrouver (non sans peine) les manuscrits de Galois : ceux-ci, ainsi que d'autres papiers importants, seront donnés à l'Académie des Sciences : Mme de Blignières a bien voulu, en attendant, m'autoriser à examiner les manuscrits de Galois et à en publier des extraits : je lui exprime ici ma profonde reconnaissance.

Je dois aussi des remercîments à M. Paul Dupuy, dont tous les géomètres connaissent la belle Notice sur la vie d'Évariste Galois, publiée dans les *Annales scientifiques de l'École Normale* [2]. M. Dupuy a bien voulu procéder à un premier classement des manuscrits qui m'avaient été remis et en séparer ceux qui appartiennent incontestablement à Galois, dont il connaît bien l'écriture.

Les lignes qui suivront, les quelques fragments ou notes que je pourrai publier n'ajouteront rien à la gloire de Galois : elles ne sont qu'un hommage rendu à cette gloire dont l'éclat n'a fait que grandir depuis la publication de Liouville.

Cette publication a été faite de la façon la plus judicieuse ; mais, soixante ans plus tard, on est tenu à moins de réserve. Les mathématiciens s'intéresseront toujours à Galois, à l'homme et à ses écrits : il est de ceux dont on voudrait tout savoir.

Je m'occuperai tout d'abord des œuvres posthumes et des papiers qui s'y rapportent. Pour la plupart de ces papiers, on possède la copie de Chevalier ; d'ailleurs l'écriture de Galois est, d'ordinaire, parfaitement lisible et même assez élégante ; mais elle est parfois abrégée, hâtive ; les ratures et les surcharges abondent ; j'aurai à signaler quelques mots et quelques phrases illisibles.

L'importance de l'œuvre de Galois sera mon excuse pour la minutie de certains détails, où j'ai cru devoir entrer, et qui va jusqu'au relevé de fautes d'impression, dont le lecteur attentif ne peut manquer de s'apercevoir. Je ne me dissimule pas ce que cette minutie, en elle-même, a de puéril.

Les œuvres posthumes occupent les pages 408-444 du Tome XI (1846) du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* et les pages 25-61 des *Œuvres mathématiques d'Évariste Galois publiées sous les auspices de la Société mathématique de France* [3]. C'est, sauf avis contraire, à ce dernier Ouvrage que se rapportent tous les renvois.

Lettre à Auguste Chevalier

(pages : 25-32).

Dimensions du papier : 31×20. La lettre, datée deux fois, au commencement et à la fin (29 mai 1832), contient sept pages : le bas de la septième, au-dessous de la signature, a été coupé sur une longueur d'environ 8^{cm}.

Le verso de la dernière page contient le brouillon de deux lettres, d'ailleurs biffées, dont l'une porte une date, biffée aussi ; on lit 14 mai 83 ; il est vraisemblable que Galois a écrit sa lettre à Chevalier sur la première feuille venue, une feuille sur laquelle il avait griffonné une quinzaine de jours auparavant.

Ces brouillons sont disposés d'une façon assez singulière : ils comportent des phrases entières, puis des lignes, blanches au milieu avec un mot au commencement et un mot à la fin : ces mots sont souvent illisibles, tant parce qu'il est impossible de leur attribuer un sens que par suite des ratures : celles-ci vont de haut en bas ; il en est ainsi dans plusieurs des manuscrits de Galois ; ici, elles semblent faites avec une barbe de plume, ou un bout de bois, qu'il aurait trempé dans l'encre ; le premier brouillon de lettre est à gauche, le second à droite et se continue dans une autre direction ; Galois a fait tourner son papier d'un angle droit. Voici ce que j'ai pu lire :

brisons là sur cette affaire je vous prie
Je n'ai pas assez d'esprit pour suivre
une conversation de ce genre
mais je tâcherai d'en avoir assez pour
converser avec vous comme je le faisais
avant que rien soit arrivé. Voilà
Mr le *(illis.)*
en a qui
doit vous qu'à
moi et ne plus penser à des choses
qui ne (*illis.*) exister et qui
n'existeront jamais

14 mai 83

J'ai suivi votre conseil et j'ai réfléchi
à qui s'est
passé sous quelque
dénomination que ce puisse [4] être *(illis.)* par s'établir
entre nous. Au reste Mr soyez (?)
persuadé qu'il n'en aurait sans doute

jamais été davantage ; vous supposez
mal et vos regrets sont mal fondés.
La vraie amitié n'existe guère
qu'entre des personnes de même sexe
Surtout des
amis. Sans doute
le vide qu l'absence
de tout sentiment de ce genre....
(illis.) confiance... mais elle a été
très *(illis.)* [5] ..... vous m'avez
vu triste z demandé
le motif ; je vous ai répondu que
j'avais des peines ; qu'on m'avait fait
éprouver. J'ai pensé que vous prendriez
celà comme toute personne devant
laquelle on laisse tomber une parole
pour *(illis.)* on n'est
pas
le calme de mes idées me laisse
la liberté de juger avec beaucoup
de réflexion les personnes que je vois
habituellement ; c'est ce qui fait que
j'ai rarement le regret de m'être
trompé ou laissé influencer à leur égard.
Je ne suis pas de votre avis pour
les *(illis.)* plus que
les (?) exiger
ni se vous remercie
sincèrement de tous ceux ou vous
voudrez bien descendre en ma
faveur.

J'ai collationné le manuscrit avec le texte imprimé : il n'est guère utile de parler de quelques changements de notation, sans aucune importance, qui remontent à Liouville, de dire que Galois a écrit bulletin ferussac et non Bulletin de Férussac, ou encore de signaler, page 29 des Œuvres, ligne 24, la substitution du mot “équation” au mot “réduction” que le sens indique suffisamment et qu'on lit dans le manuscrit et dans le texte de Liouville. Le point le plus intéressant est que le théorème de Legendre (page 30, ligne 31),

$$\mathrm{FE}' + \mathrm{EF}' - \mathrm{FF}' = \frac{\pi}{2}$$

est écrit par Galois non sous la forme qui précède, mais comme il suit :

$$\mathrm{E}'\mathrm{F}'' - \mathrm{E}''\mathrm{F}' = \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$$

Mémoire sur les conditions de résolubilité par radicaux

(pages 33-50) [6].

Dans les quelques lignes d'introduction au Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux que Galois avait biffées (d'ailleurs très légèrement) et que Chevalier a conservées avec raison, Galois dit que le Mémoire est extrait d'un Ouvrage qu'il a présenté à l'Académie il y a un an. Le manuscrit de Galois n'est pas un extrait, c'est le texte même qui a été remis à l'Académie. Qu'il en soit ainsi, c'est ce que Chevalier avait signalé dans une note (page 33 des Œuvres, note 2) ainsi conçue :

J'ai jugé convenable de placer en tête de ce Mémoire la préface qu'on va lire, bien que je l'aie trouvée biffée dans le manuscrit. Ce manuscrit est précisément celui que l'auteur présenta à l'Académie.

La dernière phrase de cette note, qui figure dans la copie de Chevalier et sur l'épreuve dont j'ai parlé, a disparu du texte définitif. Liouville a-t-il voulu effacer la légère contradiction entre le texte et la note, a-t-il cru devoir se conformer au désir de Galois, qui semble avoir souhaité qu'on ignorât que ce Mémoire était celui-là même qu'il avait présenté à l'Académie ; a-t-il jugé lui-même que, pour des raisons de convenance envers l'Académie, cette ignorance était préférable ? C'est là, en vérité, des questions dont la réponse importe bien peu, non plus que la petite inexactitude du mot extrait. Il importe beaucoup plus que le texte du Mémoire de Galois ne se soit pas égaré, comme le précédent, et qu'il ait pu être remis à l'auteur, qui y a fait plusieurs remaniements : ceux-ci, le plus souvent, peuvent se distinguer par l'écriture. La conjecture de Chevalier, à savoir que "Galois a relu son Mémoire pour le corriger avant d'aller sur le terrain" (note de la page 40), est tout à fait vraisemblable.

La première page de la couverture, qui subsiste, est fort sale, tachée d'encre, couverte de gribouillages, de bouts de calcul, à l'encre ou au crayon, au recto et au verso, dans tous les sens ; quelques-unes des formules laissent supposer que Galois, en les traçant, pensait à quelque point de la théorie des fonctions elliptiques ; d'autres se rapportent à une suite récurrente.

En haut et à droite du recto on lit (écriture de Liouville) "Rapport du 4 juillet 1831" ; puis, en titre, d'une écriture qu'il serait probablement possible d'identifier :

MM. Lacroix

Poisson

commissaires

le 17 j$^{\text{er}}$ 1831

le tout suivi d'un paraphe ; en face du nom de Poisson, il y a le mot *vu*, d'une grosse écriture, celle de Poisson sans doute.

Au verso, entre des taches et des calculs, Galois a écrit

Oh ! chérubins.

On peut bien supposer que cette apostrophe s'adresse à MM. Lacroix et Poisson.

Le manuscrit contient onze pages (38 × 25) ; la marge occupe la moitié de chaque page ; elle contient plusieurs notes et additions, dont les unes remontent peut-être à la première rédaction, dont les autres ont été sans doute ajoutées par Galois, lorsqu'il a revu son travail pour la dernière fois telle est assurément celle qu'a signalée Chevalier, le tragique "je n'ai pas le temps".

En marge de la seconde page, on trouve ces quatre noms :

V. Delaunay,
N. Lebon,
F. Gervais,
A. Chevalier

et une liste de onze noms, soigneusement biffés.

Je dois, en passant, signaler, page 34 des *Œuvres*, l'omission de deux lignes, qui figurent dans le manuscrit et dans le texte de Liouville ; elles devraient terminer l'avant-dernier alinéa :

..., en général par quantité rationnelle une quantité qui s'exprime en fonction rationnelle des coefficients de la proposée.

Dans la marge de la troisième page du manuscrit, en face du lemme III (page 36), se trouve la note an crayon que voici :

La démonstration de ce lemme n'est pas suffisante ; mais il est vrai, d'après le n° 100 du Mémoire de Lagrange, Berlin, 1775.

Au-dessous, Galois a écrit :

Nous avons transcrit textuellement la démonstration que nous avons donnée de ce lemme dans un Mémoire présenté en 1830. Nous y joignons comme document historique la note suivante qu'a cru devoir y apposer M. Poisson.

On jugera.

Puis, plus bas :

Note de l'auteur.

Galois voulait évidemment que la note de Poisson [7] et son propre commentaire fussent publiés. Au surplus, les notes de Poisson et de Galois figurent dans la copie de Chevalier et dans l'épreuve. Liouville les a supprimées finalement, pour des raisons évidentes.

La note de la page 37 des *Œuvres* est en face du lemme IV et semble d'une encre différente de celle du texte; mais il ne me paraît nullement certain que ce soit une addition de la dernière heure : je crois que Galois a dû, à cette dernière heure, remanier et développer hâtivement la démonstration de ce lemme IV ; elle ne comportait probablement, dans le texte primitif, que quatre ou cinq lignes ; elle est maintenant écrite, partie dans la marge, partie dans le blanc qui restait au bas de la page, d'une écriture serrée, nerveuse : au reste, un mot injurieux, biffé, et qui est de la même encre que le "chérubins" de la couverture ne laisse guère de doute sur l'impatience que ce passage a fait éprouver à l'auteur.

La note de la page 38 des *Œuvres* est en marge, en face de la proposition I. À la suite de cette note, avec l'indication "à reporter dans les définitions", se trouve ce qui est imprimé pages 35 et 36, à partir de la ligne 22 (Les substitutions sont) jusqu'à la ligne 3 (la substitution ST) ; ce passage est en face du texte imprimé du milieu de la page 38 au milieu de la page 39.

En marge de la page suivante (cinquième) du manuscrit, le scholie II [8] (page 40) est immédiatement précédé de ces indications, qui sont biffées :

Ce qui caractérise un groupe. On peut partir d'une des permutations quelconques du groupe.

Vraisemblablement, c'est après avoir écrit et biffé ces lignes que Galois s'est décidé à écrire le passage "à reporter dans les définitions". Un peu plus bas est la note "je n'ai pas le temps", puis cinq lignes biffées, mais qui sont d'une écriture calme et remontent peut-être à la première rédaction, les voici :

Car si l'on élimine $f(V,r)=0$ et $F(r)=0, F(r)$ étant du degré premier p, il ne peut arriver que de deux choses l'une : ou le résultat de l'élimination sera de même degré en V que $f(V,r)$ ou il sera d'un degré p fois plus grand.

Ce passage biffé doit évidemment être rapproché des indications données dans le premier alinéa de la note de la page 40. Ces indications sont de Liouville ; la note de Chevalier était ainsi conçue :

Vis-à-vis la démonstration de ce théorème, dans le manuscrit j'ai trouvé ceci

"Il y a quelque chose..."

C'est ainsi qu'elle figure dans l'épreuve. Les six premières lignes de la note de la page 40 sont donc de Liouville.

Au reste, Liouville a été visiblement préoccupé de cet endroit (proposition II) du texte de Galois : il a jugé un moment convenable de reprendre l'hypothèse primitive de Galois (p premier) et d'éclaircir complètement la démonstration dans ce cas, par une note que je crois devoir transcrire, non pas qu'elle puisse apprendre quelque chose au lecteur, mais parce qu'elle me semble une trace touchante des soins et des scrupules que Liouville apportait dans sa publication ; le renvoi correspondrait à la ligne 20 de la page 40 des *Œuvres* :

Ceci mérite d'être expliqué avec quelque détail.

Désignons par, $\psi(V) = 0$ l'équation dont l'auteur parle, et soient $f(V,r), f_1(V,r), \ldots, f_{i-1}(V,r)$ les facteurs irréductibles dans lesquels, $\psi(V)$ devient décomposable par l'adjonction de r, en sorte que,

$$\psi(V) = f(V,r)f_1(V,r)\ldots f_{i-1}(V,r).$$

Comme r est racine d'une équation irréductible, on pourra dans le second membre remplacer r par $r', r'', \ldots, r^{\mu-1}$. Ainsi $\psi(V)^\mu$ est le produit des i quantités suivantes

$$\begin{matrix} f(V,r) & f(V,r')\ldots f(V,r^{(\mu-1)}) \\ f_1(V,r) & f_1(V,r')\ldots f_1(V,r^{(\mu-1)}) \\ f_{i-1}(V,r) & f_{i-1}(V,r')\ldots f_{i-1}(V,r^{(\mu-1)}) \end{matrix} \quad ,$$

dont chacune, symétrique en $r, r', \ldots, r^{(p-1)}$ et par suite exprimable en fonction rationnelle de V indépendamment de toute adjonction, doit diviser $\psi(V)^\mu$ et se réduire en conséquence a une simple puissance du polynôme $\psi(V)$ qui cesse de se résoudre en facteurs lorsqu'on n'adjoint pas les auxiliaires r, r', etc. J'ajoute que le degré de la puissance est le même pour toutes. En effet, les équations $f(V,r') = 0, \quad f_1(V,r) = 0, \ldots, f_{i-1}(V,r) = 0$ qui dérivent de $\psi(V) = 0$ et dont les racines sont fonctions rationnelles les unes des autres ne peuvent manquer d'être du même degré. En faisant donc

$$f(V,r)f(V,r')\ldots f(V,r^{(p-1)}) = \psi(V)^\mu,$$

on en conclura $p = i\mu$. Mais p est premier et $i > 1$; donc on a $i = p$, d'où $\mu = t$, et enfin

$$\psi(V) = f(V,r)f(V,r')\ldots f(V,r^{(p-1)}).$$

Ce qu'il fallait démontrer.

J. Liouville.

Assurément, en rédigeant cette note, Liouville se conformait au précepte d'être "transcendantalement clair" qu'il a rappelé dans l'avertissement aux Œuvres mathématiques de Galois. Il s'est aperçu ensuite en réfléchissant davantage, que la proposition II n'impliquait pas que le nombre p fût premier et il a soigneusement noté les différences essentielles entre les deux rédactions successives de l'auteur. Qu'il ait reculé devant les explications nécessaires pour donner à la pensée de Galois toute la clarté qu'il faudrait, cela, aujourd'hui, n'a aucun inconvénient.

Page 41 des Œuvres, les lettres μ, ν remplacent les lettres p, n dont s'est servi Galois ; pareil changement a été fait dans la lettre à Chevalier ; ces petites modifications, destinées à éviter des confusions possibles, sont de Liouville : les lettres p, n figurent encore dans l'épreuve.

Les lignes 7, 8, 9 de la même page sont une addition marginale, mais qui ne semble pas de la dernière heure. Cette addition est suivie de la nouvelle rédaction de la proposition III, datée de 1832, sur laquelle l'attention est appelée dans la note qui est au bas de la page qui nous occupe. Ici encore, Liouville est intervenu ; la note de Chevalier était ainsi conçue.

Dans le manuscrit de Galois l'énoncé du théorème qu'on vient de lire se trouve en marge et vis-à-vis de la démonstration qu'il en avait écrite d'abord. Celle-ci est effacée avec soin ; l'énoncé précédent porte la date 1832 et montre par la manière dont il est écrit que l'auteur était extrêmement pressé : ce qui confirme l'assertion que j'ai avancée dans la note précédente.

C'est donc Liouville qui a déchiffré et intercalé le texte primitif de la proposition III.

La phrase (il suffit ... substitutions), placée entre parenthèses au bas de la page 43 des *Œuvres* et en haut de la page 44, est une note marginale.

Page 46, ligne 24, Galois a simplement écrit *"Journal de l'École, XVII"*.

Il y a dans les manuscrits de Galois une feuille (double) qui est une sorte de brouillon de la proposition V ; ce brouillon a passé en grande partie dans la rédaction du Mémoire [9].

Avant de parler du manuscrit contenant le fragment imprimé dans les dernières pages des *Œuvres*, je dois dire un mot d'une feuille détachée [10] en partie déchirée, qui, par le format du papier, la couleur de l'encre et la forme de l'écriture, paraît avoir appartenu au cahier dont ce manuscrit faisait partie. Elle contient une rédaction antérieure de la proposition I et de sa démonstration, rédaction qui semble avoir été écrite au moment même où Galois venait de trouver cette démonstration : l'énoncé de la proposition fondamentale est, presque textuellement, le même que dans le Mémoire sur des conditions de résolubilité, puis viennent seize lignes barrées que je reproduis :

Considérons d'abord un cas particulier. Supposons que l'équation donnée n'ait aucun diviseur rationnel et que toutes ses racines se déduisent rationnellement de l'une quelconque d'entre elles. La proposition sera facile à démontrer.

En effet, dans notre hypothèse, toute fonction des racines s'exprimera en fonction d'une seule racine et sera de la forme $\phi x, x$ étant une racine. Soient

$$x \quad x_1 = f_1 x \quad x_2 = f_2 x \ldots x_{m-1} = f_{m-1} x$$

les m racines. Écrivons les m permutations

$$\begin{array}{c} x \quad f_1 x \quad f_2 x \ldots f_{m-1} x \\ x_1 \quad f_1 x_1 \quad f_2 x_1 \ldots f_{m-1} x_1 \\ x_2 \quad f_1 x_2 \quad f_2 x_2 \ldots f_{m-1} x_2 \\ ----- \\ x_{m-1} \quad f_1 x_{m-1} \quad f_2 x_{m-1} \ldots f_{m-1} x_{m-1} \end{array}$$

Le reste de la démonstration suivait, contenu dans une douzaine de lignes qui sont devenues les lignes 13-26 de la page 39 des *Œuvres* : on distingue assez bien les x surcharges des V de la rédaction définitive ; ces douze lignes sont d'ailleurs réunies en marge par un trait, avec l'indication : *à reporter plus loin.* Galois a changé d'idée ; il trouve *maintenant* inutile de s'arrêter au cas particulier ; mais il semble que ce cas particulier lui ait été d'abord nécessaire, car les douze lignes que je viens de dire sont suivies de celles-ci :

Le théorème est donc démontré dans l'hypothèse particulière que nous avons établie.

Revenons au cas général.

Ces trois lignes sont biffées avec un soin particulier, Galois est en possession de la démonstration générale, sous la forme simple et définitive ; il est joyeux ; il couvre de hachures les seize lignes puis les trois lignes dont il n'a plus besoin. Vient ensuite la vraie démonstration, les deux dernières lignes de la page 38 des *Œuvres* et le commencement de la page 39, jusqu'à : "je dis que ce groupe de permutations jouit de la propriété énoncée". Puis l'indication, en marge, à demi déchirée : *mettre ici la partie sautée*, et les lignes 24, 25 de la page 39 des *Œuvres.*

Ne semble-t-il pas qu'on assiste à un moment essentiel dans le développement de la pensée de Galois ? L'émotion s'accroît encore à la lecture des lignes du bas de la feuille, couvertes de ratures et de surcharges, et où le nom propre a disparu dans un trou, produit d'une tache et de l'usure :

Je dois observer que j'avais d'abord démontré le théorème autrement, sans penser à me servir de cette propriété très simple des équations, propriété que je regardais comme une conséquence du théorème. C'est la lecture d'un Mémoire qui m'a suggéré

La fin de la ligne est indéchiffrable : après *suggéré*, il y a des mots, l'un au-dessus de l'autre, qui sont biffés, peut-être *cette* surmonté de *la pensée*, puis, dans la partie la plus usée du papier, *assertion* ou *analyse*, ou autre chose, et enfin, plus bas, je crois lire *que je dois.* Quant au nom propre, les quelques traits qui subsistent, à côté du trou, ne confirment pas la supposition qui vient de suite à l'esprit (page 37, ligne 11), que ce nom est celui d'Abel.

Sur la marge de cette curieuse feuille, se trouvent encore quelques formules, à demi effacées, qui correspondent visiblement aux lemmes II et III.

---

1. Célestin de Blignières (1823-1905), ancien Élève de l'École Polytechnique, a été l'un des disciples directs d'Auguste Comte, l'un des plus distingués sans doute et vraiment capable, par l'étendue de son esprit et de son savoir, de comprendre pleinement la doctrine du maître. Mais l'indépendance de son caractère et l'originalité de son esprit l'ont empêché de s'enrôler dans l'un ou l'autre des partis du Positivisme. Il plaisantait parfois de son isolement et se

qualifiait de bligniériste : on lui doit une intéressante Exposition de la Philosophie et de la Religion positives (Paris, Chamerot, 1857).

Pendant neuf ans (1874-1883), un commerce de pensée, très actif, s'établit entre Liouville et M. de Blignières. De ce commerce, dont l'un et l'autre ont beaucoup joui, M. de Blignières a gardé jusqu'à sa mort un souvenir singulièrement vif et présent.

2. Tome XIII (1896) de la 3^{e} série. Cette Notice a été reproduite, avec le portrait de Galois, dans les *Cahiers de la quinzaine* [2^{e} cahier de la 5^{e} série (1903)].
3. Paris, Gauthier-Villars, 1897.
4. La lecture des quatre premiers mots de cette ligne est douteuse.
5. Il y a une tache d'encre sur le mot ; on distingue nettement les deux dernières lettres *ée*.
6. J'ai eu à ma disposition le manuscrit de Galois, la copie de Chevalier et une épreuve, corrigée de la main de Liouville, mais ou ne figurent pas toutes les modifications apportées aux notes : j'aurai l'occasion de parler plusieurs fois de cette épreuve.
7. Grâce à l'obligeance de Mme de Blignières, j'ai pu comparer l'écriture de cette note avec celle de Poisson, dans une lettre à Liouville; aucun doute ne peut subsister.
8. Les numéros I, II des scholies (p. 39 et 40) ne sont pas dans le manuscrit.
9. Je ne pense pas qu'il y ait intérêt à publier ce brouillon.
10. C'est M. P. Dupuy qui a appelé mon attention sur cette feuille. Quelques autres débris apportent un peu de lueur sur la suite des idées de Galois : ils seront publiés dans un second article.

wikisource Manuscrits de Galois, édition Tannery 1908, Papiers inédits de Galois

Étant donnée une équation algébrique, à coefficients quelconques, numériques ou littéraux, reconnaître si ses racines peuvent s'exprimer en radicaux, telle est la question dont nous offrons une solution complète.

Si maintenant vous me donnez une équation que vous aurez choisie à votre gré et que vous désiriez connaître si elle est ou non soluble par radicaux, je n'aurai rien à y faire que de vous indiquer le moyen de répondre à votre question, sans vouloir charger ni moi ni personne de le faire. En un mot les calculs sont impraticables.

Il paraîtrait d'après cela qu'il n'y a aucun fruit à tirer de la solution que nous proposons.

En effet, il en serait ainsi si la question se présentait ordinairement sous ce point de vue. Mais, la plupart du temps, dans les applications de l'analyse algébrique, on est conduit à des équations dont on connaît d'avance toutes les propriétés : propriétés au moyen desquelles il sera toujours aisé de répondre à la question par les règles que nous exposerons. Il existe, en effet, pour ces sortes d'équations, un certain ordre de considérations métaphysiques qui planent sur tous les calculs, et qui souvent les rendent inutiles. Je citerai, par exemple, les équations qui donnent la division des fonctions elliptiques et que le célèbre Abel a résolues. Ce n'est certainement pas d'après leur forme numérique que ce géomètre y est parvenu. Tout ce qui fait la beauté et à la fois la difficulté de cette théorie, c'est qu'on a sans cesse à indiquer la marche des calculs et à prévoir les résultats sans jamais pouvoir les effectuer. Je citerai encore les équations modulaires.

| Première page.|

Deux Mémoires d'Analyse pure suivis d'une dissertation sur la classification des problèmes par Évariste Galois.

| Deuxième page.|

Table des matières.

| Troisième page ([1]).|

Ampère

Cauchy

Gauss

Hachette

Jacobi

Lacroix

Legendre

Poinsot

Poisson

Sturm

Vernier

Richard

Bulletin des Sciences

École normale

École Polytechnique

Institut. [24]

| Quatrième page.|

Abel paraît être l'auteur qui s'est le plus occupé de cette théorie. On sait qu'après avoir cru trouver la résolution des équations (générales) du cinquième degré ([2]), ce géomètre a démontré l'impossibilité de cette résolution. Mais, dans le mémoire allemand publié à cet effet, l'impossibilité en question n'est prouvée que par des raisonnements relatifs au degré des équations auxiliaires et à l'époque de cette publication, il est certain qu'Abel ignorait les circonstances particulières de la résolution par radicaux. Je n'ai donc parlé de ce mémoire qu'afin de déclarer qu'il n'a aucun rapport avec ma théorie.

[*Passage biffé* : Depuis, une lettre particulière adressée par Abel à M. Legendre annonçait qu'il avait eu le bonheur de découvrir une règle pour reconnaître si une équation est [ou était] résoluble par radicaux ; mais la mort anticipée de ce géomètre ayant privé la science de ses recherches, promises dans cette lettre, il n'en était pas moins nécessaire de donner une solution de ce problème qu'il m'est bien pénible de posséder, puisque je dois cette possession à une des plus grandes pertes qu'aura (?) faites la science.

Dans tous les cas, il me serait aisé de prouver que j'ignorais même le nom d'Abel, quand j'ai présenté à l'Institut mes premières recherches sur la théorie des équations et que la solution d'Abel n'aurait pu paraître avant la mienne.]

Deux Mémoires d'Analyse pure par E. Galois

Préface.

Cecy est un livre de bonne foy.
Montaigne.

Les calculs algébriques ont d'abord été peu nécessaires au progrès des Mathématiques, les théorèmes fort simples gagnaient à peine à être traduits dans la langue de l'analyse. Ce n'est guère que depuis Euler que cette langue plus brève est devenue indispensable à la nouvelle extension que ce grand géomètre a donnée à la Science. Depuis Euler les calculs sont devenus de plus en plus nécessaires et aussi ([3]) de plus en plus difficiles à mesure qu'ils s'appliquaient à des objets de science plus avancés. Dès le commencement de ce siècle, l'algorithme avait atteint un degré de complication tel que tout progrès était devenu impossible par ce moyen, sans l'élégance que les géomètres modernes ont d'imprimer à leurs recherches et au moyen de laquelle l'esprit saisit promptement et d'un seul coup un grand nombre d'opérations.

Il est évident que l'élégance si vantée et à si juste titre n'a pas d'autre but.

Du fait bien constaté que les efforts des géomètres les plus avancés ont pour objet l'élégance on peut donc conclure avec certitude qu'il devient de plus en plus nécessaire d'embrasser plusieurs opérations à la fois, parce que l'esprit n'a plus le temps de s'arrêter aux détails.

Or je crois que les simplifications produites par l'élégance des calculs (simplifications intellectuelles, s'entend ; de matérielles il n'y en a pas) ont leur limite ; je crois que le moment arrivera où les transformations algébriques prévues par les spéculations des analystes ne trouveront plus ni le temps ni la place de se reproduire ; à tel point qu'il faudra se contenter de les avoir prévues : je ne veux pas dire qu'il n'y a plus rien de nouveau pour l'analyse sans ce secours : mais je crois qu'un jour, sans cela, tout serait épuisé.

Sauter à pieds joints sur les calculs ; grouper les opérations, les classer suivant leurs difficultés et non suivant leurs formes ; telle est, suivant moi, la mission des géomètres futurs ; telle est la voie où je suis entré dans cet ouvrage.

Il ne faut pas confondre l'opinion que j'émets ici, avec l'affectation que certaines personnes ont d'éviter en apparence toute espèce de calcul, en traduisant par des phrases fort longues ce qui s'exprime très brièvement par l'algèbre, et ajoutant ainsi à la longueur des opérations, les longueurs d'un langage qui n'est pas fait pour les exprimer. Ces personnes sont en arrière de cent ans.

Ici rien de semblable ([4]) ; ici l'on fait l'analyse de l'analyse : ici les calculs les plus élevés [les fonctions elliptiques ([5])] exécutés jusqu'à présent sont considérés comme des cas particuliers, qu'il a été utile, indispensable de traiter, mais qu'il serait funeste de ne pas abandonner pour des recherches plus larges. Il sera temps d'effectuer des calculs prévus par cette haute analyse et classés suivant leurs difficultés, mais non spécifiés dans leur forme, quand la spécialité d'une question les réclamera.

La thèse générale que j'avance ne pourra être bien comprise que quand on lira attentivement mon ouvrage qui en est une application, non que le point de vue théorique ait précédé l'application ; mais je me suis demandé, mon livre terminé, ce qui le rendait si étrange à la plupart des lecteurs, et rentrant en moi-même, j'ai cru observer celle tendance de mon esprit à éviter les calculs dans les sujets que je traitais, et qui plus est, j'ai reconnu une difficulté insurmontable à qui voudrait les effectuer généralement dans les matières que j'ai traitées.

On doit prévoir que, traitant des sujets aussi nouveaux, hasardé dans une voie aussi insolite, bien souvent des difficultés se sont présentées que je n'ai pu vaincre. Aussi, dans ces deux mémoires et surtout dans le second qui est le plus récent, trouvera-t-on souvent la formule "je ne sais pas". La classe des lecteurs dont j'ai parlé au commencement ([6]), ne manquera pas d'y trouver à rire. C'est que, malheureusement, on ne se doute pas que le livre le plus précieux du plus savant serait celui où il dirait tout ce qu'il ne sait pas, c'est qu'on ne se doute pas qu'un auteur ne nuit ([7]) jamais tant à ses lecteurs que quand il dissimule une difficulté. Quand la concurrence c'est-à-dire l'égoïsme ne régnera plus dans les sciences, quand on s'associera pour étudier, au lieu d'envoyer aux académies des paquets cachetés, on s'empressera de publier les moindres observations, pour peu qu'elles soient nouvelles, et en ajoutant "je ne sais pas le reste".

De S$^{\text{te}}$ Pélagie X$^{\text{bre}}$ 1831
Evariste Galois.

Sciences mathématiques
Discussions sur les progrès de l'analyse pure

De toutes les connaissances humaines, on sait que l'Analyse pure est la plus immatérielle, la plus éminemment logique, la seule qui n'emprunte rien aux manifestations des sens. Beaucoup en concluent qu'elle est, dans son ensemble, la plus méthodique et la mieux coordonnée. Mais c'est erreur. Prenez un livre d'Algèbre, soit didactique, soit d'invention, et vous n'y verrez qu'un amas confus de propositions dont la régularité contraste bizarrement avec le désordre du tout. Il semble que les idées coûtent déjà trop à l'auteur pour qu'il se donne la peine de les lier et que son esprit épuisé par les conceptions qui sont la base de son ouvrage, ne puisse enfanter une même pensée qui préside à leur ensemble.

Que si vous rencontrez une méthode, une liaison, une coordination, tout cela est faux et artificiel. Ce sont des divisions sans fondement, des rapprochements arbitraires, un arrangement tout de convention. Ce défaut pire que l'absence de toute méthode arrive surtout dans les ouvrages didactiques, la plupart composés par des hommes qui n'ont pas l'intelligence de la science qu'ils professent.

Tout cela étonnera fort les gens du monde, qui en général ont pris le mot Mathématique pour synonyme de régulier.

Toutefois, on sera étonné si l'on réfléchit qu'ici comme ailleurs la science est l'œuvre de l'esprit humain ([8]), qui est plutôt destiné à étudier qu'à connaître, à chercher qu'à trouver la vérité. En effet on conçoit qu'un esprit qui aurait puissance pour percevoir d'un seul coup l'ensemble des vérités mathématiques non pas à nous connues, mais toutes les vérités possibles, pourrait les ([9]) déduire régulièrement et comme machinalement de quelques principes combinés par des méthodes uniformes ; alors plus d'obstacles, plus de ces difficultés que le savant rencontre dans ses explorations ([10]). Mais il n'en est pas ainsi ; si ([11]) la tâche du savant est plus pénible et partant plus belle, la marche de la science est moins régulière : la science progresse par une série de combinaisons où le hasard ne joue pas le moindre rôle ; sa vie est brute et ressemble à celle des minéraux qui croissent par juxtaposition. Cela s'applique non seulement à la science telle qu'elle résulte des travaux d'une série de savants, mais aussi aux recherches particulières à chacun d'eux. En vain les analystes voudraient-ils se le dissimuler ([12]) : ils ne déduisent pas, ils combinent, ils comparent ([13]) ; quand ils arrivent à la vérité, c'est en heurtant de côté et d'autre qu'ils y sont tombés.

Les ouvrages didactiques doivent partager avec les ouvrages d'invention ce défaut d'une marche sûre toutes les fois que le sujet qu'ils traitent ([14]) n'est pas autrement soumis à nos lumières. Ils ne pourraient donc prendre une forme vraiment méthodique que sur un bien petit nombre de matières. Pour la leur donner, il faudrait une profonde intelligence de l'analyse et l'inutilité de l'entreprise dégoûte ceux qui pourraient en supporter la difficulté.

Il serait en dehors de la gravité de cet écrit d'entrer dans une pareille lutte avec des sentiments personnels d'indulgence ou d'animosité à l'égard des savants. L'auteur des articles évitera également ces deux écueils. Si un passé pénible le garantit du premier, un amour profond de la science, qui la lui fait respecter dans ceux qui la cultivent, assurera contre le second son impartialité.

Il est pénible dans les sciences de se borner au rôle de critique : nous ne le ferons que contraint et forcé. Quand nos forces nous le permettront, après avoir blâmé, nous indiquerons ce qui à nos yeux sera mieux. Nous aurons souvent ainsi l'occasion d'appeler l'attention du lecteur sur les idées nouvelles qui nous ont conduit dans l'étude de l'analyse. Nous nous permettrons donc de l'occuper de ces idées, dans nos premiers articles, afin de n'avoir point à y revenir.

Dans des sujets moins abstraits, dans les objets d'art, il y aurait un profond ridicule à faire précéder un ouvrage de critique par ses propres œuvres : ce serait avouer par trop naïvement ce qui est presque toujours vrai au fond, que l'on se prend pour le type auquel on rapporte les objets pour les juger : mais ici, il ne s'agit pas d'exécution, il s'agit des idées les plus abstraites qu'il soit donné à l'homme de concevoir ; ici critique et discussion deviennent synonymes, et discuter, c'est mettre aux prises ses idées avec celles des autres.

Nous exposerons donc, dans quelques articles, ce qu'il y a de plus général, de plus philosophique, dans des recherches que mille circonstances ont empêché de publier plus tôt. Nous les présenterons seules, sans complications d'exemples et de hors-d'œuvre, qui chez les analystes noyent d'ordinaire les conceptions générales. Nous les exposerons surtout avec bonne foi, indiquant sans détour la voie qui nous y a conduit, et les obstacles qui nous ont arrêté. Car nous voulons que le lecteur soit aussi instruit que nous des matières que nous aurons traitées. Quand ce but aura été rempli, nous aurons conscience d'avoir bien fait, sinon par le profit qu'en retirera directement la science, du moins par l'exemple donné, d'une bonne loi qu'on n'a pas trouvée jusqu'à ce jour.

Ici comme dans toutes les sciences chaque époque a en quelque sorte ses questions du moment : il y a des questions vivantes qui fixent à la fois les esprits les plus éclairés comme malgré eux et sans que [*illis.*] ait présidé à ce concours. Il semble souvent que les mêmes idées apparaissent à plusieurs comme une révélation. Si l'on en cherche la cause il est aisé de la trouver dans les ouvrages de ceux qui nous ont précédés où ces idées sont présentes à l'insu de leurs auteurs.

La science n'a pas tiré, jusqu'à ce jour, grand parti de cette coïncidence observée si souvent dans les recherches des savants. Une concurrence fâcheuse, une rivalité dégradante en ont été les principaux fruits. Il n'est pourtant pas difficile de reconnaître dans ce fait la preuve que les savants ne sont pas plus que d'autres faits pour l'isolement, qu'eux aussi appartiennent à leur époque et que tôt ou tard ils décupleront leurs forces par l'association. Alors que de temps épargné pour la science !

Beaucoup de questions d'un genre nouveau occupent maintenant les analystes. C'est à découvrir un lien entre ces questions que nous nous attacherons ([15]).

Tout voir, tout entendre, ne perdre aucune idée.
29 7^{bre} 1831

Sciences.
Hiérarchie. Ecoles

La hiérarchie est un moyen même pour l'inférieur.

Quiconque n'est pas envieux ou a de l'ambition a besoin d'une hiérarchie factice pour vaincre l'envie ou les obstacles.

Jusqu'à ce qu'un homme ait dit : la science c'est moi, il doit avoir un nom à opposer à ceux qu'il combat. Si non, son ambition passera pour de l'envie.

Avant d'être roi il faut être aristocrate. Machiavel.

L'intrigue est un jeu. Si l'on mérite ce qu'on brigue, on y gagne tout. Si non, on perd la partie.

On combat les professeurs par l'institut, l'institut par le passé, un passé par un autre passé.

Voici la [*illis.*] de Victor Hugo. Renaissance, moyen âge, enfin, moi.

C'est à ce besoin de combattre un homme par un autre homme, un siècle par un autre siècle, qu'on doit attribuer les réactions littéraires ou scientifiques, qui ne sont pas de longue durée, Aristote, Ptolémée, Descartes, Laplace.

[*Une ligne illisible.*]

Ce jeu use celui qui s'en sert. Un homme qui n'est pas dévoué se fait éclectique.

Un homme qui a une idée peut choisir entre, avoir, sa vie durant, une réputation colossale d'homme savant, ou bien se faire une école, se taire et laisser un grand nom dans l'avenir. Le premier cas a lieu s'il pratique son idée sans remettre, le second s'il la publie. Il y a un troisième moyen juste milieu entre les deux autres. C'est de publier et de pratiquer, alors on est ridicule.

---

1. Cette liste se trouve à droite ; à gauche est une autre liste de noms, à peu près les mêmes : tous ces noms sont biffés, sauf ceux de Sturm, de Richard et un autre que je n'ai pu déchiffrer. Parmi les noms de cette première liste, qui ne figurent pas dans la seconde, je distingue ceux de :
Blanchet, Leroy, Poullet de l'Isle, Francœur.
2. Même erreur est arrivée en 1828 à l'auteur (il avait seize ans). Ce n'est pas la seule analogie frappante entre le géomètre norvégien mort de faim, et le géomètre français condamné à vivre ou à mourir, comme on voudra, sous les verrous d'une prison.
(Note de l'éditeur.)
3. Je suis le texte de Chevalier ; il y a dans le manuscrit de Galois un mot illisible.
4. Chevalier, dans sa copie, a supprimé cette phrase : "Ici rien de semblable" et a placé cet alinéa avant le précédent. C'est ainsi qu'il est, en effet, placé dans le texte de Galois ; mais, d'une part, les mots "Ici rien de semblable" ne sont nullement biffés dans le manuscrit ; ils ont, au contraire, été ajoutés en interligne ; d'autre part, ils sont précédés d'un astérisque suivi d'un trait (assez peu distinct) dont l'extrémité indique sans doute la place où l'alinéa doit être placé ; à cette place, les mots supprimés par Chevalier ont un sens très clair ; ils n'en ont pas quand on laisse le second alinéa avant le premier : c'est évidemment la raison pour laquelle Chevalier les a supprimés.
5. On sait assez que le second Mémoire est perdu : toutefois, il subsiste un morceau (non daté) où Galois traite de la division de l'argument dans les fonctions elliptiques et dont le contenu correspond assez bien à l'indication du texte ; on peut donc supposer que ce morceau pouvait rentrer dans l'ensemble que Galois voulait publier. Il sera publié dans un second article.
6. Voici la phrase à laquelle Galois fait allusion : "Tout ce qui précède, je l'ai dit pour prouver que c'est sciemment que je m'expose à la risée des sots."
7. Texte de Chevalier ; on ne distingue que la lettre *n* ; le reste du mot est un trou.
8. Mot peu lisible, omis par Chevalier.
9. Un mot illisible, je suis le texte de Chevalier.
10. C'est le texte de Chevalier. Le passage est illisible ; je ne puis lire "rencontre" ; après "explorations" qui est douteux, il y a les mots, douteux aussi : "et qui souvent sont imaginaires" et ceux-ci, bien nets : "Mais aussi plus de rôle au savant". Chevalier a supprimé ce qui ne s'accordait pas avec son texte.
11. Chevalier a écrit : "et la. . . ".
12. Je suis le texte de Chevalier ; il y a ici, en interligne, une phrase dont le copiste n'a pas tenu compte, malgré son intérêt ; malheureusement, elle est en partie illisible : j'y distingue à peu près ce qui suit : "toute immatérielle qu'elle [*illis.*] l'analyse n'est pas plus en notre pouvoir que d'autre [*illis.*]."
13. Autre addition, en interligne, supprimée par Chevalier : "il faut l'épier, la sonder, la solliciter [la vérité]".
14. Dans le manuscrit : "qu'il traite".
15. Passage biffé.

wikisource Manuscrits de Galois, édition Tannery 1908, Ecrits mathématiques inédits de Galois

ÉCRITS MATHÉMATIQUES INÉDITS.

En dehors des quelques fragments que l'on trouvera plus loin, les écrits mathématiques de Galois que Liouville n'a pas publiés contiennent une cinquantaine de feuilles détachées ([1]) pleines de calculs qui, pour la plupart, concernent la théorie des fonctions elliptiques et remontent sans doute à un moment où Galois étudiait les Mémoires de Jacobi ([2]), quatre pages sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre, quelques calculs, avec un commencement de rédaction, sur les intégrales eulériennes ([3]), huit lignes, dont plusieurs mots sont déchirés, qui paraissent se rapporter au groupe alterné et n'avoir pas grand intérêt, un cahier dont la plupart des pages sont blanches et dont je dirai tout à l'heure deux mots, enfin une vingtaine de lignes sur le théorème d'Abel.

Ces vingt lignes peuvent être regardées comme un résumé de la célèbre "Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendantes" ([4]), qui est datée de 1829 ; elles occupent les deux tiers de la première page d'une feuille double de même format (30 x 15) que la lettre à Chevalier. On lit en haut de la page :

Théorie des fonctions de la forme $\int X\,\mathrm{d}x, X$ étant une fonction algébrique de x.

Les mots "fonctions de la...", jusqu'à la fin, sont biffés et Galois a écrit au-dessus

intégrales dont les différentielles est algébrique.

Le premier titre est presque identique à ceux qui ont été signalés précédemment (p. 17 et p. 23). dont l'un porte la mention "septembre 1831". L'énoncé du théorème d'Abel (qui n'est pas nommé) est précédé des mots "Lemme fondamental". Après la démonstration on lit

Remarque. Dans le cas où

Le reste de la page, les deux pages qui suivent sont en blanc ([5]). Ces quelques lignes sont-elles tout ce qui reste du troisième *Mémoire qui concerne les intégrales*, que Galois résume dans la lettre à Chevalier ? Ce troisième Mémoire a-t-il été rédigé ? Je rappelle quelques termes de la lettre

On pourra faire avec tout cela trois Mémoires.

Le premier est écrit, et... je le maintiens... . . . tout ce que j'ai écrit là est depuis bientôt un an dans ma tête.

Le premier est écrit semble indiquer que les autres ne sont pas rédigés. *On pourra faire avec tout cela trois Mémoires* porte à penser que Galois laissait des notes, dont on ne peut plus espérer aujourd'hui qu'elles soient retrouvées. Une seule chose est certaine, c'est que, la veille de sa mort, *il avait tout cela dans la tête.*

Le cahier est du format 20 x 15 ; on lit sur la couverture : Notes de mathématiques, quatorze pages, seulement, sont utilisées. On trouve dans ce cahier et, parfois, sur la même page, deux sortes d'écriture : pour l'une, il n'y a pas de doute, c'est bien celle de Galois, avec son allure habituelle. L'autre, beaucoup moins lisible, est droite. Je me suis demandé si Galois ne s'était pas amusé à déformer son écriture ; mais M. Paul Dupuy, après un examen attentif des deux écritures, a constaté qu'elles révélaient des habitudes très différentes : elles ne sont pas de la même personne.

Au reste, ce cahier, par son contenu, n'offre qu'un intérêt médiocre. Les pages qui sont de Galois contiennent quelques remarques sur les asymptotes des courbes algébriques et un court essai sur les principes de l'Analyse, dont je citerai quelques lignes ; elles caractérisent un état d'esprit qui résultait sans doute de l'enseignement que Galois avait reçu ; on n'oubliera pas qu'il n'était sans doute alors qu'un écolier, un écolier qui, peut-être, avait approfondi déjà des problèmes singulièrement difficiles.

Après avoir expliqué comment il juge la méthode de Lagrange, où le développement de Taylor tient le rôle essentiel, préférable à la méthode qui consiste à partir de la notion de dérivée considérée comme la limite de l'expression

$$\frac{f(X)-f(x)}{X-x},$$

limite qui ne peut être constamment nulle ou infinie, et comment le raisonnement de Lagrange ne tient pas debout, il propose de lui substituer le suivant :

Considérons d'abord une fonction $\phi(z)$ qui devienne nulle pour la valeur 0 de la variable. Je dis que l'on pourra toujours déterminer un seul nombre positif et fini n de manière que $\dfrac{\phi(z)}{z^n}$ ne soit ni nulle ni infinie, à moins que $\dfrac{\phi(z)}{z^n}$ ne soit nul quand $z = 0$, pour toute valeur finie de n.

Car si $\dfrac{\phi(z)}{z^n}$ n'est pas nul quand $z = 0$ pour toute valeur finie de n, soit m une valeur telle que $\dfrac{\phi(z)}{z^m}$ ne soit pas nul quand $z = 0$. Si $\dfrac{\phi(z)}{z^m}$ acquiert alors une valeur finie, la proposition est démontrée. Sinon $\dfrac{\phi(z)}{z^m}$ étant infini et $\phi(z)$ nul pour $z = 0$, en faisant croître n depuis $n = 0$ jusqu'à $n = m$, les valeurs de $\dfrac{\phi(z)}{z^m}$ pour $z = 0$ devront être infinies à partir d'une certaine limite. Soit p cette limite. $\dfrac{\phi(z)}{z^p}$ ne sera pas infini pour $z = 0$ mais $\dfrac{\phi(z)}{z^{p+\mu}}$ le sera, quelque petite que soit la quantité μ. Donc $\dfrac{\phi(z)}{z^\mu}$ ne saurait être nul pour $z = 0$. La proposition est donc démontrée.

De cette proposition ainsi "démontrée", Galois conclut qu'une fonction $\phi(s)$, qui ne devient pas infinie pour $z = 0$, peut se mettre sous la forme

$$\phi(z) = A + Bz^n + Cz^m + \ldots + Pz^p + z^k\Psi(z),$$

où les exposants positifs $n, m, \ldots, p, k$ vont en croissant, l'exposant k étant aussi grand qu'on veut et la fonction $\Psi(z)$ n'étant ni nulle ni infinie pour $z = 0$.

De la formule du binôme il déduit ensuite le développement de Taylor.

Quant aux fragments qui suivent, j'ai cru devoir les reproduire tels quels, avec une exactitude minutieuse, en conservant l'orthographe, la ponctuation ou l'absence de ponctuation, sans les quelques corrections qui se présentent naturellement à l'esprit. Cette minutie m'était imposée pour les quelques passages où la pensée de Galois n'était pas claire pour moi ; sur cette pensée, les fragments informes que je publie jetteront peut-être quelque lueur. Je me suis efforcé de donner au lecteur une photographie sans retouche.

J. T.

[Première feuille] ([6]).

Permutations. Nombres de lettres m.

Substitutions. Notation.

Période. Substitutions inverses. Substitutions semblables. Substitutions circulaires. Ordre. Autres substitutions.

Groupes. Groupes semblables. Notation.

Théorème I. Les Permutations communes à deux groupes forment un groupe.

Théorème II. Si un groupe est contenu dans un autre, celui-ci sera la somme d'un certain nombre de groupes semblables au premier, qui en sera dit un *diviseur*.

Théorème III. Si le nombre des permutations d'un groupe est divisible par p (p étant premier), ce groupe contiendra une substitution dont la période sera de p termes.

Réduction des groupes, dépendants ou indépendants. Groupes irréductibles.

Des groupes irréductibles en général.

Théorème. Parmi les permutations d'un groupe, il y en a toujours une où une lettre donnée occupe une place donnée, et, si l'on ne considère dans un groupe irréductible que les permutations où une même lettre occupe une même place et qu'on fasse abstraction de cette lettre, les permutations qu'on obtiendra ainsi formeront un groupe. Soit n le nombre des permutations de ce dernier mn ([7]).

Nouvelle démonstration du théorème relatif aux groupes alternes.

Théorème. Si un groupe contient une substitution complète de l'ordre m et une de l'ordre $m - 1$, il sera irréductible.

Discussion des groupes irréductibles. Groupes, primitif et non primitif. Propriété des racines ([8]).

On peut supposer que le groupe ne contienne que des substitutions paires.

Il y aura toujours un système conjugué complet de m permutations quand $m = 4n$ et $4n + 1$, un système conjugué complet de $\frac{m}{2}$ permutations quand $m = 4n + 2$.

Donc $t = m - 2$ dans le premier cas, $t = (m - 2)/2$ dans le second ([9]).

[Deuxième feuille.]

Application à la théorie des fonctions et des équations algébriques. Fonctions semblables. Combien il peut y avoir de fonctions semblables entre elles. M^r Cauchy. Groupes appartenant aux fonctions. Théorème plus général, quand $m > 4$. Quelles sont les fonctions qui n'ont que m valeurs, ou qui ne contenant que des substitutions paires, n'ont que $2m$ valeurs.

Théorème. Si une fonction de m indéterminées est donnée par une équation de degré inférieur à m dont tous les coefficients soient des fonctions symétriques permanentes ou alternées de ces indéterminées, cette fonction sera elle même symétrique, quand $m > 4$.

Théorème. Si une fonction de m indéterminées est donnée par une équation de degré m dont tous les coefficients, etc. ; cette fonction sera symétrique permanente ou alternée par rapport à toutes les lettres ou du moins par rapport $m - 1$ d'entre elles.

Théorème. Aucune équation algébrique de degré supérieur à 4 ne saurait se résoudre ni s'abaisser.

Du cas où une fonction des racines de l'équation dont le groupe est G est connue.

Théorème. Soit H le groupe d'une fonction ϕ des racines, G est

un diviseur de H, ϕ ne dépendra plus que d'une ([10]) équation du $n^{ième}$ degré.

On peut ramener à ce cas celui où on supposerait plusieurs fonctions connues.

Premier cas. Quand le groupe appartenant à la fonction connue est réductible. Cas où une seule permutation lui appartient.

2^e cas. Quand le groupe appartenant à la fonction est irréductible non primitif.

3^e cas. Quand le groupe appartenant à la fonction est primitif m étant premier ([11]).

4^e cas. Quand le groupe appartenant à la fonction est primitif et que $m = p^2$.

5^e cas. Quand le groupe est primitif $m - 1$ étant premier ou le carré d'un nombre premier ([12]).

Note sur les équations numériques.

Ce qu'on entend par l'ensemble des permutations d'une équation.

Du cas où cet ensemble constitue un groupe.

Il n'y a qu'une circonstance où nous ayons reconnu que cela doit nécessairement avoir lieu. C'est celui où toutes les racines sont des fonctions rationnelles d'une quelconque d'entre elles.

Démonstration.

C'est improprement, etc. Du reste, tout ce que nous avons dit est applicable à ce changement près. 1°. théorème. Si une équation jouit de la propriété énoncée, toute fonction des racines invariable par les $m - 1$ substitutions conjuguées sera connue, et réciproquement. 2° Théorème découlant de la réciproque précédente ([13]). Toute équation dont les racines seront des fonctions rationnelles de la première ; jouira de la même propriété. 3° Corollaire. Si a est une racine imaginaire d'une pareille équation et que fa en soit la conjuguée, fx sera en gén´ral la conjuguée d'une racine quelconque imaginaire, x.

On peut passer aisément de ce cas à celui où une racine étant connue, quelques unes en dépendent par des fonctions rationnelles. Car soient

$$x, \quad \phi_1 x, \quad \phi_2(x), \ldots$$

Ces racines, si l'on prend, etc.

Il est aisé de voir que la même méthode de décomposition s'applique au cas où dans l'ensemble des permutations d'une équation, n mêmes lettres occupent toujours n mêmes places (abstraction faite de l'ordre) quand une seule de ces lettres occupe une de ces places, et il n'est pas nécessaire pour cela que l'ensemble de ces permutations constitue un groupe.

([14])

On appelle groupe un système de permutations tel que etc. Nous représenterons cet ensemble par G.

GS est le groupe engendré lorsqu'on opère sur tout le groupe G la substitution S. Il sera dit semblable
;

Un groupe peut être fort différent d'un autre et avoir les mêmes substitutions. Ce groupe en général ne sera pas GS.

Groupe réductible est un groupe dans les permutations duquel n lettres ne sortent pas de n places fixes. Tel est le groupe

$$\begin{array}{ccc} abcde & abdec & abecd \\ bacde & badec & baecd \end{array}$$

Un groupe irréductible, etc.

Un groupe irréductible est tel qu'une lettre donnée occupe une place donnée. Car, supposons qu'une place ne puisse appartenir qu'à n lettres. Alors toute place occupée par l'une de ces lettres jouira de la même propriété. Donc etc.

Groupe irréductible non-primitif est celui où l'on a n places et n lettres telles que une des lettres ne puisse occuper une de ces places, sans que les n lettres n'occupent les n places.

On voit que les lettres se partageront en classes de n lettres telles que les n places en question ne puissent être occupées à la fois que par l'une de ces places ([15]). d'où

$$TS' = STS' = T - 1ST$$

Sur l'autre face du même fragment, on lit :

Si l'on représente les n lettres par n indices

$$1.2.3 \ldots n$$

toute permutation pourra être représentée

$$\phi 1 \quad \phi 2 \quad \phi 3 \ldots \phi n$$

ϕ étant une fonction convenablement choisie la substitution par laquelle on passe de la première perm. à l'autre sera $(k, \phi k)$, k désignant un indice quelconque.

Au lieu de représenter les lettres par des nombres on pourrait représenter les places par des nombres.

. . . .

équations ([16]). Nous nous contenterons donc d'avoir exposé les définitions indispensables pour l'intelligence de la suite et nous allons montrer la liaison qui existe entre les deux théories.

§ 2. Comment la théorie des Équations dépend de celle des Permutations.

6. Considérons une équation à coefficients quelconques et regardons comme rationnelle toute quantité qui s'exprime rationnellement au moyen des coefficients de l'équation, et même au moyen d'un certain nombre d'autres quantités irrationnelles adjointes que l'on peut supposer connues a priori.

Lorsqu'une fonction des racines ne change pas de valeur numérique par une certaine substitution opérée entre les racines, elle est dite invariable par cette substitution. On voit qu'une fonction peut très bien être invariable par telle ou telle substitution entre les racines, sans que sa forme l'indique. Ainsi, si $F(x) = 0$ est l'équation proposée, la fonction $\phi[F(a), F(b), \ldots]$, (ϕ étant une fonction quelconque, $a, b, c \ldots$ les racines) sera une fonction de ces racines invariable par toute substitution entre les racines, sans que sa forme l'indique généralement.

Or c'est une question dont il ne paraît pas qu'on ait encore la solution, de savoir si, étant donnée une fonction de plusieurs quantités numériques, on peut trouver un groupe qui contienne toutes les substitutions par lesquelles cette fonction est invariable, et qui n'en contienne pas d'autres.

Il est certain que cela a lieu pour des quantités littérales, puisqu'une fonction de plusieurs lettres invariables par deux substitutions est invariable par leur produit. Mais rien n'annonce que la même chose ait toujours lieu quand aux lettres on substitue des nombres.

On ne peut donc point traiter toutes les équations comme les équations littérales. Il faut avoir recours à des considérations fondées sur les propriétés particulières de chaque équation numérique. C'est ce que je vais tâcher de faire

Des cas particuliers des équations ([17])

Remarquons que tout ce qu'une équation numérique peut avoir de particulier, doit provenir de certaines relations entre les racines. Ces relations seront rationnelles dans le sens que nous l'avons entendu, c'est à dire qu'elles ne contiendront d'irrationnelles que les coefficients de l'équation et les quantités adjointes. De plus ces relations ne devront pas être invariables par toute substitution opérée sur les racines, sans quoi on n'aurait rien de plus que dans les équations littérales.

Ce qu'il importe donc de connaître, c'est par quelles substitutions peuvent être invariables des relations entre les racines, ou ce qui revient au même, des fonctions des racines dont la valeur numérique est déterminable rationnellement.

A ce sujet, nous allons démontrer un théorème de la dernière importance dans cette matière et dont l'énoncé suit : "*Étant donnée une équation avec un certain nombre de quantités adjointes, il existe toujours un certain groupe de permutations dont les substitutions sont telles* ([18]) que toute fonction des racines invariable par ces substitutions est rationnellement connue, et telle réciproquement qu'une fonction ne peut être rationnellement déterminable, à moins d'être invariable par ces substitutions que nous nommerons substitutions de l'équation." *(Dans le cas des équations littérales, ce groupe n'est autre chose que l'ensemble de toutes les permutations des racines, puisque les fonctions symmétriques sont seules connues).*

Pour plus de simplicité, nous supposerons dans la démonstration de notre théorème, qu'il ait été reconnu pour toutes les équations de degrés inférieurs ; ce qu'on peut toujours admettre puisqu'il est évident pour les équations du second degré.

Admettons donc la chose pour tous les degrés inférieurs à m ; pour la démontrer dans le $m^{ième}$, nous distinguerons quatre cas :

1er Cas. L'équation se décomposant en deux ou en un plus grand nombre de facteurs.

Soit $U = 0$ l'équation, $U = VT, V$ et T étant des fonctions dont les coefficients se déterminent rationnellement au moyen des coefficients de la proposée et des quantités adjointes.

Je vais faire voir que, dans l'hypothèse, on pourra trouver un groupe qui satisfasse à la condition énoncée.

Remarquons ici que dans ces sortes de questions, comme il ne s'agit que, des substitutions par lesquelles des fonctions sont invariables, si un groupe satisfait à la condition, tout groupe qui aurait les mêmes substitutions y satisfera aussi. Il convient donc de partir toujours d'une permutation arbitraire, mais fixe, afin de déterminer les groupes que l'on aura à considérer. De cette manière, on évitera toute ambiguïté.

Cela posé, dans le cas actuel, il est clair que si l'on adjoignait à l'équation $U = 0$, toutes les racines de l'équation $V = 0$, l'équation $U = 0$ se décomposerait en facteurs dont l'un serait $T = 0$, et les autres seraient les facteurs simples de V.

Soit H le groupe que l'on obtient en opérant sur une permutation arbitraire A des racines de l'équation $U = 0$, toutes les substitutions qui sont relatives à l'équation $T = 0$ quand on lui adjoint les racines de $V = 0$.

Soit K le groupe que l'on obtient en opérant sur toutes les substitutions qui sont relatives à $V = 0$ quand on ne lui adjoint que les quantités adjointes primitivement à la proposée.

Combinez en tous sens toutes les substitutions du groupe H avec celles du groupe K. Vous obtiendrez un groupe réductible que je dis jouir de la condition exigée relativement à la question proposée.

En effet toute fonction invariable par les substitutions du groupe K ([19] [20])

Soit donc $\phi(H)$ une certaine fonction invariable par les substitutions du groupe H et non par celles du groupe G. On aura donc

$$\phi(H) = f(r)$$

la fonction y ne contenant dans son expression que les quantités antérieurement connues.

Éliminons algébriquement r entre les équations

$$r^p = A \quad f(r) = z$$

On aura une équation irréductible du $p^{ième}$ degré en z. (Sinon z serait fonction de r^p : ce qui est contre l'hypothèse). Maintenant soit S une des substitutions du groupe G qui ne lui soient pas communes à H. On voit que $\phi(HS)$ sera encore racine de l'équation ci-dessus en z, puisque les coefficients de cette équation sont invariables par la substitution S.

On aura donc

$$\phi(HS) = f(\alpha r)$$

α étant une des racines de l'unité.

Ces deux équations

$$\phi(H) = f(r) \quad \phi(HS) = f(\alpha r)$$

donneront par l'élimination de r une relation entre

$$\phi(H) \quad \phi(HS) \quad \text{et } \alpha$$

indépendante de r, et la même relation aura par conséquent lieu entre

$$1 + \phi(H) \quad \text{et} \quad \phi(HS^2)$$

Donc : comme

$$\phi(HS) = f(\alpha r)$$

on en déduit

$$\phi(HS^2) = f(\alpha^2 r)$$

et ainsi de suite, jusqu'à

$$\phi(HS^p) = f(r) = \phi(H)$$

Ainsi la connaissance de la seule quantité r, donne à la fois toutes les fonctions correspondantes aux groupes

$$H, HS, HS^2, ...$$

la somme de ces groupes est évidemment G, puisque toute

Étant donnée ([21]) une équation avec tant de quantités adjointes que l'on voudra, on peut toujours trouver quelque fonction des racines qui soit numériquement invariable par toutes les substitutions d'un groupe donné et ne le soit pas par d'autres substitutions.

Si le groupe d'une équation se décompose en n groupes semblables H, HS, HS ([22]), et qu'une fonction $\phi(H)$ soit invariable par toutes les substitutions du groupe H par aucune autre substitution du groupe G, cette fonction est racine d'une équation irréductible du $n^{ième}$ degré dont les autres racines sont $\phi(HS)$, ...

Note ([23]).

On appelle équations non-primitives les équations qui, étant, par exemple du degré mn se décomposent en m facteurs du degré n au moyen d'une seule équation du degré m. Ce sont les Equations de M$^{\text{r}}$ Gauss. Les équations primitives sont celles qui ne jouissent pas d'une pareille simplification. Je suis, à l'égard des Equations primitives, parvenu aux résultats suivants :

1° Pour qu'une équation primitive de degré m soit résoluble par radicaux, il faut que $m = p^\nu, p$ étant un nombre premier

2° Si l'on excepte le cas de $m = 9$ et $m = p^p$, l'équation devra être telle que deux quelconques de ses racines étant connues, les autres s'en déduisent rationnellement.

3° Dans le cas de $m = p^p$, deux des racines étant connues, les autres doivent s'en déduire du moins par un seul radical du degré p.

4° Enfin dans le cas de $m = 9$, l'équation doit être du genre de celles qui déterminent la trisection des fonctions Elliptiques.

La démonstration de ces propositions est fondée sur la théorie des permutations. ([24])

Addition au mémoire sur la résolution des équations.

Lemme I. Soit un groupe G de $mt.n$ permutations, qui se décompose en n groupes semblables à H. Supposons que le groupe H se décompose en t groupes de m permutations, et semblables à K.

Si, parmi toutes les substitutions du groupe G, celles du groupe H sont les seules qui puissent transformer l'une dans l'autre quelques substitutions du groupe K, on aura $n \equiv 1 \pmod m$ ou $tn \equiv t \pmod m$.

Lemme II. Si μ est un nombre premier, et p un entier quelconque on aura

$$(x-p)(x-p^2)(x-p^3)\dots(x-p^{\mu-1}) \equiv \frac{x^\mu - 1}{x-1} \left(\text{mod } \frac{p^\mu - 1}{p-1}\right).$$

Ces deux lemmes permettent de voir dans quel cas un groupe primitif de degré p^ν (où p est premier) peut appartenir à une équation résoluble par radicaux.

En effet, appelons G un groupe qui contient toutes les substitutions linéaires possibles par les $\dfrac{p^\nu - 1}{p-1}$ lettres. (Voyez le mémoire cité.) Soit, s'il est possible, L un groupe qui divise G et qui se partage lui-même en p groupes semblables à K, K ne comprenant pas deux permutations où une lettre occupe la même place. On peut prouver 1° que s'il y a dans le groupe G et hors du groupe L, quelque substitution S qui transforme l'une dans l'autre quelques substitutions du groupe K, cette substitution sera de r termes, r étant un diviseur de $p - 1$.

D'après cela, comme le nombre de permutations du groupe G est $\dfrac{p^\nu - 1}{p-1}.(p^\nu - p^{\nu-1})(p^\nu - p^{\nu-2})\dots(p^\nu - p^2)(p^\nu - p)$

d'après le lemme I, on devra avoir ([25])

$$(p^\nu - p^{\nu-1})(p^\nu - p^{\nu-2})\dots(p^\nu - p^2)(p^\nu - p) \equiv p^k r \left(mod \ \frac{p^\nu - 1}{p-1}\right)$$

D'où l'on voit que ν doit être un nombre premier ([26]). (Lemme II)

$$pr \equiv \nu \left(mod \ \frac{p^\nu - 1}{p-1}\right)$$

On en déduit quand $\nu > 2 \quad pr = \mu$, savoir $p = \nu$, puisque p et μ sont premiers.

Ainsi, le théorème que j'avais énoncé dans mon mémoire sera vrai dans tout autre cas que dans celui où p serait élevé à la puissance p.

Toujours devra-t-on avoir $r = 1$, et $L = H$. Ainsi même dans le $p^{p^{ième}}$ degré le groupe de l'équation réduite du degré $\frac{p^p-1}{p-1}$ = devra être de $\frac{p^p-1}{p-1}p$ permutations. La règle est donc encore fort simple dans ce cas.

il faut comme on voit 1° que $\nu = 1$; 2° que le groupe de la réduite soit de $\frac{p^p-1}{p-1}p =$ permutations

([27])

Dans un mémoire sur la théorie des Equations, j'ai fait voir comment on peut résoudre une équation algébrique de degré premier m, dont les racines sont $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, quand on suppose connue la valeur d'une fonction des racines qui ne demeure invariable que par les substitutions de la forme (x_h, x_{ak+b}). Or il arrive, par un hasard que nous n'avions pas prévu, que la Méthode proposée dans ce mémoire s'applique avec succès à la division d'une fonction elliptique de première classe en un nombre premier de parties égales. Nous pourrions, à la rigueur, nous contenter de donner cette division, et le problème de la section des fonctions de première classe pourrait être considéré comme résolu.

Mais, afin de rendre cette solution plus générale, nous nous proposerons de diviser une fonction elliptique de première classe en m parties égales, m étant $= p^n$ et p premier.

Pour cela nous étendons d'abord la méthode exposée dans le mémoire cité, au cas où le degré de l'équation serait une puissance de nombre premier. Nous supposerons toujours que les racines soient $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, et que l'on connaisse la valeur d'une fonction de ces racines qui ne demeure invariable que pour des substitutions de la forme $(k, ak + b)$.

Dans cette expression, k et $ak + b$ signifieront les restes minima de ces quantités par rapport à m. Parmi les substitutions de cette forme, que, pour abréger, nous appelerons substitutions linéaires, il est clair que l'on ne peut admettre que celles où a est premier avec m, sans quoi une même $ak+b$ remplacerait à la fois plusieurs k.

Cela posé, passons à la resolution de la classe d'équations indiquée.

§ 1. *Résolution de l'équation algébrique de degré p^n en y supposant connue la valeur d'une fonction qui n'est invariable que par des substitutions linéaires.*

La congruence $k = ak+b$ n'étant pas soluble pour plus d'une seule valeur, on voit clairement que la fonction qu'on suppose connue n'est invariable par aucune substitution dans laquelle deux lettres garderaient un même rang.

Si donc, mutatis mutandis, on applique à ce cas les raisonnements employés dans le mémoire cité, on vérifiera l'énoncé de la proposition qui suit :

"Étant supposée connue la valeur de la fonction en question, une racine s'exprimera toujours au moyen de deux autres, et l'égalité qu'on obtiendra ainsi sera invariable par les substitutions telles que $(k, ak+b)$."

Soit donc $x_2 = f(x_1, x_0)$ on en déduira en général,

$$x_{2a+b} = f(x_{a+b}, x_b),$$

équation qui, appliquée de toutes manières, donnera l'expression d'une quelconque des racines de deux autres quelconques, si l'on a soin d'y substituer successivement les expressions des racines qui entrent dans cette équation.

Cela posé, prennons une fonction symétrique Φ des racines $x_0, x_p, x_{2p}, x_{3p}, \ldots, x_{(p^{n-1}-1)p}$; il vient

$$\Phi(x_0, x_p, x_{2p}, \ldots) = \Phi_0$$

$$\Phi(x_1, x_{p+1}, x_{2p+1}, \ldots) = \Phi_1$$

$$\Phi(x_2, x_{p+2}, x_{2p+2}, \ldots) = \Phi_2$$

$$-------$$

$$\Phi(x_{p-1}, x_{2p-1}, \ldots) = \Phi_{p-1}$$

et supposons qu'en général $\Phi_{k+p} = \Phi_{p-1}$ Toute fonction des quantités Φ, qui sera invariable par les substitutions linéaires de ces quantités, sera évidemment une fonction invariable par les substitutions linéaires de $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$. Ainsi l'on connaitra à priori toute fonction des quantités, $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_{p-1}$, invariable par les substitutions linéaires de ces quantités. On pourra donc 1° former l'équation dont ces quantités sont racines (puisque toute fonction symmétrique est à plus forte raison invariable par les substitutions) ; 2° résoudre cette équation.

Il suit de là, qu'on pourra toujours, au moyen d'une équation de degré p, algébriquement soluble, diviser l'équation proposée en facteurs dont les racines seront respectivement

$$x_0, x_p, x_{2p}, x_{3p}, \ldots$$

$$x_1, x_{p+1}, x_{2p+1}, x_{3p+1}, \ldots$$

$$- - - - - - - - -$$

Comme dans chaque facteur on aura l'expression d'une racine au moyen de deux autres, par exemple, dans le premier,

$$f(x_p, x_0) = x_{2p}$$

et que cette expression sera invariable par toute substitution linéaire, on voit que chaque facteur pourra se traiter comme l'équation donnée, et que le problème, s'abaissant successivement, sera enfin résolu.

On peut en conséquence regarder comme solubles les équations dans lesquelles on connaîtrait la valeur d'une fonction des racines qui ne serait invariable que par des substitutions linéaires, quand le degré de l'équation est une puissance de nombre premier.

Nous pouvons donc passer à la solution du problème général de la section des transcendantes de première classe, puisque, toute fraction étant la somme de fractions dont les dénominateurs sont des puissances de nombres premiers, il suffit d'apprendre à diviser ces transcendantes en p^n parties égales.

§ 2. *Division des transcendantes de première espèce en $m = p^n$ parties égales.*

Nous déterminerons chaque transcendante par le sinus de son amplitude. On pourrait de la même manière prendre le cosinus ou la tangente, et il n'y aurait rien à changer à ce que nous allons dire.

Nous désignerons par (x, y) le sinus de la transcendante somme des transcendantes dont les sinus sont x et y. Si x est le sinus d'une transcendante, $(x)^k$ désignera celui d'une transcendante k fois plus grande.

Il est clair que $(x, -y)$ sera le sinus de la différence des transcendantes qui ont pour sinus, d'après la notation indiquée pour les sommes.

Cela posé, nous commencerons par une remarque sur la nature des quantités qui satisfont à l'équation $(x)^m = 0$.

Si l'on désigne par p l'une de ses racines, il est clair que $(p)^k$ en sera une autre. L'on aura donc une suite de racines exprimée par $p, (p)^2, (p)^3, \ldots, (p)^{m-1}$. Le nombre des racines étant $> m$, soit q une des racines qui ne sont pas comprises dans cette suite, $(q)^l$ sera une autre racine différente de q et des premières. Car, si l'on avait $(p)^k = (q)^t$ on en déduirait $q = (q)^g, g$ étant un nombre entier.

Prenant donc les deux suites $p, (p)^2, \ldots$ et $q, (q)^2, \ldots$ on trouvera pour la formule générale des racines de l'équation $(x)^m = 0$, cette expression

$$((p)^k, (q)^l)$$

Cela posé, supposons que l'on donne à résoudre l'équation $(x)^m = \sin A$, m étant impair et toujours de la forme p^n. Si x est une des racines, il est clair que toutes les autres seront

$$(x, (p)^k, (q)^l)$$

Posons donc en général

$$(x, (p)^k, (q)^l) = x_{k,l}$$

en faisant $x = x_{00}$ nous en déduirons généralement

$$(x_{2a+b,2c+d} - x_{a+b,c+d}) = (x_{a+b,c+d} - x_{b,d})$$

d'où

$$(x_{2a+b,2c+d} = ((x_{a+b,c+d})^2, x_{b,d})$$

Or il est aisé de tirer de cette égalité une expression rationnelle de $x_{2a+b,2c+d}$ en fonction de $x_{a+b,c+d}$ et de $x_{b,d}$. Car si ϕ est l'arc correspondant à l'un quelconque des sinus qui satisfont à l'équation $(x)^m = \sin A$ pour avoir $\cos\phi$ en fonction de $\sin\phi$, il suffit de chercher le plus grand commun diviseur entre les équations $x^2 + y^2 = 1$ et $f(y) = \cos A, f(y)$ étant le cosinus de la transcendante m fois plus grande que celle dont le cosinus est y. On trouverait de même $\Delta\varphi$ en fonction rationnelle de sin φ.

Ou pourra donc, par les formules connues, exprimer

$$x_{2a+b,2c+d} = f(x_{a+b,c+d}, x_{b,d})$$

en fonction rationnelle de $x_{a+b,c+d}$ et de $x_{b,d}$

Ce principe posé, démontrons la proposition suivante :

"Toute fonction rationnelle de $x_{0,0}, x_{1,0}, x_{0,1}, \ldots$ invariable par les substitutions de la forme $(x_{k,l}, x_{ak+b,cl+d})$ immédiatement connue."

En effet, on pourra d'abord rendre cette fonction fonction de $x_{0,0}, x_{1,0}, x_{0,1}$ seuls, par l'élimination des autres racines. Cette fonction ne changerait pas de valeur si à la place de $x_{0,0}, x_{1,0}, x_{0,1}, \ldots$ on mettait $x_{0,0}, x_{1,0}, x_{k,l}$, k n'étant pas nul.

Or, comme toute racine de la forme $x_{0,1}$ s'exprime en fonction rationnelle de $x_{0,0}$, et $x_{0,l}$, il s'ensuit que toute fonction symmétrique des racines dans lesquelles le premier indice n'est pas nul sera connue en fonction rationnelle et entière de $x_{0,0}$ et de $x_{0,l}$. Donc la fonction que nous considérions tout à l'heure ne variant pas quand on met pour $x_{1,0}$ l'une quelconque des racines dont le premier indice n'est pas nul, cette fonction sera une fonction de $x_{0,0}$, et de $x_{0,l}$, seuls. On éliminera encore $x_{0,1}$ de cette fonction qui deviendra fonction de $x_{0,0}$ et enfin une quantité connue.

Le principe est donc démontré.

Cela posé soit F une fonction symmétrique de certaines racines de l'équation proposée. Posons

$$F(x_{0,0}, x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots) = y_0$$
$$F(x_{1,0}, x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots) = y_1$$
$$F(x_{2,0}, x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots) = y_2$$

Prenons une fonction de $y_0, y_1, y_2 \ldots$ invariable par les substitutions linéaires de ces quantités. Il est clair que cette fonction sera une fonction des racines x invariable par toute substitution telle que ([28]) $(x_{k,l,ak+b,ck+d})$. Cette fonction sera donc connue. On pourra donc, par la méthode que j'ai indiquée, trouver les valeurs de $y_0, y_1, y_2 \ldots$ et par conséquent décomposer l'équation proposée en facteurs dont l'un ait pour racines $x_{0,0}, x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots$

On trouverait de même un facteur de la même équation dont les racines seraient $x_{0,0}, x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots$. On pourra donc en cherchant le plus grand commun diviseur de ces deux facteurs avoir $x_{0,0}$, qui est l'une des solutions cherchées. Il en serait de même des autres racines. ([29])

Note 1. sur l'intégration des équations linéaires.

Soit l'équation linéaire à coefficients variables

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \ldots + S\frac{dy}{dx} + Ty = V$$

Pour l'intégrer supposons que nous connaissions n solutions

$$y = u_1 \quad , = u, \ldots, = u_n$$

de cette équation privée de second membre. La solution complète

$$y = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \ldots + \alpha_n u_n$$

qui convient à l'équation privée de second membre, satisfera encore quand on supposera ce second membre, si au lieu de regarder $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ comme constantes, on les considère comme déterminées par les équations suivantes en $\dfrac{dx_1}{dx}, \dfrac{dx_2}{dx}, \ldots \dfrac{dx_n}{dx}$

$$(1)\begin{cases} u_1\frac{d\alpha_1}{dx}+u_2\frac{d\alpha_2}{dx}+u_3\frac{d\alpha_3}{dx}+\ldots+u_n\frac{d\alpha_n}{dx}=0\\ \frac{du_1}{dx}\frac{d\alpha_1}{dx}+\frac{du_2}{dx}\frac{d\alpha_2}{dx}+\frac{du_3}{dx}\frac{d\alpha_3}{dx}+\ldots+\frac{du_n}{dx}\frac{d\alpha_n}{dx}=0\\ \frac{d^2u_1}{dx^2}\frac{d\alpha_1}{dx}+\frac{d^2u_2}{dx^2}\frac{d\alpha_1}{dx}+\frac{d^2u_3}{dx^2}\frac{d\alpha_3}{dx}+\ldots+\frac{d^2u_n}{dx^2}\frac{d\alpha_n}{dx}\\ \ldots\\ \frac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}}\frac{d\alpha_1}{dx}+\frac{d^{n-1}u_2}{dx^{n-1}}\frac{d\alpha_1}{dx}+\frac{d^{n-1}u_3}{dx^{n-1}}\frac{d\alpha_3}{dx}+\ldots+\frac{d^2u_n}{dx^{n-1}}\frac{d\alpha_n}{dx}=V \end{cases}$$

Il importe d'abord de reconnaître si le dénominateur commun aux valeurs tirées de ces équations peut ou non être nul.

Pour cela j'observe que ce dénominateur est le même que celui des n équations suivantes résolues par rapport à $PQ\ldots ST$

$$(2)\quad\begin{cases} \frac{d^nu_1}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}u_1}{dx^{n-2}}+\ldots+S\frac{du_1}{dx}+Tu_1=0\\ \frac{d^nu_2}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}u_2}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}u_2}{dx^{n-2}}+\ldots+S\frac{du_2}{dx}+Tu_2=0\\ \frac{d^nu_3}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}u_3}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}u_3}{dx^{n-2}}+\ldots+S\frac{du_3}{dx}+Tu_3=0\\ \ldots\\ \frac{d^nu_n}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}u_n}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}u_n}{dx^{n-2}}+\ldots+S\frac{du_n}{dx}+Tu_n=0 \end{cases}$$

Or ces équations doivent être parfaitement déterminées, puisque la forme d'une équation différentielle dépend uniquement de celle de l'équation intégrale.

Donc le dénominateur en question n'est jamais nul.

Mais on peut de plus le calculer d'avance. Soit D le dénominateur. Il est aisé de voir que l'on aura

$$\frac{dD}{dx}=D_n+D_{n-1}+D_{n-2}+D_{n-3}+\ldots+D_1$$

$D1$ étant ce que devient D quand on y substitue partout $\dfrac{d^nu}{dx^n}$ à la place de $\dfrac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$, $Dn-1$ ce que devient D quand on y met $\dfrac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$ au lieu de $\dfrac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}$ et ainsi de suite enfin $D1$ ce que devient D par la substitution de $\dfrac{du}{dx}$ la place de u

Et comme toutes les parties sont nulles excepté D_n il reste

$$\frac{dD}{dx}=D_n$$

Mais on a d'ailleurs

$$P=-\frac{D_n}{D}$$

Puisque $-Dn$ est le numérateur de l'expression de P tirée de (2).

Donc $D=e^{-\int Pdx}$ valeur cherchée du dénominateur.

On pourrait de cette dernière formule déduire celle que nous avons trouvée plus haut, en considérant une équation linéaire de l'ordre n, comme remplaçant n équations simultanées seulement du premier ordre. Quant à la détermination des numérateurs des quantités inconnues, et à l'examen du cas où l'on n'aurait qu'une partie des solutions de la question, nous n'entrerons pas dans ces détails auxquels le lecteur suppléera au moyen des principes émis plus haut.

RECHERCHE SUR LES SURFACES DU 2^d DEGRÉ ([30]).

Problème ([31]). Étant données dans un parallélépipède les trois arêtes m, m', m", et les angles $\theta, \theta', \theta''$, que font entre elles respectivement m' et m", m et m", trouver l'expression des angles de la diagonale avec les arêtes.

Soit $m = OM, m' = OM', m" = OM"$. Si l'on cherche l'angle POM que la diagonale OP forme avec OM, on aura dans le triangle OPM

$$\cos POM = \frac{m^2 + OP^2 - \overline{PM}^2}{2m.OP}$$

Mais on a par la géométrie

$$\overline{OP}^2 = m^2 + m'^2 + 2m'm'' \cos\theta + 2mm'' \cos\theta' + 2mm' \cos\theta'$$

$$\overline{PM}^2 = m'^2 + m''^2 + 2m'm'' \cos\theta$$

d'où l'on tire

$$m^2 + \overline{OP}^2 - \overline{PM}^2 = 2m(m + m'' \cos\theta' + m'' \cos\theta'')$$

et enfin

$$\cos POM = \frac{m + m'' \cos\theta' + m' \cos\theta''}{OP}$$

On trouvera de même pour les cosinus des angles $M'OP$ et $M"OP$

$$\frac{m + m'' \cos\theta + m \cos\theta''}{OP} \qquad \text{et} \qquad \frac{m'' + m' \cos\theta + m \cos\theta'}{OP}$$

Le problème est donc résolu.

Problème. Trouver pour des axes quelconques la condition de perpendicularité d'une droite et d'un plan.

Prenons à partir de l'origine et suivant certaine direction $OP = 1$. Appelons $m, m', m"$ les coordonnées du point P. Les équations de toute droite parallèle à OP, seront de la forme

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{m'} = \frac{z-c}{m''}$$

Les quantités $m, m', m"$ étant liées par la relation

$$1 = m^2 + m'^2 + m''^2 + 2m'm'' \cos\theta + 2mm' \cos\theta''$$

Cherchons de même l'équation d'un plan perpendiculaire à OP.

Il est évident que si on appelé x, y, z les coordonnées de ce plan, et que l'on projette orthogonalement sur OP ces coordonnées la somme des projections devra être constante. Or on connaît, par le problème précédent, les cosinus des angles de la droite OP avec les axes. L'équation du plan sera donc.

$$\begin{aligned}(m + m' \cos\theta'' + m'' \cos\theta')x + (m' + m \cos\theta'' + m'' \cos\theta)y \\ + (m'' + m \cos\theta' + m' \cos\theta)z + p = 0\end{aligned}$$

Et il est remarquable que le premier membre de cette équation exprime aussi la distance à ce plan d'un point quelconque dont les coordonnées sont x, y, z. Ce qui est évident puisque ce premier membre n'est autre chose que la somme des projections des coordonnées d'un point sur la droite OP, augmentée de la distance du plan à l'origine.

Cela posé, soit l'équation d'une surface du second degré rapportée à des axes obliques

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = \phi(x, y, z) = 0$$

Lorsqu'on cherche l'équation du plan qui divise également toutes les cordes parallèles à une droite donnée, on substitue l'équation $\phi(x, y, z) = 0$ à la place de x, y, z,

$$x + \rho m \quad y + \rho m' \quad z + \rho m''$$

et les racines de l'équation en ρ qu'on obtient ainsi, expriment les distances du point (x, y, z) aux deux points où une corde parallèle à la droite $\dfrac{x}{m} = \dfrac{y}{m'} = \dfrac{z}{m''}$ menée par le point (x, y, z) coupe la surface du second degré. Ces deux distances devant être égales et de signe contraire, il suffira de faire dans l'équation en ρ le second terme nul pour avoir l'équation du plan diamétral.

Or l'équation en ρ est en faisant

$$M = \phi(m, m', m'')$$

$$\begin{aligned} MP = (Am + B''m' + B'm'')x \quad &+(A'm' + b''m + Bm'')y \\ &+(A''m'' + B'm + Bm')z + Cm + C'm' + C''m'' \end{aligned}$$

de la forme

$$\rho^2 + 2P\rho + Q = 0$$

Si l'on cherche l'équation d'un plan principal, il faudra de plus que le plan représenté par $P = 0$ soit perpendiculaire à la droite $\dfrac{x}{m} = \dfrac{y}{m'} = \dfrac{z}{m''}$ et par conséquent que son équation soit de la forme

$$\begin{aligned} (m + m'\cos\theta'' + m''\cos\theta')x + (m' + m\,\cos\theta'' + m''\cos\theta)y \\ + (m'' + m\,\cos\theta' + m''\cos\theta)z + p = S = 0 \end{aligned}$$

Il faudra donc que les coefficients de MP et ceux de S soient proportionnels et que l'on ait

$$\frac{MP}{S} = \text{const} = s$$

La quantité étant telle que l'on ait

$$\begin{aligned} (A - s)m + (B'' - s\,\cos\theta'')m' + (B' - s\,\cos\theta')m'' = 0 \\ (A' - s)m' + (B'' - s\,\cos\theta'')m + (B - s\,\cos\theta)m'' = 0 \\ (A'' - s)m'' + (B' - s\,\cos\theta')m + (B - s\,\cos\theta)m'' = 0 \end{aligned}$$

On en déduit l'équation en s,

$$\begin{aligned} 0 =&(A - s)(B - s\,\cos\theta)^2 + (A' - s)(B' - s\,\cos\theta')^2 + (A'' - s)(B'' - s\,\cos\theta'')^2 \\ &- (A - s)(A' - s)(A'' - s) - 2(B - s\,\cos\theta)(B' - s\,\cos\theta'') \end{aligned}$$

qui est du troisième degré parce qu'en effet il existe trois plans principaux.

Mais la quantité s et l'équation qui la détermine jouissent d'une propriété fort remarquable que personne jusqu'ici ne paraît avoir observée.

Supposons que l'on transforme les coordonnées en exprimant les anciennes coordonnées d'un point en fonction des nouvelles. Si on substitue les valeurs de x, y, z en x', y', z' dans la fonction $\varphi(x, y, z)$ on obtient une fonction $\varphi'(x', y', z')$ d'une autre forme, et qui est telle que dans la fonction φ on substitue les anciennes coordonnées d'un point déterminé, et dans la fonction φ' les nouvelles, les deux résultats ainsi obtenus sont égaux.

Cela posé reprenons l'expression de s, $s = \dfrac{MP}{S}$ la quantité M étant le résultat de la substitution des coordonnées du point pris sur une droite fixe à une distance $= 1$ de l'origine c'est à dire d'un point fixe, dans l'équation de la surface, ne variera pas quand on transformera les coordonnées.

La quantité P exprimant la demi-somme des distances d'un point (x, y, z) à la surface distances comptées suivant une droite fixe, est aussi invariable par la transformation des coordonnées. Enfin la quantité S exprimant la distance d'un point à un plan déterminé, ne saurait non plus varier.

La quantité s est donc elle même invariable pour un même plan principal, et l'équation qui donne ses trois valeurs aura des coefficients invariables. Or en la développant, on a

$$\begin{aligned} &(1 - \cos^2\theta - \cos^2\theta' - \cos^2\theta'' + 2\cos\theta\cos\theta\cos\theta'')s^3 \\ &- s^2[A\,\sin^2\theta + A'\,\sin^2\theta' + A''\sin^2\theta'' + 2b(\cos\theta'\,\cos\theta'' - \cos\theta) \\ &+ 2B'(\cos\theta\,\cos\theta'' - \cos\theta') + 2B''(\cos\theta\,\cos\theta' - cos\theta'')] \\ &+ s(A'A'' + AA'' + AA' - 2AB\,\cos\theta 2A'B'\cos\theta' - 2A''B''\cos\theta'' \\ &- B^2 - B'^2 - B''^2 + 2B'B''\cos\theta \\ &+ 2BB''\cos\theta' + 2BB'\cos\theta'') + AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = 0 \end{aligned}$$

Divisant tous les coefficients par le premier ou par le dernier on aura trois fonctions des constantes qui entrent dans l'équation de la surface, invariables par la transformation des coordonnées. Si l'on suppose cos θ, cos θ' et cos θ" nuls on aura pour tous les systèmes d'axes où cela peut être c'est à dire d'axes rectangulaires,les équations

$$A + A' + A'' = \text{const}$$

$$B^2 + B'^2 + B''^2 - A'A'' - AA''AA' = \text{const}$$

$$AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = \text{const}$$

Également si l'on suppose encore dans l'équation en s, B, B', B" nuls, c'est à dire qu'on suppose la surface rapportée à des diamètres conjugués, en divisant toute l'équation par le dernier terme, on trouvera pour tous les systèmes semblables

$$\frac{1 - \cos^2\theta - \cos^2\theta' - \cos^2\theta'' + 2\cos\theta\cos\theta'\cos\theta''}{AA'A''} = \text{const}$$

$$\frac{\sin^2\theta}{A'A''} + \frac{\sin^2\theta'}{AA''} + \frac{\sin^2\theta''}{AA'} = \text{const}$$

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{A'} + \frac{1}{A''} = \text{const}$$

Et comme $\frac{1}{A}, \frac{1}{A'}, \frac{1}{A''}$ expriment dans ce cas les carrés des diamètres, on retrouve ici les théorèmes connus.

FIN.

---

1. Trois de ces feuilles comportent du texte ; une se rapporte à la théorie de la transformation, une autre au théorème d'addition pour la fonction sin *am*, déduit de la formule fondamentale de trigonométrie sphérique, la troisième au théorème d'addition pour la fonction $\Pi(u, a)$.
2. Les papiers que m'a remis Mme de Blignières contiennent un brouillon, couvert de ratures et de corrections, qui est de la main de Liouville, et qui porte en tête : Lettre d'Alfred Galois à M. Jacobi, 17 novembre 1847. Voici cette lettre :
   Monsieur,
   J'ai l'honneur de vous envoyer, en vous priant d'en agréer l'hommage, un exemplaire de la première Partie des Œuvres mathématiques de mon frère. Il y a près d'un an qu'elle a paru dans le Journal de M. Liouville, et, si je ne vous l'ai pas adressée plus tôt, c'est que, sans cesse, j'espérais pouvoir vous faire remettre d'un jour à l'autre l'Ouvrage complet, dont la publication s'est trouvée retardée par diverses circonstances. Au reste, cette première Partie renferme ce que mon pauvre Évariste a laissé de plus important et nous n'avons guère à y ajouter que quelques fragments arrachés au désordre de ses papiers. Ainsi on n'a rien retrouvé concernant la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes ; on voit seulement qu'il s'était livré la plume à la main à une étude approfondie de vos Ouvrages. Quant à la théorie des équations, M. Liouville et d'autres géomètres que j'ai consultés affirment que son Mémoire, si durement repoussé par M. Poisson, contient les bases d'une doctrine très féconde et une première application importante de cette doctrine. "Ce travail, me disent-ils, assure pour toujours une place à votre frère dans l'histoire des Mathématiques." Malheureusement étranger à ces matières, j'écoute avec plaisir de telles paroles : si votre précieux suffrage, qu'Évariste aurait ambitionné par-dessus tout, venait les confirmer, ce serait pour ma mère et pour moi une bien grande consolation ; il deviendrait pour notre Évariste un gage d'immortalité, et je croirais que mon frère n'est pas entré tout entier dans la tombe. Etc., etc.
3. En posant

   $$[m, n] = \int_0^1 (1 - x)^{m-1} x^{m-1}\, \mathrm{d}x,$$

   Galois part de la relation $[m + 1, n] = \frac{m}{m + n}[m, n]$;
   il en déduit, en désignant par p un nombre entier positif quelconque,

   $$[m, n] = \frac{[p, m]}{[p, m + n]}[m + p, n],$$

   puis

   $$[m, n] = \lim_{p\to\infty} \frac{[p, m] \times [p, n]}{[p, m + n]};$$

remplaçant $[p,n]$ par $\dfrac{1}{p^n}\displaystyle\int_0^p (1-\int xp)^{\mu-1}x^{n-1}\,\mathrm{d}x$, et en passant à la limite, il obtient $[m,n]=\dfrac{\Gamma m\Gamma n}{\Gamma(m+n)}$.
Il établit ensuite la relation

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}-1}{x-1}\,\mathrm{d}x=\phi(n)-\phi(1),$$

où

$$\phi(n)=\frac{d\log\Gamma(n)}{dn},$$

en partant de ce que l'on a, pour $m=1$,

$$\frac{d\log[m,n]}{dm}=\frac{\int_0^1\log(1-x)x^{n-1}\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 x^{n-1}\,\mathrm{d}x}=\int_0^1\log(1-x)nx^{n-1}\,\mathrm{d}x,$$

d'où, en intégrant le dernier membre par parties,

$$\phi(1)-\phi(n+1)=-\int_0^1\frac{x^n-1}{x-1}dx.$$

4. Œuvres d'Abel, édition Sylow, t. I, p. 515.
5. La feuille a été pliée ; sur la moitié de la quatrième page, on trouve quelques calculs relatifs à l'intégrale

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(x^2-2\alpha x+\gamma^2)(x^2-2\beta x+\gamma^2)}}$$

où Galois fait la substitution

$$x+\frac{\gamma^2}{x}=2z$$

6. Ce fragment occupe deux feuilles, écrites sur les deux faces, du format 23 x 18.
7. Cette phrase elliptique a été ajoutée dans une fin de ligne et dans l'interligne au-dessous.
8. La première page finit ici ; les six lignes qui suivent sont au verso.
9. Un peu plus bas, on lit : Discussion des groupes irréductibles ; le texte de la page est couvert de calculs, écrits en renversant la page de haut en bas.
10. Les mots mis ici entre crochets sont barrés ; au reste tout ce passage, à partir de "Du cas ou" jusqu'à "plusieurs fonctions connues" est couvert de ratures et de surcharges ; on lit, par exemple, sous une rature : "Si D est le commun diviseur à ce groupe et à celui de la fonction supposée" ; tout ce passage est un renvoi placé au bas de la page, de façon à être substitué à trois lignes qui sont barrées, et dont voici le texte :
Du cas où une fonction des racines est censée connue. Remarque. On peut réduire à ce cas celui où on supposerait plusieurs connues.
11. Au-dessous en interligne :
Jusqu'ici on avait cru
12. Les deux fragments qui suivent sont sur l'autre face de la feuille ; ils sont séparés par un blanc laissé au milieu de la page ; au-dessus de l'avant-dernière ligne du premier passage et dans le blanc, on trouve les mots suivants dont le premier est couvert d'une rature et dont les autres sont bâtonnés ; la lecture du mot Présenté est douteuse.

Mémoire
la théorie des fonctions et sur celle
des équations littérales.
Présenté à l'Institut par
E. Galois.
Octobre 1829.

13. Mots placés en interligne et presque illisibles ; on pourrait aussi bien lire *remarque* que *réciproque*.
14. Une feuille du format 23 x 17, écrite sur les deux faces.
15. En renversant la page, on trouve quelques lignes relatives à la décomposition d'un groupe, que l'absence de contexte rend inintelligibles, puis le commencement d'une question, qu'on retrouve en entier sur un petit fragment de papier, comme il suit :
Étant donnée une substitution S et deux permutations A et A' on demande une substitution S' telle que la lettre située au k$^{\text{ième}}$ rang dans A' prenne le $\phi k^{\text{ième}}$ rang dans AS, la lettre située au $k^{ième}$ rang dans A' prenne le $\phi k^{\text{ième}}$ dans $A'S'$.
Supposons le problème résolu. Soit $A'=AT$, on aura évidemment

$$A'S'=AST$$

16. Ce fragment comporte trois feuilles du format 20×15, du même papier que le fragment M ; la troisième feuille, dont il est question dans une note ultérieure, est intacte ; les deux autres sont déchirées, à droite, de haut en bas ; il manque quelques lettres et, parfois, des mots entiers ; d'où les crochets que l'on trouvera dans le texte imprimé. La déchirure a pu se faire en détachant les trois feuilles d'un cahier pareil à celui qui porte le titre "Notes de mathématiques" et dont j'ai parlé plus haut.
Cet essai est sans doute antérieur à la rédaction du Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux, et de la feuille relative à la proposition I de ce Mémoire, dont j'ai parlé précédemment (p. 11) ; les deux rédactions sont interrompues ; pour l'une et l'autre, la fin de la page reste blanche ; l'essai n'a pas été achevé.

17. Ces mots sont mis en marge.

18. La page se termine au mot “telles”, le reste se continue sur deux feuilles distinctes ; l'une de ces deux feuilles est écrite sur le recto et le verso, c'est celle dont le texte est imprimé ci-dessus ; l'autre feuille n'est écrite que sur le recto, jusqu'au milieu de la page : le verso contient quelques calculs relatifs à la résolution algébrique de l'équation du troisième degré. Les deux feuilles contiennent le même texte jusqu'à la fin de l'alinéa “sont seules connues”. A partir de ces mots, on lit dans la seconde feuille :
Mais, avant de développer la démonstration complète de cette proposition, nous ferons voir qu'il suffit de la donner dans le cas où l'équation proposée ne se décompose pas en facteurs dont les coefficients se déduisent rationnellement de ses coefficients et des quantités qui lui sont adjointes, plus brièvement, dans le cas où l'équation n'a pas de diviseurs rationnels. Admettons en effet que la chose ait été démontrée dans ce cas, et supposons qu'une équation se décompose en deux facteurs qui n'aient eux-mêmes aucun diviseur rationnel.

19. Un fragment qui semble un morceau déchiré (hauteur, 9") d'une feuille de papier du même format contient le texte suivant, d'un côté : Soit G un groupe correspondant à l'équation $\psi = 0$ et A, B, C... les permutations du groupe G. Pour obtenir un pareil groupe, il faut opérer sur une permutation A toutes les substitutions de l'équation ψ. Nous supposons que la permutation A contienne toutes les racines de $F(x) = 0$. Prenons une fonction $\Phi(A\Sigma)$ invariable par les substitutions Σ relatives aux racines de ϕ,
et de l'autre côté :
qui correspondent aux substitutions indiquées quand aux racines de l'équation ϕ on substitue leurs expressions en fonction de celles de ψ. Je dis qu'il viendra un groupe de permutations qui relativement à la proposée $F(x) = 0$ satisfera à la condition exigée. En effet, toute fonction des racines invariable par les substitutions de ce groupe pourra d'abord s'exprimer en fonction des seules racines de l'équation ψ. De plus, comme cette fonction transformée sera encore invariable par les substitutions de l'équation ψ on voit que sa valeur numérique

20. Feuille déchirée (18 x 17), écrite sur les deux faces.

21. Cet énoncé est écrit sur un morceau de papier (10 x 18) ; l'écriture, parfois malaisée à déchiffrer en raison des ratures et des surcharges, trahit une certaine nervosité ; au-dessous, Galois a mis son nom, écrit à main posée, avec une certaine complaisance.

22. Il n'est guère utile de dire qu'il faut lire HS' ; ce passage est à demi effacé.

23. Une seule page de format 20 x 15. Ce fragment et le suivant doivent être rapprochés de l'*Analyse d'un Mémoire sur la résolution algébrique des équations*, qui a été publiée dans le *Bulletin de Férussac (Œuvres*, p. 11), et dont les premières lignes sont identiques à celles du fragment M.

24. Une feuille (18 x 15), écrite des deux côtés.

25. Relativement au premier membre de la congruence qui suit, je dois signaler l'énoncé que voici, écrit sur la première page d'une feuille double (22 x 18) : Le produit
$$(p^\nu - p)(p^\nu - p^2)(p^\nu - p^3)\dots(p^\nu - p^{\nu-1})$$
n'admet point de facteur premier $\dfrac{p^\nu - 1}{\partial(p-1)}$, ∂ étant le plus grand commun diviseur entre ν et $p-1$, à moins que $\nu = 2$.
Cet énoncé est placé au milieu de calculs dont quelques-uns concernent la transformation des fonctions elliptiques. Sur les autres pages, d'autres formules se rapportent à l'équation $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{d'u}{dt'}$ aux fonctions trigonométriques, à la résolution des équations binômes, à la décomposition des fonctions trigonométriques en produits ou en fractions simples, etc.

26. Dans la ligne qui suit et, un peu plus loin, dans l'égalité $p = \nu$, la lettre ν a été mise en surcharge sur la lettre μ ; ensuite, la correction n'a pas été faite. Au reste, la lecture de ce fragment est, par endroits, assez difficile.

27. Trois feuilles (20 x 15) écrites sur les deux faces.

28. Il faut lire sans doute
$$(x_{k,l,ak+b,cl+d}).$$

29. Deux pages et demie d'une feuille double (23 x 18).

30. Malgré son caractère élémentaire, j'ai cru devoir publier cette note, qui n'est pas sans intérêt pour l'histoire de la Géométrie analytique et de la théorie des invariants. En raison de son contenu, on peut supposer qu'elle remonte au temps où Galois était élève de M. Richard, dans la classe de Mathématiques spéciales, ou au moment où il sortait de cette classe pour entrer à l'École Normale. Toutefois, la première supposition semble devoir être écartée : s'il en avait eu connaissance, M. Richard aurait sans doute fait pénétrer dans son enseignement les idées de son élève, qui se seraient diffusées immédiatement. Quoi qu'il en soit, cette note a, comme le morceau précédent, l'aspect d'une copie d'écolier, avec la signature en haut et à gauche ; elle ressemble tout à fait à quelques-unes des copies de Galois, que M. Richard avait conservées et données à Hermite. M. Émile Picard a retrouvé ces copies de Galois dans les papiers d'Hermite ; il a bien voulu me les remettre pour qu'elles soient jointes au précieux trésor que Mme de Blignières donne à l'Académie des Sciences. L'une de ces copies contient un petit travail, que Galois a sans doute fait librement et remis à son maître, et où son esprit philosophique se manifeste déjà ; j'en extrais cette curieuse réflexion :
Un auteur me dit : “l'arithmétique est la base de toutes les parties des Mathématiques, puisque c'est toujours aux nombres qu'il faut ramener les résultats des calculs.” D'après la dernière phrase de l'auteur, il serait plus naturel de croire que l'arithmétique est le terme et le complément de l'Analyse ; et c'est ce qui a lieu.
Toutes ces copies, comme la présente note, sont sur du papier de format 23 x 18.

31. Il y a une figure en marge, dans le texte de Galois.

Transcription de la traduction de Laugel en français de l'article de Bernhard Riemann (Denise Vella-Chemla, 24.6.2017)

wikisource Note de Riemann

SUR LE NOMBRE DES NOMBRES PREMIERS
INFERIEURS A UNE GRANDEUR DONNEE

Monatsberichte der Berliner Akademie, novembre 1859.
Oeuvres de Riemann, $2^{ième}$ édition, pages 145-155.

Je ne crois pouvoir mieux exprimer mes remerciements à l'Académie pour la distinction à laquelle elle m'a fait participer en m'admettant au nombre de ses Correspondants qu'en faisant immédiatement usage du privilège attaché à ce titre pour lui communiquer une étude sur la fréquence des nombres premiers. C'est un sujet qui, par l'intérêt que Gauss et Dirichlet lui ont voué pendant de longues années, ne me semble peut-être pas indigne de faire l'objet d'une telle Communication.

Je prendrai pour point de départ dans cette étude la remarque faite par Euler[1] que le produit

$$\prod \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^s}$$

lorsque p prend pour valeur tous les nombres premiers et n tous les nombres entiers. La fonction de la variable complexe s, qui sera représentée par ces deux expressions, tant qu'elles convergent, je la désignerai par $\zeta(s)$. Toutes deux convergent qu'autant que la partie réelle de s est supérieure à 1. Néanmoins il est facile de trouver pour la fonction une expression qui reste toujours valable.

En faisant usage de l'équation

$$\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx = \frac{f(s-1)}{n^s}$$

on obtient d'abord

$$f(s-1)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x-1}$$

Si maintenant l'on considère l'intégrale

$$\int \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x-1}$$

prise dans le sens positif de $+\infty$ à $+\infty$ et autour d'un domaine de grandeurs qui contient à son intérieur la valeur 0 mais qui ne contient aucune autre valeur de discontinuité de la fonction sous le signe d'intégration, on obtient aisément pour la valeur de cette intégrale

$$(e^{-\pi si} - e^{\pi si}) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x-1}$$

en faisant l'hypothèse que dans la fonction multiforme

$$(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$$

le logarithme de $-x$ est déterminé de telle sorte qu'il soit réel pour x négatif. On aura donc

$$2 \sin \pi s \; f(s-1)\zeta(s) = i \int_0^\infty \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x-1}$$

l'intégrale étant définie de la manière indiquée ci-dessus.

Cette équation donne maintenant la valeur de la fonction $\zeta(s)$ pour chaque valeur complexe de s et nous enseigne que cette fonction est uniforme, qu'elle est finie pour toutes les valeurs finies de s, sauf 1, et aussi qu'elle s'évanouit lorsque s est égal à un entier pair négatif[2].

Lorsque la partie réelle de s est négative, l'intégrale, au lieu d'être prise dans le sens positif autour du domaine de grandeurs assigné, peut être prise dans le sens négatif autour du domaine de grandeurs qui contient toutes les grandeurs complexes restantes, car l'intégrale, pour des valeurs dont le module est infiniment grand est alors infiniment petite. Mais, à l'intérieur de ce domaine, la fonction sous le signe d'intégration ne devient discontinue que lorsque x est égal à un multiple entier de $\pm 2\pi i$ et l'intégrale, par conséquent, est égale à la somme des intégrales prises dans le sens négatif autour de ces valeurs. Mais l'intégrale relative à la valeur $n2\pi i$ égale $(-n2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$; on obtient donc

$$2\sin \pi s\, f(s-1)\zeta(s) = (2\pi)^s \sum n^{s-1}[(-i)^{s-1} + i^{s-1}]$$

c'est-à-dire une relation entre $\zeta(s)$ et $\zeta(s-1)$ qui, en vertu de propriétés connues de la fonction f peut aussi s'exprimer ainsi : la quantité

$$f\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

reste inaltérée lorsque s est remplacé par $1-s$.

Cette propriété de la fonction m'a engagé à introduire, au lieu de l'intégrale $f(s-1)$, l'intégrale $f\left(\frac{s}{2}-1\right)$ dans le terme général de la série $\sum \frac{1}{n^s}$, ce qui fournit une expression très commode de la fonction $\zeta(s)$. On a en effet

$$\frac{1}{n^s} f\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^\infty e^{-n^2\pi x} x^{\frac{s}{2}-1} dx;$$

et, par conséquent, si l'on pose

$$\sum_1^\infty e^{-n^2\pi x} = \psi(x)$$

on a

$$f\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \int_0^\infty \psi(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx;$$

ou bien, puisque

$$2\psi(x)+1 = x^{-\frac{1}{2}}\left[2\psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right)^{[3]},$$

on a encore

$$f\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \int_1^\infty \psi(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx + \int_0^1 \psi\left(\frac{1}{x}\right) x^{\frac{s-3}{2}} dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \psi(x)\left(x^{\frac{s-3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1}\right) dx$$
$$= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}}\right) dx$$

Je pose maintenant

$$s = \frac{1}{2} + ti$$

et

$$f\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \xi(t)$$

en sorte que

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - \left(t^2 + \frac{1}{4}\right)\int_1^\infty \psi(x) x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{1}{2} t \log x\right) dx,$$

ou encore

$$\xi(t) = 4\int_1^\infty \frac{d\left[x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right]}{dx} x^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{1}{2} t \log x\right) dx$$

Cette fonction est finie pour toutes les valeurs finies de t et peut être développée suivant les puissances de t^2 en une série qui converge très rapidement. Puisque, pour une valeur s de dont la partie réelle est plus grande que 1, $\log\zeta(x) = -\sum \log(1-p^{-s})$ reste fini et que ce même fait a lieu pour les logarithmes des facteurs restants de $\xi(t)$, la fonction $\xi(t)$ peut seulement s'évanouir lorsque la partie imaginaire de t se trouve comprise entre $\frac{1}{2}i$ et $-\frac{1}{2}i$. Le nombre de racines de $\xi(t) = 0$ dont les parties réelles sont comprises entre 0 et T est environ égal à

$$\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$$

car l'intégrale $\int d\log\xi(t)$ prise le long d'un contour décrit dans le sens positif, comprenant à son intérieur l'ensemble des valeurs de t dont les parties imaginaires sont comprises entre $\frac{1}{2}i$ et $-\frac{1}{2}i$ et les parties réelles entre 0 et T est égale (abstraction faite d'une partie fractionnaire de même ordre de grandeur que la grandeur $\frac{1}{T}$) à ($T \log \frac{T}{2\pi} - T)i$; or cette intégrale est égale au nombre de racines de $\xi(t) = 0$ situées dans ce domaine, multiplié par $2\pi i$. On trouve, en effet, entre ces limites un nombre environ égal à celui-ci, de racines réelles, et il est très probable que toutes les racines sont réelles[4].

Il serait à désirer, sans doute, que l'on eût une démonstration rigoureuse de cette proposition ; néanmoins j'ai laissé cette recherche de côté pour le moment après quelques rapides essais infructueux, car elle paraît superflue pour le but immédiat de mon étude.

Si l'on désigne par α toute racine de l'équation $\xi(\alpha) = 0$, on peut exprimer $\log \xi(t)$ par

$$\sum \log\left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right) + \log \xi(0)$$

En effet, puisque la densité des racines de grandeur t augmente seulement avec t comme le fait $\log \frac{t}{2\pi}$, cette expression converge et pour t infini ne devient infinie que comme l'est $t \log t$; elle diffère de $\log \xi(t)$ par conséquent d'une fonction de t^2 qui, pour t fini, reste finie et continue et qui, divisée par t^2, sera infiniment petite pour t infini.

Cette différence, par suite, est une constante dont la valeur peut être déterminée en posant $t = 0$.

A l'aide de ces principes auxiliaires, nous pouvons maintenant déterminer le nombre des nombres premiers qui sont inférieurs à x.

Soit $F(x)$ ce nombre lorsque x n'est pas exactement égal à un nombre premier, et soit $F(x)$ ce nombre augmenté de $\frac{1}{2}$ lorsque x est premier, de telle sorte que, pour une valeur de x, pour laquelle $F(x)$ varie par un saut brusque, on ait,

$$F(x) = \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}$$

Si, maintenant, dans l'expression

$$\log \zeta(s) = -\sum \log(1 - p^{-s}) = \sum p^{-s} + \frac{1}{2}\sum p^{-2s} + \frac{1}{3}\sum p^{-3s}$$

on remplace p^{-s} par $s \int\limits_p^\infty x^{-s-1}dx, p^{-2s} = s \int\limits_{p^2}^\infty x^{-s-1}dx, \ldots$, on obtient

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int\limits_1^\infty f(x)x^{-s-1}dx,$$

où l'on a désigné par $f(x)$ l'expression $F(x) + \frac{1}{2}F(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}F(x^{\frac{1}{3}}) + \ldots$

Cette équation a lieu pour toute valeur complexe $a + bi$ de s, pourvu que $a > 1$. Mais lorsque, sous ces hypothèses, l'équation suivante

$$g(s) = \int\limits_0^\infty h(x)x^{-s}d \log x$$

a lieu, l'on peut, à l'aide du théorème de Fourier, exprimer la fonction h par la fonction g. Cette équation, quand $h(x)$ est réel et que

$$g(a + bi) = g_1(b) + ig_2(b)$$

se décompose en les deux suivantes :

$$g_1(b) = \int\limits_0^\infty h(x)x^{-a} \cos(b \log x)d \log x,$$

$$ig_2(b) = -i\int\limits_0^\infty h(x)x^{-a} \sin(b \log x)d \log x.$$

Lorsque l'on multiplie les deux équations par

$$[\cos(b \log y) + i \sin(b \log y)]\, db,$$

et que l'on intègre de $-\infty$ à $+\infty$, l'on obtient, en vertu du théorème de Fourier, dans les seconds membres des deux équations $\pi h(y)y^{-a}$, et, par conséquent, en ajoutant les deux équations et multipliant par iy^a, on a

$$2\pi i h(y) = \int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s) y^s ds,$$

où l'intégration doit être prise de telle sorte que la partie réelle de reste constante[5].

Cette intégrale représente, pour une valeur de y pour laquelle a lieu une variation par saut brusque de la fonction, la valeur moyenne des valeurs de la fonction h de chaque côté du saut. Avec les modes de détermination exposés ci-dessus, la fonction $f(x)$ possède cette même propriété, et l'on a donc, d'une manière générale,

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\log \zeta(s)}{s} y^s ds$$

On peut maintenant substituer à $\log \zeta$, l'expression trouvée précédemment[6]

$$\frac{s}{2} \log \pi - \log (s-1) - \log f \frac{s}{2} + \sum_\alpha \log \left[1 + \frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha^2}\right] + \log \xi(0)$$

Mais les intégrales de chaque terme de cette expression, prises jusqu'à l'infini, ne convergent pas ; il sera donc convenable de transformer l'équation précédente à l'aide d'une intégration par parties en

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d \frac{\log \zeta(s)}{s}}{ds} x^s ds$$

Comme

$$-\log f \frac{s}{2} = \lim \left[\sum_{n=1}^{n=m} \log \left(1 + \frac{s}{2n}\right) - \frac{s}{2} \log m\right],$$

pour $m = \infty$, et que, par suite

$$-\frac{d \frac{1}{s} \log f\left(\frac{s}{2}\right)}{ds} = \sum_1^\infty \frac{d \frac{1}{s} \log\left(1 + \frac{s}{2n}\right)}{ds},$$

tous les termes de l'expression de $f(x)$, à l'exception de

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{1}{s^2} \log \xi(0) x^s ds = \log \xi(0),$$

prennent alors la forme

$$\pm \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d\left[\frac{1}{s} \log\left(1 - \frac{s}{\beta}\right)\right]}{ds} x^s ds.$$

Mais on a maintenant

$$\frac{d\left[\frac{1}{s} \log\left(1 - \frac{s}{\beta}\right)\right]}{d\beta} = \frac{1}{(\beta - s)\beta}$$

et, lorsque la partie réelle de s est plus grande que la partie réelle de β,

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^s ds}{(\beta - s)\beta} = \frac{x^\beta}{\beta} = \int\limits_\infty^x x^{\beta-1} dx,$$

ou bien

$$= \int\limits_0^x x^{\beta-1} dx,$$

selon que la partie réelle de β est négative ou positive. On a donc, dans le premier cas,

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d\left[\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right]}{ds}x^s ds$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)x^s ds$$

$$= \int\limits_{\infty}^{x}\frac{x^{\beta-1}}{\log x}\,dx + \text{const.},$$

et, dans le second cas,

$$= \int\limits_{0}^{x}\frac{x^{\beta-1}}{\log x}\,dx + \text{const.}$$

Dans le premier cas, la constante d'intégration peut être déterminée en faisant tendre la partie réelle de β vers l'infini négatif.

Dans le second cas, l'intégrale de 0 à x prend des valeurs qui diffèrent de $2\pi i$, lorsque l'intégrale relative à des valeurs complexes est prise dans le sens positif ou dans le sens négatif, et elle sera, prise dans ce dernier sens, infiniment petite lorsque le coefficient de i dans la valeur de β est égal à l'infiniment grand positif ; mais ce fait aura lieu, dans le premier cas, lorsque le coefficient est égal à l'infiniment grand négatif.

Ceci nous enseigne comment $\log\,(1-\frac{s}{\beta})$ doit être déterminé dans le premier membre de manière à faire disparaître la constante d'intégration.

En portant ces valeurs dans l'expression de $f(x)$ on obtient

$$f(x) = Li(x) - \sum_{\alpha}\left[Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right]$$

$$+\int_x^{\infty}\frac{1}{x^2-1}\frac{dx}{x\log x} + \log\xi(0),$$

[7],[8]

où, dans la série $\sum\limits_{\alpha}$ on donnera à α pour valeurs toutes les racines positives (ou à parties réelles positives) de l'équation $\xi(\alpha)=0$ en les rangeant par ordre de grandeur. On peut alors, après une discussion plus approfondie de la fonction ξ, démontrer aisément que lorsque les termes sont rangés, comme il est prescrit ci-dessus, dans la série

$$\sum\left[Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right],$$

celle-ci converge vers la même limite que l'expression

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-bi}^{a+bi}\frac{d\frac{1}{s}\sum\log\left[1+\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2}{\alpha^2}\right]}{ds}x^s ds,$$

lorsque la grandeur b croît sans limites. Mais, si l'on changeait cet ordre des termes de la série, on pourrait obtenir pour résultat n'importe quelle valeur réelle.

A l'aide de $f(x)$ l'on obtient $F(x)$ par inversion de la relation

$$f(x) = \sum\frac{1}{n}F\left(x^{\frac{1}{n}}\right),$$

ce qui donne l'équation

$$F(x) = \sum(-1)^{\mu}\frac{1}{m}f\left(x^{\frac{1}{m}}\right),$$

où m doit être remplacé successivement par tous les nombres qui ne sont divisibles par aucun carré excepté 1 et où μ désigne le nombre des facteurs premiers de m.

Si on limite $\sum_\alpha$ à un nombre fini de termes, la dérivée de l'expression $f(x)$ c'est-à-dire, abstraction faite d'une partie qui décroît très rapidement lorsque x croît,

$$\frac{1}{\log x} - 2\sum_\alpha \frac{\cos(\alpha \log x)\, x^{-\frac{1}{2}}}{\log x},$$

fournit une expression approchée pour la densité des entiers premiers + la moitié de la densité des carrés, + le tiers de celle des cubes, + ... des entiers premiers inférieurs à x.

La formule approchée connue $F(x) = Li(x)$ n'est, par conséquent, exacte qu'aux grandeurs près de l'ordre de $x^{\frac{1}{2}}$ et fournit une valeur un peu trop grande ; car les termes non périodiques[9] dans l'expression de $F(x)$ sont, abstraction faite de grandeurs qui ne croissent pas indéfiniment avec x,

$$Li(x) - \frac{1}{2}Li\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{3}Li\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \frac{1}{5}Li\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \frac{1}{6}Li\left(x^{\frac{1}{6}}\right) - \frac{1}{7}Li\left(x^{\frac{1}{7}}\right) + \dots$$

Du reste, la comparaison, entreprise par Gauss et Goldschmidt[10], de $Li(x)$ avec le nombre de nombres premiers inférieurs à x et poursuivie jusqu'à $x =$ trois millions a révélé que ce nombre, à partir de la première centaine de mille, est toujours inférieur à $Li(x)$ et que la différence des valeurs, soumises à maintes oscillations, croît néanmoins toujours avec x[11]. Mais la fréquence et la réunion plus dense par endroits des nombres premiers, si l'on peut s'exprimer ainsi, sous l'influence des termes périodiques, avaient déjà attiré l'attention, lors du dénombrement des nombres premiers, sans que l'on eût aperçu la possibilité d'établir une loi à ce sujet.

Il serait intéressant dans un nouveau dénombrement, d'étudier l'influence de chaque terme périodique contenu dans l'expression donnée pour la totalité des nombres premiers. Une marche plus régulière que celle donnée par $F(x)$ serait obtenue à l'aide de la fonction $f(x)$ qui, cela se reconnaît déjà très évidemment dans la première centaine, coïncide en moyenne avec $Li(x) + \log \xi(0)$.

Notes

1. Leonhard Euler, *Introductio in analysin infinitorum.* Bd. 1. Lausanne 1748, p. 221-252, ch. 15 (*De Seriebus ex evolutione Factorum ortis*).

2. [Note du trad.] Ce mode d'existence de la fonction $\zeta(s)$ se reconnaît en se servant de la seconde forme de cette fonction

$$2\zeta(s) = \pi i\; f(-s) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^{s-2}}{e^{x-1}} dx$$

et en remarquant, en outre, que $\dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{1}{2}$, dans le développement suivant les puissances ascendantes de x, ne contient que des puissances impaires.

3. Riemann se réfère à Carl Gustav Jacob Jacobi, *Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum.* Königsberg 1829, p. 184, § 65, Nr. 6. La formule utilisée n'est pas donnée ici explicitement ; Jacobi la déduit à un autre endroit dans *Suite des notices sur les fonctions elliptiques.*, in Journal de Crelle 3 (1828), p. 303-310.

4. Cette phrase constitue le premier énoncé de "l'hypothèse de Riemann".

5. Note du trad. L'énoncé de ce théorème manque de rigueur. Les deux équations traitées séparément comme il est indiqué, les limites d'intégration $0, \infty$ se rapportant à $\log x$, donnent

$$\pi y^{-\alpha}\left[h(y) \pm h\left(\frac{1}{y}\right)\right],$$

et, par conséquent, fournissent en premier lieu par leur somme la formule du texte.

6. Le manuscrit Lien du Clay Mathematical Institute (p. 4) et les *Gesammelte Werke* (p. 141) introduisent encore un $\sum_\alpha$ devant l'avant-dernier logarithme. Dans les *Monatsberichte* le signe somme manque :

$$\frac{s}{2}\log \pi - \log\,(s-1) - \log f\frac{s}{2} + \log\left(1 + \frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha}\right) + \log \xi(0)$$

7. Note HME 1974, p. 31. Riemann écrit $\log \xi(0)$ à la place de $-\log 2$, mais puisqu'il utilise ξ pour noter une fonction différente à savoir la fonction $\xi(\frac{1}{2} + it)$, son $\xi(0)$ dénote $\xi(\frac{1}{2}) \neq \frac{1}{2}$. Cette erreur a été détectée

du vivant de Riemann par Angelo Genocchi (1817-1889), *Formole per determinare quanti siano i numeri primi fino ad un dato limite*, in Annali di Matematica Pura ed Applicata 3 (1860), p. 52-59.

8. Note du trad. La fonction $Li(x)$ doit être définie pour les valeurs réelles de x qui sont plus grandes que 1 par l'intégrale

$$\int_0^x \frac{dx}{\log x} \pm \pi i$$

où l'on doit prendre le signe supérieur ou bien le signe inférieur, selon que l'intégration est prise relativement à des valeurs complexes dans le sens positif ou bien dans le sens négatif. De là l'on déduit aisément le développement donné par Scheibner (Schlömilch's Zeitschrift, t. V)

$$Li(x) = \log\log x - \Gamma'(1) + \sum_{1,\infty}^{x} \frac{(\log x)^n}{n.n!},$$

qui est valable pour toutes les valeurs de x, et présente une discontinuité pour les valeurs réelles négatives (comparer la correspondance entre Gauss et Bessel).

Si l'on poursuit le calcul indiqué par Riemann, on trouve dans la formule $\log \frac{1}{2}$ au lieu de $\log \xi(0)$. Il est très possible que ceci ne soit qu'un *lapsus calami*, ou une faute d'impression, $\log \xi(0)$ au lieu de $\log \zeta(0)$; en effet, $\log \zeta(0) = \frac{1}{2}$.

9. Note H.M.E. En toute rigueur, les termes $Li(x^{\frac{1}{2}+\alpha i})$ ne sont pas périodiques mais oscillatoires.

10. Carl Wolfgang Benjamin Goldschmidt (1807-1851), un élève de Gauss.

11. Lettre de Carl Friedrich Gauss à Johann Franz Encke (1791-1865) du 24 décembre 1849.

Annexe 1 : Rappel historique

Citons Charles-Ange Laisant dans la note intitulée *Sur un procédé expérimental de vérification de la conjecture de Goldbach* du Bulletin de la SMF *n*˚25 de 1897.

> *Ce fameux théorème empirique : Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers, dont la démonstration semble dépasser les possibilités scientifiques actuelles, a fait l'objet de nombreux travaux et de certaines contestations. Lionnet a tenté d'établir que la proposition devait probablement être inexacte. M. Georg Cantor l'a vérifiée numériquement jusqu'à 1000, en donnant pour chaque nombre pair toutes les décompositions en deux nombres premiers, et il a remarqué que le nombre de ces décompositions ne cesse de croître en moyenne, tout en présentant de grandes irrégularités.*
>
> *Voici un procédé qui permettrait de faire sans calcul la vérification expérimentale dont il s'agit, et d'avoir pour chaque nombre pair, à la seule inspection d'une figure, toutes les décompositions. Supposons que sur une bande formée de carrés accolés, représentant les nombres impairs successifs, on ait construit le crible d'Erathostène, en ombrant les nombres composés, jusqu'à une limite quelconque* $2n-1$.

Figure 1

> *Si l'on a construit deux réglettes pareilles, et si l'on place la seconde au-dessous de la première en la retournant et en faisant correspondre la case* 1 *à* $2n$*∗*, il est évident que si le théorème de Goldbach est vrai pour* $2n$*, il y aura quelque part deux cases blanches en correspondance ; et tous les couples de cases blanches donneront les diverses décompositions. On les aura même en lisant la moitié de la figure, à cause de la symétrie par rapport au milieu. Ainsi la vérification relative au nombre* 28 *donnera la figure 2 et montrera qu'on a les décompositions* $28 = 5+23 = 11+17$.

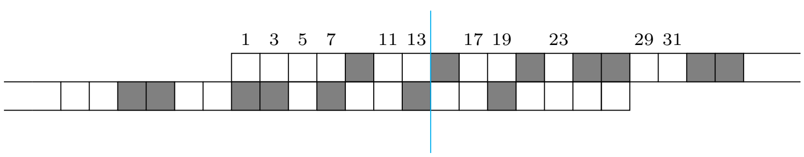


Figure 2

> *On comprend que les réglettes étant construites à l'avance, et un simple glissement permettant de passer d'un nombre à un autre, les vérifications sont très rapides.*

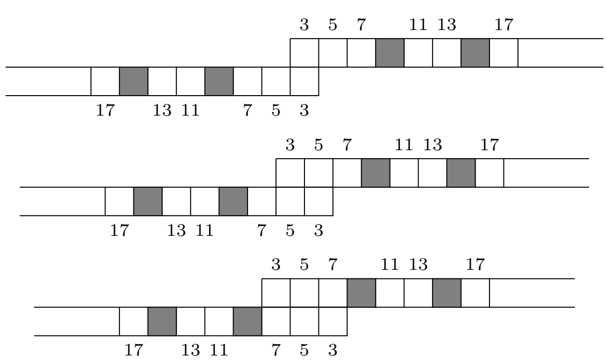


Figure 3

∗. Ici devrait être écrit $2n-1$.

Annexe 1 : extrait du texte de Laisant sur la figuration des nombres composés

A ces remarques sur les décompositions des nombres en facteurs, nous croyons devoir en ajouter une sur un mode de figuration fort simple et qui n'a cependant pas été signalé jusqu'ici, du moins à notre connaissance. Il y aurait peut-être lieu d'en tirer parti pour l'enseignement des premiers principes élémentaires relatifs à la décomposition des nombres en facteurs premiers, à la formation du plus grand commun diviseur et à celle du plus petit commun multiple de deux ou plusieurs nombres.
Voici en quoi consiste cette figuration. Supposons que, un quadrillage indéfini étant tracé à la droite d'une ligne verticale, nous numérotions les bandes horizontales successives 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17..., en les affectant aux nombres premiers successifs. Si un nombre composé contient un facteur premier a à l'exposant i, on comptera i cases, à partir de la droite verticale, dans la bande qui représente le facteur a. L'ensemble des cases ainsi déterminées, et que l'on pourra limiter par le tracé du contour extérieur, figurera le nombre en question. Il est évident que ce tracé peut suivre parfois la ligne verticale origine, lorsque certains facteurs premiers font défaut, c'est à dire ont l'exposant zéro.
Nous nous bornons à donner comme exemple la figuration des nombres
$360 = 2^3.3^2.5$ et $16500 = 2^2.3.5^3.11$ (fig. 1 et 2).

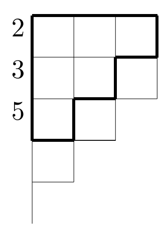


Fig. 1 – N = 360

Ce mode de représentation met en relief d'une façon saisissante la formation des diviseurs, ou, ce qui revient au même, la décomposition en deux facteurs, dont nous avons parlé ci-dessus. Le nombre des diviseurs est

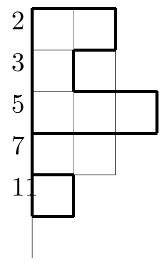


FIG. 2 – N = 16500

évidemment égal au nombre des chemins différents qu'on peut suivre pour aller de la base inférieure à la base supérieure de la figure formée, en suivant toujours les lignes du quadrillage.
Le plus grand commun diviseur de deux nombres se trouve représenté par la partie commune des figures qui représentent ces deux nombres ; le plus petit commun multiple, par la figure limitée au contour extérieur dessinée par l'ensemble des deux figures. Nous donnons comme exemple (fig.3) le plus grand commun diviseur D des deux nombres $N = 1890 = 2.3^3.5.7$ et $N' = 660 = 2^2.3.5.11$, leur plus grand commun diviseur $D = 2.3.5 = 30$ et leur plus petit commun multiple $p = 2^2.3^2.5.7.11 = 41580$, en figurant les deux nombres au moyen de carrés colorés.

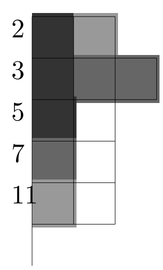


FIG. 3 – pgcd et ppcm

On comprend qu'en représentant par diverses valeurs plusieurs nombres, on peut ainsi figurer leurs diviseurs ou leurs multiples, soit d'ensemble, soit deux à deux. Par exemple, si trois nombres A, B, C sont figurés A en rouge, B en bleu et C en jaune, les plus grands communs diviseurs seront figurés celui de A et B par la partie violette, celui de B et C par la partie verte, celui de A et C par la partie orangée.

Un assez grand nombre de propriétés connues peuvent avec cette figuration prendre un caractère intuitif. Il suffit pour cela de remarquer que, lorsqu'un nombre A est multiple d'un autre nombre B, le contour de la figuration de A contient le contour de la figuration de B, et aussi que, lorsque plusieurs nombres sont premiers entre eux deux à deux, les figurations des deux quelconques de ces nombres n'ont aucune partie commune.

Au fond, ce mode de figuration est en quelque sorte un système de numérotation dans lequel l'ordre d'un chiffre, à partir de la gauche par exemple, représenterait l'exposant. Ainsi, dans les exemples cités plus haut, les divers nombres s'écriraient comme suit : 360 s'écrirait 321, 16500 s'écrirait 21301, 1890 s'écrirait 1311, 660 s'écrirait 21101, 30 s'écrirait 111, 41580 s'écrirait 23111.
Le produit de deux nombres, dans ce système, s'obtiendrait par l'addition des chiffres de même rang (et il est bien entendu qu'ici nous désignons par le mot *chiffres* des nombres qui peuvent devenir aussi grands qu'on voudra).
La formation du plus petit commun multiple ou du plus grand commun diviseur est évidente ; et il apparaît non moins clairement, par exemple, que le produit de deux nombres est également le produit de leur plus petit commun multiple par leur plus grand commun diviseur.
Tout nombre représenté par l'unité précédée d'un nombre quelconque de zéros est un nombre premier, et réciproquement.
Tout nombre dont les chiffres sont pairs est un carré.
Nous croyons devoir borner là ces observations, trop simples pour mériter d'être plus complètement développées.

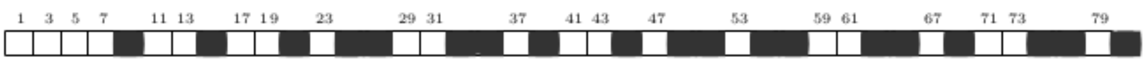
Annexe 2 : extrait de la communication de Laisant “Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach”

Ce fameux théorème empirique : *Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers*, dont la démonstration semble dépasser les possibilités scientifiques actuelles, a fait l’objet de nombreux travaux et de certaines contestations. Lionnet a tenté d’établir que la proposition devait probablement être inexacte. M. Georg Cantor l’a vérifiée numériquement jusqu’à 1000, en donnant pour chaque nombre pair toutes les décompositions en deux nombres premiers, et il a remarqué que le nombre de ces décompositions ne cesse de croître en moyenne, tout en présentant de grandes irrégularités.

Voici un procédé qui permettrait de faire sans calculs la vérification expérimentale dont il s’agit, et d’avoir pour chaque nombre pair, à la seule inspection d’une figure, toutes les décompositions.

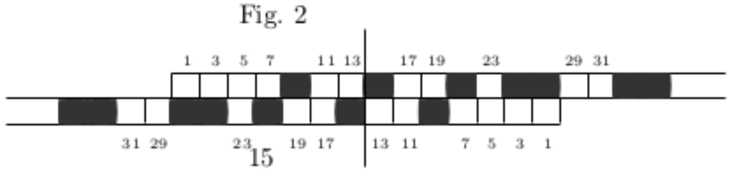
Supposons que sur une bande formée de carrés accolés, représentant les nombres impairs successifs, on ait construit le crible d’Erathostène, en ombrant les nombres composés, jusqu’à une limite quelconque $2n-1$.

Fig. 1



Si l’on a construit deux réglettes pareilles, et si l’on place la seconde au dessous de la première en la retournant et en faisant correspondre la case 1 à $2n-1$, il est évident que si le théorème de Goldbach est vrai pour $2n$, il y aura quelque part deux cases blanches en correspondance ; et tous les couples de cases blanches donneront les diverses décompositions. On les aura même en lisant la moitié de la figure, à cause de la symétrie par rapport au milieu. Ainsi la vérification relative au nombre 28 donnera la figure 2 et montrera qu’on a les décompositions $28 = 5 + 23 = 11 + 17$.

Fig. 2



On comprend que les réglettes étant construites à l’avance, et un simple glissement permettant de passer d’un nombre à un autre, les vérifications sont très rapides.

COLLÈGE DE FRANCE

CHAIRE D'ANALYSE ET DE GÉOMÉTRIE

LEÇON INAUGURALE

faite le Vendredi 11 janvier 1985

PAR

M. ALAIN CONNES

Professeur

Monsieur l'Administrateur, mes chers Collègues, Mesdames et Messieurs, je m'efforcerai, dans l'exposé que je vais faire, d'abord de mettre en évidence grâce à la mécanique statistique quantique, l'interaction qui existe entre physique théorique et mathématiques pures dans le domaine spécialisé des algèbres d'opérateurs. J'essaierai ensuite de montrer le rôle en géométrie de ces mêmes algèbres d'opérateurs. J'aborderai, enfin, les problèmes attachés à la notion usuelle d'espace géométrique quand on essaie de réconcilier la théorie quantique et la relativité.

I. *Heisenberg et l'algèbre non commutative des quantités physiques associées à un système microscopique.*

La classification des corps simples dans le tableau périodique de Mendeleïev est sans doute le résultat le plus marquant de la chimie du XIX^e^ siècle. L'explication théorique de cette classification par l'équation de Schrödinger et le principe d'exclusion de Pauli, est un succès équivalent de la physique du XX^e^ siècle et plus précisément de la mécanique quantique. On peut envisager cette théorie de points de vue très différents. Avec Planck, elle a pour origine la thermodynamique et se manifeste par la discrétisation des niveaux d'énergie des oscillateurs. Avec Bohr, c'est la discrétisation du moment angulaire. Pour de Broglie et Schrödinger, c'est l'aspect ondulatoire de la matière. Ces divers points de vue sont tous des corollaires de celui de Heisenberg : *l'algèbre non commutative des quantité physiques.* Mon premier but sera de montrer combien ce dernier point de vue est proche de la réalité expérimentale.

Vers la fin du XIX^e^ siècle, de nombreux travaux expérimentaux ont permis de déterminer avec précision les raies du spectre d'émission des atomes qui composent les corps simples. On considère un tube de Geissler rempli d'un gaz tel que l'hydrogène. La lumière émise par le tube est analysée à l'aide d'un spectromètre, le plus simple étant le prisme, et l'on obtient un certain nombre de raies, indexées par leurs longueurs d'onde. La configuration ainsi obtenue est la source la plus directe d'information sur la structure atomique. Elle ne dépend que du corps simple considéré et le caractérise. Il est donc essentiel de trouver les régularités qui apparaissent dans ces configurations ou *spectres atomiques*. C'est l'hydrogène qui, conformément au tableau de Mendeleïev, a le spectre le plus simple.

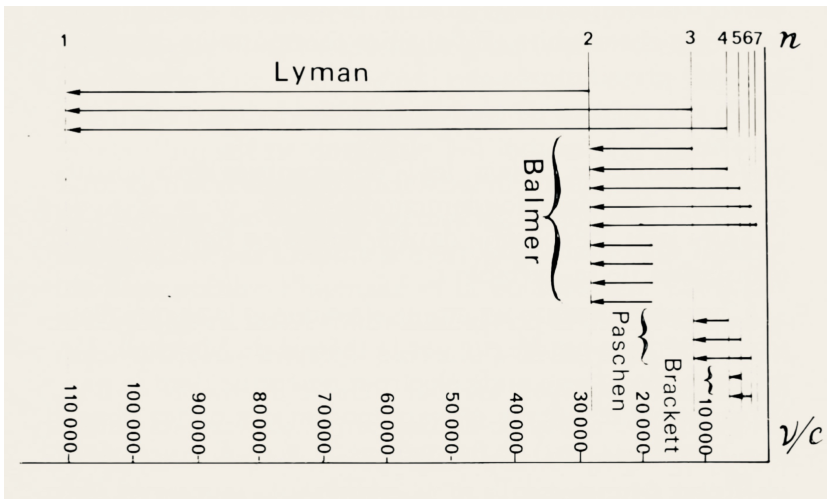
L'expression numérique de la régularité des raies $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, \ldots$ a été obtenue par Balmer en 1885 sous la forme :

$$H_\alpha = 9/5L, H_\beta = 16/12, H_\gamma = 25/21L, H_\delta = 36/32L$$

où la longueur L vaut approximativement $3645,6 \times 10^{-8}$ cm. Autrement dit, les longueurs d'onde ci-dessus sont de la forme $\lambda = \dfrac{n^2}{n^2-4}L$ où n est un entier égal à 3, 4, 5 ou 6.

Vers 1890, Rydberg montra que pour des atomes complexes, les raies du spectre peuvent se classifier en séries, chacune d'elles étant de la forme $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{R}{m^2} - \dfrac{R}{n^2}$ avec n et m entiers, m fixe.

Ici, $R = 4/L$ est la constante de Rydberg. De cette découverte expérimentale on déduira que, d'une part la fréquence $\nu = c/\lambda$ est un paramètre plus naturel que la longueur d'onde λ pour indexer les raies du spectre, et d'autre part que le spectre est un ensemble de différences, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble I de fréquences tel que le spectre soit l'ensemble des différences $\nu_{ij} = \nu_i - \nu_j$ entre des couples arbitraires ν_i, ν_j d'éléments de I. Cette propriété montre que l'on peut combiner les fréquences ν_{ij} et ν_{jk} pour en obtenir une troisième $\nu_{ij} + \nu_{jk} = \nu_{ik}$. Ce corollaire important est le principe de composition de Ritz Rydberg, le spectre est doté naturellement d'une loi de composition partiellement définie, la somme de certaines fréquences du spectre est encore une fréquence du spectre.



Or ces résultats expérimentaux ne pouvaient s'expliquer dans le cadre de la physique théorique du XIXe siècle, basée sur la mécanique de Newton et l'électromagnétisme de Maxwell. En effet si l'on applique la conception classique de la mécanique au niveau microscopique, un atome est alors décrit mathématiquement par l'espace des phases et l'Hamiltonien. L'espace des phases X est une variété symplectique dont les points sont les «états» du système. L'Hamiltonien H est une fonction sur X qui intervient pour spécifier l'évolution de toute quantité physique observable, i. e. de toute fonction f sur X, par l'équation

$$\frac{d}{dt} f = \{H, f\}$$

où $\{\ \}$ désigne le crochet de Poisson.

Dans les bons cas, comme par exemple pour le modèle planétaire de l'atome d'hydrogène, le système dynamique obtenu est totalement intégrable. Cela signifie qu'il a suffisamment de «constantes du mouvement» pour qu'en les spécifiant on réduise le système à un mouvement presque périodique. La description d'un tel système se fait très simplement, en effet, d'une part l'algèbre des quantités observables est l'algèbre commutative des séries presque périodiques :

$$q(t) = \Sigma_{q_{n_1,\ldots,n_k}} \exp 2\pi i \langle n, \nu \rangle \; t$$

où les n_i sont des entiers, les ν_i des nombres récl positifs appelés fréquences fondamentales et $\langle n, \nu \rangle = \sum \; n_i \; \nu_i$. D'autre part, l'évolution dans le temps est donnée par la translation de la variable t.

L'interaction entre un atome classique et le champ électromagnétique est décrite par la théorie de Maxwell. Un tel atome émet une onde électromagnétique dont la partie radiative se calcule en superposant des ondes planes $W_n, n = (n_1, \ldots, n_k)$ de fréquences $\langle n, \nu \rangle = \sum \; n_i \; \nu_i$, et dont l'amplitude et la polarisation se calculent simplement à partir de l'observable fondamentale qui est le moment dipolaire.

Le moment dipolaire Q a trois composantes Q_x, Q_y et Q_z qui sont chacune des quantités observables :

$$Q_x(t) = \Sigma q_{x,n} \; \exp \, 2\pi i \; \langle n, \nu \rangle t$$

et qui donnent l'intensité de la radiation émise de fréquence $\langle n, \nu \rangle$ par l'égalité

$$I = \frac{dE}{dt} = \frac{2}{3c^3} \; |2\pi \langle n, \nu \rangle|^4 \; (|q_{x,n}|^2 \; + \; |q_{y,n}|^2 \; + \; |q_{z,n}|^2)$$

où c désigne la vitesse de la lumière.

Il en résulte en particulier que l'ensemble des fréquences des radiations émises est un sous-groupe additif $\Gamma \subset \mathbb{R}$ des nombres réels. Ainsi à chaque fréquence émise correspondent tous ses multiples entiers ou harmoniques.

En fait, la spectroscopie et ses nombreux résultats expérimentaux montre que ce dernier résultat théorique est contredit par l'expérience, l'ensemble des fréquences émises par un atome ne forme pas un groupe, il est faux que l'addition de deux fréquences arbitraires en soit encore une. Ce que dicte l'expérience c'est le principe de composition de Ritz Rydberg qui permet d'indexer les raies spectrales par l'ensemble Δ de tous les couples (i, j) d'éléments d'un même ensemble I d'indices. La théorie de Bohr en discrétisant artificiellement le moment angulaire de l'électron parvenait à prédire les fréquences des radiations émises par l'atome d'hydrogène mais était incapable d'en prédire l'intensité et la polarisation. C'est par une remise en cause fondamentale de la mécanique classique qu'Heisenberg est parvenu à ce but, et à aller bien au-delà de ce qu'avaient fait ses prédécesseurs. Cette remise en cause de la mécanique classique est à peu près la suivante : dans le modèle classique, l'algèbre des quantités physiques observables se lit directement à partir du *groupe* Γ des fréquences émises, c'est l'algèbre de convolution de ce groupe de fréquences. Comme Γ est un groupe commutatif, cette algèbre est commutative. Or dans la réalité on n'a pas affaire à un groupe de fréquences, mais à cause de la règle de composition de Ritz Rydberg, on a affaire au groupoïde $\Delta = \{(i, j); i, j \in I\}$ avec la règle de composition $(i, j).(j, k) = (i, k)$. L'algèbre de convolution garde encore un sens quand on passe d'un groupe à un groupoïde, et l'algèbre de convolution du groupoïde Δ n'est autre que *l'algèbre des matrices*, le produit de convolution s'écrit en effet

$$(a.b)_{(i,k)} = \sum_j a_{(i,j)} b_{(j,k)}$$

ce qui est identique à la règle de composition des matrices.

En remplaçant l'algèbre commutative de convolution du groupe Γ par l'algèbre non commutative de convolution du groupoïde Δ dicté par l'expérience, Heisenberg a remplacé la mécanique classique dans laquelle des quantités observables commutent deux à deux par la *mécanique des matrices*, dans laquelle des quantités observables aussi importantes que la position et le moment ne commutent plus. Dans la mécanique des matrices de Heisenberg, une quantité physique observable est donnée par ses coefficients $q_{(i,j)}$ indexés par le groupoïde Δ et l'évolution dans le temps d'une observable est donnée par l'homomorphisme $(i,j) \in \Delta \to \nu_{ij} \in \mathbb{R}$ de Δ dans $\mathbb{R}$, qui associe à chaque raie spectrale sa fréquence, on a :

$$(*) \qquad q_{(i,j)}(t) = q_{(i,j)} \exp 2\pi i(\nu_{ij})\, t$$

Cette formule est l'analogue de la formule classique

$$q_{n_1,\ldots,n_k}(t) = q_{n_1,\ldots,n_k} \exp 2\pi i\langle n, \nu\rangle\, t$$

Pour obtenir l'analogue de la loi d'évolution de Hamilton,

$$\frac{d}{dt}q = \{H, q\}$$

on définit une quantité physique particulière, H, qui joue le rôle de l'énergie classique et est donnée par ses coefficients $H_{(i,j)}$, avec :

$$H_{(i,j)} = 0 \text{ si } i \neq j, H_{(i,i)} = h\nu_i \text{ où } \nu_i - \nu_j = \nu_{ij} \forall i, j \in I$$

où h est la constante de Planck qui permet de convertir fréquences en énergies. On voit que H est définie uniquement à addition près d'un multiple de la matrice identité et de plus la formule (*) ci-dessus est équivalente à

$$(**) \qquad \frac{d}{dt}q = \frac{2\pi i}{h}(Hq - qH).$$

Cette équation est semblable à celle de Hamilton qui utilisait les crochets de Poisson. Elle est en fait encore plus simple puisqu'elle n'utilise que le produit des observables, et plus spécifiquement le commutateur, $[A, B] = AB - BA$ qui joue le rôle que jouait le crochet de Poisson en mécanique Hamiltonienne. Par analogie avec la mécanique classique, on impose aux observables q de position et p de moment de vérifier $[p, q] = i\hbar$ où $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$. La forme algébrique simple de l'énergie classique comme fonction de p et q donne alors l'équation de Schrödinger pour déterminer l'ensemble $\{\nu_i, i \in I\}$ ou spectre de H.

II. ***État statistique d'un système macroscopique et mécanique statistique quantique.***

Un centimètre cube d'eau contient un nombre considérable, de l'ordre de $N = 10^{23}$, de molécules d'eau agitées d'un mouvement incessant. La description détaillée du mouvement de chaque molécule, de même que la connaissance précise de l'état microscopique du système, n'est pas nécessaire pour déterminer les résultats des observations macroscopiques. En mécanique statistique classique, un état microscopique du système est représenté par un point de l'espace des phases qui est de dimension $6N$ pour N molécules ponctuelles. Un état statistique est décrit non par un point de l'espace des phases mais par une mesure μ sur cet espace qui à chaque obervable f associe sa valeur moyenne

$$\int f \, d\mu$$

Pour un système maintenu à température fixe en le plongeant dans un thermostat, la mesure μ est appelée ensemble canonique de Gibbs et est donnée par une formule qui invoque l'Hamiltomien H du système et la mesure de Liouville qui provient de la structure symplectique de l'espace des phases. On pose

$$d\mu = \frac{1}{Z} e^{-\beta H} \times \text{ Mesure de Liouville}$$

où $\beta = 1/kT$, T étant la température absolue et k la constante de Boltzmann qui vaut environ $1,38 \times 10^{-23}$ joules par degré Kelvin.

Les grandeurs thermodynamiques telles que l'entropie ou l'énergie libre se calculent en fonction de β et d'un petit nombre de paramètres macroscopiques introduits dans la formule qui donne l'Hamiltomien H. Pour un système fini l'énergie libre est une fonction analytique de ces paramètres. Pour un système infini des discontinuités apparaissent, ce qui correspond au phénomène de transition de phase. La démonstration rigoureuse, à partir de la formule mathématique qui spécifie H, de l'absence ou de l'existence de ces discontinuités est une branche difficile de l'analyse mathématique.

Mais, comme nous l'avons vu, la description microscopique de la matière ne peut se faire sans la mécanique quantique. Considérons, pour fixer le idées, un solide ayant un atome en chaque maille d'un réseau cristallin $\mathbb{Z}^3$. L'algèbre des grandeurs physiques observables associées à chaque atome $x = (x_1, x_2, x_3)$ est une algèbre de matrices Q_x et si l'on suppose pour simplifier que ces atomes sont de même nature et ne peuvent occuper qu'un nombre fini n d'états quantiques, on a alors $Q_x = M_n(\mathbb{C})$ pour tout x. Soit alors Λ une partie finie du réseau, l'algèbre Q_Λ des grandeurs physiques observables pour le système formé par les atomes contenus dans Λ, est donnée par le produit tensoriel

$$Q_\Lambda = \bigotimes_{x \in \Lambda} Q_x$$

L'Hamiltonien H_Λ de ce système fini est une matrice autoadjointe $H_\Lambda \in Q_\Lambda$ Q_n qui est typiquement de la forme :

$$H_\Lambda = \sum_{x \in \Lambda} H_x + \lambda H_{\text{int}}$$

où le premier terme correspond à l'absence d'interactions entre atomes distincts et où λ est une constante de couplage qui gouverne l'intensité de l'interaction. Un état statistique du système fini Λ est donné par une forme linéaire Φ qui associe à toute observable $A \in Q_\Lambda$ sa valeur moyenne $\Phi(A)$ et qui a les mêmes propriétés de positivité et de normalisation qu'une mesure de probabilité μ, à savoir

α) *Positivité* : $\Phi(A^*A) > 0 \quad \forall A \in Q_\Lambda$

β) *Normalisation* : $\Phi(1) = 1$

Si l'on maintient le système à température fixe égale à T, l'état d'équilibre est donné par l'analogue quantique de la formule ci-dessus

$$\Phi_\Lambda(A) = \frac{1}{Z}\mathrm{trace}(e^{-\beta H_\Lambda}A) \quad \forall A \in Q_\Lambda$$

où l'unique trace sur l'algèbre Q_Λ remplace la mesure de Liouville. Comme en mécanique statistique classique, les phénomènes intéressants se manifestent quand on passe à la limite thermodynamique, c'est-à-dire quand $\Lambda \to \mathbb{Z}^3$. Un état du système infini est donné par la famille (Φ_Λ) de ses restrictions aux systèmes finis indexés par Λ, on obtient ainsi toutes les familles (Φ_Λ) telles que :

a) Pour tout Λ, Φ_Λ est un état sur Q_Λ

b) Pour $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, la restriction de Φ_{Λ_2} à Q_{Λ_1} est égale à Φ_{Λ_1}.

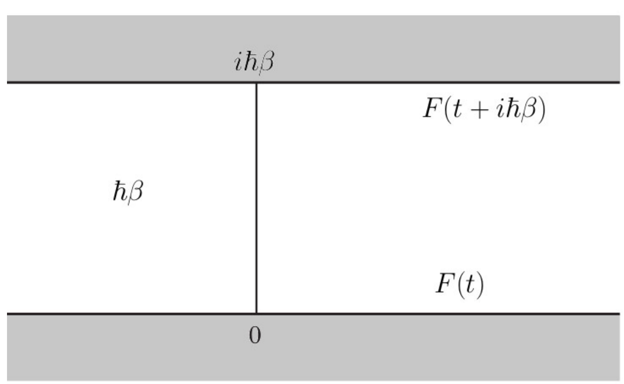
En général la famille Φ_Λ définie ci-dessus à partir de $\exp(-\beta H_\Lambda)$ ne vérifie pas la condition b) et il est nécessaire de mieux comprendre la notion d'état d'un système infini. C'est ici que les C^* algèbres font leur apparition : En effet, si l'on prend la limite inductive Q des C^* algèbres de dimension finie Q_Λ on obtient une C^* algèbre qui a la propriété suivante :

Un état arbitraire Φ sur Q est donné par une famille (Φ_Λ) vérifiant les conditions a) et b). Ainsi les familles (Φ_Λ) vérifiant a) et b), c'est-à-dire les états du système infini sont en correspondance bijective naturelle avec les états de la C^* algèbre Q. De plus, la famille H_Λ détermine de manière unique un groupe à un paramètre (α_t) d'automorphismes de la C^* algèbre Q par l'égalité :

$$\frac{d}{dt}\alpha_t(A) = \mathrm{Lim}_{\Lambda\to\mathbb{Z}^3}\frac{2\pi i}{h}[H_\Lambda, A] \qquad A \in \cup\, Q_\Lambda$$

Ce groupe à un paramètre donne l'évolution dans le temps des observables du système infini données par les éléments A de Q, et est calculé par passage à la limite à partir de la formule de Heisenberg. Pour un système fini, maintenu à température T, la formule donne l'état d'équilibre de manière unique en fonction de H_Λ, mais à la limite thermodynamique on ne peut avoir de correspondance trop simple entre l'Hamiltonien du système, ou si l'on préfère le groupe d'évolution dans le temps, et l'état d'équilibre de ce système. En effet, lors des transitions de phases, des états distincts peuvent coexister, ce qui exclut l'unicité de l'état d'équilibre en fonction du groupe (α_t). Il est impossible de donner une formule simple qui définirait de manière univoque l'état d'équilibre en fonction du groupe à un paramètre (α_t). Il existe par contre une relation entre un état Φ sur Q et le groupe à un paramètre (α_t) qui ne spécifie pas toujours uniquement Φ connaissant (α_t) mais qui est l'analogue de la formule. Cette relation est *la condition de Kubo-Martin-Schwinger* : étant donné T, un état Φ sur Q et le groupe à un paramètre (α_t) d'automorphismes de Q vérifient la condition KMS si et seulement si pour tout couple A, B d'éléments de Q il existe une fonction $F(z)$ holomorphe dans la bande $\{z \in \mathbb{C} \,; \mathrm{Im}\ z \in [0, \hbar\beta]\}$ où $\beta = \dfrac{1}{kT}$, telle que

$$\begin{aligned} F(t) &= \Phi(A\ \alpha_t(B)) && \forall t \in \mathbb{R} \\ F(t\ +\ i\,\hbar\beta) &= \Phi(\alpha_t(B)A) && \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



Ici t est un paramètre de temps, de même que $\hbar\beta$ qui pour $T = 1000°$ Kelvin vaut environ 10^{-8} secondes.

Cette condition permet de formuler mathématiquement en mécanique statistique quantique le problème de la coexistence de phases distinctes à température T donnée, c'est-à-dire le problème de l'unicité de Φ, étant donné (α_t) et β. Cette même condition a joué un rôle essentiel dans la théorie modulaire des algèbres d'opérateurs et est ainsi devenue un point d'interaction indiscutable entre physique théorique et mathématiques pures.

III. *Théorie de Tomita et classification des facteurs hyperfinis.*

Entre 1957 et 1967, un mathématicien japonais Minoru Tomita, motivé en particulier par l'analyse harmonique des groupes localement compacts non unimodulaires a démontré un théorème d'une importance considérable pour la théorie des algèbres de von Neumann. Une telle algèbre est une sous-algèbre involutive de l'algèbre des opérateurs dans un espace de Hilbert h, qui a la propriété d'être le commutant de son commutant $(M')' = M$.

Théorème de Tomita. Soient M une algèbre de von Neumann dans l'espace de Hilbert h et $\xi \in h$ un vecteur tel que $M\xi$ et $M'\xi$ soient denses dans h. Soit S l'opérateur $x\xi \to x^*\xi \quad \forall x \in M$ alors,

1) *S est fermable et $S^{-1} = S$.*

2) *La phase J de S vérifie $JMJ = M'$.*

3) *Le module Δ de S vérifie $\Delta^{it}\, M\, \Delta^{-it} = M \quad \forall t \in \mathbb{R}$.*

Ainsi à tout état φ sur M on associe un groupe à un paramètre σ_t^φ d'automorphismes de M, le groupe *d'automorphismes modulaires* de φ. C'est exactement en ce point que se produit l'interaction entre physique théorique et mathématiques pures, en effet, M. Takesaki et M. Winnink ont montré simultanément que le lien entre l'état φ et le groupe à un paramètre σ_{-t}^φ du théorème de Tomita est exactement la condition KMS pour $\hbar\beta = 1$.

Le théorème de Tomita s'est montré d'une importance considérable pour démarrer la classification des facteurs, ainsi que les travaux de R. Powers, d'Araki et Woods sur les facteurs produits tensoriels infinis, i. e. ceux qui proviennent de systèmes statistiques quantiques sans interaction.

Une algèbre de von Neumann M est loin d'avoir un seul état φ, ce qui fait que seules les propriétés de σ_t^φ qui ne dépendent pas du choix de φ ont une véritable signification pour M. Le second résultat important est le suivant *Théorème.* $\forall \varphi, \psi$ *états sur* M. *Il existe un 1-cocycle canonique* $t \to U_t \in M$ *avec*

$$\sigma_t^\psi(x) = U_t \sigma_t^\varphi(x)\, U_t^* \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

De plus, $\left(\frac{d}{dt} U_t\right)_{t=0}$ coïncide :

1) Dans le cas commutatif avec la dérivée de Radon Nikodym $\log d\psi/d\varphi$.
2) Dans le cas de la mécanique statistique avec la différence des Hamiltoniens correspondants à deux états d'équilibre.

Corollaire.

a) *Étant donnée une algèbre de von Neumann* M *il existe un homomorphisme* δ *canonique de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathrm{Out}\, M = \mathrm{Aut}\, M / \mathrm{Int}\, M$
b) $Ker\ \delta = T(M)$ *est un invariant de* M.
c) $Sp\ \delta = S(M) = \cap\, Sp\ \Delta_\varphi$.

Ainsi les algèbres de von Neumann sont des objets *dynamiques*, une telle algèbre a automatiquement un groupe de classe d'automorphismes, paramétré par $\mathbb{R}$, et qui est trivial si et seulement si l'algèbre n'est pas de type III. Dix-sept ans après le théorème de Tomita, nous disposons d'une classification complète de toutes les algèbres de von Neumann hyperfinies. Au lieu de donner une définition de cette classe notons simplement que

1) Si G est un groupe de Lie connexe et $\pi \in \mathrm{Rep}\, G$ une représentation unitaire de G alors $\pi(G)'$ est hyperfinie.
2) Si Γ est un groupe discret moyennable, et $\pi \in\ \mathrm{Rep}\, \Gamma$ alors $\pi(\Gamma)'$ est hyperfinie.

3) Si A est une C^* algèbre limite inductive d'algèbres de dimension finie et $\pi \in \mathrm{Rep}\, A$ alors $\pi(A)''$ est hyperfinie.

De plus, toute algèbre de von Neumann hyperfinie apparaît déjà dans chacune des listes 1) 2) et 3). La classification des algèbres de von Neumann hyperfinies est d'abord ramenée en écrivant $M = \int_{\oplus} M_t d\mu(t)$ à celle des facteurs, i.e. Centre $M = \mathbb{C}$. Elle est alors la suivante,

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{I_n} & M = M_n(\mathbb{C}) \\
\mathrm{I}_\infty & M = L(h) \\
\mathrm{II}_1 & R = \mathrm{Cliff(E), E\ espace\ Euclidien} \\
\mathrm{II}_\infty & R_{0,1} = R \otimes \mathrm{I}_\infty \\
\mathrm{III}_\lambda & R_\lambda = \otimes_{\lambda=1}^{\infty}(M_2(\mathbb{C}), \varphi_\lambda) \\
\mathrm{III}_1 & R_\infty = R_{\lambda_1} \otimes R_{\lambda_2} \qquad \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_1/\lambda_2 \notin Q \\
\mathrm{III}_0 & R_W W \text{ flot ergodique}
\end{array}
$$

Le cas III_1 était le seul qué restait à élucider. U. Haagerup a montré récemment que tous les facteurs hyperfinis de type III_1 sont isomorphes.

IV. *Rôle des algèbres d'opérateurs en géométrie.*

Quand on spécialise la théorie des algèbres de von Neumann au cas très simple des *algèbres commutatives* on obtient la théorie de la mesure au sens de Lebesgue. Plus précisément, toute algèbre de von Neumann commutative M dans l'espace de Hilbert (séparable) h est engendrée par un opérateur autoadjoint H et M est le bicommutant de H.

$$
\begin{aligned}
&M = \{H\}'' = \{T \in L(h), UTU^{-1} = T \qquad \forall U, U \in L(h)\} \\
&U^*U = UU^* = 1, UHU^{-1} = H
\end{aligned}
$$

De plus, pour toute fonction borélienne bornée f sur $X = \mathrm{Sp}\ H \subset \mathbb{R}$, l'opérateur $f(H)$ a un sens, comme limite faible de polynômes $P(H)$, et s'annule si et seulement si f est nulle presque partout pour la *mesure spectrale* de H. On obtient de cette manière un isomorphisme entre M et l'algèbre des fonctions mesurables essentiellement bornées sur le spectre de H. La théorie générale des algèbres de von Neumann apparaît ainsi comme un analogue non commutatif de la théorie de Lebesgue. L'importance mathématique de la théorie générale des algèbres de von Neumann résulte de l'existence d'espaces naturels pour lesquels la théorie de Lebesgue est inadaptée, et conduit à considérer de tels espaces comme pathologiques. La théorie des algèbres de von Neumann permet par contre de traiter la théorie de la mesure de ces espaces de manière très satisfaisante. Le prototype d'un tel espace est l'espace X des solutions d'une équation différentielle ou feuilles d'un feuilletage. Pour fixer les idées, considérons un exemple, le feuilletage de Kronecker $dy = \theta dx$ sur le tore T^2. Si l'on essaye d'analyser cet espace, du point de vue de la théorie de la mesure, comme un espace ordinaire, on obtient un résultat pathologique : toute fonction mesurable f de X dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est presque partout égale à une constante. Ainsi $L^\infty(X, \mu)$ ou $L^p(X, \mu)$ sont réduits à $\mathbb{C}$ et ne distinguent en rien l'espace X d'un point. En fait, à X correspond une algèbre de von Neumann non triviale dont le *centre* est réduit à $\mathbb{C}$. Alors qu'il n'est pas possible de construire une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ qui soit mesurable et non presque partout constante, il est très facile de construire une application q qui à chaque $x \in X$ associe un opérateur q_x das l'espace L^2 de la feuille indexée par x et qui soit :

a) Mesurable.
b) Non presque partout constante.

On obtient une algèbre de von Neumann en utilisant les règles algébriques évidentes,

$$(pq)_x = p_x q_x \qquad \forall x \in X$$
$$(p^*)_x = p_x^* \qquad \forall x \in X$$

et la norme : $\|p\| = \text{Sup essentiel}_{x \in X} \|p_x\|$. Dans l'exemple indiqué, l'algèbre de von Neumann est le facteur hyperfini $R_{0,1}$ quand $\theta \notin \mathbb{Q}$. Le facteur R_∞ de type III_1 apparaît dans l'exemple du feuilletage d'Anosov associé à une surface de Riemann de genre > 1. La théorie de la dimension de Murray et von Neumann permet de mesurer (dans le cas où l'algèbre de von Neumann est de type II) par un nombre réel positif, la dimension de l'espace des solutions L^2 d'une équation aux dérivées partielles elliptique le long des feuilles du feuilletage. Des entiers tels le nombre de pôles moins le nombre de zéros pour des fonctions méromorphes sur des variétés compactes sont alors remplacés par des densités, qui sont des nombres réels. En particulier, la *dimension continue* de Murray et von Neumann acquiert sa vraie signification de *densité de dimension*, très éloignée par exemple des dimensions de Hausdorff.

Mais des espaces tels que l'espace des feuilles d'un feuilletage ci-dessus ont en fait une structure beaucoup plus riche et rigide que celle qui leur est donnée par la théorie de la mesure, Dans la hiérarchie des moyens qui sont à notre disposition pour analyser un espace classique, la théorie de la mesure occupe en effet la place la plus primitive. Un espace ordinaire n'acquiert de connexité, de linéarité infinitésimale, et de géométrie que grâce aux théories suivantes :

- (2) Topologie algébrique.
- (3) Variétés différentiables.
- (4) Géométrie Riemannienne.

Pour pouvoir adapter valablement ces trois outils aux espaces qui nous intéressent, il était nécessaire de disposer d'exemples à la fois simples, non triviaux et suffisamment généraux, possédant manifestement l'analogue de (2) (3) et (4). Outre les espaces de feuilles de feuilletages de tels exemples proviennent de :

a) Groupes discrets.

b) Action d'un groupe de Lie (compact ou non) sur une variété.

Il n'est raisonnable de parler de l'espace, au sens classique, ensembliste, du terme, des représentations irréductibles d'un groupe (discret) Γ que quand ce groupe est de type I. Or, cela n'arrive, en supposant que Γ est de type fini, que si Γ contient un sous-groupe normal commutatif d'indice fini. Quand le groupe Γ est commutatif, l'espace X dual de Γ est un espace compact dont la topologie est entièrement décrite grâce au théorème de Gel'fand par la C^* algèbre $C(X)$ des fonctions continues à valeur complexes sur X. Or, cette C^* algèbre est égale à la C^* algèbre de convolution $C^*(\Gamma)$. Quand Γ n'est pas de type I, l'espace X est pathologique si on lui applique les concepts classiques de la topologie, mais il est facile de voir pour le produit semi-direct $\Gamma = \mathbb{Z}^2 \times_\alpha \mathbb{Z}, \alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ que l'on a bien une algèbre associée à un feuilletage. Le rôle de la K-théoric de la C^* algèbre $C^*(\Gamma)$ dans la théorie de l'homotopie des variétés non simplement connexes a été mis en évidence par les mathématiciens russes Miscenko et Kasparov. La signature Γ-équivariante est ainsi un élément de $K_0(C^*(\Gamma))$ qui est un invariant d'homotopie ($\Gamma = \pi_1(M)$). Ils ont aussi réussi à démontrer, quand Γ est un sous-groupe discret d'un groupe de Lie, la conjecture de Novikov : si M est un espace $K(\Gamma, 1)$ et $Y \xrightarrow{f} M$ une application continue, la signature

$$\sigma = \text{Signature } f^{-1}(N)$$

pour tout cycle $N \subset M$ est inchangée si l'on remplace (Y, f) par un couple (Y', f') homotope.

La K-théorie de la C^* algèbre associée à un feuilletage permet par exemple de distinguer entre eux les feuilletages de Kronecker pour différentes valeurs de θ (modulo $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ et joue un rôle crucial dans le théorème de l'indice pour les opérateurs elliptiques le long des feuilles [1]. Dans des exemples simples, elle rend très bien compte de la structure topologique du feuilletage, on dispose d'une flèche μ de la K-homologie du quotient d'homotopie vers la

1. Résultat obtenu en collaboration avec G. Skandalis.

K-théorie de la C^* algèbre, et c'est un isomorphisme dans tous les exemples calculés jusqu'à présent. Ainsi, dans 2) c'est la K-théorie qui joue le rôle central, et en fait la K-théorie bivariante de Kasparov. En ce qui concerne 3), nous possédons maintenant l'analogue non commutatif des notions de *courants de de Rham et d'homologie*, grâce à la cohomologie cyclique. Cette notion permet en particulier de définir le cycle fondamental de l'espace des feuilles d'un feuilletage transversalement orienté. Les classes caractéristiques secondaires, tel que l'invariant de Godbillon-Vey, font alors leur apparition dans la cohomologie cyclique de l'algèbre du feuilletage : le cycle fondamental C de l'espace des feuilles n'est pas en général invariant par le groupe d'automorphismes modulaires (σ_t) de l'algèbre, mais en codimension 1 sa dérivée seconde est nulle

$$\frac{d}{dt}(\text{ Cycle fondamental}) \neq 0, \quad \frac{d^2}{dt^2}\, C = 0.$$

L'invariant de Godbillon-Vey apparaît alors comme le cycle

$$GV = i_x \frac{d}{dt}\, C.$$

obtenu par contraction de la dérivée première $\frac{d}{dt}\, C$ par le générateur X du groupe d'automorphismes modulaires.

Comme application, on obtient immédiatement que si $GV \neq 0$, l'algèbre de von Neumann associée a une composante non-triviale de type III, résultat très technique de S. Hurder. De plus, l'aspect linéarisation infinitésimale qui était la caractéristique de 3) le reste encore mais à un autre niveau, en effet, les résultats de Loday et Quillen montrent que la cohomologie cyclique est la partie indécomposable de la cohomologie de *l'algébre de Lie* du groupe GL de l'algèbre en question. Si l'on veut mieux que la partie linéarisée du caractère de Chern d'un élément de K-homologie, on doit alors invoquer la K-théorie algébrique. On obtient ainsi, pour tout module de Fredholm $(H, F) \in \ell^{\mathrm{n}}(A)$ une flèche de $K^{\mathrm{alg}}_{n+1}(A)$ vers C^*. Dans le cas très simple où $A = C^\infty(S^1)$ et (H, F) est l'extension de Toeplitz, on obient l'extension centrale du groupe de lacets qui apparaît, par exemple, dans les travaux de G. Segal et G. Wilson. Quand on cherche à expliciter cette flèche pour le module de Fredholm associé à l'opérateur de Dirac, on tombe exactement sur la deuxième quantification du champ des spineurs ; mais la dificulté de manipulation de la K-théorie algébrique au-delà de K_3 limite encore notre compréhension aux dimensions 1 et 2. C'est l'apparition de la théorie des champs dans ce problème et en particulier l'égalité entre le groupe de jauge : $C^\infty(X, U_N)$ et le groupe unitaire $U(M_N(C^\infty(X))$ qui conduisent à un certain nombre de réflexions sur la nature de l'algèbre A des fonctions de classe C^∞ sur l'espace X quand on aborde le problème de l'interaction entre la relativité générale et la mécanique quantique.

Je terminerai donc sur deux remarques simples :

1) L'espace X n'intervient que a) pour définir l'espace *linéaire* des données de Cauchy pour Les champs classiques en $t = 0$ et b) pour définir le groupe de jauge U. Cela n'utilise en rien la commutativité de A.

2) La relativité, la gravitation et la mécanique quantique spécifient une grandeur, de l'ordre de 10^{-33} cm, au-delà de laquelle la notion de *point* de l'espace devient illusoire. Quel modèle plus simple peut-on donner de ce phénomène que celui de supposer que l'algèbre A n'est pas strictement commutative, comme l'algèbre A_θ. Or, il existe une généralisation naturelle de la géométrie Riemannienne pour laquelle l'algèbre des fonctions n'est plus commutative. C'est en particulier cette généralisation et ses rapports avec la physique que j'ai l'intention d'explorer dans un avenir proche.

Une nouvelle preuve du théorème de Morley

Alain Connes

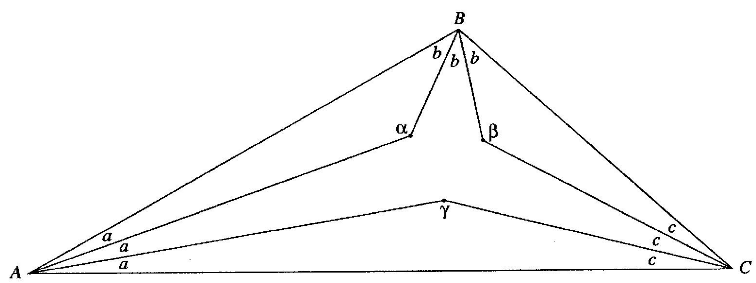
Cela fait maintenant 22 ans que l'IHÉS m'a offert l'hospitalité. J'ai appris ici la plupart des mathématiques que je connais, principalement grâce à des conversations impromptues au déjeuner avec des visiteurs ou des membres permanents.

Quand je suis arrivé, j'étais obnubilé par mon propre travail et j'ai éprouvé un sentiment d'humilité en réalisant à quel point je comprenais peu ce dont il était alors question dans les discussions habituelles. Dennis Sullivan prit soin de moi, et me donna un cours rapide en géométrie qui a influencé ma manière de penser pour le reste de ma vie.

C'est aussi à Bures, grâce aux physiciens, que j'ai compris la véracité d'une phrase de J. Hadamard sur la profondeur des concepts mathématiques venant de la physique :

"Non cette nouveauté à la vie courte qui trop souvent ne peut influencer que le mathématicien rivé à ses propres préoccupations, mais cette nouveauté infiniment féconde qui jaillit de la nature des choses."

Pour donner un peu l'esprit de l'atmosphère de compétition conviviale caractéristique de l'IHÉS, j'ai choisi l'exemple spécifique d'une conversation que nous avons eue lors d'un déjeuner au printemps dernier et qui m'a amené à un nouveau résultat amusant.



Vers 1899, F. Morley prouva un théorème remarquable sur la géométrie élémentaire des triangles Euclidiens :

"Etant donné un triangle A, B, C, les intersections 2 à 2, α, β, γ des trissectrices sont les sommets d'un triangle équilatéral" (*cf.* Fig. 1).

L'un de nous mentionna ce résultat pendant le déjeuner et l'attribua (par erreur) à Napoléon. Bonaparte avait effectivement étudié les mathématiques dans son jeune âge et, en plus d'apprendre l'anglais, il enseignait les mathématiques au fils de Las Cases pendant son exil de Sainte Hélène à Longwood.

C'était la première fois que j'entendais parler du résultat de Morley et quand je suis rentré chez moi, suivant l'un des conseils de Littlewood, j'ai commencé à chercher une preuve, non pas dans les livres mais dans ma tête. Ma seule motivation en plus de la curiosité était le challenge évident "c'est l'un des rares exploits de Bonaparte auquel je devrais pouvoir m'attaquer". Après quelques tentatives infructueuses, j'ai vite réalisé que les intersections de trissectrices consécutives sont les points fixes de produits

1. Ce texte provient de l'ouvrage fêtant les 40 ans de l'IHÉS intitulé Les relations entre les mathématiques et la physique théorique, IHÉS, 1998, p. 43-46

2. Collège de France, Paris, et IHÉS, 91440 Bures-sur-Yvette, France.

de 2 rotations g_i autour des sommets du triangle (rotations d'angles égaux à deux tiers des angles correspondant du triangle). Il était alors naturel de chercher la symétrie g du triangle équilatéral comme un élément du groupe Γ engendré par les trois rotations g_i. Maintenant, il était facile de construire un exemple (en géométrie sphérique) qui montre que le théorème de Morley ne peut s'appliquer en géométrie non-euclidienne, de telle façon que la preuve devait utiliser des propriétés euclidiennes particulières du groupe des isométries.

Du coup, je passais quelque temps à essayer de trouver une formule de g en fonction des g_i, en utilisant la construction simple (toute isométrie d'angle $2\pi/n, n \geq 2$ est automatiquement d'ordre n), de plein d'éléments d'ordre 3 dans le groupe Γ, comme $g_1g_2g_3$. Après beaucoup d'efforts, je réalisais que c'était en vain (*cf.* Rem. 2 ci-dessous) et que le groupe qui intervient est le groupe affine de la droite, plutôt que le groupe d'isométrie du plan.

Le but de cette courte note est de donner une preuve conceptuelle du théorème de Morley comme propriété théorique du groupe de l'action du groupe affine sur la droite. Il sera valide pour tout corps (commutatif) k (de caractéristique arbitraire, même si en caractéristique 3, l'hypothèse du théorème ne peut être remplie). Ainsi soit k un tel corps et G le groupe affine sur k, en d'autres termes, le groupe des matrices 2×2 $g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ où $a \in k, a \neq 0, b \in k$. Pour $g \in G$, posons

$$\delta(g) = a \in k^*. \tag{1}$$

Par construction, δ est un morphisme de G dans le groupe multiplicatif k^* des éléments non nuls de k, et le sous-groupe $T = \text{Ker } \delta$ est le groupe des translations, i.e. le groupe additif de k. Chaque $g \in G$ dans G définit une transformation,

$$g(x) = ax + b \qquad \forall x \in k, \tag{2}$$

et si $a \neq 1$, elle admet un et un seul point fixe,

$$fix(g) = \frac{b}{1-a}. \tag{3}$$

Prouvons le simple fait suivant :

Théorème. Soient $g_1, g_2, g_3 \in G$ tels que g_1g_2, g_2g_3, g_3g_1 et $g_1g_2g_3$ ne sont pas des translations et posons $j = \delta(g_1g_2g_3)$. Les conditions suivantes sont équivalentes,

a) $g_1^3g_2^3g_3^3 = 1$.

b) $j^3 = 1$ et $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$ où $\alpha = fix(g_1g_2), \beta = fix(g_2g_3), \gamma = fix(g_3g_1)$.

Preuve. Posons $g_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. L'égalité $g_1^3g_2^3g_3^3 = 1$ est équivalente à $\delta(g_1^3g_2^3g_3^3) = 1$, et $b = 0$, où b est la partie translationnelle de $g_1^3g_2^3g_3^3$. La première condition est exactement $j^3 = 1$. Notons que $j \neq 1$ par hypothèse. Alors on a

$$b = \left(a_1^2 + a_1 + 1\right) b_1 + a_1^3 \left(a_2^2 + a_2 + 1\right) b_2 + (a_1a_2)^3 \left(a_3^2 + a_3 + 1\right) b_3. \tag{4}$$

Un calcul évident, en utilisant le fait que $a_1a_2a_3 = j$ donne,

$$b = -ja_1^2a_2(a_1 - j)(a_2 - j)(a_3 - j)(\alpha + j\beta + j^2\gamma), \tag{5}$$

où, α, β, γ sont les points fixes de

$$\alpha = \frac{a_1b_2 + b_1}{1 - a_1a_2}, \beta = \frac{a_2b_3 + b_2}{1 - a_2a_3}, \alpha = \frac{a_3b_1 + b_3}{1 - a_3a_1}. \tag{6}$$

Maintenant, $a_k - j \neq 0$ puisque par hypothèse, les produits deux à deux des g_j *ne sont pas* des translations. Ainsi, et quelque soit la caractéristique de k, nous obtenons que a) $\Leftrightarrow$ b).

Corollaire. Théorème de Morley.

Démonstration. Prenons $k = \mathbb{C}$ et définissons g_1 comme la rotation de centre A et d'angle $2a$, où $3a$ est l'angle BAC et de manière similaire pour g_2 et g_3. On a $g_1^3 g_2^3 g_3^3 = 1$ puisque chaque g_i^3 peut être exprimé comme le produit des symétries le long des côtés consécutifs. De plus, pour une raison similaire $\alpha = fix(g_1 g_2), \beta = fix(g_2 g_3), \gamma = fix(g_3 g_1)$ sont les intersections des trissectrices. Ainsi, de a) $\Rightarrow$ b), on obtient $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$ qui est une caractérisation classique des triangles équilatéraux.

Remarque 1. Sans altérer les cubes g_1^3, g_2^3, g_3^3, on peut multiplier chaque g_i par une racine cubique de 1, on obtient de cette manière les 18 triangles équilatéraux non-dégénérés des variantes du théorème de Morley.

Remarque 2. Nous montrerons maintenant qu'en général, la rotation g qui permute cycliquement les points α, β, γ n'appartient pas au sous-groupe Γ de G engendré par g_1, g_2, g_3. Sous l'hypothèse du théorème, on peut supposer que le corps k contient une racine cubique de l'unité non triviale, $j \neq 1$, et que de ce fait, sa caractéristique n'est pas égale à 3. La rotation qui permute cycliquement les points α, β, γ est ainsi l'élément de G donné par,

$$g = \begin{bmatrix} j & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, 3b = (1-j)(\alpha + \beta + \gamma). \tag{7}$$

Maintenant, pour tout élément $g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ du groupe Γ engendré par g_1, g_2, g_3, on a les polynômes de Laurent P_i en les variables a_j tels que,

$$b = b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 P_3. \tag{8}$$

Ainsi, en exprimant, avec les notations ci-dessus b_i en termes de α, β, γ,

$$\begin{array}{lllll} b_1 = (1+j)^{-1}\big(a_3^{-1} & (a_3 - j)\alpha - & (a_1 - j)\beta + a_1 & (a_2 - j)\gamma\big) \\ b_2 = (1+j)^{-1}\big(a_2 & (a_3 - j)\alpha + a_1^{-1} & (a_1 - j)\beta - & (a_2 - j)\gamma\big) \\ b_1 = (1+j)^{-1}\big(- & (a_3 - j)\alpha + a_3 & (a_1 - j)\beta + a_2^{-1} & (a_2 - j)\gamma\big) \end{array} \tag{9}$$

nous obtenons les polynômes de Laurent Q_i tel que,

$$b = (a_3 - j)\alpha Q_1 + (a_1 - j)\beta Q_2 + (a_2 - j)\gamma Q_3. \tag{10}$$

On peut alors supposer qu'on a trouvé des polynômes de Laurent Q_i tel que pour tout $a_1, a_2, a_3 \in k^*$, avec $a_1 a_2 a_3 = j$, et tout $\alpha, \beta, \gamma \in k$ avec $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$, l'identité suivante est vérifiée,

$$(1-j)(\alpha + \beta + \gamma) = 3((a_3 - j)Q_1 + (a_1 - j)\beta Q_2 + (a_2 - j)\gamma Q_3). \tag{11}$$

Nous choisissons alors $a_1 = j, a_2 = j, a_3 = j^2, \alpha = 0, \beta = -j, \gamma = 1$ et obtenons une contradiction. En passant au corps des fonctions sur k, cela suffit à démontrer que, en général, $g \notin \Gamma$.

CRITIQUES DE LIVRES

BULLETIN (Nouvelles séries)
de la Société américaine de Mathématiques
Volume 33, Numéro 4, Octobre 1996

Noncommutatine geometry, par Alain Connes, Academic Press, Paris, 1994, xiii+661 pp., ISBN 0-12-185860-X ; publié d'abord en français par les éditions InterEditions, Paris (Géométrie Non Commutative, 1990).

L'analyse abstraite est une des branches les plus jeunes des mathématiques, mais elle est maintenant assez envahissante. Pourtant, il n'y a pas si longtemps elle était considérée comme plutôt étrange. L'attitude générale des mathématiciens avant la seconde guerre mondiale peut être brièvement évoquée en racontant l'histoire suivante racontée par feu Norman Levinson. Pendant l'année post-doctorale de Levinson à Cambridge, alors qu'il étudiait avec Hardy, von Neumann est venu là donner une conférence. Hardy (représentant alors la quintessence de l'analyste classique) fit cette remarque après la conférence : "Bien sûr, ce jeune est très intelligent. Mais étaient-ce des *mathématiques* ?"

L'analyse abstraite est née dans les années 20 du défi que constituait la mécanique quantique et de la réponse apportée à ce défi par von Neumann et M. H. Stone. Le théorème de Stone-von Neumann (e.g., [1]), qui a spécifié la structure de la représentation unitaire générique des relations de Weyl, a établi l'équivalence des formalismes de la mécanique quantique de Heisenberg et de Schrödinger (il est intéressant que ces deux derniers ne l'aient jamais compris. La morale pourrait être que les physiciens rigoureux mathématiquement n'attendaient pas l'approbation des physiciens pratiques, aussi fondamental que soit leur travail). C'était le premier théorème non trivial de structure pour une représentation unitaire en dimension infinie d'un groupe non-commutatif et du coup, un prototype important de la théorie de la représentation des groupes de Lie en dimension infinie. Les écrits de Von Neumann montrent clairement qu'il avait compris l'importance de sa théorie pour la mécanique quantique, et il encouragea grandement son ami Wigner à développer la théorie dans le cas aisé du groupe de Poincaré. L'article de Wigner qui présente cela [2] vint après les travaux les plus référencés du vingtième siècle [1].

Von Neumann lui-même releva le défi plus grand encore de formaliser les mathématiques de la phénoménologie quantique. Avec Stone, il établit le théorème spectral dans un espace complexe de Hilbert et la théorie de l'extension des opérateurs hermitiens, qui fut largement un point culminant de la théorie des opérateurs hermitiens, et le fait qu'il ait eu la pré-science avec une vingtaine d'années d'avance, d'utiliser le terme "spectre", reste remarquable.

Peu de temps après, von Neumann prouva le théorème du double commutant [3], qui était à ce moment-là un problème frappant dans le contexte non-commutatif, et plus spécifiquement dans le champ de la mécanique quantique. L'article était hautement suggestif d'une théorie de dimension infinie comparable au théorème de structure de Wedderburn. Rétrospectivement, il marque le début de l'analyse abstraite et il a amené à la série classique des articles sur les *Anneaux d'opérateurs*, peut-être le travail majeur le plus original des mathématiques du vingtième siècle.

1. Une collection des travaux les plus référencés a été publiée par Springer des années après. Il est intéressant, et représentatif des relations entre les mathématiques et la physique, que l'article de Wigner ait été originellement soumis au journal de physique Springer. Il a été rejeté, et Wigner cherchait un journal de physique qui l'accepterait lorsque von Neumann lui dit de ne pas s'inquiéter, il réussit à le faire passer dans les Annales de mathématiques. Wigner fut content de cette offre (information verbale de Wigner).

Il y avait trois motivations principales pour la série des articles sur les “anneaux”, comme von Neumann les a appelés. La première était, c’est sûr, le défi posé par la mécanique quantique. En particulier, le caractère divergent de la théorie quantique des champs, bizarrement en contraste avec sa base intuitive simple, et von Neumann espérait réconcilier ces deux caractéristiques contrastées en trouvant le formalisme adéquat. Une seconde application potentielle d’importance était de structurer les représentations infini-dimensionnelles des groupes non abéliens, problème qu’il avait déjà résolu dans le cas du groupe de Heisenberg. Une troisième motivation était la généralisation des théorèmes de structure de Wedderburn.

Aujourd’hui, les divergences en théorie quantique des champs apparaissent comme des conséquences probables d’une géométrie très simple de l’espace-temps. Dans l’univers d’Einstein $R^1 \times S^3$, qui n’est pas un modèle moins raisonnable que l’espace de Minkowski et qui l’approxime bien localement, les divergences sont absentes dans le cas crucial de l’électrodynamique quantique [4] et dans toutes les probabilités de la théorie électro-faible aussi. Les extensions et les applications du lemme de Poincaré au cas en dimension infinie servent à établir des intégrales relativement invariantes des champs quantiques d’opérateurs auto-adjoints dans l’espace de Hilbert [5, 6, 7].

La théorie de l’intégration non-commutative, dans laquelle on intègre des opérateurs plutôt que des fonctions, relativement à des mesures additives calculables sur des projections plutôt que sur des ensembles [8], avec la théorie de l’intégrale directe de von Neumann (i.e., décomposition d’algèbres), comble adéquatement le besoin d’une base abstraite de théorie des groupes, e.g., l’établissement du théorème de Plancherel pour les groupes localement compacts [9]. La théorie de la structure de Wedderburn a été étendue aux anneaux arbitraires de “type Γ”, i.e. les types que l’on trouve le plus communément en pratique. Les autres types sont à peine moins rebutants qu’ils n’en ont l’air après complétion de leur théorie globale il y a quelques dizaines d’années. La théorie locale dépendant de la classification des anneaux simples centraux, ou des “facteurs”, a été étudiée attentivement avec énergie et ingéniosité, mais elle reste insaisissable et apparaît beaucoup plus réalisable qu’une classification complète des groupes discrets infinis, il n’y a d’ailleurs pas de besoin apparent d’une telle classification dans les autres parties de la science mathématique.

Ainsi, le programme de base de von Neumann a en grande partie été effectivement réalisé. Mais les algèbres d’opérateurs non-commutatifs constituent un paradigme naturel pour un certain nombre d’applications secondaires, de la théorie quantique à la topologie, l’algèbre, et la géométrie différentielle. Il y a un petit doute de l’auteur de ce livre merveilleux, et très bien imprimé, que ces applications puissent être surmontées par les analystes abstraits de sa génération. Le sujet de la “géométrie non-commutative” a son origine dans le programme de von Neumann pour les anneaux d’opérateurs ainsi que dans la théorie de la représentation pour les algèbres de Banach de Stone, Gelfand, et autres. Ce dernier travail a fourni une interprétation géométrique pour les algèbres commutatives sous la forme d’un idéal maximal ou d’un espace similaire. Ce travail d’avant-guerre a été rapidement suivi par l’extension non-commutative due à Gelfand et Neumark qui a amené la théorie des algèbres de Banach en relation proche à l’espace de Hilbert. Du point de vue de la mécanique quantique, l’idée avancée par ces travaux était que l’“espace-temps” était plus logiquement non pas un concept primaire mais plutôt un concept dérivé de l’algèbre des “observables” (ou opérateurs). Dans sa forme la plus simple, l’idée était que l’espace-temps pourrait être, à un niveau plus profond, le spectre d’une sous-algèbre commutative appropriée qui est invariante sous l’action du groupe de symétrie fondamental (e.g., [11]).

$H = L_2(M)$, consistant en une multiplication par f, agissant sur le domaine des fonctions g dans H tel que fg est aussi dans H. Inversement, tout opérateur normal dans l’espace de Hilbert (ou ensemble d’opérateurs normaux commutant) est unitairement équivalent à un tel opérateur de multiplication (ou un ensemble de tels opérateurs). De plus, l'application $f \to M_f$ est de façon évidente un “isomorphisme” algébrique, qui est essentiellement applicable à des opérateurs aussi bien non-bornés (“mesurables”) que bornés. Ainsi, à nouveau, il y a une base naturelle pour remplacer les espaces de fonctions par les opérateurs.

Pour donner un exemple simple, si f est une fonction dans l'espace euclidien, sa différentielle $df = \sum_j (\partial_j f) dx_j$ (où $\partial_j = \partial/\partial x_j$) est équivalente à la “differentielle” de l'opérateur de multiplication correspondant, “dM_f” $= \sum_j [\partial_j, M_f] dx_j$. Cela amène à la formulation de la différentielle dA d'un opérateur A sur un espace donné comme l'application linéaire $X \to [X, A]$ des espaces vectoriels dans les opérateurs. Une 1-forme “quantifiée” est de manière correspondante principalement une application linéaire convenable des espaces vectoriels vers les opérateurs. Avec les restrictions qui conviennent, ainsi qu'avec les notions de fermeture et d'exactitude, des formes de degré arbitraire. Ainsi, les formes quantifiées apparaissent comme naturelles dans un modèle purement mathématique, mais elles impliquent plus que le “non-sens abstrait généralisé” qu'elles semblent représenter. Elles émergent de considérations théoriques de la théorie quantique et forment un ingrédient essentiel, dans le cas infini-dimensionnel, d'un traitement systématique des “produits” des champs quantiques, qui sont au mieux des opérateurs de distributions valuées (e.g., [5, 6, 7]).

Comme indiqué ci-dessus, la différence entre C^*- et W^*-algèbres est non seulement technique mais aussi fonctionnelle. A cause de la caractérisation algébrique intrinsèque des C^*-algèbres, la notion naturelle d'équivalence est celle d'$*$-isomorphisme. L'équivalence unitaire implique bien sûr l'isomorphisme algébrique, mais les invariants correspondant sont trop compliqués pour être très utiles. Même selon la relation d'équivalence d'$*$-isomorphisme, les invariants ne sont pas simples. Il y a juste autant de classes d'équivalences de C^*-algèbres commutatives qu'il y a d'espaces compacts locaux, et les classes d'équivalence des C^*-algèbres non-commutatives sont beaucoup plus étendues.

Dans le cas des W^*-algèbres, l'équivalence unitaire (ou “spatiale”) est une notion naturelle, et la classification est facilitée par le fait qu'un isomorphisme algébrique conjointement avec un manque adéquat de multiplicité non-triviale suffit à impliquer une équivalence unitaire. Le cas le plus simple est celui des algèbres maximales abéliennes auto-adjointes des opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert, dont un isomorphisme $*$-algébrique implique l'équivalence unitaire. Mais en général, la théorie des W^*-algèbres est en relation avec les sous-espaces invariants et la réduction correspondante de l'algèbre.

Dans le cas des W^*-algèbres de “type I” dans le schéma Murray von Neumann, il y a un théorème de structure presque explicite [10] qui classe ces algèbres, selon l'équivalence unitaire. Les algèbres de type I incluent la plupart des algèbres auxquelles on a en général affaire “concrètement” en pratique, mais une exception notable est celle des algèbres de Clifford sur un espace de Hilbert. Ceci est le cas le plus simple des W^*-algèbres de type II, et leur découverte dans le début des années 30 par von Neumann (voir [13] dans une forme différente) a rendu très frappant le fait qu'il y avait des phénomènes qualitativement nouveaux dans les W^*-algèbres de dimension infinie. En particulier, les algèbres de Clifford sont des algèbres centrales simples qui sont radicalement différentes des algèbres de tous les opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert. En même temps, cette sorte d' algèbre joue un rôle fondamental dans l'analyse des champs quantiques sans fermions. Selon une notation souvent utilisée, c'est une algèbre engendrée par les Q fermions canoniques, et ainsi l'analogue d'une algèbre commutative engendrée par les observables canoniques Q bosoniques. L'algèbre de Clifford est le plus simple des facteurs qui sont des limites directes d'algèbres de matrices, et pour l'instant seules les familles de facteurs relativement accessibles ont été totalement classifiées.

Les C^*- et W^*-algèbres ont en commun qu'elles admettent toutes des notions d'intégration. Un état E d'une C^*-algèbre est une fonctionnelle linéaire positive, qui dans le cas commutatif est équivalente à une mesure sur le spectre (ou espace idéal maximal) de l'algèbre. Dans le cas non-commutatif, il n'est en général pas central, i.e., $E(AB)$ et $E(BA)$ sont génériquement non égaux. Cela limite la portée de la théorie de l'intégration C^*-algébrique, mais leur multitude d'états rend leur théorie limitée assez utile néanmoins. Par exemple, les fonctions définies positives sur les groupes déterminent les états et peuvent effectivement être traitées en fonction d'eux. Ce sont des généralisations des théorèmes de Radon-Nikodym et d'autres théorèmes de base en théorie de la mesure appliquée au contexte des C^*-algèbres, à commencer par [12, 14].

Un "poids" sur une W^*-algèbre A est une fonction non-négative additive calculable sur les projections qui est unitairement invariante et qui ainsi généralise la notion de mesure applicable dans le cas abélien. Tous les théorèmes de base et les idées de la théorie de l'intégration de Lebesgue s'étendent au cas non-commutatif, et les opérateurs "mesurables" peuvent être ajoutés et multipliés à l'envi, presque comme les fonctions mesurables et différemment des opérateurs non-bornés en général. Une application typique est la théorie de Plancherel pour les groupes généraux uni-modulaires localement compacts. Quand A a un centre trivial, i.e. est un "facteur", il y a un poids essentiellement unique, qui est la fonction dimension de Murray-von Neumann.

Voici les fondations sur lesquelles est basée la Géométrie non-commutative. La partie "géométrie" du titre est un peu programmatique ; un titre plus descriptif pourrait être Sujets d'algèbres d'opérateurs et leurs applications. L'approche est suggestive et informelle, bien que techniquement hautement sophistiquée. L'auteur se promène de ses principaux domaines et travaux afférents à une attention minimale (ou des références) aux travaux précédents, incluant quelques travaux idéalement basiques. Le résultat apparaît comme un tour de force brillant et soutenu qui fascinera les personnes travaillant dans ce domaine et ayant un bagage suffisant concernant les principaux axes d'investigation de l'auteur mais pourrait rebuter des non-spécialistes. Ce serait dommage, car le livre établit des relations entre divers aspects de son sujet qui ne sont pas très bien représentés dans la littérature, spécialement ceux concernant les directions topologique et homologique.

Chacun des six chapitres a son propre thème, représentant un intérêt majeur de l'auteur : I, "Espaces non-commutatifs et théorie de la mesure" ; II, "Topologie et K-théorie" ; III, "Cohomologie cyclique et géométrie différentielle" ; IV, "Calcul quantifié" ; V, "Algèbres d'opérateurs" ; VI, "Aspect métrique de la géométrie non-commutative". Tous les chapitres contiennent les $*$-algèbres de façon plus ou moins étendue mais sont sinon reliés de manière assez libre. Une introduction fournit une vue globale de chaque chapitre. Parmi les thèmes favoris qui sont récurrents, on trouve (i) les feuilletages, (ii) la cohomologie, (iii) la K-théorie, (iv) la classification des facteurs, et (v) les interprétations des aspects de la physique mathématique.

Le dernier chapitre est peut-être le plus nouveau. Il contient une tentative courageuse et intéressante d'amener la considérable expertise de l'auteur et sa flexibilité sur une grande variété de sujets en physique, sujets qu'il voit reliés aux algèbres d'opérateurs. Ceux-ci incluent les états KMS (Kubo-Martin-Schwinger), dont il considère apparemment la théorie comme fondamentale en mécanique statistique. Malheureusement, il n'y pas de base empirique apparente pour ça, et jusqu'à maintenant, la théorie apparaît comme une abstraction d'une initiative physique qui n'a pas été très fructueuse.

Un sujet physique plus vivant se manifeste par le caractère discret (ou rationnel) de certaines quantités observables. Une grande variété d'hypothèses mathématiques a été avancée dans la littérature de la physique mathématique pour expliquer ces observations. Le livre présente une théorie mathématique frappante et intriquée due à Bellissard qui traite les cas entiers. Ceci est basé sur le “tore non-commutatif”, une application de la cohomologie cyclique.

L'initiative la plus remarquable dans la direction de la physique est une interprétation de l'unification de l'électromagnétisme et des interactions faibles. Le “modèle standard” dû à Glashow, Weinberg, et Salam a eu un certain succès empirique, modulo certaines prescritions adéquates de renormalisation et de corrections des énergies des hauts rayons. Comme l'explique l'auteur, ce modèle est à la base un modèle phénoménologique et il est difficilement acceptable comme théorie ultime. Le livre présente une reformulation mathématique sophistiquée du modèle standard, qui pourrait avoir le potentiel espéré d'aller au-delà de lui. C'est exemplaire que l'auteur applique son immense expertise mathématique à la physique théorique ; les mathématiques pures de haut niveau sont devenues trop repliées sur elles-mêmes et elles ont besoin du défi des connexions avec d'autres domaines. Cependant, l'interprétation donnée est essentiellement plus *descriptive* qu'*explicative*. Il n'est pas proposé de résolution de la question ancienne de savoir pourquoi l'interaction électromagnétique est invariante par inversion alors qu'il est proposé que les interactions faibles soient essentiellement non-invariantes. De plus, les efforts vers la physique mathématique semblent ignorer quelques principes physique de base - la causalité, la stabilité (effectivement, la positivité de l'énergie), etc. - pour obtenir une solution technique rapide. Cela semble représenter une sorte de naïveté qui contraste bizarrement avec le très haut niveau de connaissances mathématiques.

Mathématiquement, le chapitre du livre le plus original est celui qui traite de cohomologie cyclique, qui subsume les formes quantifiées décrites plus tôt mais qui est plus général. C'est, pourtant, loin d'être un exposé systématique du sujet, et cela n'est pas destiné à l'être. C'est plutôt un essai sur plusieurs ramifications, applications aux feuilletages, topologie et autres. Cela apparaît techniquement très ingénieux mais peut-être un peu court sur chaque problème externe intéressant à son propre titre.

Le chapitre qui fait le plus autorité est celui sur les W^*-algèbres, qui traite principalement de la classification des facteurs. L'idée initiale de Murray von Neumann était que la structure de la W^*-algèbre de l'effet de Hall quantique (en deux dimensions) peut en général être réduite à celle de ses facteurs via la décomposition d'une algèbre par rapport à son centre. La théorie de la réduction de von Neumann fournit une décomposition de toute W^*-algèbre donnée (sur un espace séparable) relativement à toute algèbre booléenne donnée de ses sous-espaces invariants. Cela implique en particulier que toute W^*-algèbre est une “intégrale directe” de facteurs. De manière formelle, cette “théorie locale” réduit le problème au cas des facteurs, mais la théorie “globale” est plus puissante et illustrante en pratique et présente moins de difficultés en terme de mesurabilité. Ainsi, en analyse harmonique sur les groupes de Lie simples non-compacts, le seul facteur impliqué est celui de tous les opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert séparable, comme cela découle du travail fondateur d'Harish-Chandra, mais on est encore loin de savoir établir la théorie de Plancherel pour de tels groupes.

Le livre fournit effectivement l'esprit et le goût de la théorie de Connes et devrait être assez stimulant et utile pour ceux qui font de la recherche dans ce domaine. D'un autre côté, l'insistance technique et le peu d'éléments fournis quant à son aspect idéel et ses origines historiques pourrait repousser les non-spécialistes. Il serait probablement difficile d'utiliser ce livre comme référence ou source d'information précise, en partie du fait du manque des numéros de pages de l'index. C'est plutôt un livre ressemblant à un long discours ou à une lettre à des amis. Par exemple, son style informel est à peu près à l'opposé du style crispant définition-théorème-preuve que l'on pourrait attendre de Connes, et cela peut être un peu frustrant pour ceux qui ne sont pas déjà au top quant à la maîtrise du matériau. Est fournie, cependant, une bibliographie longue ainsi qu'un bref résumé des notations.

Comme compte-rendu effervescent et déjà soutenu d'une grande étendue d'aspects avancés et subtils de l'analyse abstraite, ce livre apparaît d'une qualité précieuse et est certainement unique en son genre.

Bibliographie

1. J. von Neumann, *Die Bindeutigket der Schrodingerschen Operatoren*, Math. Ann. **104** (1931), 570-578.

2. E. Wigner, *On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group*, Ann. Math. **40** (1939), 149-204.

3, J. von Neumann, *Zur Algebra der Funktionoperatoren*, Math. Ann. **102** (1920), 370-427.

4. I. Segal and Z. Zhou, *Convergence of quantum electrodynamics in a curved deformation of Minkowski space*, Ann, Phys. *232* (1904), 61-87. MR **95c** :81174

5. J. Pedersen, I. Segal, and Z. Zhou, *Nonlinear quantum fields in ≥ 4 dimensions and cohomology of the infinite Heisenberg group*, Trans. Amer. Math. Soc. **345** (1994), 73-95. MR.**95a** :81158

6. I. Segal, *Rigorous covariant form of the correspondence principle*, Proceedings, 1094 J. von Neumann Symposium (W. Arveson, T. Branson, I. Segal, eds.), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 175-202.

7. ________, *Complex noncommutative infinite-dimensional analysis*, Proceedings, 1994 Norbert Wiener Symposium (D. Jerison, I Singer, and D. Stroock, eds.) (in preparation).

8. ________, *A non-commutative extension of abstract integration*, Ann. Math. (2) **57** (1953), 401-457. MR **14** :991f

9. ________, *An extension of Plancherel's theorem to separable unimodular groups*, Ann. Math. (2) **52** (1950), 272-292. MR **12** :157F

10. ________, *Decompositions of operator algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. No. 9 (1951). MR **13** :472b

11. ________, *A class of operator algebras which are determined by groups*, Duke Math, J. **18** (1951), 221-265. MR **13** :534b

12. ________, *Irreducible representations of operator algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 73-88, MR **8** :520b

13. J. von Neumann, *Continuous geometry*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **22** (1936), 92-100.

14. H. A. Dye, *The Radon-Nikodym theorem for finite rings of operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 243-280. MR **13** :662b

Irving Segal
Massachusetts Institute of Technology

Formule de Trace en géométrie non-commutative et zéros de la fonction zêta de Riemann[1]

Alain CONNES

Abstract *Nous donnons une interprétation spectrale des zéros critiques de la fonction zêta de Riemann qui les fait voir comme les raies d'un spectre d'absorption, alors que les éventuels zéros non-critiques apparaissent comme des résonances. Nous donnons une interprétation géométrique des formules explicites de la théorie des nombres qui deviennent des formules de trace sur l'espace des classes d'adèles. Cela réduit l'hypothèse de Riemann à la validité de la formule de trace et élimine le paramètre δ de notre approche précédente.*

Table des matières

Introduction

Nous allons donner dans cet article une interpréation spectrale des zéros de la fonction zêta de Riemann et un cadre géométrique dans lequel on peut transposer les idées de la géométrie algébrique impliquant l'action du Frobenius et la formule de Lefschetz. L'interprétation spectrale des zéros de zêta les considèrera comme les raies noires d'un spectre d'absorption. Tous les zéros joueront un rôle du côté spectral de la formule de trace, mais alors que les zéros critiques apparaîtront per-se, les zéros non-critiques apparaîtront comme des résonances et interviendront dans la formule de trace à travers leur potentiel harmonique par rapport à la droite critique. Ainsi, le versant spectral est entièrement canonique, et en prouvant la positivité de la distribution de Weil, nous montrerons que cette égalité avec le côté géométrique, i.e. la formule de trace globale, est équivalente à l'hypothèse de Riemann

[1] J'ai traduit ce texte et cette traduction comporte sûrement de nombreuses erreurs qui n'engagent que moi, Denise Vella-Chemla.

pour toutes les fonctions L à Grössencharakter. Nous prendrons modèle dans notre présentation sur la formule des traces de Selberg, mais notre formule diffère de celle-ci selon plusieurs aspects importants. Nous expliquerons d'abord en particulier dans quelle mesure un signe négatif crucial dans l'analyse des fluctuations statistiques des zéros de zêta indique que l'interprétation spectrale devrait être un spectre d'absorption, ou de façon équivalente, devrait être de nature cohomologique. Cela se combinera dans un cadre géométrique qui sera un espace à l'air innocent, l'espace X des classes d' adèles, dans lequel deux adèles qui appartiennent à la même orbite d'action de $GL_1(k)$ (k un corps global), sont considérées comme équivalentes. Le groupe $C_k = GL_1(A)/GL_1(k)$ des classes d'idèles (qui est le correspondant dans la théorie des corps de classes du groupe de Galois) agit par multiplication sur X.

Notre premier résultat préliminaire (théorème 1 de la section III) fournit une interprétation spectrale des zéros de zêta et des fonctions L sur un corps global k, à partir de l'action du groupe des classes d'idèles sur un espace de fonctions de carré intégrable, sur l'espace $X = A/k^*$ des classes d'adèles. Le corollaire 2 fournit le calcul correspondant de la trace spectrale. Ce résultat est seulement préliminaire parce qu'il nécessite un paramètre non naturel δ qui joue le rôle d'un exposant de Sobolev et permet de voir le spectre d'absorption comme un point du spectre.

Notre second résultat préliminaire est un calcul formel (section VI) du caractère de la représentation du groupe des classes d'idèles sur l'espace sous-jacent L^2. Ce calcul formel donne la distribution de Weil qui est l'ingrédient essentiel de la formule explicite de Riemann-Weil. A ce point-là des recherches (qui était la situation dans [Co]), les problèmes principaux consistent à donner une signification rigoureuse au calcul de la formule de trace et à éliminer ce paramètre non souhaité δ.

Ces deux problèmes seront résolus dans le présent article. Nous démontrons d'abord une formule de trace (théorème 3 de la section V) pour l'action du groupe multiplicatif K^* sur un corps local K sur l'espace de Hilbert $L^2(K)$, et (théorème 4 de la section VII) une formule de trace pour l'action du groupe multiplicatif C_S des classes d'idèles associées à un ensemble fini S de places d'un corps global k, sur l'espace de Hilbert des fonctions à carré intégrable $L^2(X_S)$, où X_S est le quotient de $\prod_{v\in S} k_v$ par l'action du groupe O_S^* des S-unités de k. Dans les deux cas, nous obtenons exactement les termes des formules explicites de Weil qui appartiennent à l'ensemble fini des places. Ce résultat est plutôt important puisque l'espace X_S est hautement non trivial lorsque S est supérieur ou égal à 3. Par exemple, cet espace-quotient n'est pas de type I au sens de la géométrie non-commutative et il est rassurant que la formule de trace continue d'être alors valable dans ce cas.

Nous testons en détail (théorème 6 de l'Appendice II) que la réécriture des formules explicites de Weil qui est prédite par la formule de trace globale est correcte.

Finalement, nous éliminons dans la section VIII, en utilisant des idées qui sont communes et à la formule des traces de Selberg, et à l'explication standard des raies d'absorption en physique, le paramètre problématique δ qui est apparu comme un paramètre des espaces de fonctions de la section III. Nous écrivons la formule globale de trace de manière analogue à la formule des traces de Selberg. La validité de la formule de trace pour n'importe quel ensemble fini de places découle du théorème 4 de la section VII, mais le cas global est laissé ouvert et on montre (Théorème 5 de la section VIII) qu'il est équivalent à la validité de l'hypothèse de Riemann pour toutes les fonctions L à Grössencharakter. Cette équivalence, avec la plausibilité de l'obtention d'une preuve directe de la formule de trace selon les lignes du théorème 4 (section VII) constitue le résultat principal de cet article. L'élimination du paramètre δ est l'amélioration principale du présent article relativement à [Co].

C'est une idée ancienne, due à Polya et Hilbert, que dans le but de comprendre la localisation des zéros de la fonction zêta de Riemann, il conviendrait de trouver un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et un opérateur D sur $\mathcal{H}$ dont le spectre est donné par les zéros non triviaux de la fonction zêta. L'espoir est alors que des propriétés convenables d'auto-adjonction de D (de $i\left(D-\frac{1}{2}\right)$ plus précisément) ou bien des propriétés de positivité de $\Delta = D(1-D)$ seraient plus aisées à traiter que la conjecture originale. Les raisons principales qui doivent nous faire prendre ces idées très au sérieux sont d'une part le travail de A. Selberg ([Se]) dans lequel un Laplacien Δ est relié de la façon décrite ci-dessous à un analogue de la fonction zêta, et d'autre part l'évidence théorique ([M][B][KS]) et expérimentale ([O][BG]) des fluctuations de l'espacement entre les zéros consécutifs de zêta. Le nombre de zéros de zêta dont la partie imaginaire est inférieure à $E > 0$,

$$N(E) = \# \text{ de zéros } \rho\ ,\ 0 < \operatorname{Im} \rho < E \tag{1}$$

a une expression asymptotique ([R]) donnée par

$$N(E) = \frac{E}{2\pi}\ \left(\log\left(\frac{E}{2\pi}\right) - 1\right) + \frac{7}{8} + o(1) + N_{\rm osc}(E) \tag{2}$$

où la partie oscillatoire de la fonction N étagée est

$$N_{\rm osc}(E) = \frac{1}{\pi}\ \operatorname{Im}\ \log\ \zeta\ \left(\frac{1}{2} + iE\right) \tag{3}$$

en assumant que E n'est pas la partie imaginaire d'un zéro et en prenant comme logarithme la branche qui vaut 0 à l'$+\infty$.

On montre (cf. [Pat]) que $N_{\rm osc}(E)$ est en $O(\log E)$. Dans la décomposition (2), les deux termes $\langle N(E)\rangle = N(E) - N_{\rm osc}(E)$ et $N_{\rm osc}(E)$ jouent un rôle indépendant. Le premier $\langle N(E)\rangle$, qui fournit la densité moyenne des zéros, provient de la formule de Stirling et est parfaitement contrôlé. Le second $N_{\rm osc}(E)$ est une manifestation du caractère vraiment aléatoire de la localisation des zéros, et pour éliminer le rôle de la densité, on retourne à une situation de densité uniforme par la transformation

$$x_j = \langle N(E_j)\rangle \quad (E_j \text{ la partie imaginaire du } j^{\rm eme} \text{ zéro de zêta})\,. \tag{4}$$

Alors, l'espacement entre deux x_j consécutifs est 1 en moyenne et la seule information qui reste est dans la fluctuation statistique. Il s'avère que ([M][O]), ces fluctuations sont identiques aux fluctuations d'une matrice hermitienne de très grande taille.

H. Montgomery [M] a démontré (en assumant RH) une forme faible de la conjecture suivante (avec $\alpha, \beta > 0$),

$$\operatorname{Card}\{(i,j)\ ;\ i,j \in 1,\ldots,M\ ;\ x_i - x_j \in [\alpha,\beta]\} \sim M \int_\alpha^\beta \left(1 - \left(\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right)^2\right) du \tag{5}$$

Cette loi (5) est précisément identique à la corrélation entre les valeurs propres de matrices hermitiennes de l'ensemble unitaire gaussien ([M]). De plus, des tests numériques établis par A. Odlyzko ([O][BG]) ont confirmé avec une grande précision le comportement (5) ainsi qu'un comportement analogue pour plus de deux zéros. In [KS], N. Katz et P. Sarnak ont prouvé une loi analogue à celle de Montgomery-Odlyzko pour les fonctions zêta et pour les fonctions L sur des corps de fonctions.

C'est alors une excellente motivation que d'essayer de trouver une paire naturelle $(\mathcal{H}, D)$; par naturelle, on veut dire par exemple que l'on pourrait ne même pas avoir à définir la fonction zêta, mais simplement son prolongement analytique, pour obtenir une telle paire (dans le but par exemple d'éviter la farce de définir $\mathcal{H}$ comme l'espace ℓ^2 fabriqué à partir des zéros de zêta).

I. Chaos quantique et flot hypothétique de Riemann

Décrivons tout d'abord en suivant [B] la tentative directe de construire l'espace de Polya-Hilbert à partir de la quantification d'un système dynamique classique. La motivation initiale de la théorie des matrices aléatoires vient de la mécanique quantique. Dans cette théorie, la quantification d'un système dynamique classique donné par son espace des phases X et son hamiltonien h permet d'obtenir un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et un opérateur auto-adjoint H dont le spectre est l'observable principal du système. Pour des systèmes compliqués, la seule information utile à propos de ce spectre est que, alors que la partie moyenne de la fonction de comptage,

$$N(E) = \# \text{ valeurs propres de } H \text{ dans } [0, E] \tag{1}$$

est calculée par une approximation semi-classique comme un volume dans l'espace des phases, la partie oscillatoire,

$$N_{\mathrm{osc}}(E) = N(E) - \langle N(E) \rangle \tag{2}$$

est la même que pour une matrice aléatoire, gouvernée par les statistiques dictées par les symétries du système.

En l'absence de champ magnétique, i.e. pour un hamiltonien classique de la forme,

$$h = \frac{1}{2m}\, p^2 + V(q) \tag{3}$$

où V est un potentiel à valeurs réelles sur l'espace des configurations, il y a une symétrie naturelle de l'espace classique des phases, appelée la symétrie temporelle inverse,

$$T(p, q) = (-p, q) \tag{4}$$

qui préserve h, et implique que l'ensemble correct sur les matrices aléatoires n'est pas le GUE ci-dessous mais plutôt l'ensemble orthogonal Gaussien : GOE. De ce fait, la partie oscillatoire $N_{\mathrm{osc}}(E)$ se comporte de la même manière qu'une matrice aléatoire *réelle symétrique*.

Bien sûr, H est juste un opérateur spécifique dans $\mathcal{H}$ et, pour qu'il se comporte de façon *générique*, il est nécessaire (cf. [B]) que le système hamiltonien classique (X, h) soit *chaotique* avec des *orbites périodiques* isolées dont les exposants d'instabilité (i.e. les logarithmes des valeurs propres de l'application de Poincaré inverse agissant sur l'espace transverse aux orbites) soient différents de 0.

On peut alors ([B]) écrire une approximation semi-classique de la fonction oscillatoire $N_{\rm osc}(E)$

$$N_{\rm osc}(E) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\int_0^\infty \mathrm{Trace}(H-(E+i\eta))^{-1}\, id\eta(5)$$

en utilisant l'approximation de la phase stationnaire de l'intégrale fonctionnelle correspondante. Pour un système dont la configuration est de dimension 2, cela donne ([B] (15)),

$$N_{\rm osc}(E) \simeq \frac{1}{\pi}\sum_{\gamma_p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\,\frac{1}{2\mathrm{sh}\left(\dfrac{m\lambda_p}{2}\right)}\,\sin(S_{\rm pm}(E)) \tag{6}$$

où les γ_p sont les orbites périodiques primitives, m correspondant au nombre de fois où l'orbite est traversée, alors que les exposants d'instabilité sont les $\pm\lambda_p$. La phase $S_{\rm pm}(E)$ est à un facteur constant près, égale à $m\,E\,T_\gamma^\#$ où $T_\gamma^\#$ est la période de l'orbite primitive γ_p.

La formule (6) donne des informations très précieuses ([B]) sur le "flot de Riemann" hypothétique dont la quantification devrait fournir l'espace de Polya-Hilbert. On note particulièrement que la formule du produit d'Euler pour la fonction zêta amène (cf. [B]) une formule asymptotique similaire pour $N_{\rm osc}(E)$ (3),

$$N_{\rm osc}(E) \simeq \frac{-1}{\pi}\sum_{p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\,\frac{1}{p^{m/2}}\,\sin\left(m\,E\,\log\,p\right). \tag{7}$$

La comparaison de (6) et (7) fournit les informations suivantes

> (A) Les orbites périodiques primitives devraient être étiquetées par les nombres premiers $p = 2, 3, 5, 7, \ldots$, les périodes devraient être les $\log p$ et les exposants d'instabilité devraient être les $\lambda_p = \pm\log p$.
>
> De plus, puisque chaque orbite est comptée seulement une fois, le flot de Riemann ne devrait pas présenter la symétrie T de (4) dont l'effet serait de dupliquer le nombre d'orbites. Ce dernier point exclut en particulier les flots géodésiques puisqu'ils respectent la symétrie temporelle T. Ainsi nous obtenons que :
>
> (B) Le flot de Riemann ne peut pas satisfaire la symétrie de renversement du temps.

Pourtant, il y a deux importants problèmes (cf. [B]) entre les formules (6) et (7). Le premier est le signe *moins* au début de la formule (7), et le second est que bien que $2\mathrm{sh}\left(\dfrac{m\lambda_p}{2}\right) \sim p^{m/2}$ quand $m \to \infty$, nous n'avons pas une égalité pour les valeurs finies de m.

Il y a donc deux difficultés fondamentales et pour les éliminer, nous utiliserons la stratégie bien connue consistant à élargir le problème au cas des *corps globaux* arbitraires. En restreignant alors le domaine au cas des corps de fonctions, nous obtiendrons une précieuse information supplémentaire.

II. Géométrie algébrique et corps globaux de caractéristique nulle

Les propriétés de base de la fonction zêta de Riemann s'étendent aux fonctions zêta associées à un corps global arbitraire, et il est peu probable que l'on puisse régler le problème de l'interprétation spectrale des zéros puis trouver le flot de Riemann pour le cas particulier des corps globaux $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, sans du même coup régler ces problèmes pour tous les corps globaux simultanément.

La définition conceptuelle d'un tel corps k, est :
Un corps k est un corps global si et seulement s'il est discret *et* cocompact *dans un anneau abélien semi-simple localement compact (non discret) A.*

De cela découle que A dépend alors fonctoriellement de k et est appelé l'anneau des adèles de k, souvent noté k_A. Aussi, bien que le corps k lui-même n'ait aucune topologie intéressante, il y a un anneau, et avec une topologie hautement non triviale, qui est canoniquement associé à k.

Quand la caractéristique p d'un corps global k est > 0, le corps k est le corps des fonctions sur une courbe algébrique non-singulière Σ définie sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ inclus dans k comme sous-corps fini maximal, appelé le corps des constantes. On peut alors appliquer les idées de la géométrie algébrique, d'abord développée sur $\mathbb{C}$, à la géométrie de la courbe Σ et obtenir une interprétation des propriétés de base de la fonction zêta de k ; le dictionnaire contient en particulier les lignes suivantes :

(1)

Interprétation spectrale des zéros	Valeurs propres de l'action de Frobenius sur la cohomologie ℓ-adique
Equation fonctionnelle	Théorème de Riemann Roch (Dualité de Poincaré)
Formules explicites de la théorie des nombres	Formule de Lefschetz pour le Frobenius
Hypothèse de Riemann	Positivité de Castelnuovo

Puisque $\mathbb{F}_q$ n'est pas algébriquement clos, les points de Σ définis sur $\mathbb{F}_q$ ne suffisent pas et on a besoin de considérer $\bar{\Sigma}$, les points de Σ sur la fermeture algébrique $\bar{\mathbb{F}}_q$ de $\mathbb{F}_q$, qui sont obtenus en adjoignant à $\mathbb{F}_q$ les racines de l'unité d'ordre premier à q. Cet ensemble de points est une union dénombrable d'orbites périodiques sous l'action de l'automorphisme de Frobenius, ces orbites étant paramétrées par l'ensemble des places de k et leurs périodes sont dans ce cas données par les analogues des $\log p$ de (A). Comme c'est un ensemble dénombrable, il ne se qualifie pas comme analogue du flot de Riemann et il acquiert seulement une structure intéressante de la géométrie algébrique. Le signe moins qui était problématique dans la discussion ci-dessus admet ici une belle résolution puisque l'analogue de l'espace de Polya-Hilbert est donné, si l'on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{Q}_\ell$ le corps des nombres ℓ-adiques $\ell \neq p$, par le groupe de cohomologie

$$H^1_{\text{et}}(\bar{\Sigma}, \mathbb{Q}_\ell) \tag{2}$$

qui apparaît avec un signe couvrant moins dans la formule de Lefschetz

$$\sum (-1)^j \operatorname{Trace} \varphi^* / H^j = \sum_{\varphi(x)=x} 1. \tag{3}$$

Pour le cas général, cela suggère que :

(C) L'espace de Polya-Hilbert $\mathcal{H}$ devrait provenir de son espace $\ominus\mathcal{H}$.

En d'autres termes, l'interprétation spectrale des zéros de la fonction zêta de Riemann devrait être un spectre d'absorption plutôt qu'un spectre d'émission, pour emprunter le langage de la spectroscopie.

L'élément suivant que l'on apprend de cette excursion dans la caractéristique $p > 0$ est que dans ce cas, on ne travaille pas avec un flot mais plutôt avec une simple transformation. En fait, en tirant parti des couvertures de Σ et de l'isomorphisme fondamental de la théorie des corps de classes, on trouve que le groupe naturel qui devrait remplacer $\mathbb{R}$ pour le flot général de Riemann est le groupe des classes d'idèles :

$$C_k = \mathrm{GL}_1(A)/k^* \,. \tag{D}$$

Nous pouvons alors mémoriser les informations (A) (B) (C) (D) que nous avons obtenues jusque-là et chercher le flot de Riemann comme étant une action de C_k sur un espace hypothétique X.

III. Interprétation spectrale des zéros critiques

Il y a une troisième approche au problème des zéros de la fonction zêta de Riemann, due à G. Pólya [P] et à M. Kac [K] et poursuivie plus tard dans [J] [BC]. Elle est basée sur la mécanique statistique et sur la construction d'un système quantique statistique dont la *fonction de partition* est la fonction zêta de Riemann. Un tel système a été construit naturellement dans [BC] et il indique, en utilisant la première ligne du dictionnaire de Géométrie non-commutative (notamment la correspondance entre les espaces-quotients et les algèbres non-commutatives) que l'espace X devrait en général être :

$$X = A/k^* \tag{1}$$

littéralement le quotient de l'espace $A = k_A$ des adèles par l'action du groupe multiplicatif k^*,

(2) $$a \in A \ , \ q \in k^* \to aq \in A \, .$$

Cet espace X apparaît déjà d'une manière très implicite dans le travail de Tate et Iwasawa sur l'équation fonctionnelle. C'est un espace non-commutatif en ce que, même au niveau de la théorie de la mesure, c'est un espace-quotient très "sioux". Par exemple, au niveau de la théorie de la mesure, l'algèbre de Von Neumann correspondante,

(3) $$R_{01} = L^\infty(A) \rtimes k^*$$

où A est doté de sa mesure de Haar comme groupe additif, est le facteur hyperfini de type II_∞.

Le groupe des classes d'idèles C_k agit sur X par

(4) $$(j, a) \to ja \qquad \forall \, j \in C_k \ , \ a \in X$$

et il était impératif de diviser A par k^* pour que (4) ait le bon sens.

Nous reviendrons ultérieurement sur l'analogie entre l'action de C_k sur R_{01} et l'action du groupe de Galois sur l'extension abélienne maximale de k.

Ce que nous allons faire maintenant va consister à construire l'espace de Hilbert L^2_δ des fonctions sur X avec une croissance indexée par $\delta > 1$. Puisque X est un espace-quotient, nous apprendrons d'abord dans la variété habituelle comment obtenir l'espace de Hilbert $L^2(M)$ des fonctions de carré intégrable sur une variété M en travaillant seulement sur la couverture universelle $\widetilde{M}$ avec l'action de $\Gamma = \pi_1(M)$. Chaque fonction $f \in C_c^\infty(\widetilde{M})$ donne naissance à une fonction $\widetilde{f}$ sur M par

(5) $$\widetilde{f}(x) = \sum_{\pi(\widetilde{x}) = x} f(\widetilde{x})$$

et toutes les $g \in C^\infty(M)$ apparaissent de cette manière. De plus, on peut écrire le produit intérieur de l'espace de Hilbert $\int_M \widetilde{f}_1(x) \, \widetilde{f}_2(x) \, dx$, en terme de f_1 et f_2 seules. Ainsi $\|\widetilde{f}\|^2 = \int \left| \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma x) \right|^2 dx$ où l'intégrale est calculée sur un domaine fondamental pour Γ agissant sur M. Cette formule définit une norme d'espace préhilbertien sur $C_c^\infty(\widetilde{M})$ et $L^2(M)$ est juste la complétion de $C_c^\infty(\widetilde{M})$ pour cette norme. Noter que toute fonction de la forme $f - f_\gamma$ a une norme qui s'évanouit et qui, de ce fait, disparaît pendant le processus de complétion. Dans notre cas où $X = A/k^*$, nous avons du coup besoin de définir une norme analogue sur l'espace de Bruhat-Schwartz $\mathcal{S}(A)$ des fonctions sur A (cf. Appendice I pour une définition générale de l'espace de Bruhat-Schwartz). Puisque 0 reste fixe par l'action de k^*, l'expression $\sum_{\gamma \in k^*} f(\gamma x)$ n'a pas de sens pour $x = 0$ à moins que l'on ait $f(0) = 0$. De plus, quand $|x| \to 0$, les sommes ci-dessus approximent, en tant que sommes de Riemann, le produit des $|x|^{-1}$ par $\int f \, dx$ pour la mesure additive de Haar, et alors on a aussi besoin que $\int f \, dx = 0$. Nous pouvons maintenant définir l'espace de Hilbert $L^2_\delta(X)_0$ comme la complétion du sous-espace de codimension 2

(6) $$\mathcal{S}(A)_0 = \{ f \in \mathcal{S}(A) \ ; \ f(0) = 0 \ , \ \int f \, dx = 0 \}$$

pour la norme $\| \ \|_\delta$ donnée par

(7) $$\|f\|_\delta^2 = \int \Big| \sum_{q \in k^*} f(qx) \Big|^2 \, (1 + \log^2 |x|)^{\delta/2} \, |x| \, d^*x$$

où l'intégrale calculée sur A^*/k^* et d^*x est la mesure de Haar multiplicative sur A^*/k^*. L'horrible terme $(1+\log^2|x|)^{\delta/2}$ est alors là pour contrôler la croissance des fonctions sur le quotient non-compact. Nous verrons comment supprimer ce terme plus tard dans la section VII. Noter que $|qx| = |x|$ pour tout $q \in k^*$.

Le point-clé est que nous utilisons la mesure $|x|\, d^*x$ plutôt que la mesure de Haar additive dx. Bien sûr, pour un corps local K, on a $dx = |x|\, d^*x$ mais cela ne sert à rien dans la situation globale ci-dessus. On a plutôt,

$$dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\, |x|^{1+\varepsilon}\, d^*x\,. \tag{8}$$

Une représentation naturelle de C_k sur $L^2_\delta(X)_0$ est donnée par :

$$(U(j)\, f)\,(x) = f(j^{-1}\,x) \qquad \forall\, x \in A\ ,\ j \in C_k \tag{9}$$

et le résultat est indépendant du choix d'un relèvement de j dans $J_k = \mathrm{GL}_1(A)$ parce que les fonctions $f - f_q$ sont dans le noyau de la norme. Les conditions (6) qui définissent $\mathcal{S}(A)_0$ sont invariantes sous l'action de C_k et elles fournissent l'action suivante de C_k sur le complémentaire à 2 dimensions de $\mathcal{S}(A)_0 \subset \mathcal{S}(A)$; ce complémentaire est $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}(1)$ où $\mathbb{C}$ est le module trivial C_k (correspondant à $f(0)$) alors que le twist de Tate $\mathbb{C}(1)$ est le module

$$(j, \lambda) \to |j|\, \lambda \tag{10}$$

provenant de l'égalité

$$\int f(j^{-1}\,x)\, d\,x = |j| \int f(x)\, dx\,. \tag{11}$$

Dans le but d'analyser la représentation (9) de C_k sur $L^2_\delta(X)_0$, nous allons la relier à la représentation gauche régulière du groupe C_k sur l'espace de Hilbert $L^2_\delta(C_k)$ obtenue de l'espace de Hilbert suivant des fonctions de norme carrée,

$$\|\xi\|^2_\delta = \int_{C_k} |\xi(g)|^2\, (1+\log^2|g|)^{\delta/2}\, d^*g \tag{12}$$

où nous avons normalisé la mesure de Haar du groupe C_k, avec comme module,

$$|\ | : C_k \to \mathbb{R}^*_+ \tag{13}$$

de telle façon que l'on ait (cf. [W3])

$$\int_{|g| \in [1,\Lambda]} d^*g \sim \log \Lambda \quad \text{quand} \quad \Lambda \to +\infty\,. \tag{14}$$

La représentation régulière gauche V de C_k sur $L^2_\delta(C_k)$ est

$$(V(a)\,\xi)\,(g) = \xi(a^{-1}\,g) \qquad \forall\, g, a \in C_k\,. \tag{15}$$

Noter qu'à cause du poids $(1+\log^2|x|)^{\delta/2}$, cette représentation est *non* unitaire mais qu'elle satisfait l'estimation de la croissance

$$\|V(g)\| = O(\log|g|)^{\delta/2} \quad \text{quand} \quad |g| \to \infty \tag{16}$$

qui découle de l'inégalité (valide pour $u, v \in \mathbb{R}$)

$$\rho(u+v) \leq 2^{\delta/2}\, \rho(u)\, \rho(v)\ ,\ \ \rho(u) = (1+u^2)^{\delta/2}\,. \tag{17}$$

Nous définissions E comme l'isométrie linéaire de $L^2_\delta(X)_0$ dans $L^2_\delta(C_k)$ donnée par l'égalité,

$$E(f)\,(g) = |g|^{1/2} \sum_{q\in k^*} f(qg) \qquad \forall\, g \in C_k\,. \tag{18}$$

En comparant (7) à (12), on voit que E est une isométrie et le facteur $|g|^{1/2}$ est imposé par la comparaison des mesures $|g|\, d^*g$ de (7) et d^*g de (12).

On a $E(U(a)\,f)\,(g) = |g|^{1/2} \sum_{k^*} (U(a)\,f)\,(qg) = |g|^{1/2} \sum_{k^*} f(a^{-1}\,qg) = |a|^{1/2}\,|a^{-1}\,g|^{1/2} \sum_{k^*} f(q\,a^{-1}\,g) = |a|^{1/2}\,(V(a)\,E(f))\ (g)$.

Ainsi,

$$E\,U(a) = |a|^{1/2}\,V(a)\,E\,. \tag{19}$$

Cette équivariance montre que l'image de E dans $L^2_\delta(C_k)$ est un espace clos invariant pour la représentation V.

Le théorème ci-dessous et son corollaire montrent que le conoyau $\mathcal{H} = L^2_\delta(C_k)/\ \mathrm{Im}(E)$ de l'isométrie E joue le rôle de l'espace de Polya-Hilbert. Puisque $\mathrm{Im}\,E$ est invariant sous la représentation V, on définit W comme la représentation correspondante de C_k sur $\mathcal{H}$.

Le groupe localement compact abélien C_k est (de façon non canonique) isomorphe à $K \times N$ où

$$K = \{g \in C_k\ ;\ |g| = 1\}\ ,\ \ N = \text{image}\ |\ | \subset \mathbb{R}_+^*\,. \tag{20}$$

Pour des corps de nombres, on a $N = \mathbb{R}_+^*$ alors que pour des corps de caractéristique non-nulle, $N \simeq \mathbb{Z}$ est le sous-groupe $q^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}_+^*$ (où $q = p^\ell$ est la cardinalité du corps des constantes).

Nous choisissons (de façon non canonique) un isomorphisme

$$C_k \simeq K \times N\,. \tag{21}$$

Par construction, la représentation W satisfait (en utilisant (16)),

$$\|W(g)\| = O(\log|g|)^{\delta/2} \tag{22}$$

et sa restriction à K est unitaire. Aussi, $\mathcal{H}$ se scinde en une somme directe canonique de sous-espaces orthogonaux 2 à 2,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\chi\in\widehat{K}} \mathcal{H}_\chi\ ,\ \ \mathcal{H}_\chi = \{\xi\ ;\ W(g)\,\xi = \chi\,(g)\,\xi\ ,\ \forall\, g \in K\} \tag{23}$$

où χ parcourt le groupe dual de Pontrjagin K, qui est le groupe abélien discret $\widehat{K}$ des caractères de K. En utilisant l'isomorphisme non canonique (21), i.e. l'inclusion correspondante $N \subset C_k$, on peut maintenant restreindre la représentation W à n'importe lequel des secteurs $\mathcal{H}_\chi$. Quand la caractéristique de k est > 0, alors $N \simeq \mathbb{Z}$ et la condition (22) montre que l'action de N sur $\mathcal{H}_\chi$ est donnée par un seul opérateur à spectre *unitaire* (on utilise la formule du rayon spectral $|\mathrm{Spec}\, w| = \overline{\mathrm{Lim}} \parallel w^n \|^{1/n}$). Quand la caractéristique de k est nulle, on travaille avec une action de $\mathbb{R}_+^* \simeq \mathbb{R}$ sur $\mathcal{H}_\chi$ et la condition (22) montre que cette représentation est engendrée par un opérateur clos non-borné D_χ à spectre purement imaginaire. Le résolvant $R_\lambda = (D_\chi - \lambda)^{-1}$ est donné, pour $\mathrm{Re}\, \lambda > 0$, par l'égalité

(24)
$$R_\lambda = \int_0^\infty W_\chi(e^s)\, e^{-\lambda s}\, ds$$

et pour $\mathrm{Re}\, \lambda < 0$ par,

(25)
$$R_\lambda = \int_0^\infty W_\chi(e^{-s})\, e^{\lambda s}\, ds$$

alors que l'opérateur D_χ est défini par

(26)
$$D_\chi\, \xi = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\, (W_\chi(e^\varepsilon) - 1)\, \xi\, .$$

Théorème 1. *Soient $\chi \in \widehat{K}$, $\delta > 1$, $\mathcal{H}_\chi$ et D_χ comme ci-dessus. Alors D_χ a un spectre discret, $\mathrm{Sp}\, D_\chi \subset i\,\mathbb{R}$ est l'ensemble des parties imaginaires des zéros de la fonction L à Grössencharakter $\widetilde{\chi}$ de partie réelle $\frac{1}{2}$; $\rho \in \mathrm{Sp}\, D \Leftrightarrow L\left(\widetilde{\chi}, \frac{1}{2} + \rho\right) = 0$ et $\rho \in i\,\mathbb{R}$, où $\widetilde{\chi}$ est l'unique extension de χ à C_k qui est égale à 1 sur N. De plus, la multiplicité des ρ dans $\mathrm{Sp}\, D$ est égale au plus grand entier $n < \frac{1+\delta}{2}$, n étant inférieur à la multiplicité de $n \leq \frac{1}{2} + \rho$ comme zéro de L.*

Le théorème 1 a une formulation similaire quand la caractéristique de k est non-nulle. Le corollaire suivant est valide pour les corps globaux k de caractéristique arbitraire.

Corollaire 2. *Pour toute fonction de Schwartz $h \in \mathcal{S}(C_k)$ l'opérateur $W(h) = \int W(g)\, h(g)\, d^* g$ dans $\mathcal{H}$ appartient à la classe des traces, et sa trace est donnée par*

$$\mathrm{Trace}\, W(h) = \sum_{\substack{L\left(\widetilde{\chi}, \frac{1}{2} + \rho\right) = 0 \\ \rho \in i\,\mathbb{R}/N^\perp}} \widehat{h}(\widetilde{\chi}, \rho)$$

où la multiplicité est comptée comme dans le Théorème 1 et où la transformée de Fourier $\widehat{h}$ de h est définie par,

$$\widehat{h}(\widetilde{\chi}, \rho) = \int_{C_k} h(u)\, \widetilde{\chi}(u)\, |u|^\rho\, d^* u\, .$$

Noter que nous n'avons pas eu à définir les fonctions L, mais seulement leur prolongement analytique, avant d'établir le théorème, qui montre que la paire

(27)
$$(\mathcal{H}_\chi, D_\chi)$$

se qualifie certainement comme un espace de Polya-Hilbert.

Le cas de la fonction zêta de Riemann correspond au caractère trivial $\chi = 1$ pour le corps global $k = \mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

En général, les zéros des fonctions L peuvent avoir des multiplicités mais l'on s'attend à ce que pour un Grössencharacter χ, cette multiplicité soit bornée, de telle façon que pour une valeur suffisamment grande de δ, la multiplicité spectrale de D sera la bonne. Quand la caractéristique de k est > 0, cela est certainement vrai.

Si l'on modifie le choix de l'isomorphisme non canonique (21), cela change l'opérateur D en

$$D' = D - i\,s \tag{28}$$

où $s \in \mathbb{R}$ est déterminé par l'égalité

$$\widetilde{\chi}'(g) = \widetilde{\chi}(g)\,|g|^{\mathrm{i\,s}} \qquad \forall\, g \in C_k\,. \tag{29}$$

La cohérence de l'établissement du théorème est assurée par l'égalité

$$L(\widetilde{\chi}', z) = L(\widetilde{\chi}, z + i\,s) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\,. \tag{30}$$

Quand les zéros de L apparaissent de façon multiple et quand δ est assez grand, l'opérateur D est *non* semi-simple et il a une forme de Jordan non triviale (cf. Appendice I). Cela est compatible avec la condition presque unitaire (22) mais pas avec une symétrie biaisée pour D.

La preuve du théorème 1, fournie dans l'Appendice I, est basée sur l'interprétation de la distribution théorique par A. Weil [W2] de l'équation fonctionnelle basée sur l'idée de Tate et Iwasawa. Notre construction devrait être comparée à [Bg] et [Z].

Comme on s'y attend du fait de (C), l'espace de Polya-Hilbert $\mathcal{H}$ apparaît comme un conoyau. Puisqu'on obtient l'espace de Hilbert $L^2_\delta(X)_0$ en imposant deux conditions linéaires sur $\mathcal{S}(A)$,

$$0 \to \mathcal{S}(A)_0 \to \mathcal{S}(A) \xrightarrow{L} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}(1) \to 0, \tag{31}$$

nous définirons $L^2_\delta(X)$ de telle manière qu'il apparaisse dans une séquence exacte de C_k-modules

$$0 \to L^2_\delta(X)_0 \to L^2_\delta(X) \to \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}(1) \to 0\,. \tag{32}$$

Nous pouvons alors utiliser la séquence exacte de C_k-modules

$$0 \to L^2_\delta(X)_0 \to L^2_\delta(C_k) \to \mathcal{H} \to 0 \tag{33}$$

avec le Corollaire 2 pour calculer de manière formelle quel devrait être le caractère du module $L^2_\delta(X)$. En utilisant (32) et (33), nous obtenons,

$$\text{Trace}\,(U(h)) = \widehat{h}(0) + \widehat{h}(1) - \sum_{\substack{L(\chi,\rho)=0 \\ \mathrm{Re}\rho = \frac{1}{2}}} \widehat{h}(\chi,\rho) + \infty\, h(1) \tag{34}$$

où $\widehat{h}(\chi,\rho)$ est défini par le Corollaire 2 et

$$U(h) = \int_{C_k} U(g)\, h(g)\, d^*g \tag{35}$$

alors que la fonction test h est dans un espace de fonctions convenable. Noter que la trace du côté gauche de (34) n'a de sens qu'après qu'on ait procédé à une régularisation adéquate puisque la représentation régulière gauche de C_k n'est pas traçable. Cette situation est similaire à celle rencontrée par Atiyah et Bott ([AB]) dans leur preuve de la formule de Lefschetz. Nous devrons d'abord apprendre comment calculer la trace ci-dessus de manière formelle à partir des points fixes de l'action de C_k sur X. Dans la section VII, nous montrerons comme régulariser la trace et éliminer complètement le paramètre δ.

IV. Formule de trace d'une distribution pour les flots sur des variétés

Dans le but de comprendre comment le côté gauche de l'égalité (34) devrait être calculé, nous devrions d'abord rendre compte de la preuve de la formule habituelle de Lefschetz par Atiyah-Bott ([AB]) et décrire le calcul de la trace théorique de la distribution sur les variétés, qui est une variation sur le thème de [AB] et qui a été fournie par Guillemin-Sternberg [GS]. Nous nous référons à l'Appendice III pour un traitement plus détaillé indépendant des coordonnées [GS].

Commençons par un difféomorphisme φ d'une variété lisse compacte M et supposons que le graphe de φ est transverse à la diagonale sur $M \times M$. On peut alors aisément définir et calculer la trace de la distribution théorique de l'opérateur $U : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$,

$$(U\xi)(x) = \xi(\varphi(x))\,. \tag{1}$$

Par exemple, soit $k(x,y)$ la distribution de Schwartz sur $M \times M$ telle que

$$(U\xi)(x) = \int k(x,y)\,\xi(y)\,dy\,, \tag{2}$$

La trace de la distribution sur U est simplement

$$\mathrm{Trace}\,(U) = \int k(x,x)\,dx\,, \tag{3}$$

Près de la diagonale et en coordonnées locales, on obtient :

$$k(x,y) = \delta(y - \varphi(x)) \tag{4}$$

où δ est la distribution de Dirac.

Puisque, par hypothèse, les points fixes de φ sont isolés, on peut calculer la trace (3) comme une somme finie $\sum\limits_{x,\varphi(x)=x}$ et obtenir la contribution de chaque point fixe $x \in M$, $\varphi(x) = x$, comme

$$\frac{1}{|1 - \varphi'(x)|} \tag{5}$$

où $\varphi'(x)$ est le Jacobien de φ et $|A| = |\det A|$.

On utilise simplement l'inversibilité de $\mathrm{id} - \varphi'(x)$ pour effectuer un changement de variables dans l'intégrale,

$$\int \delta(y - \varphi(y))\, dy\,. \tag{6}$$

On obtient alors (cf. [AB]),

$$\mathrm{Trace}\,(U) = \sum_{x,\varphi(x)=x} \frac{1}{|1 - \varphi'(x)|}\,. \tag{7}$$

Ce calcul s'étend immédiatement à l'action de φ sur les sections d'un fibré vectoriel équivariant E tel que le fibré $\wedge^k T^*$, dont les sections $C^\infty(M, E)$ sont les formes lisses de degré k. La somme alternée des traces théoriques de la distribution correspondante constitue la trace *ordinaire* de l'action de φ sur la cohomologie de de Rham, amenant ainsi à la formule habituelle de Lefschetz,

$$\sum (-1)^j\, \mathrm{Trace}\, \varphi^*/H^j = \sum_{\varphi(x)=x} \mathrm{sign}\ \det(1 - \varphi'(x))\,. \tag{8}$$

Référons-nous à l'appendice qui utilise des notations plus pédantes pour montrer que la trace théorique de la distribution est indépendante des coordonnées.

Nous allons maintenant écrire l'analogue de la formule (7) dans le cas d'un flot $F_t = \exp(tv)$ de difféomorphismes de M, où $v \in C^\infty(M, T)$ est un champ de vecteurs sur M. Nous obtenons un groupe à un paramètre d'opérateurs agissant sur $C^\infty(M)$,

$$(U_t\, \xi)(x) = \xi(F_t(x)) \qquad \forall\, \xi \in C^\infty(M)\,,\ x \in M\,,\ t \in \mathbb{R}\,, \tag{9}$$

et nous avons besoin de la formule pour,

$$\rho(h) = \mathrm{Trace} \left(\int h(t)\, U_t\, dt \right)\ ,\ h \in C_c^\infty(\mathbb{R})\,,\ h(0) = 0\,. \tag{10}$$

La condition $h(0) = 0$ est nécessaire parce que nous ne pouvons pas être assurés que la fonction Identité F_0 est transverse à la diagonale.

Pour définir ρ comme une distribution évaluée sur la fonction test h, choisissons f comme étant la fonction suivante,

$$f : X = M \times \mathbb{R} \to Y = M\ ,\ f(x,t) = F_t(x)\,. \tag{11}$$

Le graphe de f est la sous-variété Z de $X \times Y$,

$$Z = \{(x,t,y)\ ;\ y = F_t(x)\}\,. \tag{12}$$

Soit φ l'application diagonale,

$$\varphi(x,t) = (x,t,x)\ ,\ \varphi : M \times \mathbb{R} \to X \times Y \tag{13}$$

et supposons la transversalité $\quad \varphi \pitchfork Z \quad$ en dehors de $M \times (0)$.

Soit τ la distribution,

(14) $$\tau = \varphi^*(\delta(y - F_t(x))\, dy)\,,$$

et q la seconde projection,

(15) $$q(x,t) = t \in \mathbb{R},$$

alors, par définition, ρ est le foncteur image directe $q_*(\tau)$ de la distribution τ.

On peut vérifier (cf. Appendice III) que $q_*(\tau)$ est une fonction généralisée.

Exactement comme dans le cas d'une transformation simple, les contributions à (10) viendront des points fixes de F_t. Ces dernières viendront soit d'un *zéro* du champ vectoriel v, (i.e. $x \in M$ tel que $v_x = 0$) soit d'une *orbite périodique* γ du flot et nous appellerons $T_\gamma^\#$ la longueur d'une telle orbite périodique.

Sous l'hypothèse de transversalité ci-dessus, la formule pour (10) est (cf. [GS], [G] et l'Appendice III),

(16) $$\mathrm{Trace}\,\left(\int h(t)\, U_t\, dt\right) = \sum_{x, v_x = 0} \int \frac{h(t)}{|1-(F_t)_*|}\, dt + \sum_\gamma \sum_T T_\gamma^\# \, \frac{1}{|1-(F_{T/})_*|}\, h(T)$$

où dans la seconde somme, γ est une orbite périodique de longueur $T_\gamma^\#$, et T varie dans $\mathbb{Z}\, T_\gamma^\#$ tandis que $(F_{T/})_*$ est l'application inverse de Poincaré, i.e. la restriction du plan tangent à la transverse à l'orbite.

On peut réécrire (16) sous une forme plus simple ainsi,

(17) $$\mathrm{Trace}\left(\int h(t)\, U_t\, dt\right) = \sum_\gamma \int_{I_\gamma} \frac{h(u)}{|1-(F_u)_*|}\, d^*u\,,$$

où les zéros $x \in M$, $v_x = 0$, sont aussi considérés comme des orbites périodiques γ, alors que $I_\gamma \subset \mathbb{R}$ est le sous-groupe d'isotopie d'un $x \in \gamma$, et où d^*u est l'unique mesure de Haar dans I_γ telle que le covolume de I_γ soit égal à 1, i.e. tel que pour l'unique mesure de Haar $d\mu$ de masse totale 1 sur $\mathbb{R}/I$ et pour tout $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

(18) $$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}/I} \left(\int_I f(u+s)\, d^*u\right)\, d\mu(s).$$

On écrit également $(F_u)_*$ pour la restriction du plan tangent F_u à l'espace transverse aux orbites.

Pour comprendre à quoi ressemble $(F_t)_*$ en un zéro de v, on peut remplacer $v(x)$ pour x proche de x_0 par son image tangentielle. Pour des raisons de simplicité, prenons le cas en dimension 1, avec $v(x) = x\,\frac{\partial}{\partial x}$, agissant sur $\mathbb{R} = M$.
On a $F_t(x) = e^t\, x$. Puisque F_t est linéaire, le plan tangent $(F_t)_*$ est

(19) $$(F_t)_* = e^t$$

et (12) devient

(20) $$\mathrm{Trace}\left(\int h(t)\, U_t\, dt\right) = \int \frac{h(t)}{|1-e^t|}\, dt.$$

Ainsi, pour ce flot, la formule de trace de la distribution est

$$\mathrm{Trace}\,(U(h)) = \int \frac{h(u)}{|1-u|}\; d^*u \tag{21}$$

où nous utilisons une notation multiplicative de telle façon que $\mathbb{R}_+^*$ agisse sur $\mathbb{R}$ par multiplication, alors que $U(h) = \int U(v)h(v)\; d^*v$ et d^*v est la mesure de Haar du groupe $\mathbb{R}_+^*$.

On peut traiter de manière similaire l'action, par multiplication, du groupe des nombres complexes non-nuls de la variété $\mathbb{C}$.

Nous allons maintenant étudier le cas plus général d'un corps local arbitraire.

V. L'action $(\lambda, x) \to \lambda\, x$ de K^* d'un corps local K.

Soit K un corps local et considérons l'application,

$$f : K \times K^* \to K \ , \ f(x,\lambda) = \lambda\, x \tag{1}$$

ainsi que l'application diagonale,

$$\varphi : K \times K^* \to K \times K^* \times K \ , \ \varphi(x,\lambda) = (x,\lambda,x) \tag{2}$$

comme dans IV (11) et (12) ci-dessous.

Quand K est archimédien, on est dans le cadre des variétés et on peut associer à f une δ-section de support $Z =$ Graphe (f),

$$\delta_Z = \delta(y - \lambda\, x)\, dy\,. \tag{3}$$

En utilisant la projection $q(x,\lambda) = \lambda$ de $K \times K^*$ sur K^*, on considère alors comme ci-dessus la fonction généralisée sur K^* donnée par,

$$q_*(\varphi^*\, \delta_Z)\,. \tag{4}$$

Le calcul formel de cette fonction généralisée de λ est

$$\int \delta(x - \lambda\, x)\, dx = \int \delta((1-\lambda)x)\, dx = \int \delta(y)\, d((1-\lambda)^{-1}\, y)$$

$$= |1-\lambda|^{-1} \int \delta(y)\, dy = |1-\lambda|^{-1}\,.$$

Nous devons justifier cela en calculant la convolution des transformées de Fourier de $\delta(x-y)$ et $\delta(y - \lambda\, x)$ puisque c'est la manière correcte de définir le produit de deux distributions dans ce contexte local.

Calculons d'abord la transformée de Fourier de $\delta(ax+by)$ où $(a,b) \in K^2 (\neq 0)$. L'appariement de K^2 et de son dual K^2 est donné par

$$\langle (x,y), (\xi,\eta) \rangle = \alpha(x\,\xi + y\,\eta) \in U(1)\,. \tag{5}$$

où α est un caractère fixe non trivial du groupe additif K.

Soit $(c,d) \in K^2$ tel que $ad - bc = 1$ et considérons la transformation linéaire inversible de K^2,

$$L \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{6}$$

La transformée de Fourier de $\varphi \circ L$ est donnée par

$$(\varphi \circ L)^\wedge = |\det L|^{-1}\, \widehat{\varphi} \circ (L^{-1})^t. \tag{7}$$

Ici, on a $\det L = 1$ et $(L^{-1})^t$ définie par

$$(L^{-1})^t = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}. \tag{8}$$

On calcule d'abord la transformée de Fourier de $\delta(x)$, la mesure de Haar additive dx est normalisée de façon à être auto-duale et en une seule variable, $\delta(x)$ et 1 sont transformées de Fourier l'une de l'autre, de telle sorte que

$$(\delta \otimes 1)^\wedge = 1 \otimes \delta. \tag{9}$$

En utilisant (7), on obtient que la transformée de Fourier de $\delta(ax+by)$ est $\delta(-b\,\xi + a\,\eta)$. On doit alors calculer la convolution des deux fonctions généralisées, $\delta(\xi+\eta)$ et $\delta(\xi + \lambda\,\eta)$. Maintenant,

$$\int f(\xi,\eta)\,\delta(\xi+\eta)\,d\xi\,d\eta = \int f(\xi,-\xi)\,d\xi$$

et

$$\int f(\xi,\eta)\,\delta(\xi+\lambda\,\eta)\,d\xi\,d\eta = \int f(-\lambda\,\eta,\eta)\,d\eta$$

de telle manière que l'on doit gérer deux mesures portées respectivement par deux lignes distinctes. Leur convolution évaluée sur $f \in C_c^\infty(K^2)$ est

$$\begin{aligned} \int f(\alpha+\beta)\,d\mu(\alpha)\,d\nu(\beta) &= \int\int f((\xi,-\xi)+(-\lambda\,\eta,\eta))\,d\xi\,d\eta \\ &= \int\int f(\xi-\lambda\,\eta,-\xi+\eta)\,d\xi\,d\eta \\ &= \left(\int\int f(\xi',\eta')\;d\xi'\,d\eta'\right)\times|J|^{-1} \end{aligned}$$

où J est le déterminant de la matrice $\begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = L$, de telle manière que $\begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$. On a $J = 1 - \lambda$ et alors, la convolution des fonctions généralisées $\delta(\xi+\eta)$ et $\delta(\xi+\lambda\,\eta)$ donne comme attendu la fonction constante

$$|1-\lambda|^{-1}\,1. \tag{10}$$

De manière correspondante, le produit des distributions $\delta(x-y)$ et $\delta(y-\lambda\,x)$ donne $|1-\lambda|^{-1}\,\delta_0$ de façon que,

$$\int \delta(x-y)\,\delta(y-\lambda\,x)\,dx\,dy = |1-\lambda|^{-1}. \tag{11}$$

Dans ce cas local, la transformée de Fourier seule était suffisante pour donner un sens pertinent au produit des distributions. En fait, cela continuerait d'avoir du sens que de remplacer $\delta(y-\lambda\,x)$ par

$$\int h(\lambda^{-1})\,\delta(y-\lambda\,x)\,d^*\lambda$$

où $h(1)=0$.

Nous allons maintenant traiter en détail le cas général plus délicat dans lequel $h(1)$ est arbitraire.

Nous allons démontrer un résultat général précis (théorème 3) qui gère le manque de transversalité lorsque $h(1)\neq 0$. On travaille directement avec l'opérateur suivant dans $L^2(K)$,

$$U(h)=\int h(\lambda)\,U(\lambda)\,d^*\lambda\,, \tag{12}$$

où l'opérateur d'échelle $U(\lambda)$ est défini par

$$(U(\lambda)\,\xi)(x)=\xi(\lambda^{-1}\,x)\qquad \forall\,x\in K \tag{13}$$

et où la mesure de Haar multiplicative $d^*\lambda$ est normalisée par,

$$\int_{|\lambda|\in[1,\Lambda]} d^*\lambda\sim\log\Lambda\qquad \text{quand }\Lambda\to\infty\,. \tag{14}$$

Pour interpréter la "trace" de $U(h)$, nous allons procéder comme dans le cas de la formule de trace de Selberg ([Se]) et utiliser une coupure (cut-off). Pour cela, nous utilisons la projection orthogonale P_Λ sur le sous-espace,

$$P_\Lambda=\{\xi\in L^2(K)\,;\;\xi(x)=0\qquad \forall x\;,\;|x|>\Lambda\}\,. \tag{15}$$

Alors, P_Λ est l'opérateur multiplicatif par la fonction ρ_Λ, où $\rho_\Lambda(x)=1$ si $|x|\leq\Lambda$, et $\rho(x)=0$ pour $|x|>\Lambda$. Cela donne une coupure (cut-off) infrarouge et pour obtenir une coupure (cut-off) ultraviolet, on utilise $\widehat{P}_\Lambda=FP_\Lambda F^{-1}$ où F est la transformée de Fourier (qui dépend du caractère de base α). On pose

$$R_\Lambda=\widehat{P}_\Lambda\,P_\Lambda\,. \tag{16}$$

Le résultat principal de cette section est alors,

Théorème 3. *Soit K un corps local de caractère de base α. Soit $h\in\mathcal{S}(K^*)$ à support compact. Alors $R_\Lambda\,U(h)$ est un opérateur de classe trace et quand $\Lambda\to\infty$, on a*

$$\mathrm{Trace}\,(R_\Lambda\,U(h))=2h(1)\log'\Lambda+\int'\frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\,d^*u+o(1)$$

où $2\log'\Lambda=\int_{\lambda\in K^*,\,|\lambda|\in[\Lambda^{-1},\Lambda]}d^*\lambda$, et où la valeur principale $\int'$ est uniquement déterminée par l'appariement avec l'unique distribution sur K qui coïncide avec $\frac{du}{|1-u|}$ pour $u\neq 1$ et dont la transformée de Fourier s'évanouit en 1.

Preuve. On normalise comme ci-dessus la mesure de Haar additive pour qu'elle soit auto-duale sur K. Soit la constante $\rho>0$ déterminée par l'égalité,

$$\int_{1\leq|\lambda|\leq\Lambda}\frac{d\lambda}{|\lambda|}\sim\rho\log\Lambda\qquad \text{quand }\Lambda\to\infty\,. \tag{17}$$

de telle manière que $d^*\lambda=\rho^{-1}\frac{d\lambda}{|\lambda|}$. Soit L l'unique distribution, extension de $\rho^{-1}\frac{du}{|1-u|}$ dont la transformée de Fourier s'évanouit en 1, $\widehat{L}(1)=0$. On a alors, par définition,

$$\int'\frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\,d^*u=\left\langle L,\,\frac{h(u^{-1})}{|u|}\right\rangle\,, \tag{18}$$

où $\frac{h(u^{-1})}{|u|} = 0$ pour u^{-1} en dehors du support de h.

Soit $T = U(h)$. On peut écrire le noyau de Schwartz de T comme,

$$k(x, y) = \int h(\lambda^{-1})\, \delta(y - \lambda x)\, d^*\lambda\,. \tag{19}$$

Etant donné n'importe quel tel noyau k, on introduit son symbole,

$$\sigma(x, \xi) = \int k(x, x + u)\, \alpha(u\xi)\, du \tag{20}$$

comme sa transformée de Fourier partielle. Le noyau de Schwartz $r_\Lambda^t(x, y)$ de la transposée R_Λ^t est donné par,

$$r_\Lambda^t(x, y) = \rho_\Lambda(x)\, (\widehat{\rho_\Lambda})\, (x - y)\,. \tag{21}$$

Ainsi, le symbole σ_Λ de R_Λ^t est simplement,

$$\sigma_\Lambda(x, \xi) = \rho_\Lambda(x)\, \rho_\Lambda(\xi)\,. \tag{22}$$

L'opérateur R_Λ est de classe trace et l'on a,

$$\mathrm{Trace}\,(R_\Lambda\, T) = \int k(x, y)\, r_\Lambda^t(x, y)\, dx\, dy\,. \tag{23}$$

En utilisant la formule de Parseval, on obtient,

$$\mathrm{Trace}\,(R_\Lambda\, T) = \int_{|x| \leq \Lambda, |\xi| \leq \Lambda} \sigma(x, \xi)\, dx\, d\xi\,. \tag{24}$$

Maintenant, le symbole σ de T est donné par,

$$\sigma(x, \xi) = \int h(\lambda^{-1}) \left(\int \delta(x + u - \lambda x)\, \alpha(u\xi)\, du \right) d^*\lambda\,. \tag{25}$$

On a,

$$\int \delta(x + u - \lambda x)\, \alpha(u\xi)\, du = \alpha((\lambda - 1)\, x\xi)\,, \tag{26}$$

aussi (25) donne,

$$\sigma(x, \xi) = \rho^{-1} \int_K g(\lambda)\, \alpha(\lambda x\xi)\, d\lambda \tag{27}$$

où,

$$g(\lambda) = h((\lambda + 1)^{-1})\, |\lambda + 1|^{-1}\,. \tag{28}$$

Puisque h est lisse à support compact sur K^*, la fonction g appartient à $C_c^\infty(K)$.

Alors $\sigma(x, \xi) = \rho^{-1}\, \widehat{g}(x\xi)$ et,

$$\mathrm{Trace}\,(R_\Lambda\, T) = \rho^{-1} \int_{|x| \leq \Lambda, |\xi| \leq \Lambda} \widehat{g}(x\xi)\, dx\, d\xi\,. \tag{29}$$

Avec $u = x\xi$, on a $dx\, d\xi = du\, \frac{dx}{|x|}$ et, pour $|u| \leq \Lambda^2$,

$$\rho^{-1} \int_{\frac{|u|}{\Lambda} \leq |x| \leq \Lambda} \frac{dx}{|x|} = 2 \log' \Lambda - \log |u| \tag{30}$$

(en utilisant la définition précise de $\log' \Lambda$ pour gérer les termes aux bornes). Ainsi, nous pouvons réécrire (29) comme,

$$\text{Trace}\,(R_\Lambda\, T) = \int_{|u| \leq \Lambda^2} \widehat{g}(u)\, (2 \log' \Lambda - \log |u|)\, du \tag{31}$$

Puisque $g \in C_c^\infty(K)$, on a,

$$\int_{|u| \geq \Lambda^2} |\widehat{g}(u)|\, du = O(\Lambda^{-N}) \qquad \forall\, N \tag{32}$$

et de façon similaire, pour $|\widehat{g}(u)\, \log |u||$. Ainsi,

$$\text{Trace}\,(R_\Lambda\, T) = 2\, g(0)\, \log' \Lambda - \int \widehat{g}(u)\, \log |u|\, du\, + o(1). \tag{33}$$

Maintenant, pour n'importe quel corps local K et pour n'importe quel caractère de base α, si nous prenons comme mesure de da la mesure auto-duale, la transformée de Fourier de la distribution $\varphi(u) = -\log |u|$ est donnée ailleurs qu'en 0 par

$$\widehat{\varphi}(a) = \rho^{-1}\, \frac{1}{|a|}\,, \tag{34}$$

avec ρ déterminée par (17). Pour connaître celui-ci, appelons P la distribution sur K donnée par,

$$P(f) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon \in \text{Mod}(K)}} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} f(x)\, d^*x + f(0) \log \varepsilon \right). \tag{35}$$

On a $P(f_a) = P(f) - \log |a|\, f(0)$, ce qui est suffisant pour montrer que $\widehat{P}(x)$ est égal à $-\log |x| +$ Cte, et que $\widehat{\varphi}$ diffère de P par un multiple de δ_0.

Alors, la formule de Parseval donne, avec les conventions du théorème 3,

$$-\int \widehat{g}(u)\, \log |u|\, du = \frac{1}{\rho} \int' g(a)\, \frac{da}{|a|}\,. \tag{36}$$

En remplaçant a par $\lambda - 1$ et en appliquant (28), on obtient le résultat escompté. ∎

Nous montrerons dans l'Appendice II que la valeur principale à privilégier, qui dépend du caractère de base α, est la même que dans les formules explicites de Weil.

VI. Le cas global, et le calcul de la formule de trace.

Nous allons maintenant considérer l'action de C_k sur X et écrire l'analogue de IV (17) pour la formule de trace de la distribution.

X et C_k sont tous les deux définis comme des quotients et l'on définit

$$\pi : A \to X\,,\ c : \mathrm{GL}_1(A) \to C_k \tag{1}$$

comme les applications quotients correspondantes.

Comme ci-dessus, on considère le graphe Z de l'action

$$f : X \times C_k \to X\,,\ f(x,\lambda) = \lambda x \tag{2}$$

et l'application diagonale

$$\varphi : X \times C_k \to X \times C_k \times X \qquad \varphi(x,\lambda) = (x,\lambda,x)\,. \tag{3}$$

Recherchons d'abord les points fixes, $\varphi^{-1}(Z)$, i.e. les paires $(x,\lambda) \in X \times C_k$ telles que $\lambda x = x$. Choisissons $x = \pi(\tilde{x})$ et $\lambda = c(j)$. Alors l'égalité $\lambda x = x$ signifie que $\pi(j\tilde{x}) = \pi(\tilde{x})$ et alors, il existe $q \in k^*$ tel qu'avec $\tilde{j} = qj$, on a

$$\tilde{j}\tilde{x} = \tilde{x}\,. \tag{4}$$

Rappelons maintenant que A est le produit direct restreint $A = \prod_{\mathrm{res}} k_v$ des corps locaux k_v obtenu par complétion de k par rapport à la place v. L'égalité (4) signifie que $\tilde{j}_v\tilde{x}_v = \tilde{x}_v$; ainsi, si $\tilde{x}_v \neq 0$ pour tout v, il s'ensuit que $\tilde{j}_v = 1\ \forall v$ et $\tilde{j} = 1$. Cela montre que la projection de $\varphi^{-1}(Z) \cap C_k \backslash \{1\}$ sur X est l'union des hyperplans

$$\cup H_v\,;\ H_v = \pi(\tilde{H}_v)\,,\ \tilde{H}_v = \{x\,;\ x_v = 0\}\,. \tag{5}$$

Chaque $\tilde{H}_v$ est clos dans A et est invariant par la multiplication par des éléments de k^*. De cela, il découle que H_v est un sous-ensemble clos de X et on vérifie que c'est la fermeture de l'orbite sous C_k de n'importe quel point générique

$$x\,,\ x_u = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u = v\,. \tag{6}$$

Pour n'importe quel tel point x, le groupe d'isotropie I_x est l'image dans C_k du groupe multiplicatif k_v^*,

$$I_x = k_v^* \tag{7}$$

par l'application $\lambda \in k_v^* \to (1,\ldots,1,\lambda,1,\ldots)$. Cette application apparaît aussi dans la théorie des corps de classes (cf. [W1]) pour relier la théorie de Galois locale à la théorie globale.

Les deux groupes k_v^* et C_k sont commensurables à $\mathbb{R}_+^*$ par l'homomorphisme de modules, qui est propre à image cocompacte,

$$G \xrightarrow{|\ |} \mathbb{R}_+^*\,. \tag{8}$$

Puisque la restriction à k_v^* du module de C_k est le module de k_v^*, il s'ensuit que

$$I_x \text{ est un sous-groupe cocompact de } C_k\,. \tag{9}$$

Cela autorise à normaliser les mesures de Haar respectives de telle manière que le covolume de I_x vaille 1. Cela est en fait assuré par la normalisation canonique des mesures de Haar des groupes modulés (cf. [W3]),

$$
\int_{|g|\in[1,\Lambda]} d^*g \sim \log\Lambda \quad \text{quand} \quad \Lambda \to +\infty\,. \tag{10}
$$

Il est important de noter que bien que I_x soit cocompact dans C_k, l'orbite de x n'est pas fermée et qu'il est nécessaire de la fermer, le résultat de cette fermeture étant H_v. Nous expliquerons comment justifier ce point plus tard dans la section VII, dans la situation similaire de l'action de C_S sur X_S. Nous pouvons maintenant au vu des résultats des deux sections précédentes écrire la contribution de chaque H_v à la trace de la distribution.

Puisque $\tilde{H}_v$ est un hyperplan, on peut identifier l'espace transverse N_x à H_v en x avec le quotient

$$
N_x = A/\tilde{H}_v = k_v \tag{11}
$$

qui est plus précisément le groupe additif du corps local k_v. Etant donné $j \in I_x$, on a $j_u = 1\ \forall u \neq v$, et $j_v = \lambda \in k_v^*$. L'action de j sur A est linéaire et rend x fixe, ce qui a pour conséquence que l'action sur l'espace transverse N_x est donnée par

$$
(\lambda, a) \to \lambda a \quad \forall a \in k_v. \tag{12}
$$

Nous pouvons alors espérer aboutir en écrivant la contribution de H_v à la trace de la distribution ainsi,

$$
\int_{k_v^*} \frac{h(\lambda)}{|1-\lambda|}\, d^*\lambda \tag{13}
$$

où h est la fonction test sur C_k qui s'évanouit en 1. Nous devons alors prêter attention à une contradiction en terme de notations avec la troisième section (formule 9), quand nous avons utilisé le symbole $U(j)$ pour l'opération

$$
\big(U(j)f\big)(x) = f(j^{-1}x) \tag{14}
$$

tandis que nous avons utilisé j dans la discussion ci-dessus. Cela revient à remplacer la fonction test $h(u)$ par $h(u^{-1})$ et alors, nous obtenons comme analogue formel de III (17) l'expression suivante pour la trace de la distribution

$$
\mathrm{Trace}\,(U(h)) = \sum_v \int_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u\,. \tag{15}
$$

Maintenant, le côté droit de (15) devient, quand on le restreint à l'hyperplan $h(1) = 0$, la distribution obtenue par André Weil [W3] comme synthèse des formules explicites de la théorie des nombres pour toutes les fonctions L à Grössencharakter. En particulier, nous pouvons la réécrire en

$$
\hat{h}(0) + \hat{h}(1) - \sum_{L(\chi,\rho)=0} \hat{h}(\chi,\rho) + \infty\; h(1) \tag{16}
$$

où cette fois, la restriction $\mathrm{Re}(\rho) = \frac{1}{2}$ a été éliminée.

Ainsi, rendre égales (34) de la section III et (16) pour $h(1) = 0$, devrait permettre d'obtenir l'information souhaitée sur les zéros. Bien sûr, cela nécessite au préalable d'éliminer le rôle de δ, et (comme dans [AB]) de prouver que la trace coïncide avec la trace théorique d'un opérateur ordinaire sur le conoyau de E. On effectue cela pour la formulation connue du théorème du point-fixe de Lefschetz en utilisant les familles.

Une propriété très importante de la partie droite de (15) (et de IV (17) en général) est que si la fonction test h, avec h(1) = 0, est positive,

(17), $$h(u) \geq 0 \quad \forall\ u \in C_k$$

alors le côté droit est *positif*. Cela indique dès le début que, dans le but d'obtenir l'espace de Polya-Hilbert à partir du flot de Riemann, *ce n'est pas* la quantification qui devrait être en jeu mais simplement le passage à l'espace L^2, $X \to L^2(X)$. Effectivement, la positivité de IV (17) est typique des *matrices de permutation* plutôt qu'associée à la quantification. Cette distinction joue un rôle crucial dans la discussion ci-dessus au sujet de la formule de trace, en particulier par le fait que la formule de trace attendue n'est pas une formule semi-classique mais une formule de Leschetz dans l'esprit de [AB].

La discussion ci-dessus *n'est pas* une justification rigoureuse de cette formule. Le premier obstacle évident est que la trace de la distribution est seulement formelle et que, pour lui donner une signification rigoureuse liée aux opérateurs sur les espaces de Hilbert, on a besoin, comme dans la section V, d'effectuer une coupure (cut-off).

La seconde difficulté provient de la présence du paramètre δ comme paramètre de l'espace de Hilbert, alors que δ n'apparaît pas dans la formule de trace.
Comme nous le verrons dans les deux prochaines sections, la coupure (cut-off) éliminera complètement le rôle de δ, et nous montrerons néanmoins (en démontrant la positivité de la distribution de Weil) que la validité de la formule de trace (indépendante de δ) est équivalente à l'hypothèse de Riemann pour tous les Grössencharakters de k.

VII. Preuve de la formule de trace dans le cas S-local.

Dans le calcul de la trace formelle de la section VI, nous passons sur les difficultés inhérentes à la structure "sioux" de l'espace X.

Pour comprendre comment gérer les formules de traces sur de tels espaces, nous allons considérer la situation légèrement plus simple qui advient lorsqu'on considère seulement un ensemble fini S de places de k.

Dès que la cardinalité de S est plus grande que 3, l'espace correspondant X_S présente la plupart des propriétés "sioux" de X. En particulier, il n'est plus de type I au sens de la Géométrie non-commutative.

Néanmoins, nous pourrons démontrer un résultat général précis (théorème 4) qui montre que la gestion des orbites périodiques ci-dessus, et de leur contribution à la trace, est celle qui convient.

Cela montrera en particulier pourquoi les orbites du point fixe 0, ou des éléments $x \in A$, tels que x_v s'évanouit en au moins deux places, ne contribuent pas à la formule de trace.

En même temps, nous gèrerons, comme dans la section V, l'absence de transversalité quand $h(1) \neq 0$.

Décrivons d'abord le contexte réduit pour la formule de trace. Prenons k un corps global et S un ensemble fini de places de k contenant toutes les places infinies. Le groupe O_S^* des S-unités est défini comme le sous-groupe de k^*,

$$O_S^* = \{q \in k^*, |q_v| = 1, v \notin S\} \tag{1}$$

Il est cocompact dans J_S^1 où,

$$J_S = \prod_{v \in S} k_v^* \tag{2}$$

et,

$$J_S^1 = \{j \in J_S, |j| = 1\}. \tag{3}$$

Ainsi, le groupe-quotient $C_S = J_S / O_S^*$ joue le même rôle que C_k, et agit sur le quotient X_S de $A_S = \prod_{v \in S} k_v$ par O_S^*.

Pour avoir à l'esprit un exemple simple, on peut prendre $k = \mathbb{Q}$, avec S constitué des trois places 2, 3, et ∞. On vérifie sur cet exemple que la topologie de X_S n'est pas de type I puisque par exemple, le groupe $O_S^* = \{\pm 2^n 3^m ;\, n, m \in \mathbb{Z}\}$ agit ergodiquement sur $\{0\} \times \mathbb{R} \subset A_S$.

On normalise la mesure de Haar $d^*\lambda$ de C_S par,

$$\int_{|\lambda| \in [1,\Lambda]} d^*\lambda \sim \log \Lambda \qquad \text{quand } \Lambda \to \infty\,, \tag{4}$$

et on normalise la mesure de Haar multiplicative $d^*\lambda$ de J_S de telle manière qu'elle coïncide sur le domaine fondamental D avec l'action de O_S^* sur J_S.

Il n'y a pas de difficulté à définir l'espace de Hilbert $L^2(X_S)$ des fonctions de carré intégrable sur X_S. Nous procédons comme dans la section III (sans le δ), et nous complétons (et séparons) l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(A_S)$ pour la structure préhilbertienne donnée par,

$$\|f\|^2 = \int \Big| \sum_{q \in O_S^*} f(qx) \Big|^2 |x|\, d^*x \tag{5}$$

où l'intégrale est calculée sur C_S ou, de manière équivalente, sur un domaine fondamental D pour l'action de O_S^* sur J_S.

Pour montrer que (5) fait sens, on prouve que pour $f \in \mathcal{S}(A_S)$, la fonction $E_0(f)(x) = \sum_{q \in O_S^*} f(qx)$ est bornée supérieurement par une puissance de $log|x|$ quand $|x|$ tend vers zéro. Pour voir cela quand

f est la fonction caractéristique de $\{x \in A_S, |x_v| \leq 1\,, \forall v \in S\}$, on utilise la cocompacité de O_S^* dans J_S^1, pour remplacer la somme par une intégrale. Cette dernière intégrale est alors comparable à,

(6)
$$\int_{u_i \geq 0, \sum u_i = -log|x|} \prod du_i,$$

où l'indice i varie dans S. Le cas général découle de cela.

L'opérateur d'échelle $U(\lambda)$ est défini par,

(7)
$$(U(\lambda)\,\xi)(x) = \xi(\lambda^{-1}\,x) \qquad \forall\, x \in A_S$$

et la même formule, avec $x \in X_S$, définit son action sur $L^2(X_S)$.

Se donner une fonction lisse h supportée de façon compacte sur C_S, $U(h) = \int h(g)U(g)dg$, consiste à se donner un opérateur agissant sur $L^2(X_S)$.

Nous allons maintenant montrer que la transformée de Fourier F sur $\mathcal{S}(A_S)$ s'étend à un opérateur unitaire sur l'espace de Hilbert $L^2(X_S)$.

Lemme 1. *a) Pour toute fonction $f_i \in \mathcal{S}(A_S)$, les séries $\sum_{O_S^*} \langle f_1, U(q)\, f_2 \rangle_A$ des produits intérieurs sur $L^2(A_S)$ convergent géométriquement sur le groupe commutatif fini engendré O_S^*. De plus, leur somme est égale au produit intérieur de f_1 et f_2 dans l'espace de Hilbert $L^2(X_S)$.*

b) Soit $\alpha = \prod \alpha_v$ un caractère de base du groupe additif A_S et F la transformée de Fourier lui correspondant. La fonction $f \to F(f)$, $f \in \mathcal{S}(A_S)$ étend de façon unique l'espace de Hilbert $L^2(X_S)$.

Preuve. La fonction $L : O_S^* \to \mathbb{R}^S$, donnée par $L(u)_v = \log|u_v|$ a un noyau fini et son image est un treillis sur l'hyperplan $H = \{(y_v), \sum_S y_v = 0\}$. Sur H, on a $Sup_S y_v \geq 1/2n \sum |y_v|$, où $n = card(S)$. Alors, on a l'inégalité

(8)
$$Sup_S|q_v| \geq \exp(d(q,1)) \qquad \forall q \in O_S^*$$

pour une métrique spatiale adéquate d sur O_S^*.

Soit $K_n = \{x \in A_S;\, |x_v| \leq n,\ \forall v \in S\}$ et k_n la fonction caractéristique de K_n. Soit (λ_n) une suite à décroissance rapide telle que,

(9)
$$|f_i(x)| \leq \sum \lambda_n\, k_n(x) \qquad \forall x \in A_S.$$

On a pour une constante adéquate c,

(10)
$$|\left\langle k_n, U(q^{-1})\, k_n \right\rangle| \leq c\, n^m (Sup_S|q_v|)^{-1}$$

où $m = Card(S)$.

En utilisant (9), on voit alors que $\langle f_1, U(q)\, f_2 \rangle_A$ décroît exponentiellement sur O_S^*. En appliquant le théorème de Fubini, on aboutit à l'égalité,

(11)
$$\int \Big| \sum_{q \in O_S^*} f(qx) \Big|^2 |x|\, d^*x = \sum_{O_S^*} \langle f, U(q)\, f \rangle_A\,.$$

Cela prouve a). Pour prouver b), on utilise seulement (11) et les égalités $\langle Ff,\, Ff\rangle_A = \langle f,\, f\rangle_A$ et $F(U(q)\,f) = U(q^{-1})F(f)$. ∎

Maintenant, exactement comme dans le cas des corps locaux ci-dessus (théorème V.3), on a besoin d'utiliser une coupure (cut-off). Pour cela, on utilise la projection orthogonale P_Λ sur le sous-espace,

$$P_\Lambda = \{\xi \in L^2(X_S)\,;\ \xi(x) = 0 \qquad \forall x\ ,\ |x| > \Lambda\}\,. \tag{12}$$

Ainsi, P_Λ est l'opérateur multiplicatif par la fonction ρ_Λ, où $\rho_\Lambda(x) = 1$ si $|x| \leq \Lambda$, et $\rho(x) = 0$ pour $|x| > \Lambda$. Cela donne une coupure (cut-off) infrarouge et pour obtenir une coupure ultraviolette, on utilise $\widehat{P}_\Lambda = F P_\Lambda F^{-1}$ où F est la transformée de Fourier (lemme 1) qui dépend du choix du caractère de base $\alpha = \prod \alpha_v$. On pose,

$$R_\Lambda = \widehat{P}_\Lambda\, P_\Lambda\,. \tag{13}$$

Le résultat principal de cette section est alors,

Théorème 4. *Soit A_S défini comme précédemment, avec un caractère de base $\alpha = \prod \alpha_v$. Soit $h \in \mathcal{S}(C_S)$ possédant un support compact. Alors quand $\Lambda \to \infty$, on a*

$$\mathrm{Trace}\,(R_\Lambda\, U(h)) = 2h(1)\log' \Lambda + \sum_{v \in S} \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u + o(1)$$

où $2\log' \Lambda = \int_{\lambda \in C_S,\, |\lambda| \in [\Lambda^{-1}, \Lambda]} d^*\lambda$, chaque k_v^* est envoyé sur C_S par la fonction $u \to (1, 1, ..., u, ..., 1)$ et la valeur principale $\int'$ est déterminée de manière unique par l'appariement avec l'unique distribution sur k_v qui coïncide avec $\frac{du}{|1-u|}$ pour $u \neq 1$ et dont la transformée de Fourier relative à α_v s'évanouit en 1.

Preuve. On normalise comme ci-dessus la mesure de Haar additive dx pour qu'elle soit la mesure auto-duale sur le groupe abélien A_S. On détermine la constante $\rho > 0$ par l'égalité (où le domaine fondamental D est comme ci-dessus),

$$\int_{\lambda \in D,\, 1 \leq |\lambda| \leq \Lambda} \frac{d\lambda}{|\lambda|} \sim \rho \log \Lambda \qquad \text{quand } \Lambda \to \infty\,.$$

de telle façon que $d^*\lambda = \rho^{-1} \frac{d\lambda}{|\lambda|}$.

On prend f une fonction compacte lisse supportée par J_S et telle que

$$\sum_{q \in O_S^*} f(qg) = h(g) \qquad \forall\, g \in C_S. \tag{14}$$

L'existence d'une telle fonction f découle du caractère discret de O_S^* dans J_S. Nous avons alors l'égalité $U(f) = U(h)$, où

$$U(f) = \int f(\lambda)\, U(\lambda)\, d^*\lambda\,, \tag{15}$$

Pour calculer la trace de $U(h)$ agissant sur les fonctions de l'espace quotient X_S, on procède comme dans le calcul de la formule de trace de Selberg (cf. [Se]). Ainsi pour un opérateur T, agissant sur les fonctions sur A_S, qui commute avec l'action de O_S^* et qui est représenté par un noyau entier,

$$T(\xi) = \int k(x,y)\xi(y)\, dy, \tag{16}$$

la trace de son action sur $L^2(X_S)$ est donnée par,

$$\text{Trace}(T) = \sum_{q \in O_S^*} \int_D k(x, qx) dx. \tag{17}$$

où D est comme ci-dessus le domaine fondamental de l'action de O_S^* sur le sous-ensemble J_S de A_S, dont le complément est négligeable. Posons $T = U(f)$. On peut écrire le noyau de Schwartz de T comme,

$$k(x, y) = \int f(\lambda^{-1})\, \delta(y - \lambda x)\, d^*\lambda\,. \tag{18}$$

Par construction, on a,

$$k(qx, qy) = k(x, y) \qquad q \in O_S^*. \tag{19}$$

Pour n'importe quel $q \in O_S^*$, nous évaluerons l'intégrale,

$$I_q = \int_{x \in D} k(qx, y) r_\Lambda^t(x, y) dy dx \tag{20}$$

où le noyau de Schwartz $r_\Lambda^t(x, y)$ pour la transposée R_Λ^t est donné par,

$$r_\Lambda^t(x, y) = \rho_\Lambda(x)\, (\widehat{\rho_\Lambda})\, (x - y)\,. \tag{21}$$

Pour évaluer l'intégrale ci-dessus, on pose $y = x + a$ et on calcule la transformée de Fourier en a.

Pour la transformée de Fourier en a de $r_\Lambda^t(x, x + a)$, on obtient,

$$\sigma_\Lambda(x, \xi) = \rho_\Lambda(x)\, \rho_\Lambda(\xi)\,. \tag{22}$$

Pour la transformée de Fourier en a de $k(qx, x + a)$, on obtient,

$$\sigma(x, \xi) = \int f(\lambda^{-1}) \left(\int \delta(x + a - \lambda qx)\, \alpha(a\xi)\, da \right) d^*\lambda\,. \tag{23}$$

On a,

$$\int \delta(x + a - \lambda qx)\, \alpha(a\xi)\, da = \alpha((\lambda q - 1)\, x\xi)\,, \tag{24}$$

ainsi (23) donne,

$$\sigma(x, \xi) = \rho^{-1} \int_{A_S} g_q(u)\, \alpha(ux\xi)\, du \tag{25}$$

où,

$$g_q(u) = f(q(u + 1)^{-1})\, |u + 1|^{-1}\,. \tag{26}$$

Puisque f est lisse à support compact sur A_S^*, la fonction g_q appartient à $C_c^\infty(A_S)$.

Ainsi $\sigma(x, \xi) = \rho^{-1}\, \widehat{g}_q(x\xi)$ et, en utilisant la formule de Parseval, on obtient,

$$I_q = \int_{x \in D,\, |x| \leq \Lambda, |\xi| \leq \Lambda} \sigma(x, \xi)\, dx\, d\xi\,. \tag{27}$$

Cela donne,

$$I_q = \rho^{-1} \int_{x \in D,\, |x| \leq \Lambda, |\xi| \leq \Lambda} \widehat{g}_q(x\xi)\, dx\, d\xi\,. \tag{28}$$

Avec $u = x\xi$, on a $dx\, d\xi = du\, \frac{dx}{|x|}$ et, pour $|u| \leq \Lambda^2$,

$$\rho^{-1} \int_{x \in D,\, \frac{|u|}{\Lambda} \leq |x| \leq \Lambda} \frac{dx}{|x|} = 2 \log' \Lambda - \log |u| \tag{29}$$

(en utilisant la définition précise de $\log' \Lambda$ pour gérer les termes aux limites). Ainsi, on peut réécrire (28) comme,

$$\operatorname{Trace}\,(R_\Lambda\, T) = \sum_{q \in O_S^*} \int_{|u| \leq \Lambda^2} \widehat{g}_q(u)\, (2 \log' \Lambda - \log |u|)\, du \tag{30}$$

Maintenant $\log |u| = \sum_{v \in S} \log |u_v|$, et nous allons d'abord prouver que,

$$\sum_{q \in O_S^*} \int \widehat{g}_q(u)\, du = \; h(1), \tag{31}$$

alors que pour tout $v \in S$,

$$\sum_{q \in O_S^*} \int \widehat{g}_q(u)\, (-\log |u_v|)\, du = \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u\,. \tag{32}$$

En fait, toutes les sommes dans q auront seulement des termes non-nuls certains nombres finis de fois.

Il restera alors à contrôler le terme d'erreur, c'est-à-dire à montrer que,

$$\sum_{q \in O_S^*} \int \widehat{g}_q(u)\, (\log |u| - 2 \log' \Lambda)^+\, du = 0(\Lambda^{-N}) \tag{33}$$

pour tout N, où nous avons utilisé la notation $x^- = 0$ si $x \leq 0$ et $x^+ = x$ si $x > 0$.

Maintenant, on rappelle que,

$$g_q(u) = f(q(u+1)^{-1})\, |u+1|^{-1}\,,$$

de telle façon que $\int \widehat{g}_q(u)\, du = g_q(0) = f(q)$. Puisque f est à support compact dans A_S^*, l'intersection de O_S^* avec le support de f est finie et par (14), on obtient l'égalité (31).

Pour prouver (32), on considère la projection naturelle pr_v de $\prod_{l \in S} k_l^*$ sur $\prod_{l \neq v} k_l^*$. L'image $pr_v(O_S^*)$ est encore un sous-groupe discret de $\prod_{l \neq v} k_l^*$, (puisque k_v^* est cocompact dans C_S) ; ainsi, il y a seulement un nombre fini de $q \in O_S^*$ tels que k_v^* rencontre le support f_q, c'est-à-dire tels que $f_q(a) = \; f(qa)$ pour tout a.

Pour chaque $q \in O_S^*$, on a, comme dans la section V,

$$\int \widehat{g}_q(u)\, (-\log |u_v|)\, du = \int'_{k_v^*} \frac{f_q(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u\,, \tag{34}$$

et comme nous venons de le voir, cette intégrale s'évanouit excepté pour un nombre fini de q, de telle manière que, par (14), on obtienne l'égalité (32).

Prouvons (33). Soient $\varepsilon_\Lambda(u) = (\log|u| - 2\log'\Lambda)^+$, et,

$$\delta_q(\Lambda) = \int \widehat{g}_q(u)\,\varepsilon_\Lambda(u)\,du \tag{35}$$

le terme d'erreur. Nous allons démontrer le

Lemme 2. *Pour tout Λ, les séries $\sum_{O_S^*}|\delta_q(\Lambda)|$ convergent géométriquement sur le groupe commutatif fini engendré O_S^*.*
De plus, la somme $\sigma(\Lambda)$ est en $O(\Lambda^{-N})$ pour un N au moins.

Preuve. Soit d une métrique adéquate sur O_S^* (cf. (8)) telle que,

$$Sup_S|q_v| \geq exp(d(q,1)) \qquad \forall q \in O_S^* \tag{36}$$

Soit $\xi \in \mathcal{S}(A_S)$ définie par $\xi(x) = f(x^{-1})|x^{-1}|$ pour tout $x \in A_S^*$ et étendue par la valeur 0 partout ailleurs. On a $g_q(x) = \xi(q^{-1}(1+x))$ pour tout $x \in A_S$, de telle sorte que $\widehat{g}_q(u) = \int g_q(x)\alpha(u\,x)\,dx = \alpha(-u)\,\widehat{\xi}(q\,u)$. Maintenant, $\delta_q(\Lambda) = \int \widehat{g}_q(u)\,\varepsilon_\Lambda(u)\,du = \int \widehat{\xi}(q\,u)\,\alpha(-u)\;\varepsilon_\Lambda(u)\,du = \int \widehat{\xi}(y)\,\alpha(-q^{-1}\,y)\,\varepsilon_\Lambda(y)\,dy$, puisque $\varepsilon_\Lambda(q\,u) = \varepsilon_\Lambda(u)$ pour tout u.

Ainsi, nous obtenons, en utilisant le symbole $\overline{F}\eta$ pour la transformée de Fourier inverse de η, l'égalité,

$$\delta_q(\Lambda) = \overline{F}(\varepsilon_\Lambda\widehat{\xi})(q^{-1}). \tag{37}$$

Soit $\alpha \in]0, 1/2[$ et considérons la norme,

$$\|\eta\| = Sup_{x\in A_S}|F(\eta)(x)\,Sup_S|x_v|^\alpha|. \tag{38}$$

Dans le but d'estimer (38), choisissons une fonction lisse ψ sur $\mathbb{R}$, égale à 1 dans un voisinage de 0, et avec support dans $[-1, 1]$, et introduisons les opérateurs de convolution,

$$(C_{\alpha,v} * \eta)(x) = \int_{k_v} \psi(|\varepsilon|)(\eta(x+\varepsilon) - \eta(x))\frac{d\varepsilon}{|\varepsilon|^{1+\alpha}}\ , \tag{39}$$

et les normes,

$$\|\eta\|_{(1,\alpha,v)} = \|C_{\alpha,v} * \eta\|_1\ , \tag{40}$$

où $\|\ \|_1$ est la L^1-norme.

La transformée de Fourier k_v de la distribution $C_{\alpha,v}$ se comporte comme $|x_v|^\alpha$ pour $|x_v| \to \infty$. Ainsi, en utilisant $F(C_{\alpha,v} * \eta) = F(C_{\alpha,v})\,F(\eta)$, et le contrôle de la norme supérieure $F(g)$ par la L^1-norme de g, nous obtenons une inégalité de la forme,

$$Sup_{x\in A_S}|F(\eta)(x)\,Sup_S|x_v|^\alpha| \leq c_\alpha \sum_S \|\eta\|_{(1,\alpha,v)}\,. \tag{41}$$

Montrons maintenant que, pour tout $\eta \in \mathcal{S}(A_S)$, et $\alpha < 1/2$, on a,

$$\|\varepsilon_\Lambda\,\eta\|_{(1,\alpha,v)} = O(\Lambda^{-N})\,, \tag{42}$$

pour un certain N.

On a
$|(\varepsilon_\Lambda(x+\varepsilon)\eta(x+\varepsilon)-\varepsilon_\Lambda(x)\eta(x))-\varepsilon_\Lambda(x)(\eta(x+\varepsilon)-\eta(x))|\leq|(\varepsilon_\Lambda(x+\varepsilon)-\varepsilon_\Lambda(x))||\eta(x+\varepsilon)|$.

De plus, en utilisant l'inégalité,

$$|a^+ - b^+| \leq |a-b|\,, \tag{43}$$

on voit que $|(\varepsilon_\Lambda(x+\varepsilon)-\varepsilon_\Lambda(x))|\leq|\log|x_v+\varepsilon|-\log|x_v||$, pour $\varepsilon\in k_v$.

Posons alors,

$$c'_\alpha = \int_{k_v} \log|1+y|\frac{dy}{|y|^{1+\alpha}}\ . \tag{44}$$

Ce nombre est fini pour toutes les places $v\in S$ dans la mesure où $\alpha<1/2$, et on a,

$$\int_{k_v} \psi(|\varepsilon|)(|\log|x+\varepsilon|-\log|x||)\frac{d\varepsilon}{|\varepsilon|^{1+\alpha}} \leq c'_\alpha|x|^{-\alpha}\,. \tag{45}$$

Ainsi, on obtient l'inégalité,

$$|C_{\alpha,v}*\varepsilon_\Lambda\,\eta-\varepsilon_\Lambda\,(C_{\alpha,v}*\eta)|(x)\leq c'_\alpha|x_v|^{-\alpha}\,Sup_{\varepsilon\in k_v,|\varepsilon|\leq 1}\,|\eta(x+\varepsilon)|. \tag{46}$$

Puisque la fonction $|x_v|^{-\alpha}$ est localement intégrable, pour $\alpha<1$, on a pour $\eta\in\mathcal{S}(A_S)$, et pour tout N,

$$\int_{X_\Lambda} |x_v|^{-\alpha}\,Sup_{\varepsilon\in k_v,|\varepsilon|\leq 1}\,|\eta(x+\varepsilon)|dx\ = O(\Lambda^{-N})\,, \tag{47}$$

où $X_\Lambda=\{\,y+\varepsilon;\,|y|\geq\Lambda,\,\varepsilon\in k_v,\,|\varepsilon|\leq 1\,\}$.

De plus, on a pour un certain N,

$$\|\varepsilon_\Lambda\,(C_{\alpha,v}*\eta)\|_1 =\ O(\Lambda^{-N}). \tag{48}$$

Ainsi, en utilisant (46), on obtient l'inégalité (42).

En prenant $\eta=\widehat{\xi}$ et en utilisant (41), on obtient des nombres δ_Λ, tels que $\delta_\Lambda\ = O(\Lambda^{-N})$ pour tout N et tels que,

$$|\overline{F}(\varepsilon_\Lambda\widehat{\xi})Sup_S|x_v|^\alpha||\leq\delta_\Lambda \qquad \forall x\in A_S\,\forall\Lambda. \tag{49}$$

En prenant $x=q\in O_S^*$, et en utilisant (36) et (37), on obtient,

$$|\delta_q(\Lambda)|\leq\delta_\Lambda exp(-d(q,1)) \qquad \forall q\in O_S^*, \tag{50}$$

qui est l'inégalité souhaitée. ∎

VIII. Formule de trace dans le cas global, et élimination de δ.

La principale difficulté amenée par le paramètre δ dans le Théorème 1 est que le calcul de la trace formelle de la section VI est indépendant de δ, et ainsi ne peut pas donner en général la valeur attendue pour la trace, du fait du théorème 1, puisque dans ce dernier, tout zéro critique ρ est compté avec une multiplicité égale au plus grand entier $n < \frac{1+\delta}{2}$, $n \leq$ la multiplicité de ρ comme zéro de L. En particulier, avec les fonctions L à zéros multiples, la δ-dépendance du côté spectral est non-triviale. Il est également clair que l'introduction du paramètre δ élimine artificiellement les zéros non-critiques de l'espace des fonctions $L^2_\delta(X)$.

Comme nous le verrons, tous ces problèmes sont éliminés par la coupure (cut-off). Ce dernier sera directement pratiqué sur l'espace de Hilbert $L^2(X)$ de telle manière que la seule valeur de δ qui sera utilisée est $\delta = 0$. Tous les zéros joueront un rôle du côté spectral de la formule de trace, mais, alors que les zéros critiques apparaîtront per-se, les zéros non-critiques apparaîtront en tant que résonances, et ils seront pris en compte dans la formule de trace à travers leur potentiel harmonique par rapport à la droite critique. Ainsi, le côté spectral est entièrement canonique et indépendant de δ, et en prouvant la positivité de la distribution de Weil, nous montrerons que cette égalité avec le côté géométrique, i.e. l'analogue global du théorème 4, est équivalente à l'hypothèse de Riemann pour toutes les fonctions L à Grössencharakter.

Le groupe abélien A des adèles de k est son propre dual de Pontrjagin du fait de l'appariement

$$\langle a, b\rangle = \alpha(ab) \tag{1}$$

où $\alpha : A \to U(1)$ est un caractère non-trivial qui s'évanouit sur $k \subset A$. Noter qu'un tel caractère est *non canonique*, mais que n'importe quels deux tels caractères α et α' sont reliés par k^*,

$$\alpha'(a) = \alpha(qa) \quad \forall a \in A\,. \tag{2}$$

Il suit de cela que les transformées de Fourier correspondantes sur A sont reliées par

$$\hat{f}' = \hat{f}_q\,. \tag{3}$$

C'est une raison de plus pour quotienter par des fonctions de la forme $f - f_q$, i.e. pour considérer l'espace-quotient X.

Fixons le caractère additif α comme ci-dessus, $\alpha = \prod \alpha_v$ et choisissons d une idèle différentielle,

$$\alpha(x) = \alpha_0(d\,x) \quad \forall x \in A\,, \tag{4}$$

où $\alpha_0 = \prod \alpha_{0,v}$ est le produit des caractères normalisés locaux (cf. [W1]). Soit S_0 l'ensemble fini des places auxquelles α_v est ramifié.

Nous nous concentrerons d'abord sur le cas de caractéristique positive, i.e. sur le cas des corps de fonctions, à la fois parce qu'il est techniquement plus simple, mais également parce qu'il permet de garder la trace de la signification géométrique de la construction (cf. section II).

De façon à comprendre comment réaliser, dans le cas global, la coupure (cut-off) $R_\Lambda = \widehat{P}_\Lambda \, P_\Lambda$ de la section VII, nous allons d'abord analyser la position relative de la paire de projections $\widehat{P}_\Lambda$, P_Λ quand $\Lambda \to \infty$. Ainsi, appelons $S \supset S_0$ un ensemble fini de places de k, suffisamment grand pour que $mod(C_S) = mod(C_k) = q^{\mathbb{Z}}$ et tel que, pour tout domaine fondamental quelconque D pour l'action de O_S^* sur J_S, le produit $D \times \prod R_v^*$ soit un domaine fondamental pour l'action de k^* sur J_k.

$\widehat{P}_\Lambda$ et P_Λ commutent toutes deux avec la décomposition de $L^2(X_S)$ comme sommes directes des sous-espaces, indexées par les caractères χ_0 de $C_{S,1}$,

$$L^2_{\chi_0} = \{\xi \in L^2(X_S)\,;\, \xi(a^{-1}x) = \chi_0(a)\,\xi(x), \ \ \forall\, x \in X_S\,, a \in C_{S,1}\} \tag{5}$$

qui correspondent aux projections $P_{\chi_0} = \int \overline{\chi_0}(a)\, U(a)\, d_1\, a$, où $d_1\, a$ est la mesure de Haar de masse totale 1 sur $C_{S,1}$.

Lemme 1. *Soit χ_0 un caractère de $C_{S,1}$, alors pour Λ suffisamment grand, $\widehat{P}_\Lambda$ et P_Λ commutent sur l'espace de Hilbert $L^2_{\chi_0}$.*

Preuve. Soit $\mathcal{U}_S$ l'image dans C_S du sous-groupe ouvert $\prod R_v^*$. C'est un sous-groupe d'indice fini l dans $C_{S,1}$. Fixons un caractère χ de $\mathcal{U}_S$ et considérons la somme directe finie des espaces de Hilbert $L^2_{\chi_0}$ où χ_0 varie parmi les caractères de $C_{S,1}$ dont la restriction à $\mathcal{U}_S$ est égale à χ,

$$L^2(X_S)_\chi = \{\xi \in L^2(X_S)\,;\, \xi(a^{-1}x) = \chi(a)\,\xi(x), \ \ \forall\, x \in X_S\,, a \in \mathcal{U}_S\} \tag{6}$$

La projection orthogonale correspondante est $U(h_\chi)$, où $h_\chi \in \mathcal{S}(C_S)$ est telle que,

$$Supp(h_\chi) = \mathcal{U}_S \qquad h_\chi(x) = \lambda\, \overline{\chi}(x) \qquad \forall\, x \in \mathcal{U}_S \tag{7}$$

et la constante $\lambda = l/\log q$, correspond à la normalisation standard de la mesure de Haar sur C_S. Choisissons comme dans la section VII, $f \in \mathcal{S}(J_S)$ avec un support $\prod R_v^*$ tel que $U(f) = U(h)$ et prenons $\xi \in \mathcal{S}(A_S)$ définie par $\xi(x) = f(x^{-1})|x^{-1}|$ pour tout $x \in A_S^*$ et étendue par la valeur 0 partout ailleurs.

Puisque ξ est localement constante, sa transformée de Fourier est de support compact et l'égalité (37) de la section VII montre que pour Λ suffisamment grand, on a l'égalité,

$$\text{Trace}\,(\widehat{P}_\Lambda\, P_\Lambda\, U(h_\chi)) = 2h_\chi(1)\log' \Lambda + \sum_{v \in S} \int'_{k_v^*} \frac{h_\chi(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u \tag{8}$$

Avec $\Lambda = q^N$, on a $2\log'\Lambda = (2N+1)\log q$ de telle sorte que,

$$2h_\chi(1)\log'\Lambda = (2N+1)l \tag{9}$$

Le caractère χ de $\prod R_v^*$ est un produit, $\chi = \prod \chi_v$ et si l'on utilise le caractère standard additif α_0 pour prendre la valeur principale, on a (cf. [W1] Appendice IV),

$$\int'_{R*_v} \frac{\chi_v(u)}{|1-u|}\, d^*u = -f_v \log q_v \tag{10}$$

où f_v est l'ordre de ramification de χ_v. Nous obtenons ainsi,

$$\int'_{k_v^*} \frac{h_\chi(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u = -f_v\, deg(v)\, l + l\, \frac{\log|d_v|}{\log q} \tag{11}$$

où $q_v = q^{deg(v)}$, et puisque nous utilisons le caractère additif α_v, nous devons prendre en compte le décalage $\log |d_v|\, h_\chi(1)$ dans la valeur principale.

Maintenant, on a $|d| = \prod |d_v| = q^{2-2g}$, où g est le genre de la courbe. Ainsi, nous obtenons,

$$\text{Trace}\,(\widehat{P}_\Lambda\, P_\Lambda\, U(h_\chi)) = \,(2N+1)l \,-f\,l + (2-2g)\,l \tag{12}$$

où $f = \sum_S f_v\, deg(v)$ est l'ordre de ramification de χ, i.e. le degré de son conducteur.

Soit $B_\Lambda = \, Im(P_\Lambda) \cap Im(\widehat{P}_\Lambda)$ l'intersection des images par les projections P_Λ et $\widehat{P}_\Lambda$, et B_Λ^χ l'intersection avec $L^2(X_S)_\chi$. Nous allons exhiber pour tout caractère χ de $\mathcal{U}_S$ un vecteur $\eta_\chi \in L^2(X_S)_\chi$ tel que,

$$U(g)(\eta_\chi) \in \, B_\Lambda \qquad \forall g \in C_S, |g| \leq \Lambda, |g^{-1}| \leq q^{2-2g-f}\,\Lambda, \tag{13}$$

alors que les vecteurs $U(g)(\eta_\chi)$ sont linéairement indépendants pour $g \in D_S$, où D_S est le quotient de C_S par le sous-groupe ouvert $\mathcal{U}_S$.

Avec $\Lambda = \, q^N$ comme ci-dessus, le nombre d'éléments g de D_S tels que $|g| \leq \Lambda, |g^{-1}| \leq q^{2-2g-f}\,\Lambda$ est précisément égal à $(2N+1)l \,-f\,l + (2-2g)\,l$, ce qui autorise à conclure que les projections $\widehat{P}_\Lambda$ et P_Λ commutent dans $L^2(X_S)_\chi$ et que le sous-espace B_Λ^χ est l'extension linéaire des vecteurs $U(g)(\eta_\chi)$.

Construisons maintenant les vecteurs $\eta_\chi \in L^2(X_S)_\chi$. Avec les notations de [W1] Proposition VII.13, soit,

$$\eta_\chi = \prod_S \phi_v \tag{14}$$

la fonction standard associée à $\chi = \prod \chi_v$ de telle sorte que v, ϕ_v non-ramifiée soit la fonction caractéristique de R_v, alors que pour v ramifiée, elle s'évanouisse en dehors de R_v^* et coïncide avec $\overline{\chi}_v$ sur R_v^*. Par construction, le support de η_χ est contenu dans $R = \prod R_v$, de telle façon que l'on a $U(g)(\eta_\chi) \in \, Im(P_\Lambda)$ si $|g| \leq \Lambda$. De façon similaire, par [W1] Proposition VII.13, on obtient que $U(g)(\eta_\chi) \in \, Im(\widehat{P}_\Lambda)$ dès que $|g^{-1}| \leq q^{2-2g-f}\,\Lambda$. Cela montre que η_χ satisfait (13) et il reste à montrer que les vecteurs $U(g)(\eta_\chi)$ sont linéairement indépendants pour $g \in D_S$.

Commençons par une relation non-triviale de la forme,

$$\| \sum \lambda_g U(g)(\eta_\chi) \| = \, 0 \tag{15}$$

où la norme est prise dans $L^2(X_S)$, (cf. VII.5). Posons alors $\xi_\chi = \prod_S \phi_v \otimes 1_R$ où $R = \prod_{v \notin S} R_v$. Assumons d'abord que $\chi \neq 1$. Alors ξ_χ donne un élément de $L^2_\delta(X)_0$ qui est cyclique pour la représentation U de C_k dans la somme directe des sous-espaces $L^2_{\delta,\chi_0}(X)_0$ où χ_0 varie parmi les caractères de $C_{k,1}$ dont la restriction à $\mathcal{U}$ est égale à χ.

Maintenant, (15) implique que dans $L^2_\delta(X)_0$, on a $\sum \lambda_g U(g)(\xi_\chi) \, = \, 0$. Par la cyclicité de ξ_χ, on obtient $\sum \lambda_g U(g) = \, 0$ sur tout $L^2_{\delta,\chi_0}(X)_0$ ce qui donne une contradiction (cf. Appendice I, Lemme 3).

La preuve que $\chi = 1$ est similaire mais nécessite plus d'attention car $1_R \notin \mathcal{S}_0(A)$. ∎

On peut alors écrire le Théorème 4 dans le cas de la caractéristique positive par le

Corollaire 2. *Soit* Q_Λ *la projection orthogonale sur le sous-espace de* $L^2(X_S)$ *fibré par les* $f \in \mathcal{S}(A_S)$ *qui s'évanouissent aussi bien que leur transformée de Fourier pour* $|x| > \Lambda$. *Posons que* $h \in \mathcal{S}(C_S)$ *est à support compact. Alors, quand* $\Lambda \to \infty$*, on a*

$$\operatorname{Trace}(Q_\Lambda\, U(h)) = 2h(1)\log' \Lambda + \sum_{v \in S} \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u + o(1)$$

où $2\log' \Lambda = \int_{\lambda \in C_S,\, |\lambda| \in [\Lambda^{-1}, \Lambda]} d^*\lambda$*, et les autres notations sont les mêmes que celles du Théorème VII.4.*

En fait, la preuve du lemme 1 montre que les sous-espaces B_Λ se stabilisent très rapidement, de telle manière que l'application naturelle $\xi \to \xi \otimes 1_R$ de $L^2(X_S)$ dans $L^2(X_S')$ pour $S \subset S'$ envoie B_Λ^S sur $B_\Lambda^{S'}$.

On obtient alors du corollaire 2 une formulation globale, indépendante de S, de la coupure (cut-off), et de la formule de trace. Soit $L^2(X)$ l'espace de Hilbert $L^2_\delta(X)$ de la section III pour la valeur triviale $\delta = 0$ qui, bien sûr, élimine le terme déplaisant du produit intérieur, et soit Q_Λ la projection orthogonale sur le sous-espace B_Λ de $L^2(X)$ fibré par $f \in \mathcal{S}(A)$ qui s'évanouissent comme leur transformée de Fourier pour $|x| > \Lambda$. Comme on l'a mentionné précédemment, la preuve du lemme 1 montre que pour S et Λ suffisamment grands (et pour un caractère fixé χ), l'application naturelle $\xi \to \xi \otimes 1_R$ de $L^2(X_S)_\chi$ dans $L^2(X)_\chi$ envoie B_Λ^S sur B_Λ.

Il est alors naturel de s'attendre à ce que l'analogue global suivant de la formule de trace du corollaire 2 soit vraiment vérifié, i.e. que quand $\Lambda \to \infty$, on ait,

$$\operatorname{Trace}(Q_\Lambda\, U(h)) = 2h(1)\log' \Lambda + \sum_{v} \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u + o(1) \tag{16}$$

où $2\log' \Lambda = \int_{\lambda \in C_k,\, |\lambda| \in [\Lambda^{-1}, \Lambda]} d^*\lambda$, et les autres notations sont celles du Théorème VII.4.

Nous pouvons prouver directement que (16) est vérifiée quand h est supporté par $C_{k,1}$ mais nous ne pouvons prouver (16) directement pour un h arbitraire (même si le côté droit de la formule ne contient qu'un nombre fini de termes non-nuls puisque $h \in \mathcal{S}(C_k)$ est à support compact). Ce que nous allons cependant montrer, c'est que la formule de trace (16) implique la positivité de la distribution de Weil, et ainsi la validité de RH pour k. Rappelons-nous que nous sommes encore en caractéristique positive et qu'alors RH est un théorème de A.Weil. Il sera alors important de vérifier l'équivalence effective entre la validité de RH et la formule (16). Cela se fait par le,

Théorème 5. *Soit* k *un corps global de caractéristique positive et* Q_Λ *la projection orthogonale sur le sous-espace de* $L^2(X)$ *fibré par les* $f \in \mathcal{S}(A)$ *tels que* $f(x)$ *et* $\widehat{f}(x)$ *s'évanouissent pour* $|x| > \Lambda$. *Soit* $h \in \mathcal{S}(C_k)$ *à support compact. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes,* *a) Quand $\Lambda \to \infty$, on a*

$$\text{Trace}\,(Q_\Lambda\, U(h)) = 2h(1)\log' \Lambda + \sum_v \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u + o(1)$$

b) Toutes les fonctions L à Grössencharakter sur k satisfont l'hypothèse de Riemann.

Preuve. Pour prouver que a) implique b), nous allons prouver (en assumant a)) la positivité de la distribution de Weil (cf. Appendice II),

$$\Delta = \log|d^{-1}|\,\delta_1 + D - \sum_v D_v\,. \tag{17}$$

D'abord, le théorème III.1 est appliqué pour $\delta = 0$. L'application E,

$$E(f)\,(g) = |g|^{1/2} \sum_{q\in k^*} f(qg) \qquad \forall\, g \in C_k\,, \tag{18}$$

définit une isométrie surjective de $L^2(X)_0$ dans $L^2(C_k)$ de telle sorte que,

$$E\,U(a) = |a|^{1/2}\, V(a)\, E\,, \tag{19}$$

où la représentation régulière gauche V de C_k sur $L^2(C_k)$ est donnée par,

$$(V(a)\,\xi)\,(g) = \xi(a^{-1}\,g) \qquad \forall\, g, a \in C_k\,. \tag{20}$$

Soit S_Λ le sous-espace de $L^2(C_k)$ donné par,

$$S_\Lambda = \{\xi \in L^2(C_k)\,;\ \xi(g) = 0,\ \ \forall g\ ,\ \ |g| \notin [\Lambda^{-1},\, \Lambda]\}\,. \tag{21}$$

Nous noterons par la même lettre la projection orthogonale correspondante.

Soit $B_{\Lambda,0}$ le sous-espace de $L^2(X)_0$ fibré par les $f \in \mathcal{S}(A)_0$ de telle façon que $f(x)$ et $\widehat{f}(x)$ s'évanouissent pour $|x| > \Lambda$ et soit $Q_{\Lambda,0}$ la projection orthogonale correspondante. Soit $f \in \mathcal{S}(A)_0$ telle que $f(x)$ et $\widehat{f}(x)$ s'évanouissent pour $|x| > \Lambda$, alors $E(f)\,(g)$ s'évanouit pour $|g| > \Lambda$, et l'égalité (Appendice I)

$$E(f)(g) = E(\widehat{f})\left(\frac{1}{g}\right) \qquad f \in \mathcal{S}(A)_0, \tag{22}$$

montre que $E(f)\,(g)$ s'évanouit pour $|g| < \Lambda^{-1}$.

Cela montre que $E(B_{\Lambda,0}) \subset S_\Lambda$, de telle manière que si l'on prend $Q'_{\Lambda,0} = E\,Q_{\Lambda,0}\,E^{-1}$, on obtient l'inégalité,

$$Q'_{\Lambda,0} \leq S_\Lambda \tag{23}$$

et que pour un Λ donné, la distribution suivante sur C_k est de type positif,

$$\Delta_\Lambda(f) = \text{Trace}\,((S_\Lambda - Q'_{\Lambda,0})\, V(f)), \tag{24}$$

i.e. on a,

$$\Delta_\Lambda(f * f^*) \geq 0, \tag{25}$$

où $f^*(g) = \overline{f}(g^{-1})$ pour tout $g \in C_k$.

Prenons alors $f(g) = |g|^{-1/2}\, h(g^{-1})$, de telle façon que par (19), on ait $E\,U(h) = V(\tilde{f})E$ où $\tilde{f}(g) = f(g^{-1})$ pour tout $g \in C_k$. Par le lemme 3 de l'Appendice II, on a,

$$\sum_v D_v(f) - \log|d^{-1}| = \sum_v \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u. \tag{26}$$

On a Trace $(S_\Lambda\, V(f)) = 2f(1)\log' \Lambda$. Aussi, en utilisant a), on voit que la limite de Δ_Λ quand $\Lambda \to \infty$ est la distribution de Weil Δ (cf.(17)). Le terme D dans la dernière équation provient de la nuance entre les sous-espaces B_Λ et $B_{\Lambda,0}$. Cela montre, en utilisant (24), que la distribution Δ est de type positif de telle façon que b) est vérifiée (cf. [W3]).

Montrons maintenant que b) implique a). Nous allons calculer à partir des zéros des fonctions L, et indépendamment d'une quelconque hypothèse, la limite des distributions Δ_Λ quand $\Lambda \to \infty$.

Nous choisissons (de manière non canonique) un isomorphisme

$$C_k \simeq C_{k,1} \times N\,. \tag{27}$$

où $N =$ image $|\ | \subset \mathbb{R}_+^*$, $N \simeq \mathbb{Z}$ est le sous-groupe $q^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}_+^*$.

Pour $\rho \in \mathbb{C}$, soit $d\mu_\rho(z)$ la mesure harmonique de ρ par rapport à la ligne $i\,\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. C'est une mesure de probabilité sur la ligne $i\,\mathbb{R}$ et elle coïncide avec la masse de Dirac de ρ quand ρ est sur la ligne.

L'implication b)$\Rightarrow$a) découle immédiatement des formules explicites (Appendice II) et du lemme suivant,

Lemme 3. *La limite des distributions Δ_Λ quand $\Lambda \to \infty$ est donnée par,*

$$\Delta_\infty(f) = \sum_{\substack{L\left(\widetilde{\chi},\frac{1}{2}+\rho\right)=0 \\ \rho \in B/N^\perp}} N(\widetilde{\chi}, \frac{1}{2}+\rho) \int_{z \in i\,\mathbb{R}} \widehat{f}(\widetilde{\chi}, z)\, d\mu_\rho(z)$$

où B est la bande ouverte $B = \{\rho \in \mathbb{C}; Re(\rho) \in]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[\}$, $N(\widetilde{\chi}, \frac{1}{2}+\rho)$ est la multiplicité du zéro, $d\mu_\rho(z)$ est la mesure harmonique de ρ par rapport à la ligne $i\,\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, et la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f est définie par,

$$\widehat{f}(\widetilde{\chi}, \rho) = \int_{C_k} f(u)\, \widetilde{\chi}(u)\, |u|^\rho\, d^*\, u\,.$$

Preuve. Soit $\Lambda = q^N$. La preuve du Lemme 1 donne la borne inférieure $(2N+1) - f + (2-2g)$ pour la dimension de $B_{\Lambda,\chi}$ en fonction de l'ordre de la ramification f du caractère χ de $C_{k,1}$, pour lequel nous supposons d'abord que $\chi \neq 1$.

Nous avons vu plus haut que $E(B_{\Lambda,\chi}) \subset S_{\Lambda,\chi}$ alors que la dimension de $S_{\Lambda,\chi}$ est $2N+1$.

Maintenant, par le Lemme 3 de l'Appendice I, tout élément $\xi \in E(B_{\Lambda,\chi})$ satisfait les conditions,

$$\int \xi(x)\,\chi(x)\,|x|^{\rho}\,d^*x = 0 \qquad \forall \rho \in B/N^{\perp},\ L\left(\chi, \frac{1}{2}+\rho\right) = 0. \tag{28}$$

Cela donne $2g-2+f$ conditions linéairement indépendantes (pour N suffisamment grand), en utilisant le Théorème VII.6 de [W1], et cela montre que ces conditions caractérisent le sous-espace $E(B_{\Lambda,\chi})$ de $S_{\Lambda,\chi}$.

Cela réduit la preuve du lemme au simple calcul suivant : soit F un ensemble fini (contenant d'éventuelles multiplicités) de $\mathbb{C}^*$ et E_N le sous-espace de $S_N = \{\xi \in l^2(\mathbb{Z});\ \xi(n) = 0\ \forall n > N\}$ défini par les conditions $\sum \xi(n)\,z^n = 0\ \forall z \in F$. On doit alors calculer la limite quand $N \to \infty$ de $\mathrm{Trace}\,((S_N - E_N)\,V(f))$ où V est la représentation régulière de $\mathbb{Z}$ (de telle manière que $V(f) = \sum f_k\,V^k$ où V est le décalage, $V(\xi)_n = \xi_{n-1}$).

On vérifie alors que les vecteurs unités $\eta_z \in S_N$, $z \in F$, $\eta_z(n) = \overline{z}^n\,(|z^{2N+1}| - |z^{-(2N+1)}|)^{-\frac{1}{2}}(|z| - |z^{-1}|)^{\frac{1}{2}}$ $\forall n \in [-N, N]$, sont asymptotiquement orthogonaux et étendent $(S_N - E_N)$ (quand F présente des multiplicités, on doit faire très attention). La conclusion découle alors de,

$$\mathrm{Lim}_{N\to\infty}\langle V(f)\eta_z,\, \eta_z\rangle = \int_{|u|=1} P_z(u)\,\widehat{f}(u)\,du, \tag{29}$$

où $P_z(u)$ est le noyau de Poisson, et $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de f. ∎

On devrait comparer ce lemme avec le Corollaire 2 du Théorème III.1. Dans ce dernier, seuls les zéros critiques entrent en jeu et avec une multiplicité contrôlée par δ. Dans le lemme ci-dessus, tous les zéros apparaissent avec leur multiplicité complète, mais alors que les zéros critiques apparaissent per-se, les zéros non-critiques jouent le rôle de résonances, comme dans la théorie de Fermi.

Expliquons maintenant comment les résultats ci-dessus s'étendent aux corps de nombres k. Nous avons d'abord besoin d'analyser, comme ci-dessus, la position relative des projections P_Λ et $\widehat{P}_\Lambda$. Rappelons à la lectrice la géométrie bien connue des paires de projecteurs. Rappelons qu'une paire de projections orthogonales P_i dans l'espace de Hilbert est la même chose qu'une représentation unitaire du groupe diédral $\Gamma = \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$. Aux générateurs U_i de Γ correspondent des opérateurs $2P_i - 1$.

Le groupe Γ est le produit semi-direct du sous-groupe engendré par $U = U_1\,U_2$, par le groupe $\mathbb{Z}/2$, agissant sur $U \mapsto U^{-1}$. Ses représentations unitaires irréductibles sont paramétrées par un angle $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, les projections orthogonales correspondantes P_i étant associées aux sous-espaces de dimension 1 de la forme $y = 0$ et $y = x\,tg(\theta)$ dans le plan euclidien x, y. En particulier, ces représentations sont au plus de dimension 2. Une représentation unitaire générale est caractérisée par l'opérateur Θ dont la valeur est l'angle θ ci-dessus dans le cas irréductible. Il est uniquement défini par l'égalité,

$$\mathrm{Sin}(\Theta) = |P_1 - P_2|, \tag{30}$$

et commute avec P_i.

La première difficulté évidente est que, quand v est une place archimédienne, il n'existe pas de fonction non-nulle sur k_v qui s'évanouisse ainsi que sa transformée de Fourier pour $|x| > \Lambda$. Cela serait un obstacle difficile, s'il n'y avait eu le travail de Landau, Pollak et Slepian ([LPS]) au début des années soixante, motivés par des problèmes d'ingénierie électrique, qui les a amenés à surpasser leur problème en montrant que même si les projections P_Λ et $\widehat{P}_\Lambda$ ne commutent pas exactement même pour Λ grand, leur angle se comporte suffisamment bien pour que le sous-espace B_Λ fasse sens.

Pour des raisons de simplicité, nous prendrons $k = \mathbb{Q}$, de telle façon que la seule place infinie soit réelle. Soit P_Λ la projection orthogonale sur le sous-espace,

$$P_\Lambda = \{\xi \in L^2(\mathbb{R})\,;\ \xi(x) = 0,\ \ \forall x\ ,\ |x| > \Lambda\}\,. \tag{31}$$

et $\widehat{P}_\Lambda = F P_\Lambda F^{-1}$ où F est la transformée de Fourier associée au caractère de base $\alpha(x) = e^{-2\pi i x}$. Ce que les auteurs ci-dessus ont fait a consisté à analyser la position relative des projections P_Λ, $\widehat{P}_\Lambda$ pour $\Lambda \to \infty$ de manière à pouvoir rendre compte de l'existence de signaux évidents (tels qu'un morceau de musique enregistrée par exemple) qui sont de support fini à la fois selon la variable temporelle, et selon la variable duale fréquence.

L'observation-clé de ([LPS]) est que l'opérateur différentiel de second ordre sur $\mathbb{R}$ commute effectivement avec les projections P_Λ, $\widehat{P}_\Lambda$,

$$H_\Lambda \psi(x) = -\partial((\Lambda^2 - x^2)\,\partial)\psi(x) + (2\pi\Lambda x)^2\,\psi(x), \tag{32}$$

où ∂ est la différenciation ordinaire en une variable.

Exactement comme le générateur $x\,\partial$ d'échelle commute avec la projection orthogonale sur l'espace des fonctions à support positif, l'opérateur $\partial((\Lambda^2 - x^2)\,\partial)$ commute avec P_Λ. De plus, H_Λ commute avec la transformée de Fourier F, et la commutativité de H_Λ avec $\widehat{P}_\Lambda$ en découle alors.

Si on le recolle à des fonctions à support dans $[-\Lambda, \Lambda]$, l'opérateur H_Λ a un spectre simple discret, et a été étudié longtemps avant le travail de [LPS]. Il apparaît dans la factorisation de l'équation de Helmoltz $\Delta\,\psi + k^2\,\psi = 0$ dans un système de coordonnées peu séparables dans l'espace euclidien de dimension 3, qu'on appelle le système des coordonnées sphéroïdales. Ses valeurs propres $\chi_n(\Lambda), n \geq 0$ sont simples, positives, et de l'ordre de n^2 pour $n \to \infty$. Les fonctions propres correspondantes sont appelées les fonctions d'ondes sphéroïdales et comme $P_\Lambda\,\widehat{P}_\Lambda\,P_\Lambda$ commute avec H_Λ, ce sont les fonctions propres de $P_\Lambda\,\widehat{P}_\Lambda\,P_\Lambda$. On connaît beaucoup de choses sur ces fonctions, en particulier, on peut les prendre à valeurs réelles, et elles sont mêmes paires pour n pair et impaires pour n impair. Le résultat-clé de [LPS] est que les valeurs propres correspondantes λ_n de l'opérateur $P_\Lambda\,\widehat{P}_\Lambda\,P_\Lambda$ décroissent très lentement de $\lambda_0 \simeq 1$ jusqu'à la valeur $n \simeq 4\Lambda^2$ de l'index n, elles décroissent alors de $\simeq 1$ à $\simeq 0$ dans un intervalle de longueur $\simeq \log\Lambda$ et restent alors proches de 0. Bien sûr, cela donne les valeurs propres de Θ, cela fournit l'analogue du sous-espace B_Λ du lemme 1, comme le fibré linéaire des ψ_n, $n \leq 4\Lambda^2$, et cela fournit la justification du comptage dans le cas semi-classique des nombres d'états de la mécanique quantique qui sont localisés sur l'intervalle $[-\Lambda, \Lambda]$ ainsi que leur transformée de Fourier comme l'aire du carré correspondant dans l'espace des phases.

Nous savons maintenant quel est le sous-espace B_Λ pour la seule place ∞, et pour l'obtenir pour un ensemble de places arbitraire (contenant la place infinie), nous avons juste à utiliser la même règle que dans le cas des corps de fonctions, i.e. nous considérons l'application,

$$\psi \mapsto \psi \otimes 1_R, \tag{33}$$

qui suffit si on souhaite ne gérer que la fonction zêta de Riemann. Noter aussi que dans ce cas, nous nous restreignons aux fonctions paires sur $\mathbb{R}$. Cela donne l'analogue du Lemme 1, Théorème 5, et du Lemme 3.

Pour terminer cette section, nous allons revenir à notre motivation initiale de la section I et montrer comment la formule pour le nombre de zéros

$$N(E) \sim (E/2\pi)(\log E/2\pi - 1) + 7/8 + o(1) + N_{osc}(E) \tag{34}$$

apparaît à partir de notre interprétation spectrale.

Faisons d'abord un calcul dans le cas semi-classique du nombre d'états de la mécanique quantique à un degré de liberté et qui remplissent la condition suivante,

$$|q| \leq \Lambda, |p| \leq \Lambda, |H| \leq E\,, \tag{35}$$

où $H = qp$ est l'hamiltonien engendrant le groupe des transformations d'échelle,

$$(U(\lambda)\xi)(x) = \xi(\lambda^{-1}x) \qquad \lambda \in \mathbb{R}_+^*, x \in \mathbb{R}, \xi \in L^2(\mathbb{R})\,, \tag{36}$$

comme dans notre cadre général.

Pour nous conformer à notre analyse de la section III, nous devons nous restreindre aux fonctions paires de manière à exclure la région $pq \leq 0$ du plan semi-classique (p, q).

Maintenant, la région qui respecte la condition ci-dessus est égale à $D = D_+ \cup (-D_+)$ où,

$$D_+ = \{(p,q) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, p \leq \Lambda, q \leq \Lambda, pq \leq E\}\,, \tag{37}$$

Calculons l'aire de D_+ de la forme symplectique canonique,

$$\omega = \frac{1}{2\pi}\, dp \wedge dq\,. \tag{38}$$

Par construction, D_+ est l'union d'un rectangle ayant pour côtés E/Λ, Λ avec la portion sous la courbe, de $q = E/\Lambda$ à $q = \Lambda$, de l'hyperbole $pq = E$. Ainsi,

$$\int_{D_+} \omega = \frac{1}{2\pi}\, E/\Lambda \times \Lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{E/\Lambda}^{\Lambda} \frac{E\,dq}{q} \;= \frac{E}{2\pi} + \frac{2E}{2\pi}\, \log\Lambda - \frac{E}{2\pi}\, \log E\,. \tag{39}$$

Maintenant, le calcul ci-dessus correspond à la normalisation standard de la transformée de Fourier avec le caractère de base de $\mathbb{R}$ donné par

$$\alpha(x) = \exp(ix)\,. \tag{40}$$

Mais nous devons nous conformer à la normalisation naturelle à la place infinie,

(41) $$\alpha_0(x) = \exp(-2\pi i x)\,.$$

Nous devons ainsi effectuer la transformation,

(41) $$P = p/2\pi \ , \ Q = q\,.$$

La forme symplectique est maintenant $dP \wedge dQ$ et le domaine,

(42) $$D' = \{(P,Q); |Q| \leq \Lambda, |P| \leq \Lambda, |PQ| \leq E/2\pi\}.$$

Le calcul est similaire et amène au résultat suivant,

(43) $$\int_{D'_+} \omega = \frac{2E}{2\pi}\, \log \Lambda - \frac{E}{2\pi}\left(\frac{\log\, E}{2\pi - 1}\right)\,.$$

Dans cette formule, on voit que le terme principal $\langle N(E) \rangle$, qui apparaît avec un signe *moins*, montre que le nombre d'états mécaniques quantiques correspondant à D' est inférieur à $\frac{4E}{2\pi} \log \Lambda$ par la première approximation du nombre de zéros de zêta dont la partie imaginaire est inférieure à E en valeur absolue (on a juste à multiplier par 2 l'égalité (43) puisque $D' = D'_+ \cup (-D'_+)$).

Maintenant $\frac{1}{2\pi}\,(2E)(2 \log \Lambda)$ est le nombre d'états quantiques de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^*_+, d^*x)$ qui sont localisés dans $\mathbb{R}^*_+$ entre Λ^{-1} et Λ, ainsi que localisés dans le groupe dual $\mathbb{R}$ (pour l'appariement $\langle \lambda, t \rangle = \lambda^{it}$) entre $-E$ et E. Ainsi, on voit clairement que la première approximation de $N(E)$ apparaît comme le manque de surjectivité de l'application qui associe aux états quantiques ξ appartenant à D' la fonction sur $\mathbb{R}^*_+$,

(44) $$E(\xi)(x) = |x|^{1/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi(nx)$$

où l'on assume les conditions supplémentaires $\xi(0) = \int \xi(x) dx = 0$.

Une analyse plus précise, qui est juste ce que fait la formule de trace, amènera les termes additionnels $7/8 + o(1) + N_{osc}(E)$. La discussion ci-dessus fournit la construction explicite d'une grande matrice dont le spectre approche les zéros de zêta lorsque $\Lambda \to \infty$.

Il est assez remarquable que les valeurs propres de l'opérateur angle Θ dont nous avons discuté ci-dessus, jouent également un rôle-clé dans la théorie des matrices aléatoires unitaires. Pour être plus précis, soit $E(n,s)$ la grande probabilité limite N qu'il y ait exactement n valeurs propres d'une matrice hermitienne de taille $N \times N$ dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{\sqrt{2N}}t, \frac{\pi}{\sqrt{2N}}t]$, $t = s/2$. Clairement, $\sum_n E(n,s) = 1$. Soit P_t comme ci-dessus l'opérateur de multiplication par $1_{[-t,t]}$ - la fonction caractéristique de l'intervalle $[-t,t]$ dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. En général (cf. [Me]), $E(n,s)$ est le produit de $(-1)^n$ par le n-ième coefficient de l'expansion de Taylor en $z = 1$ de $\zeta_s(z) = \prod_1^\infty (1 - z\lambda_j(s))$, où $\lambda_j(s)$ sont les valeurs propres de l'opérateur $\widehat{P_\pi} P_t$ (ici, on note $\widehat{P_\lambda} = \mathcal{F} P_\lambda \mathcal{F}^{-1}$, et $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier, $\mathcal{F}\xi(u) = \int e^{ixu} \xi(x) dx$. Noter également que les valeurs propres de $\widehat{P_a} P_b$ dépendent seulement du produit ab de manière à ce que les relations avec les valeurs propres de Θ soient bien claires).

Remarques générales.

a) Il y a une forte analogie entre la construction de l'espace de Hilbert $L^2(X)$ dans la section III, et la construction de l'espace physique ([S] théorème 2.1) dans la théorie quantique des champs constructive, dans le cas des théories de gauge. Dans les deux cas, l'action du groupe d'invariance (le groupe $k^* = GL_1(k)$ dans notre cas, le groupe de gauge dans le cas des théories de gauge) est balayé par la véritable définition du produit intérieur. Comparer les commentaires après III (9) avec ([S]) en haut de la page 17.

b) Pour les corps globaux de caractéristique 0, le groupe des classes d'idèles a un composant connexe non évident de l'identité et ce groupe connexe n'a jusque-là pas reçu d'interprétation par la théorie de Galois (cf. [W4]). L'apparition de facteurs de type III dans [BC] indique que la classification des facteurs hyperfinis de type III [C] devrait être vue comme une restriction de la théorie des corps de classes locaux pour les places archimédiennes, et fournir l'interprétation manquante de la composante connexe de l'identité du groupe des classes d'idèles. En particulier, les facteurs hyperfinis de type III sont classifiés par des sous-groupes fermés (virtuels) de $\mathbb{R}_+^*$ (cf. [C]) et ils apparaissent tous comme des extensions "non-ramifiées" de l'hyperfacteur de type III_1.

c) Notre construction de l'espace d'Hilbert-Polya présente quelque ressemblance avec [Z] et en fait, il faudrait clarifier cette relation, ainsi que la relation de l'espace des classes d'adèles avec le site arithmétique de Deninger [D]. Noter que la division de A par k^* élimine la structure linéaire de A et qu'elle transforme drastiquement les formules pour les espaces de fonctions, en remplaçant les produits par des sommes (cf. théorème 4 de la section VII). Il devrait être clair à la lectrice que l'action du groupe des classes d'idèles sur l'espace des classes d'adèles est l'analogue (à travers le dictionnaire habituel de la théorie des corps de classes) de l'action du Frobenius sur la courbe (pour être plus précis, on a besoin de diviser d'abord l'espace des classes d'adèles par l'action du sous-groupe maximal du groupe des classes d'idèles).

d) Il y a une ressemblance superficielle entre la manière dont $N(E)$ apparaît dans le dernier calcul de la section VIII et la discussion dans [BK], directement inspirée de [Co]. Il est amusant de noter que le calcul de [BK] coïncide vraiment, les deux rectangles sont éliminés sans raison, ce qui change adéquatement le signe du terme dans E. Ce que [BK] n'a pas pris en compte, c'est l'interprétation spectrale de [Co] comme un *spectre d'absorption* plutôt que comme un spectre d'émission.

e) Il y a une ressemblance encore plus superficielle entre ce travail et celui de D. Goldfeld [G] ; dans ce dernier, la distribution de Weil est utilisée pour définir un produit intérieur correspondant à un espace de fonctions sur le groupe des classes d'idèles. La positivité du produit intérieur est bien-sûr équivalente à la positivité de la distribution de Weil (et par le résultat de Weil à RH) mais cela ne donne aucun indice sur la manière de prouver cette positivité, et aucune explication n'est fournie (exceptée pour une jolie observation aux places archimédiennes) sur ce qu'est la distribution de Weil, puisqu'elle est introduite à la main dans la formule pour le produit intérieur.

f) Le cadre proposé ci-dessus s'étend naturellement du cas de $GL(1)$ au cas $GL(n)$ pour lequel l'espace des classes d'adèles est remplacé par le quotient de $M_n(A)$ par l'action à droite de $GL_n(k)$. Le travail préliminaire de C. Soulé montre que l'analogue du théorème III.1 reste valide, la prochaine étape étant de trouver l'analogue de la formule de trace de Lefschetz dans ce contexte.

g) J'ai appris de P. Sarnak et E. Bombieri que Paul Cohen a considéré l'espace des classes d'adèles en connexion avec RH, mais n'ai obtenu aucun détail des idées non publiées de celui-ci.

Tous les résultats du présent article ont été annoncés à la conférence au sujet de l'hypothèse de Riemann de septembre 1998 au Schrödinger Institute de Vienne et ont été publiés dans un preprint du Schrödinger Institute. Nous sommes reconnaissant à l'Institut Américain de Mathématiques d'avoir sponsorisé cette conférence.

Appendices

Appendice I. Preuve du théorème 1.

Dans cet appendice, nous donnons la preuve du théorème 1. Rappelons au préalable les résultats de Tate et Iwasawa à trouver dans [W2]

fonctions L et distributions homogènes sur A

En général, pour un corps local non archimédien K, nous utilisons les notations R pour le sous-anneau compact maximal, P pour l'idéal maximal de R, π pour un générateur de l'idéal P (i.e. $P = \pi R$).

Soit k un corps global et A l'anneau des adèles de k. C'est le produit restreint des corps locaux k_v indexé par l'ensemble des places v de k, par rapport aux sous-anneaux compacts maximaux R_v. Similairement, l'espace de Bruhat-Schwartz $\mathcal{S}(A)$ est le produit tensoriel restreint des espaces locaux de $\mathcal{S}(k_v)$, par rapport aux vecteurs 1_{R_v}.

Aux fonctions L sur k sont associés des Grössencharakters, i.e. des caractères du groupe des classes d'idèles,

(1) $$C_k = J_k/k^* \,.$$

Soit $\mathcal{X}$ un caractère du groupe des classes d'idèles, nous considérons $\mathcal{X}$ comme un caractère de J_k qui vaut 1 sur k^*. Puisqu'il peut être écrit comme un produit,

(2) $$\mathcal{X}(j) = \Pi\, \mathcal{X}_v(j_v) \qquad j = (j_v) \in J_k \,.$$

En considérant la restriction de $\mathcal{X}$ au sous-groupe compact

(3) $$G_0 = \Pi\, R_v^* \times\, 1 \subset J_k \,,$$

il découle que pour tout v fini sauf pour un nombre fini d'entre elles, on a

(4) $$\mathcal{X}_v/R_v^* = 1 \,.$$

On dit que $\mathcal{X}$ est non-ramifié en v quand cela a lieu.

Alors $\mathcal{X}_v(x)$ dépend seulement du module $|x|$, puisque

$$k_v^*/R_v^* = \mathrm{mod}(k_v)\,. \tag{5}$$

Ainsi $\mathcal{X}_v$ est déterminé par

$$\mathcal{X}_v(\pi_v) \tag{6}$$

qui ne dépend pas du choix de $\pi_v \pmod{R_v^*}$.

Soit $\mathcal{X}$ un quasi-caractère de C_k, il est de la forme,

$$\mathcal{X}(x) = \mathcal{X}_0(x)\,|x|^s \tag{7}$$

où $s \in \mathbb{C}$ et $\mathcal{X}_0$ est un caractère de C_k. La partie réelle σ de s est uniquement déterminée par

$$|\mathcal{X}(x)| = |x|^\sigma\,. \tag{8}$$

Soit P l'ensemble fini des places finies auxquelles $\mathcal{X}_0$ est ramifié. La L-fonction $L(\mathcal{X}_0, s)$ est définie pour $\sigma = Re(s) > 1$ par

$$L(\mathcal{X}_0, s) = \left(\prod_{\substack{v\text{ fini}\\ v\notin P}} (1 - \mathcal{X}_{0,v}(\pi_v)\,q_v^{-s})^{-1}\right) = \left(\prod_{\substack{v\text{ fini}\\ v\notin P}} (1 - \mathcal{X}_v(\pi_v))^{-1}\right) \tag{9}$$

où

$$|\pi_v| = q_v^{-1}. \tag{10}$$

Rappelons (cf. [W2]) comment $L(\mathcal{X}_0, s)$ apparaît comme un facteur de normalisation pour les distributions homogènes sur A.

D'abord, soit K un corps local et $\mathcal{X}$ un quasi-caractère de K^*,

$$\mathcal{X}(x) = \mathcal{X}_0(x)\,|x|^s, \quad \mathcal{X}_0 : K^* \to U(1)\,. \tag{11}$$

Une distribution D sur K est homogène de poids $\mathcal{X}$ ssi on a

$$\langle f^a, D\rangle = \mathcal{X}(a)^{-1}\,\langle f, D\rangle \tag{12}$$

pour toutes les fonctions test f et pour tout a dans K^*, où par définition

$$f^a(x) = f(ax) \tag{13}$$

Quand $\sigma = Re(s) > 0$, il existe, moyennant normalisation seulement, une distribution homogène de poids $\mathcal{X}$ sur K (cf. [W2]). Elle est donnée par l'intégrale absolument convergente,

$$\int_{K^*} f(x)\,\mathcal{X}(x) d^*x = \Delta_{\mathcal{X}}(f) \tag{14}$$

En particulier, soit K non-archimédien, alors, pour n'importe quelle fonction localement constante supportée de façon compacte f par K, on a,

$$f(x) - f(\pi^{-1}x) = 0 \quad \forall x,\ |x| \leq \delta. \tag{15}$$

Ainsi, pour tout $s \in \mathbb{C}$, l'intégrale

$$\int_{K^*} (f(x) - f(\pi^{-1}x))\, |x|^s\, d^*x = \Delta'_s(f) \tag{16}$$

avec comme mesure de Haar multiplicative d^*x, normalisée par

$$\langle 1_{R^*}, d^*x \rangle = 1 \tag{17}$$

définit une distribution sur K avec les propriétés,

$$\langle 1_R, \Delta'_s \rangle = 1, \tag{18}$$

$$\langle f^a, \Delta'_s \rangle = |a|^{-s} \langle f, \Delta'_s \rangle, \tag{19}$$

et

$$\Delta'_s = (1 - q^{-s})\, \Delta_s, \tag{20}$$

où $|\pi| = q^{-1}$.

(Vérifions (18)...(20). Avec $f = 1_R$, on a $f(\pi^{-1}x) = 1$ ssi $\pi^{-1}x \in R$ i.e. $x \in \pi R = P$. Ainsi, $\Delta'_s(1_R) = \int_{R^*} d^*x = 1$. Vérifions (20), on a $\int f(\pi^{-1}x)\, |x|^s\, d^*x = \int f(y)\, |\pi|^s\, |y|^s\, d^*y = |\pi|^s\, \Delta_s(f)$. Mais $|\pi| < 1$, $|\pi| = \frac{1}{q}$. Noter alors que pour $s = 1$ et $f = 1_R$, on obtient $\int_{R^*} dx = \left(1 - \frac{1}{q}\right) \int_R dx$.).

Soit alors $\mathcal{X}$ un quasi-caractère de C_k et écrivons comme ci-dessus

$$\mathcal{X} = \Pi\, \mathcal{X}_v\,, \qquad \mathcal{X}(x) = \mathcal{X}_0(x)\, |x|^s \tag{21}$$

où $s \in \mathbb{C}$ et $\mathcal{X}_0$ est un caractère.

Soit P l'ensemble fini des places finies où P se ramifie.
Pour toute place $v \notin P$, soit $\Delta'_v(s)$ l'unique distribution homogène de poids $\mathcal{X}_v$ normalisée par

$$\langle \Delta'_v(s), 1_{R_v} \rangle = 1\,. \tag{22}$$

Pour tout $v \in P$ ou pour toute place infinie, soit, pour $\sigma = Re(s) > 0$, Δ'_v donnée par (14) homogène de poids $\mathcal{X}_v$ mais non normalisée. Alors le produit tensoriel infini,

$$\Delta'_s = \Pi\, \Delta'_v(s) \tag{23}$$

prend sens comme une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(A)$ et est homogène de poids $\mathcal{X}$.

Cette solution n'est pas égale à 0 puisque $\Delta'_v \neq 0$ pour tout $v \in P$ ainsi que pour n'importe quelle place infinie. Elle est finie par construction sur l'espace $\mathcal{S}(A)$ des fonctions test comme produit tensoriel infini

$$\mathcal{S}(A) = \otimes\, (\mathcal{S}(k_v), 1_{R_v})\,. \tag{24}$$

Lemme 1. (cf. [W2]) *Pour $\sigma = Re(s) > 1$, les intégrales suivantes convergent absolument*

$$\int f(x)\, \mathcal{X}_0(x)\, |x|^s\, d^*x = \Delta_s(f) \qquad \forall\, f \in \mathcal{S}(A)$$

et $\Delta_s(f) = L(\mathcal{X}_0, s)\, \Delta'_s(f)$.

Preuve. Pour obtenir la convergence absolue, on peut supposer que $f = 1_R$ et $\mathcal{X}_0 = 1$. Alors, on doit contrôler un produit infini de termes locaux, donnés localement pour la mesure de Haar d^*x sur k_v^* tels que $\int_{R_v^*} d^*x = 1$, par

$$(25) \qquad \int_{R \cap k_v^*} |x|^s\, d^*x \qquad (s \text{ réel})$$

qui est égal à $1 + q_v^{-s} + q_v^{-2s} + \ldots = (1 - q_v^{-s})^{-1}$. Ainsi, la convergence de $\sigma > 1$ est la même que celle de la fonction zêta.

Pour prouver la seconde égalité, on a seulement besoin de considérer le produit tensoriel infini pour les places finies $v \notin P$. Alors, par (20), on a $\Delta'_v = (1 - q_v^{-\alpha_v})\, \Delta_v$ où

$$(26) \qquad q_v^{-\alpha_v} = \mathcal{X}_v(\pi) = \mathcal{X}_{0,v}(\pi)\, q_v^{-s}$$

avec $|\pi| = q_v^{-1}$.

Ainsi, on obtient $\Delta_s = \left(\prod_{\substack{v \text{ fini} \\ v \notin P}} (1 - \mathcal{X}_{0,v}(\pi)\, q_v^{-s})^{-1} \right) \Delta'_s = L(\mathcal{X}_0, s)\, \Delta'_s$. ∎

Par construction, Δ'_s fait sens à chaque fois que $\sigma > 0$ et est une fonction holomorphe de s (pour f fixée). Revoyons brièvement (cf. [W2]) comment étendre la définition de Δ_s.

Nous définissons comme ci-dessus k comme un corps global, nous fixons un caractère trivial non-additif α de A, trivial sur k,

$$(27) \qquad \alpha(x+y) = \alpha(x)\, \alpha(y) \in U(1)\ ,\ \ \alpha(q) = 1, q \in k\,.$$

Nous identifions alors le dual du groupe additif localement compact A avec A lui-même par l'appariement,

$$(28) \qquad \langle x, y \rangle = \alpha(xy)\,.$$

On montre (cf.[W1]) que le treillis $k \subset A$, i.e. le sous-groupe additif cocompact discret k, est son propre dual,

$$(29) \qquad \langle x, q \rangle = 1 \qquad \forall\, q \in k \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in k\,.$$

Puisque A est le produit restreint des corps locaux k_v, on peut écrire α comme un produit infini,

$$(30) \qquad \alpha = \Pi\, \alpha_v$$

où pour presque tout v, on a $\alpha_v = 1$ sur R_v. Rappelons la définition de l'espace $\mathcal{S}(A)_0$,

$$\mathcal{S}(A)_0 = \{f \in \mathcal{S}(A)\ ;\ f(0) = 0\ ,\ \int f\, dx = 0\} \tag{31}$$

Lemme 2. *Soit $f \in \mathcal{S}(A)_0$, alors les séries*

$$E(f)\,(g) = |g|^{1/2} \sum_{q \in k^*} f(qg) \qquad \forall\, g \in C_k$$

convergent absolument et on a

$$\forall\, n\,,\ \exists\, c, \qquad |E(f)(g)| \leq c\, e^{-n|\log|g||} \qquad \forall\, g \in C_k$$

et $E(\widehat{f})\,(g) = E(f)\,(g^{-1})$.

Preuve. Rappelons d'abord la définition formelle ([Br]) de l'espace de Bruhat-Schwartz $\mathcal{S}(G)$ pour un groupe abélien arbitraire localement compact G. On considère toutes les paires de sous-groupes G_1, G_2 de G telles que G_1 est engendré par un voisinage compact de 0 dans G, tandis que G_2 est un sous-groupe compact de G_1 tel que le groupe-quotient est élémentaire, i.e. est de la forme $\mathbb{R}^a\, \mathbb{T}^b\, \mathbb{Z}^c\, F$ pour F un groupe fini. Par définition, l'espace de Schwartz, $\mathcal{S}(G)$ est la limite inductive des espaces de Schwartz $\mathcal{S}(G_1/G_2)$, où ces derniers sont définis comme habituellement en terme de décroissance rapide de leurs dérivées. Puisque G_1 est ouvert dans G, tout élément de $\mathcal{S}(G_1/G_2)$ étendu par la valeur 0 en dehors de G_1 définit une fonction continue sur G. Par construction, $\mathcal{S}(G)$ est l'union des sous-espaces $\mathcal{S}(G_1/G_2)$ et il est muni de la limite topologique inductive.

Soit $\widehat{G}$ le dual de Pontrjagin de G, alors la transformée de Fourier, qui dépend de la normalisation de la mesure de Haar sur G, fournit un isomorphisme de $\mathcal{S}(G)$ dans $\mathcal{S}(\widehat{G})$.

Soit Γ un treillis dans le groupe abélien localement compact G. Alors, toute fonction $f \in \mathcal{S}(G)$ est admissible pour l'appariement G, Γ au sens de [W1], et la formule de sommation de Poisson (cf. [W1]) est l'égalité,

$$\text{Covol}\,(\Gamma) \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) = \sum_{\beta \in \Gamma^\perp} \widehat{f}(\beta) \tag{32}$$

où $\Gamma^\perp$ est le dual du treillis Γ, et

$$\widehat{f}(\beta) = \int f(a)\, \beta(a)\, da\,. \tag{33}$$

Les deux côtés de l'égalité (32) dépendent de la normalisation de la mesure de Haar sur G.

Dans notre cas, on définit A comme le groupe additif des adèles sur k.
On normalise la mesure de Haar dx sur A par

$$\text{Covol}(k) = 1\,. \tag{34}$$

On prend alors $\Gamma = xk$, pour quelque $x \in A^{-1}$. On a

$$\text{Covol}\,(xk) = |x| \tag{35}$$

Le dual $\Gamma^\perp$ du treillis xk, pour x inversible dans A, est le treillis $\Gamma^\perp = x^{-1}k$. Alors, la formule de Poisson (32) se lit, pour tout $f \in \mathcal{S}(A)$,

$$|x| \sum_{q \in k} f(xq) = \sum_{q \in k} \widehat{f}(x^{-1}q)\,. \tag{36}$$

Ce que nous pouvons réécrire en,

$$|x| \sum_{k^*} f(xq) = \sum_{k^*} \widehat{f}(x^{-1}q) + \delta \tag{37}$$

$\delta = -|x|\, f(0) + \int f(y)\, dy$.

Nous pouvons alors réécrire (37) comme l'égalité, valide pour tout $f \in \mathcal{S}(A)_0$

$$E(f)(x) = E(\widehat{f}) \left(\frac{1}{x}\right) \qquad f \in \mathcal{S}(A)_0. \tag{38}$$

Il reste à contrôler la croissance de $E(f)(x)$ sur C_k, mais par (38), il suffit de comprendre ce qui se passe pour $|x|$ grand.

Nous traitons seulement le cas des corps de nombres, le cas général est similaire. Soit $A = A_f \times A_\infty$ la décomposition de l'anneau des adèles correspondant aux places finies et infinies, ainsi $A_\infty = \prod\limits_{S_\infty} k_v$ où S_∞ est l'ensemble des places infinies.

Tout élément de $\mathcal{S}(A)$ est une combinaison linéaire finie de fonctions test de la forme,

$$f = f_0 \otimes f_1 \tag{39}$$

où $f_0 \in \mathcal{S}(A_f)$, $f_1 \in \mathcal{S}(A_\infty)$ (cf. [W5] 39), ainsi, cela suffit à contrôler la croissance de $E(f)(x)$ pour une telle f et $|x|$ grand.

Soit $J_{k,1} = \{x \in J_k; |x| = 1\}$ le groupe des idèles de module 1, puisque $J_{k,1}/k^*$ est compact (cf. [W1]), nous allons prendre un ensemble compact K_1 de $J_{k,1}$ dont l'image dans $J_{k,1}/k^*$ est ce groupe compact.

Soit μ l'immersion diagonale :

$$\lambda \in \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{\mu} (\lambda, \ldots, \lambda) \in \prod_{S_\infty} k_v^* \tag{40}$$

qui fournit l'isomorphisme

$$J_k = J_{k,1} \times \mathrm{Im}\ \mu\,. \tag{41}$$

On a $f_0 \in \mathcal{S}(A_f)$, puisque (cf. [W5]), $f_0 \in C_c(A_f)$ et on pose $K_0 = \text{Support } f_0$. Puisque K_0 est compact, on peut trouver un sous-ensemble fini P de l'ensemble des places finies et $C < \infty$ tel que :

$$y \in K = (K_f)^{-1} K_0 \Rightarrow |y_v| \leq 1, v \notin P, \qquad |y_v| \leq C, \qquad \forall v\,. \tag{42}$$

où K_f est la projection de K_1 sur A_f.

Définissons Ω comme le sous-groupe ouvert compact de A_f déterminé par

$$|a_v| \leq 1, v \notin P, \qquad |a_v| \leq C, \qquad \forall v\,. \tag{43}$$

Par construction, $E(f)(x)$ dépend seulement de la classe de x dans J_k/k^*. Ainsi, pour contrôler le comportement de $E(f)(x)$ pour $|x| \to \infty$, on peut prendre $x = (x_f, x_\infty) \in K_1$ et considérer $E(f)(\lambda\, x)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda \to \infty$. Maintenant, soit $q = (q_f, q_\infty) \in k$, alors,

$$f(q\,\lambda\, x) = f_0(q_f\, x_f)\, f_1(q_\infty\, \lambda\, x_\infty) \tag{44}$$

et cela s'évanouit, à moins que $q_f\, x_f \in K_0$, i.e. à moins que $q_f \in K$. Mais alors, par (42), on a $q_f \in \Omega$. Soit Γ le treillis sur $\prod\limits_{S_\infty} k_v$ déterminé par

$$\Gamma = \{q_\infty;\, q \in k,\, q_f \in \Omega, \} \tag{45}$$

La taille de $E(f)(\lambda\, x)$ est ainsi contrôlée (jusqu'à la racine carrée de $|\lambda\, x|$) par

$$C \sum_{n \in \Gamma^*} |f_1(\lambda\, x_\infty\, n)| \tag{46}$$

où x_∞ varie sur la projection K_∞ de K_1 sur $\prod\limits_{S_\infty} k_v^*$.

Puisque $f_1 \in \mathcal{S}(A_\infty)$, cela montre que $E(f)(x)$ décroît plus vite que n'importe quelle puissance de $|x|$ pour $|x| \to \infty$.

Nous avons montré que $E(f)$ décroît rapidement par rapport à $|x|$, pour $|x| \to \infty$. En utilisant (38) et la stabilité de $\mathcal{S}(A)_0$ sous Fourier, nous voyons qu'il décroît aussi rapidement par rapport à $|\log|x||$ quand $|\log|x|| \to \infty$.

Nous obtenons alors,

Lemme 3. (cf. [W2]) *Pour $\sigma = Re(s) > 0$, et n'importe quel caractère $\mathcal{X}_0$ de C_k, on a*

$$\int E(f)(x)\, \mathcal{X}_0(x)\, |x|^{s-1/2}\, d^*x = cL(\mathcal{X}_0, s)\, \Delta'_s(f) \qquad \forall\, f \in \mathcal{S}(A)_0$$

où la constante non nulle c dépend de la normalisation de la mesure de Haar d^*x sur C_k.

Preuve. Pour $\sigma = Re(s) > 1$, l'égalité découle du lemme 1, mais puisque les deux côtés sont analytiques dans s, cela est vérifié en général.

Comme dans le lemme 1, nous continuerons d'utiliser la notation $\Delta_s(f)$ pour $\sigma = Re(s) > 0$.

Unités approchées dans les espaces de Sobolev $L^2_\delta(C_k)$

On considère d'abord, pour $\delta > 1$, l'espace de Hilbert $L^2_\delta(\mathbb{R})$ de fonctions $\xi(u)$, $u \in \mathbb{R}$ de norme carrée donnée par

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi(u)|^2\, (1+u^2)^{\delta/2}\, du\,. \tag{1}$$

Posons $\rho(u) = (1+u^2)^{\delta/2}$. Il est comparable à $(1+|u|)^\delta$ et en particulier,

$$\text{(2)} \qquad \frac{\rho(u+a)}{\rho(u)} \leq c\,\rho(a) \qquad \forall\, u \in \mathbb{R}\,,\ a \in \mathbb{R}$$

avec $c = 2^{\delta/2}$.

Soit alors $V(v)$ l'opérateur de translation,

$$\text{(3)} \qquad (V(v)\xi)(u) = \xi(u-v) \qquad \forall\, u, v \in \mathbb{R}\,.$$

on a $\int_{\mathbb{R}} |\xi(u-v)|^2\, \rho(u)\, du = \int_{\mathbb{R}} |\xi(u)|^2\, \rho(u+v)\, du$ de telle manière que par (2), il est inférieur à $c \int_{\mathbb{R}} |\xi(u)|^2\, \rho(u)\, \rho(v)\, du = c\, \rho(v)\, \|\xi\|^2$,

$$\text{(4)} \qquad \|V(v)\| \leq (c\,\rho(v))^{1/2}\,.$$

Cela montre que $V(f) = \int f(v)\, V(v)\, dv$ a du sens dès que

$$\text{(5)} \qquad \int |f(v)|\, \rho(v)^{1/2}\, dv < \infty\,.$$

Cela est vérifié pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Lemme 4. *Il existe une unité appochée $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, telle que $\widehat{f_n}$ est à support compact, $\|V(f_n)\| \leq C, \forall n$, et*

$$V(f_n) \to 1 \textit{ fortement dans } L^2_\delta(\mathbb{R})\,.$$

Preuve. Soit f une fonction, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dont la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est à support compact, et telle que $\int f\, dx = 1$ (i.e. $\widehat{f}(0) = 1$). Alors soit

$$\text{(6),} \qquad f_n(v) = n\, f(nv) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

on a $\int |f_n(v)|\ \ \rho(v)^{1/2}\, dv = \int |f(u)|\ \ \rho\left(\frac{u}{n}\right)^{1/2} du \leq \int |f(u)|\ \ \rho(u)^{1/2}\, du$. Ainsi $\|V(f_n)\|$ est uniformément bornée.

Nous pouvons supposer que $\widehat{f}$ est égale à 1 sur $[-1,1]$, alors $\widehat{f_n}$ est égale à 1 sur $[-n,n]$ et $V(f_n)\xi = \xi$ pour n'importe quel ξ avec Supp $\widehat{\xi} \subset [-n,n]$. Par uniformité, on obtient que $V(f_n) \to 1$ fortement.

∎

Identifions maintenant le dual $(L^2_\delta)^*$ de l'espace de Hilbert L^2_δ avec $L^2_{-\delta}$ au moyen de l'appariement,

$$\text{(7)} \qquad \langle \xi, \eta \rangle_0 = \int_{\mathbb{R}} \xi(u)\, \eta(u)\, du\,.$$

Puisque L^2_δ est un espace de Hilbert, il est son propre dual en utilisant l'appariement,

$$\text{(8)} \qquad \langle \xi, \eta_1 \rangle = \int_{\mathbb{R}} \xi(u)\, \eta_1(u) (1+u^2)^{\delta/2}\, du\,.$$

Si l'on pose $\eta(u) = \eta_1(u)(1+u^2)^{\delta/2}$, alors

$$\int |\eta_1(u)|^2\,(1+u^2)^{\delta/2}\,du = \int |\eta(u)|^2\,(1+u^2)^{-\delta/2}\,du$$

qui est la norme carrée naturelle pour $L^2_{-\delta}$.

Etant donné un groupe quasi-compact tel que C_k avec comme module,

$$| \,| : C_k \to \mathbb{R}_+^* \tag{9}$$

on choisit d^*g la mesure de Haar sur C_k normalisée par

$$\int_{|g|\in[1,\Lambda]} d^*g \sim \log\Lambda \qquad \Lambda\to\infty \tag{10}$$

et on pose $L^2_\delta(C_k)$ définie comme la norme de,

$$\int_{C_k} |\xi(g)|^2\,(1+\log|g|^2)^{\delta/2}\,d^*g\,. \tag{11}$$

C'est, quand le module de k est $\mathbb{R}_+^*$, une somme directe d'espaces (1), étiquetée par les caractères $\mathcal{X}_0$ du groupe compact

$$C_{k,1} = \mathrm{Ker}\,\mathrm{mod}\ . \tag{12}$$

L'appariement entre $L^2_\delta(C_k)$ et $L^2_{-\delta}(C_k)$ est donné par

$$\langle\xi,\eta\rangle = \int \xi(g)\,\eta(g)\,d^*g\,. \tag{13}$$

La représentation naturelle V de C_k par les translations est donnée par

$$(V(a)\xi)(g) = \xi(a^{-1}g) \qquad \forall\, g,a\in C_k\,. \tag{14}$$

Elle est unitaire, mais par (4), on a,

$$\|V(g)\| = 0\,|\log|g||^{\delta/2}\,,\ \ |\log|g||\to\infty\,. \tag{15}$$

Finalement, on a, en utilisant le lemme 4 et la décomposition $C_k = C_{k,1}\times N$,

Lemme 5. *Il existe une unité approchée $f_n\in\mathcal{S}(C_k)$, telle que $\widehat{f_n}$ est à support compact, $\|V(f_n)\|\le C, \forall n$, et*

$$V(f_n)\to 1 \textit{ fortement dans } L^2_\delta(C_k)\,.$$

Preuve du théorème III.1

On considère d'abord le sous-espace de codimension 2 de $\mathcal{S}(A)$ donné par

$$f(0)=0\,,\ \int f\,dx = 0\,. \tag{1}$$

On munit ce sous-espace $\mathcal{S}(A)_0$ du produit intérieur,

$$\int_{C_k} |E(f)(x)|^2 \, (1+\log|x|^2)^{\delta/2} \, d^*x\,. \tag{2}$$

Soit U la représentation de C_k sur $\mathcal{S}(A)$ donnée par

$$(U(a)\xi)(x) = \xi(a^{-1}x) \qquad \forall\, a \in C_k\,,\ x \in A\,. \tag{3}$$

Soit $L^2_\delta(X)_0$ la complétion séparée de $\mathcal{S}(A)_0$ pour le produit intérieur donné par (2). L'application linéaire $E : \mathcal{S}(A)_0 \to L^2_\delta(C_k)$ satisfait

$$\|E(f)\|^2_\delta = \|f\|^2_\delta \tag{4}$$

par construction. Aussi, elle s'étend à une isométrie, toujours notée E,

$$E : L^2_\delta(X)_0 \hookrightarrow L^2_\delta(C_k)\,. \tag{5}$$

On a

$$E(U(a)f)(g) = |g|^{1/2} \sum_{k^*} (U(a)f)(qg) = |g|^{1/2} \sum_{k^*} f(a^{-1}qg)$$
$$= |g|^{1/2} \sum_{k^*} f(qa^{-1}g) = |a|^{1/2}\, |a^{-1}g|^{1/2} \sum_{k^*} f(qa^{-1}g) = |a|^{1/2} (V(a)\, E(f))(g)$$

$$E\,U(a) = |a|^{1/2}\, V(a)\, E\,. \tag{6}$$

L'égalité (6) montre que la représentation naturelle U de C_k sur $L^2_\delta(X)_0$ correspond par l'isométrie E à la restriction de $|a|^{1/2}\, V(a)$ au sous-espace invariant donné par l'image de E.

Pour comprendre $\mathrm{Im}\, E$, on considère son orthogonal dans l'espace dual $L^2_{-\delta}(C_k)$.

Le sous-groupe compact

$$C_{k,1} = \{g \in C_k\,;\, |g| = 1\} \tag{7}$$

agit par la représentation V qui est unitaire quand elle est restreinte à $C_{k,1}$. Ainsi, on peut décomposer $L^2_\delta(C_k)$ et son dual $L^2_{-\delta}(C_k)$, en la somme directe de sous-espaces,

$$L^2_{\delta,\mathcal{X}_0} = \{\xi \in L^2_\delta(C_k)\,;\, \xi(a^{-1}g) = \mathcal{X}_0(a)\,\xi(g) \qquad \forall\, g \in C_k\,,\ a \in C_{k,1}\} \tag{8}$$

et,

$$L^2_{-\delta,\mathcal{X}_0} = \{\xi \in L^2_{-\delta}(C_k)\,;\, \xi(a\,g) = \mathcal{X}_0(a)\,\xi(g) \qquad \forall\, g \in C_k\,,\ a \in C_{k,1}\} \tag{9}$$

qui correspondent aux projections $P_{\mathcal{X}_0} = \int \overline{\mathcal{X}_0}(a)\, V(a)\, d_1\, a$ pour L^2_δ et $P^t_{\mathcal{X}_0} = \int \overline{\mathcal{X}_0}(a)\, V(a)^t\, d_1\, a$ pour l'espace dual $L^2_{-\delta}$.

Dans (9), nous utilisons la formule

$$(V(g)^t\, \eta)(x) = \eta(gx) \tag{10}$$

qui découle de la définition de la transposée, $\langle V(g)\xi,\eta\rangle = \langle \xi, V(g)^t\eta\rangle$ en utilisant

$$\int \xi(g^{-1}x)\,\eta(x)\,d^*x = \int \xi(y)\,\eta(gy)\,d^*y$$

Dans ces formules, on utilise seulement le caractère $\mathcal{X}_0$ comme un caractère du sous-groupe compact $C_{k,1}$ de C_k. Maintenant, choisissons, non canoniquement, une extension $\widetilde{\mathcal{X}}_0$ de $\mathcal{X}_0$ comme caractère de C_k

$$\widetilde{\mathcal{X}}_0(g) = \mathcal{X}_0(g) \qquad \forall g \in C_{k,1}\,. \tag{11}$$

Ce choix n'est pas unique mais deux telles extensions diffèrent par un caractère qui est principal, i.e. de la forme : $g \to |g|^{is_0}$, $s_0 \in \mathbb{R}$.

Fixons une factorisation $C_k = C_{k,1} \times \mathbb{R}_+^*$, et définissons $\widetilde{\mathcal{X}}_0$ comme étant égal à 1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Nous écrivons alors n'importe quel élément de $L^2_{-\delta,\mathcal{X}_0}(C_k)$ sous la forme

$$g \in C_k \to \eta(g) = \widetilde{\mathcal{X}}_0(g)\,\psi(|g|) \tag{12}$$

où

$$\int |\psi(|g|)^2\,(1+(\log|g|)^2)^{-\delta/2}\,d^*g < \infty \tag{13.}$$

Ce vecteur est dans l'orthogonal de $\operatorname{Im} E$ ssi

$$\int E(f)(x)\,\widetilde{\mathcal{X}}_0(x)\,\psi(|x|)\,d^*x = 0 \qquad \forall\, f \in \mathcal{S}(A)_0\,. \tag{14}$$

Nous procédons d'abord de manière formelle et écrivons $\psi(|x|) = \int \widehat{\psi}(t)\,|x|^{it}\,dt$ de manière à ce que le côté gauche de (14) devienne

$$\int\!\!\int E(f)(x)\,\widetilde{\mathcal{X}}_0(x)\,|x|^{it}\,\widehat{\psi}(t)\,d^*x\,dt = \int \Delta_{1/2+it}(f)\,\widehat{\psi}(t)\,dt \tag{15}$$

(en utilisant les notations des lemmes 1 et 3).

Justifions cette manipulation formelle ; puisque nous travaillons avec l'orthogonal de l'espace invariant, nous pouvons assumer que

$$V^t(h)\,\eta = \eta, \tag{16}$$

pour un h tel que $\widehat{h}$ est à support compact. Nous pouvons effectivement utiliser le lemme 5 pour ne considérer que les vecteurs qui appartiennent à l'image de

$$V^t(h) = \int h(g)\,V(g)^t\,d^*g\,,\ \widehat{h} \text{ à support compact.}$$

Alors, en utilisant (16), la transformée de Fourier de la distribution tempérée ψ sur $\mathbb{R}_+^*$ est à support compact dans $\mathbb{R}$.
Puisque $E(f)(x)$ est à décroissance rapide, l'égalité entre (14) et (15) découle de la définition de la transformée de Fourier de la distribution tempérée ψ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Décrivons maintenant les fonctions test qui conviennent $f \in \mathcal{S}(A)_0$ de façon à tester la distribution,

$$\int \Delta_{\frac{1}{2}+it}\,\widehat{\psi}(t)\,dt \tag{17}$$

Nous traitons le cas en caractéristique 0, le cas général est similaire. Pour les places finies, nous prenons,

$$f_0 = \underset{v \notin P}{\otimes}\, 1_{R_v} \otimes f_{\mathcal{X}_0} \tag{18}$$

où $f_{\mathcal{X}_0}$ est le produit tensoriel sur les places ramifiées des fonctions nulles en dehors de R_v^* et en $\overline{\mathcal{X}}_{0,v}$ sur R_v^*. Il découle de la définition de Δ_s' que,

$$\langle \Delta_s', f_0 \otimes f \rangle = \int f(x)\,\mathcal{X}_{0,\infty}(x)\,|x|^s\,d^*x \tag{19}$$

pour tout $f \in \mathcal{S}(A_\infty)$.

De plus, si l'ensemble P des places ramifiées finies n'est pas vide, on a,

$$f_0(0) = 0\,, \quad \int_{A_f} f_0(x)\,dx = 0 \tag{20}$$

de telle sorte que $f_0 \otimes f \in \mathcal{S}(A)_0 \qquad \forall\, f \in \mathcal{S}(A_\infty)$.

Maintenant, soit ℓ le nombre de places infinies de k et considérons l'application $\rho : (\mathbb{R}_+^*)^\ell \to \mathbb{R}_+^*$ donnée par

$$\rho(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell) = \lambda_1 \ldots \lambda_\ell\,. \tag{21}$$

Dès que $\ell > 1$, cette application est non propre. Etant donnée une fonction lisse à support compact, $b \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, nous avons besoin de trouver $a \in C_c^\infty((\mathbb{R}_+^*)^\ell)$ telle que l'image directe de la mesure $a(x)\,d^*x$ est $b(y)\,d^*y$ où $d^*x = \Pi\,d^*x_i$ est le produit des mesures de Haar multiplicatives.

On traite de manière équivalente un espace vectoriel de dimension finie E et une forme linéaire $L : E \to \mathbb{R}$. $b \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ est donné et on doit le relever. On peut écrire $E = \mathbb{R} \times E_1$ et le relèvement peut être pris comme $a = b \otimes b_1$ où $b_1 \in C_c^\infty(E_1)$, $\int b_1\,dx = 1$.

Ainsi, nous pouvons dans (19) prendre une fonction f de la forme,

$$f(x) = g(x)\,\overline{\mathcal{X}}_{0,\infty}\,(x) \tag{22}$$

où la fonction $g \in C_c^\infty(A_\infty)$ dépend seulement de $(|x|_v)$, $v \in S_\infty$ et est lisse à support compact, disjointe de l'ensemble fermé

$$\left\{ x \in \prod_{v \in S_\infty} k_v\,;\, \exists\, v\,,\, x_v = 0 \right\}.$$

Ainsi, à toute fonction $b \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, nous pouvons assigner une fonction test $f = f_b$ telle que pour tout s (Re $s > 0$)

$$\langle \Delta_s', f_0 \otimes f_b \rangle = \int_{\mathbb{R}_+^*} b(x)\,|x|^s\,d^*x\,. \tag{23}$$

Par le lemme 3, on obtient,

$$\begin{aligned}\left\langle \int \Delta_{\frac{1}{2}+it}\, \widehat{\psi}(t)\, dt\,,\, f_0 \otimes f_b \right\rangle &= \left\langle \int L\,(\mathcal{X}_0, \tfrac{1}{2}+it)\, \Delta'_{\frac{1}{2}+it}\, \widehat{\psi}(t)\, dt\,,\, f_0 \otimes f_b \right\rangle \\ &= \int \int L\,(\mathcal{X}_0, \tfrac{1}{2}+it)\, \widehat{\psi}(t)\, b(x)\, |x|^{\frac{1}{2}+it}\, d^*x\, dt\,.\end{aligned}$$

Ainsi, de (14) et (15), on conclut, en utilisant des fonctions test arbitraires b que la transformée de Fourier de la distribution $L\,(\mathcal{X}_0, 1/2+it)\,\widehat{\psi}(t)$ s'évanouit vraiment,

$$L\,(\mathcal{X}_0, \frac{1}{2}+it)\,\widehat{\psi}(t) = 0 \tag{24}$$

Pour justifier l'égalité ci-dessus, nous avons besoin de contrôler la croissance de la fonction L en la variable t. On a,

$$|L(\frac{1}{2}+it)| = 0\,(|t|^N). \tag{25}$$

En particulier, puisque $L\left(\frac{1}{2}+it\right)$ est une fonction analytique de t, nous voyons que c'est un multiplicateur de l'algèbre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ des fonctions de Schwartz en la variable t. Ainsi, le produit $L\,(\frac{1}{2}+it)\,\widehat{\psi}(t)$ est encore une distribution tempérée, ainsi que sa transformée de Fourier. Dire que cette dernière s'évanouit quand on la teste sur des fonctions arbitraires qui sont lisses à support compact implique qu'elle s'évanouisse.

L'argument ci-dessus utilise l'hypothèse $\mathcal{X}_0/C_{k,1} \neq 1$.
Dans le cas $\mathcal{X}_0/C_{k,1} = 1$, nous avons besoin d'imposer à la fonction test f utilisée dans (22) la condition $\int f\, dx = 0$ qui signifie que

$$\int b(x)\,|x|\,d^*x = 0\,. \tag{26}$$

Mais l'espace des fonctions $b(x)\,|x|^{1/2} \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ telles que (26) est vérifiée est toujours dense dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^*)$.

Pour comprendre l'équation (24), considérons une équation pour les distributions $\alpha(t)$ de la forme

$$\varphi(t)\,\alpha(t) = 0 \tag{27}$$

où l'on travaille d'abord avec des distributions α sur S^1 et où l'on assume que $\varphi \in C^\infty(S^1)$ a un nombre fini de zéros $x_i \in Z(\varphi)$, d'ordre fini n_i. Soit J l'idéal de $C^\infty(S^1)$ engendré par φ. On a $\psi \in J \Leftrightarrow$ l'ordre de ψ en x_i est $\geq n_i$.

Ainsi, les distributions $\delta_{x_i}, \delta'_{x_i}, \ldots, \delta_{x_i}^{(n_i-1)}$ forment une base de l'espace des solutions de (27).

Maintenant, $\widehat{\psi}(t)$ est, pour η orthogonal à $\mathrm{Im}(E)$ et satisfaisant (16), une distribution à support compact, et $L\left(\mathcal{X}_0, \frac{1}{2}+it\right)\,\widehat{\psi}(t) = 0$. Ainsi, par l'argument ci-dessus, nous obtenons que $\widehat{\psi}$ est une combinaison linéaire finie des distributions,

$$\delta_t^{(k)}\ ,\ L\left(\mathcal{X}_0, \frac{1}{2}+it\right) = 0\ ,\ k < \text{ordre du zéro},\ k < \frac{\delta-1}{2}\,. \tag{28}$$

La condition $k <$ l'ordre du zéro est nécessaire et suffisante pour obtenir l'évanouissement sur l'image de E. La condition $k < \frac{\delta-1}{2}$ est nécessaire et suffisante pour assurer que ψ appartient à $L^2_{-\delta}$, i.e. que

$$\int (\log|x|)^{2k}\,(1+|\log|x||^2)^{-\delta/2}\,d^*x < \infty \tag{29}$$

qui est $2k+\delta < -1$, i.e. $k < \frac{\delta-1}{2}$.

Inversement, soit s un zéro de $L(\mathcal{X}_0, s)$ et $k > 0$ son ordre. Par le lemme 3 et par le fait que Δ'_s soit finie et analytique (pour Re $s > 0$), on obtient

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^a \Delta_s(f) = 0 \qquad \forall\, f \in \mathcal{S}(A)_0\,,\ a = 0, 1, \ldots, k-1\,. \tag{30}$$

On peut alors différencier l'égalité du lemme 3 et obtenir,

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^a \Delta_s(f) = \int_{C_k} E(f)(x)\,\mathcal{X}_0(x)\,|x|^{s-1/2}\,(\log|x|)^a\,d^*x\,. \tag{31}$$

Ainsi, η appartient à l'orthogonal de $\mathrm{Im}(E)$ et satisfait (16) ssi c'est une combinaison linéaire de fonctions de la forme,

$$\eta_{t,a}(x) = \mathcal{X}_0(x)\,|x|^{it}\,(\log|x|)^a, \tag{32}$$

où,

$$L\left(\mathcal{X}_0, \frac{1}{2}+it\right) = 0\ , \quad a < \text{ordre du zéro},\ a < \frac{\delta-1}{2}\,. \tag{33}$$

La restriction au sous-groupe $\mathbb{R}^*_+$ de C_k de la transposée de W est ainsi donnée dans la base ci-dessus par :

$$W(\lambda)^t\,\eta_{t,a} = \sum_{b=0}^{a} C_a^b\,\lambda^{it}\,(log\lambda)^b\,\eta_{t,a-b}. \tag{34}$$

L'opérateur de multiplication par une fonction à dérivées bornées est un opérateur borné dans n'importe quel espace de Sobolev ; ainsi, on peut vérifier directement, en utilisant la densité dans l'orthogonal de $\mathrm{Im}(E)$ des vecteurs satisfaisant (16), que si $L\left(\mathcal{X}_0, \frac{1}{2}+is\right) \neq 0$ alors is n'appartient pas au spectre de $D^t_{\mathcal{X}_0}$.

Cela détermine le spectre de l'opérateur $D^t_{\mathcal{X}_0}$ et par conséquent celui de son transposé $D_{\mathcal{X}_0}$ comme indiqué dans le Théorème 1 et cela termine la preuve du théorème 1.

Prouvons maintenant le corollaire. Fixons $h_0 \in \mathcal{S}(C_k)$ de telle façon que $\widehat{h}_0$ a son support compact contenu dans $\{\mathcal{X}_0\} \times \mathbb{R}$ et $\widehat{h}_0(\mathcal{X}_0, s) = 1$ pour s petit.

Prenons alors h_s donné par $h_s(g) = h_0(g)\,|g|^{is}$. La transformée de Fourier $\widehat{h}_s$ est alors le translaté de $\widehat{h}_0$, et on peut choisir h_0 de telle façon que,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{h}_n(\mathcal{X}_0\,, u) = 1, u \in \mathbb{R} \tag{35}$$

Quand $|s| \to \infty$, la dimension de l'image de $W^t(h_s)$ est de l'ordre de $\log |s|$ comme l'est le nombre de zéros de la fonction L dans le translaté d'un intervalle donné (cf. [W3]).

Choisissons $h \in \mathcal{S}(C_k)$. On a $W^t(h) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} W^t(h * h_n)$.

Il suit de là, de la croissance polynomiale de la norme $W^t(g)$, que l'opérateur

$$\int h(g)\, W(g)^t\, d^*g \tag{36}$$

est de classe trace pour tout $h \in \mathcal{S}(C_k)$.

De plus, en utilisant la forme triangulaire donnée par (34), nous obtenons sa trace, et par conséquent la trace de son transposé $W(h)$ comme,

$$\mathrm{Trace}\, W(h) = \sum_{\substack{L\left(\mathcal{X},\frac{1}{2}+\rho\right)=0 \\ \rho\in i\,\mathbb{R}}} \widehat{h}(\mathcal{X},\rho) \tag{37}$$

où la multiplicité est comptée comme dans le Théorème 1 et où la transformée de Fourier $\widehat{h}$ de h est définie par,

$$\widehat{h}(\mathcal{X},\rho) = \int_{C_k} h(u)\, \widetilde{\mathcal{X}}(u)\, |u|^{\rho}\, d^*\, u\,. \tag{38}$$

Appendice II. Formules explicites.

Rappelons d'abord les formules explicites de Weil ([W3]). Soit k un corps global. On identifie le quotient $C_k/C_{k,1}$ avec l'image du module,

$$N = \{|g|\,;\, g \in C_k\} \subset \mathbb{R}_+^*\,. \tag{1}$$

On munit N de sa mesure de Haar normalisée d^*x. Etant donnée une fonction F sur N telle que, pour $b > \frac{1}{2}$,

$$|F(\nu)| = 0(\nu^b) \quad \nu \to 0\ ,\ |F(\nu)| = 0(\nu^{-b})\ ,\ \nu \to \infty\,, \tag{2}$$

on définit,

$$\Phi(s) = \int_N F(\nu)\, \nu^{1/2-s}\, d^*\nu\,. \tag{3}$$

Etant donné un Grössencharakter $\mathcal{X}$, i.e. un caractère de C_k, et quel que soit ρ dans la bande $0 < \mathrm{Re}(\rho) < 1$, appelons $N(\mathcal{X},\rho)$ l'ordre de $L(\mathcal{X},s)$ en $s = \rho$. Soit,

$$S(\mathcal{X},F) = \sum_{\rho} N(\mathcal{X},\rho)\, \Phi(\rho) \tag{4}$$

où la somme est prise sur les ρ de la bande ouverte ci-dessus. On définit alors une distribution Δ sur C_k par,

$$\Delta = \log |d^{-1}|\, \delta_1 + D - \sum_v D_v\,, \tag{5}$$

où δ_1 est la masse de Dirac en $1 \in C_k$, où d est l'idèle différentielle de k de telle façon que $|d|^{-1}$ est au signe près le discriminant de k quand $\text{carac}(k) = 0$ et vaut q^{2g-2} quand k est un corps de fonctions sur une courbe de genre g avec ses coefficients dans le corps fini $\mathbb{F}_q$.

La distribution D est donnée par,

$$D(f) = \int_{C_k} f(w)\,(|w|^{1/2} + |w|^{-1/2})\,d^*w \tag{6}$$

où la mesure de Haar d^*w est normalisée (cf. IIb). Les distributions D_v sont paramétrées par les places v de k et s'obtiennent comme suit. Pour chaque v, on considère l'homomorphisme propre naturel,

$$k_v^* \to C_k\ ,\ x \to \text{classe de } (1, \ldots, x, 1 \ldots) \tag{7}$$

du groupe multiplicatif du corps local k_v dans le groupe des classes d'idèles C_k.

On a alors,

$$D_v(f) = Pfw \int_{k_v^*} \frac{f(u)}{|1-u|}\,|u|^{1/2}\,d^*u \tag{8}$$

où la mesure de Haar d^*u est normalisée (cf. IIb), et où la valeur principale de Weil Pfw de l'intégrale s'obtient comme suit, pour un corps local $K = k_v$,

$$Pfw \int_{k_v^*} 1_{R_v^*}\,\frac{1}{|1-u|}\,d^*u = 0\,, \tag{9}$$

si le corps local k_v est non archimédien, et sinon :

$$Pfw \int_{k_v^*} \varphi(u)\,d^*u = PF_0 \int_{\mathbb{R}_+^*} \psi(\nu)\,d^*\nu\,, \tag{10}$$

où $\psi(\nu) = \int_{|u|=\nu} \varphi(u)\,d_\nu u$ est obtenu en intégrant φ sur les fibres, tandis que

$$PF_0 \int \psi(\nu) d^*\nu = 2\log 2\pi\, c + \lim_{t\to\infty}\left(\int (1 - f_0^{2t})\,\psi(\nu)\,d^*\nu - 2c\log t\right)\,, \tag{11}$$

où l'on suppose que $\psi - c\ f_1^{-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$f_0(\nu) = \inf(\nu^{1/2}, \nu^{-1/2}) \qquad \forall\,\nu \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f_1 = f_0^{-1} - f_0\ .$$

La formule explicite de Weil est alors,

Théorème 1. ([W]) *Avec les notations ci-dessus, on a* $S(\mathcal{X}, F) = \Delta(F(|w|)\ \mathcal{X}(w)$.

Nous allons maintenant travailler sur cette formule et en particulier, comparer les valeurs principales Pfw avec celles du théorème V.3.

Effectuons le changement de variables suivant,

$$|g|^{-1/2}\, h(g^{-1}) = F(|g|)\, \mathcal{X}_0(g)\,, \tag{12}$$

et réécrivons l'égalité ci-dessus en fonction de h.

Par (3), on a,

$$\Phi\left(\frac{1}{2} + is\right) = \int_{C_k} F(|g|)\, |g|^{-is}\, d^*g\,, \tag{13}$$

Ainsi, en fonction de h,

$$\int h(g)\, \mathcal{X}_1(g)\, |g|^{1/2+is}\, d^*g = \int F(|g^{-1}|)\, \mathcal{X}_0(g^{-1})\, \mathcal{X}_1(g)\, |g|^{is}\, d^*g\,, \tag{14}$$

qui est égal à 0 si $\mathcal{X}_1/C_{k,1} \neq \mathcal{X}_0/C_{k,1}$ et pour $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_0$,

$$\int h(g)\, \mathcal{X}_0(g)\, |g|^{1/2+is}\, d^*g = \Phi\left(\frac{1}{2} + is\right)\,. \tag{15}$$

Ainsi, avec nos notations, nous voyons que,

$$\mathrm{Supp}\, \widehat{h} \subset \mathcal{X}_0 \times \mathbb{R}\ ,\ \widehat{h}(\mathcal{X}_0, \rho) = \Phi(\rho)\,. \tag{16}$$

Et alors, nous pouvons écrire,

$$S(\mathcal{X}_0, F) = \sum_{\substack{L(\mathcal{X},\rho)=0, \quad \mathcal{X}\in \widehat{C}_{k,1} \\ 0<\mathrm{Re}\,\rho<1}} \widehat{h}(\mathcal{X}, \rho) \tag{17}$$

en utilisant une décomposition fixe $C_k = C_{k,1} \times N$.

Evaluons maintenant chaque terme dans (5).

Le premier devient $(\log |d^{-1}|)\, h(1)$. On a, en utilisant (6) et (12),

$$\begin{aligned} \langle D, F(|g|)\, \mathcal{X}_0(g)\rangle &= \textstyle\int_{C_k} |g|^{-1/2}\, h(g^{-1})\, (|g|^{1/2} + |g|^{-1/2})\, d^*g \\ &= \textstyle\int_{C_k} h(u)\, (1 + |u|)\, d^*u = \widehat{h}(0) + \widehat{h}(1)\,, \end{aligned}$$

où, pour le caractère trivial de $C_{k,1}$ on utilise la notation

$$\widehat{h}(z) = \widehat{h}(1, z) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\,. \tag{18}$$

Ainsi, les deux premiers termes de (5) donnent

$$(\log |d^{-1}|)\, h(1) + \widehat{h}(0) + \widehat{h}(1)\,. \tag{19}$$

Soit v une place de k, on a par (8) et (12),

$$\langle D_v, F(|g|)\, \mathcal{X}_0(g)\rangle = Pfw \int_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u\,.$$

Nous pouvons alors écrire la contribution des derniers termes de (5) comme,

$$-\sum_v Pfw \int_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u\,. \tag{20}$$

Ainsi, l'égalité de Weil peut être réécrite en,

$$\widehat{h}(0)+\widehat{h}(1)-\sum_{\substack{L(\mathcal{X},\rho)=0,\ \ \mathcal{X}\in\widehat{C}_{k,1}\\ 0<\mathrm{Re}\,\rho<1}}\widehat{h}(\mathcal{X},\rho)=(\log|d|)\,h(1)+ \tag{21}$$

$$\sum_v Pfw\int_{k_v^*}\frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\,d^*u\,.$$

qui est vérifiée maintenant pour des combinaisons linéaires de fonctions h de la forme (12).

Ceci est suffisant pour conclure quand $h(1)=0$.

Comparons maintenant les valeurs principales de Weil, avec celles dictées par le théorème V.3. Nous travaillons d'abord avec un corps local K et comparons (9), (10) avec notre prescription. Supposons d'abord K non archimédien. Soit α un caractère de K tel que,

$$\alpha/R=1\ ,\ \alpha/\pi^{-1}R\neq 1\,. \tag{22}$$

Alors, pour la transformée de Fourier donnée par,

$$(Ff)(x)=\int f(y)\,\alpha(y)\,dy\,, \tag{23}$$

avec dy la mesure auto-duale de Haar, on a

$$F(1_R)=1_R\,. \tag{24}$$

Lemme 2. *Avec le choix ci-dessus de α, on a*

$$\int'\frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\,d^*u=Pfw\int\frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\,d^*u$$

avec les notations du théorème 3.

Preuve. Par construction, les deux côtés peuvent seulement différer par un multiple de $h(1)$. Rappelons du théorème 3 que le côté gauche est donné par

$$\left\langle L,\,\frac{h(u^{-1})}{|u|}\right\rangle\,, \tag{25}$$

où L est l'unique extension de $\rho^{-1}\frac{du}{|1-u|}$ dont la transformée de Fourier s'évanouit en 1, $\widehat{L}(1)=0$. Ainsi, de (9), nous devons seulement vérifier que (25) s'évanouit pour $h=1_{R^*}$, i.e. que

$$\langle L,1_{R^*}\rangle=0\,. \tag{26}$$

De façon équivalente, si l'on pose $Y=\{y\in K\,;\,|y-1|=1\}$, on a juste à montrer, en utilisant Parseval, que,

$$\langle\log|u|\,,\,\widehat{1}_Y\rangle=0\,. \tag{27}$$

On a $\widehat{1}_Y(x) = \int_Y \alpha(xy)\, dy = \alpha(x)\, \widehat{1}_{R^*}(x)$, et $1_{R^*} = 1_R - 1_P$, $\widehat{1}_{R^*} = 1_R - |\pi|\, 1_{\pi^{-1}R}$, ainsi, avec $q^{-1} = |\pi|$,

$$\widehat{1}_Y(x) = \alpha(x) \left(1_R - \frac{1}{q}\, 1_{\pi^{-1}R}\right)(x)\,. \tag{28}$$

Nous devons maintenant calculer $\int \log|x|\, \widehat{1}_Y(x)\, dx = A + B$,

$$A = -\frac{1}{q} \int_{\pi^{-1}R^*} \alpha(x)\, (\log q)\, dx\ ,\ \ B = \left(1 - \frac{1}{q}\right) \int_R \log|x|\, dx\,. \tag{29}$$

Montrons que $A + B = 0$. On a $\int_R dx = 1$, et

$$\begin{aligned} A &= -\int_{R^*} \alpha(\pi^{-1}y)\, (\log q)\, dy = -\log q \left(\int_R \alpha(\pi^{-1}y)\, dy - \int_P dy\right) \\ &= \frac{1}{q}\, \log q\ ,\ \text{puisque} \int_R \alpha(\pi^{-1}y)\, dy = 0 \text{ lorsque } \alpha/\pi^{-1}R \neq 1\,. \end{aligned}$$

Pour calculer B, il convient de noter que $\int_{\pi^n R^*} dy = q^{-n} \left(1 - \frac{1}{q}\right)$ de telle manière que

$$B = \left(1 - \frac{1}{q}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-n \log q)\, q^{-n} = -q^{-1} \log q\,.$$

et $A + B = 0$. ∎

Traitons maintenant le cas des corps archimédiens. On prend d'abord $K = \mathbb{R}$, et on normalise la transformée de Fourier comme,

$$(Ff)(x) = \int f(y)\, e^{-2\pi ixy}\, dy \tag{30}$$

de telle façon que la mesure de Haar dx soit auto-duale.

Avec les notations de (10), on a,

$$Pfw \int_{\mathbb{R}^*} f_0^3(|u|)\, \frac{|u|^{1/2}}{|1-u|}\, d^*u = \log \pi + \gamma \tag{31}$$

où γ est la constante d'Euler, $\gamma = -\Gamma'(1)$. Par conséquent, l'intégration sur les fibres donne $f_0^4 \times (1 - f_0^4)^{-1}$, et on obtient,

$$\begin{aligned} PF_0 \int_{\mathbb{R}_+^*} f_0^4 \times (1 - f_0^4)^{-1} d^*u \ &= \left(\log 2\pi + \lim_{t\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} (1 - f_0^{2t})\, f_0^4 (1 - f_0^4)^{-1}\, d^*u - \log t\right)\right) \\ &= \log 2\pi + \gamma - \log 2\,. \end{aligned}$$

Maintenant, soit $\varphi(u) = -\log|u|$, c'est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$ et on a,

$$\langle \varphi, e^{-\pi u^2} \rangle = \frac{1}{2}\, \log \pi + \frac{\gamma}{2} + \log 2\,, \tag{32}$$

puisqu'on obtient que $\frac{\partial}{\partial s} \int |u|^{-s}\, e^{-\pi u^2}\, du = \frac{\partial}{\partial s} \left(\pi^{\frac{s-1}{2}}\, \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\right)$ évalué en $s = 0$, en utilisant que $\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = -\gamma - 2\log 2$.

Alors, par la formule de Parseval, on a,

$$\langle \widehat{\varphi}, e^{-\pi x^2} \rangle = \frac{1}{2} \log \pi + \frac{\gamma}{2} + \log 2 \,, \tag{33}$$

qui donne, pour toute fonction test f,

$$\langle \widehat{\varphi}, f \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} f(x)\, d^*x + (\log \varepsilon)\, f(0) \right) + \lambda\, f(0) \tag{34}$$

où $\lambda = \log 2\pi + \gamma$. Dans le but d'obtenir (34), on utilise l'égalité,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} f(x)\, d^*x + (\log \varepsilon)\, f(0) \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int f(x)\, |x|^{\varepsilon}\, d^*x - \frac{1}{\varepsilon}\, f(0) \right) , \tag{35}$$

qui est vérifiée puisque les deux côtés s'évanouissent pour $f(x) = 1$ et pour $|x| \leq 1$, $f(x) = 0$ sinon.

Ainsi, de (34), on obtient,

$$\int_{\mathbb{R}}' f(u)\, \frac{1}{|1-u|}\, d^*u = \lambda\, f(1) + \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{|1-u| \geq \varepsilon} \frac{f(u)}{|1-u|}\, d^*u + (\log \varepsilon)\, f(1) \right) . \tag{36}$$

En prenant $f(u) = |u|^{1/2}\, f_0^3(|u|)$, le côté droit de (36) donne $\lambda - \log 2 = \log \pi + \gamma$, et ainsi, nous pouvons conclure en utilisant (31) que, pour toute fonction test f,

$$\int_{\mathbb{R}}' f(u)\, \frac{1}{|1-u|}\, d^*u = Pfw \int_{\mathbb{R}} f(u)\, \frac{1}{|1-u|}\, d^*u \,. \tag{37}$$

Considérons finalement le cas $K = \mathbb{C}$. Nous choisissons le caractère de base α comme

$$\alpha(z) = \exp 2\pi i (z + \overline{z}) \,, \tag{38}$$

la mesure de Haar auto-duale est $dz\, d\overline{z} = |dz \wedge d\overline{z}|$, et la fonction $f(z) = \exp -2\pi |z|^2$ est auto-duale.

La mesure de Haar multiplicative normalisée est :

$$d^*z = \frac{|dz \wedge d\overline{z}|}{2\pi |z|^2} \,. \tag{39}$$

Calculons la transformée de Fourier de la distribution

$$\varphi(z) = -\log |z|_{\mathbb{C}} = -2 \log |z| \,. \tag{40}$$

On a

$$\langle \varphi, \exp -2\pi |z|^2 \rangle = \log 2\pi + \gamma \,, \tag{41}$$

comme on le voit en utilisant $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\int e^{-2\pi |z|^2}\, |z|^{-2\varepsilon}\, |dz \wedge d\overline{z}| \right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left((2\pi)^{\varepsilon}\, \Gamma(1-\varepsilon) \right)$.

Ainsi, $\langle \widehat{\varphi}, \exp -2\pi |u|^2 \rangle = \log 2\pi + \gamma$ et l'on obtient,

$$\langle \widehat{\varphi}, f \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{|u|_{\mathbb{C}} \geq \varepsilon} f(u)\, d^*u + \log \varepsilon\, f(0) \right) + \lambda'\, f(0) \tag{42}$$

où $\lambda' = 2(\log 2\pi + \gamma)$.

Pour voir cela, on utilise l'analogue de (35) pour $K = \mathbb{C}$, pour calculer le côté droit de (42) pour $f(z) = \exp -2\pi|z|^2$.

Ainsi, pour toute fonction test f, on a,

$$\int'_{\mathbb{C}} f(u)\,\frac{1}{|1-u|_{\mathbb{C}}}\,d^*u = \lambda' f(1) + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|1-u|_{\mathbb{C}}\geq\varepsilon}\frac{f(u)}{|1-u|_{\mathbb{C}}}\,d^*u + (\log\varepsilon)f(1)\right). \tag{43}$$

Comparons cela à Pfw. Quand on intègre sur les fibres de $\mathbb{C}^* \xrightarrow{|\ |_{\mathbb{C}}} \mathbb{R}_+^*$ la fonction $|1-z|_{\mathbb{C}}^{-1}$, on obtient,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{|1-e^{i\theta}z|^2}\,d\theta = \frac{1}{1-|z|^2}\ \text{si } |z|<1\,,\ \text{et}\ \frac{1}{|z|^2-1}\ \text{si } |z|>1\,. \tag{44}$$

Ainsi, pour toute fonction test f sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, par (10),

$$Pfw\int f(|u|_{\mathbb{C}})\,\frac{1}{|1-u|_{\mathbb{C}}}\,d^*u = PF_0\int f(\nu)\,\frac{1}{|1-\nu|}\,d^*\nu \tag{45}$$

avec les notations de (11). Avec $f_2(\nu) = \nu^{\frac{1}{2}}\,f_0(\nu)$, on obtient alors, en utilisant (11),

$$Pfw\int f_2(|u|_{\mathbb{C}})\,\frac{1}{|1-u|_{\mathbb{C}}}\,d^*u = PF_0\int f_0\,f_1^{-1}d^*\nu = 2(\log 2\pi+\gamma)\,. \tag{46}$$

Nous allons maintenant montrer que,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|1-u|_{\mathbb{C}}\geq\varepsilon}\frac{f_2(|u|_{\mathbb{C}})}{|1-u|_{\mathbb{C}}}\,d^*u + \log\varepsilon\right) = 0\,, \tag{47}$$

d'où il découlera que, en utilisant (43),

$$\int'_{\mathbb{C}} f(u)\,\frac{1}{|1-u|_{\mathbb{C}}}\,d^*u = Pfw\int f(u)\,\frac{1}{|1-u|_{\mathbb{C}}}\,d^*u\,. \tag{48}$$

Pour prouver (47), il suffit d'évaluer l'intégrale,

$$\int_{|z|\leq 1,|1-z|\geq\varepsilon}((1-z)(1-\overline{z}))^{-1}\,|dz\wedge d\overline{z}| = j(\varepsilon) \tag{49}$$

et de montrer que $j(\varepsilon) = \alpha\log\varepsilon + o(1)$ pour $\varepsilon\to 0$. Un énoncé similaire est alors vérifié

$$\int_{|z|\leq 1,|1-z^{-1}|\geq\varepsilon}((1-z)(1-\overline{z}))^{-1}\,|dz\wedge d\overline{z}|.$$

On a $j(\varepsilon) = \int_D |dZ\wedge d\overline{Z}|$, où $Z = \log 1 - z$ et le domaine D est contenu dans le rectangle,

$$\{Z = (x+iy)\,;\,\log\varepsilon\leq x\leq\log 2\,,\ -\pi/2\leq y\leq\pi/2\} = R_\varepsilon \tag{50}$$

et borné par la courbe $x = \log 2\cos y$ qui vient de l'équation du cercle $|z| = 1$ en coordonnées polaires centrées en $z = 1$. On obtient alors,

$$j(\varepsilon) = 4\int_{\log\varepsilon}^{\log 2}\operatorname{Arc}\cos(e^x/2)\,dx\,, \tag{51}$$

quand $\varepsilon \to 0$, on a $j(\varepsilon) \sim 2\pi \log 1/\varepsilon$, qui est l'aire du rectangle suivant (selon la mesure $|dz \wedge d\bar{z}|$),

$$\{Z = (x+iy)\,;\, \log \varepsilon \leq x \leq 0\,,\, -\pi/2 \leq y \leq \pi/2\} \tag{52}$$

on a $|R_\varepsilon| - 2\pi \log 2 = 2\pi \log 1/\varepsilon$. Quand $\varepsilon \to 0$, l'aire de $R_\varepsilon \backslash D$ converge vers

$$4 \int_{-\infty}^{\log 2} \operatorname{Arc}\sin(e^x/2)\, dx = -4 \int_0^{\pi/2} \log \sin u \, du = 2\pi \log 2\,, \tag{53}$$

de telle façon que $j(\varepsilon) = 2\pi \log 1/\varepsilon + o(1)$ quand $\varepsilon \to 0$.

Ainsi, nous pouvons affirmer qu'avec le choix ci-dessus des caractères de base pour les corps locaux, on a, pour toute fonction test f,

$$\int_K' f(u)\, \frac{1}{|1-u|}\, d^* u = Pfw \int f(u)\, \frac{1}{|1-u|}\, d^* u\,. \tag{54}$$

Lemme 3. *Soit K un corps local, α_0 un caractère normalisé comme ci-dessus et α, $\alpha(x) = \alpha_0(\lambda x)$ un caractère arbitraire de K. Soit $\int'$ définie comme dans le théorème V.3 relative à α, alors, pour toute fonction test f,*

$$\int_K' f(u)\, \frac{1}{|1-u|}\, d^* u = \log |\lambda|\, f(1) + Pfw \int f(u)\, \frac{1}{|1-u|}\, d^* u\,.$$

Preuve. La nouvelle mesure de Haar auto-duale est

$$da = |\lambda|^{1/2}\, d_0\, a \tag{55}$$

avec $d_0\, a$ auto-duale pour α_0.

De façon similaire, la nouvelle transformée de Fourier est donnée par

$$\widehat{f}(x) = \int \alpha(xy)\, f(y)\, dy = \int \alpha_0(\lambda\, xy)\, f(y)\, |\lambda|^{1/2}\, d_0\, y\,,$$

ainsi

$$\widehat{f}(x) = |\lambda|^{1/2}\, \widehat{f}^0(\lambda\, x)\,. \tag{56}$$

Soit alors $\varphi(u) = -\log |u|$. Sa transformée de Fourier comme distribution est donnée par,

$$\langle \widehat{\varphi}, f \rangle = \int (-\log |u|)\, \widehat{f}(u)\, du\,. \tag{57}$$

On a

$$\begin{aligned} \textstyle\int (-\log |u|)\, \widehat{f}(u)\, du &= \textstyle\int (-\log |u|)\, \widehat{f}^0(\lambda\, u)\, |\lambda|\, d_0\, u \\ &= \textstyle\int (-\log |v|)\, \widehat{f}^0(v)\, d_0\, v + \int \log |\lambda|\, \widehat{f}^0(v)\, d_0\, v \\ &= \textstyle\int (-\log |v|)\, \widehat{f}^0(v)\, d_0\, v + \log |\lambda|\, f(0). \end{aligned}$$

Ainsi, le lemme découle de (54). ∎

Passons maintenant au cas global, rappelons que si α, $\alpha \neq 1$, est un caractère de A tel que $\alpha/k = 1$, il existe une idèle différentielle $d = (d_v)$ telle que (cf. [W1]),

(58) $$\alpha_v(x) = \alpha_{0,v}(d_v\, x)$$

où $\alpha = \Pi\, \alpha_v$ et où chaque caractère $\alpha_{0,v}$ est normalisé comme ci-dessus.

Nous pouvons alors réécrire la formule de Weil (théorème 1) comme,

Théorème 6. *Soit k un corps global, α un caractère non-trivial de A/k et $\alpha = \Pi\, \alpha_v$ ses facteurs locaux.*

Soit $h \in \mathcal{S}(C_k)$ à support compact, alors

$$\widehat{h}(0) + \widehat{h}(1) - \sum_{\substack{L(\mathcal{X},\rho)=0 \\ 0<\mathrm{Re}\rho<1}} \widehat{h}(\mathcal{X}, \rho) = \sum_v \int_{k_v^*}' \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u$$

où la normalisation de $\int'$ est donnée par α_v comme dans le théorème V.3, et $\widehat{h}(\mathcal{X}, z) = \int h(u)\, \mathcal{X}(u)\, |u|^z\, d^*u$.

Preuve. Cela découle de la formule (21), lemme 3 et de l'égalité $\log|d| = \sum\limits_v \log|d_v|$. ∎

Normalisation de la mesure de Haar sur le groupe modulé

Soit G un groupe abélien localement compact avec un morphisme propre,

(1) $$g \to |g|\,,\ G \to \mathbb{R}_+^*$$

dont l'image est cocompacte dans $\mathbb{R}_+^*$.

Il existe une unique mesure de Haar d^*g sur G telle que

(2) $$\int_{|g|\in[1,\Lambda]} d^*g \sim \log\Lambda \qquad \text{quand } \Lambda \to +\infty\,.$$

Soit $G_0 = \mathrm{Ker}\,\mathrm{mod} = \{g \in G\,;\, |g| = 1\}$. C'est un groupe compact par hypothèse, et l'on peut identifier G/G_0 avec l'image N du module. Déterminons la mesure d^*n sur $N \subset \mathbb{R}_+^*$ telle que (2) soit vérifiée pour

(3) $$\int f\, d^*g = \int \left(\int f(ng_0)\, dg_0 \right) d^*n$$

où la mesure de Haar dg_0 est normalisée par

(4) $$\int_{G_0} dg_0 = 1\,.$$

Soit ρ_Λ la fonction sur G définie par

$$\rho_\Lambda(g) = 0 \quad \text{si } |g| \notin [1,\Lambda]\,,\ \rho_\Lambda(g) = \frac{1}{\log \Lambda} \quad \text{si } g \in [1,\Lambda]\,. \tag{5}$$

La normalisation (2) signifie que $\int \rho_\Lambda \, d^* g \to 1$ quand $\Lambda \to \infty$.

Posons d'abord $N = \mathbb{R}_+^*$; alors l'unique mesure satisfaisant (2) est

$$d^*\lambda = \frac{d\lambda}{\lambda}\,. \tag{6}$$

Posons alors $N = \mu^{\mathbb{Z}}$ pour un certain $\mu > 1$. Considérons la mesure

$$\int f \, d^* g = \alpha \sum f(\mu^n)\,. \tag{7}$$

On prend $f = \rho_\Lambda$, alors, le côté droit est $\alpha \frac{N}{\log \Lambda}$ où N est le nombre de $\mu^n \in [1,\Lambda]$, i.e. $\sim \frac{\log \Lambda}{\log \mu}$. Cela montre que (2) est vérifiée ssi

$$\alpha = \log \mu\,. \tag{8}$$

Montrons plus généralement que si $H \subset G$ est un sous-groupe compact de G et si à la fois $d^* g$ et $d^* h$ sont normalisées par (2), on a

$$\int \left(\int f(hy) \, d^* h \right) d_0\, y = \int f \, d^* g \tag{9}$$

où $d_0\, y$ est la mesure de Haar de l'intégrale 1 sur G/H,

$$\int_{G/H} d_0\, y = 1\,. \tag{10}$$

Le côté gauche de (9) définit une mesure de Haar sur G et il est juste nécessaire de montrer qu'il satisfait (2).

On a $\|\rho_\Lambda(\cdot\, y) - \rho_\Lambda\|_1 \to 0$ quand $\Lambda \to \infty$, et

$$\int \rho_\Lambda(hy) \, d^* h \to 1 \qquad \text{quand}\, \Lambda \to \infty \tag{11}$$

uniformément sur les ensembles compacts de $y \in G$, ainsi

$$\int \left(\int \rho_\Lambda(hy) \, d^* h \right) d_0\, y \to 1 \qquad \text{quand } \Lambda \to \infty\,. \tag{12}$$

Appendice III. Formules de trace d'une distribution.

Dans cet appendice, nous rappelons pour le confort de la lectrice le traitement des distributions indépendantes des coordonnées de [GS] et donnons des détails pour les conditions de transversalité.

Etant donné un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, $\dim E = n$, une densité est une application, $\rho \in |E|$,

$$\rho : \wedge^n E \to \mathbb{C} \tag{1}$$

telle que $\rho(\lambda v) = |\lambda|\, \rho(v) \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \forall\, v \in \wedge^n E$.

Etant donnée une fonction linéaire $T : E \to F$, soit $|T| : |F| \to |E|$ l'application linéaire correspondante, elle dépend de façon contravariante de T.

Etant donnée une variété M et $\rho \in C_c^\infty(M, |TM|)$ sur une intégrale canonique,

$$\int \rho \in \mathbb{C}\,. \tag{2}$$

Etant donné un fibré vectoriel L sur M, on définit les sections généralisées sur M comme l'espace dual de $C_c^\infty(M, L^* \otimes |TM|)$

$$C^{-\infty}(M, L) = \text{ dual de } C_c^\infty(M, L^* \otimes |TM|) \tag{3}$$

où L^* est le fibré dual. On a une inclusion naturelle,

$$C^\infty(M, L) \subset C^{-\infty}(M, L) \tag{4}$$

étant donné l'appariement,

$$\sigma \in C^\infty(M, L)\ ,\ s \in C_c^\infty(M, L^* \otimes |TM|) \to \int \langle s, \sigma \rangle \tag{5}$$

où $\langle s, \sigma \rangle$ est vu comme une densité, $\langle s, \sigma \rangle \in C_c^\infty(M, |TM|)$.

On a la notion similaire de section généralisée sur les supports compacts.

Etant donnée une application lisse $\varphi : X \to Y$, alors si φ est *propre*, elle a une application (contravariante) associée :

$$\varphi^* : C_c^\infty(Y, L) \to C_c^\infty(X, \varphi^*(L))\ ,\ (\varphi^*\, \xi)(x) = \xi(\varphi(x)) \tag{6}$$

où $\varphi^*(L)$ est le pullback du fibré vectoriel L.

Ainsi, étant donnée une forme linéaire sur $C_c^\infty(X, \varphi^*(L))$, on a une forme linéaire (covariante) associée sur $C_c^\infty(Y, L)$. En particulier, avec L trivial, on voit que si on a une densité généralisée $\rho \in C^{-\infty}(X, |T|)$, on a un pushforward

$$\varphi_*(\rho) \in C^{-\infty}(Y, |T|) \tag{7}$$

avec $\langle \varphi_*(\rho), \xi \rangle = \langle \rho, \varphi^*\, \xi \rangle \qquad \forall\, \xi \in C_c^\infty(X)$.

Ensuite, si φ est une fibration et $\rho \in C_c^\infty(X, |T|)$ est une densité, alors, on peut intégrer ρ le long des fibres ; la densité obtenue sur Y, $\varphi_*(\rho)$ est donnée comme dans (7) par

$$\langle \varphi_*(\rho), f \rangle = \langle \rho, \varphi^*\, f \rangle \qquad \forall\, f \in C^\infty(Y) \tag{8}$$

mais l'important est que ce n'est pas seulement une section généralisée mais également une section lisse $\varphi_*(\rho) \in C_c^\infty(Y, |T|)$.

Il suit de cela que si $f \in C^{-\infty}(Y)$ est une fonction généralisée, alors on obtient une fonction généralisée $\varphi^*(f)$ sur X par,

$$(9) \qquad \langle \varphi^*(f), \rho \rangle = \langle f, \varphi_*(\rho) \rangle \qquad \forall\, \rho \in C_c^\infty(X, |T|)\,.$$

En général, le pullback $\varphi^*(f)$ continue d'avoir du sens tant que la condition de transversalité tient,

$$(10) \qquad d(\varphi^*(l)) \neq 0 \quad \forall l \in WF(f)\,.$$

où $WF(f)$ est l'ensemble des fronts d'onde de f ([GS]). Le point suivant est la construction de la section généralisée d'un fibré vectoriel L sur une variété X associée à une sous-variété $Z \subset X$ et un symbole,

$$(11) \qquad \sigma \in C^\infty(Z, L \otimes |N_Z^*|)\,.$$

où N_Z est le fibré normal de Z. La construction est la même que celle de l'intégration habituelle sur un cycle. Etant donné $\xi \in C_c^\infty(X, L^* \otimes |T|)$, le produit $\sigma\,\xi/Z$ est une densité sur Z, puisque c'est une section de $|T_Z| = |T_X| \otimes |N_Z^*|$. On peut alors l'intégrer sur Z. Quand $Z = X$, on a $N_Z^* = \{0\}$ et $|N_Z^*|$ a une section canonique, de telle manière que le courant associé à σ est juste donné par (5). Quand $Z = \mathrm{pt}$ est un point singulier $x \in X$, une section généralisée de L donnée par une distribution de Dirac en x nécessite non seulement un vecteur $\xi_x \in L_x$ mais également une densité duale, i.e. un volume multi-vectoriel $v \in |T_x^*|$.

Maintenant, soit $\varphi : X \to Y$ avec Z une sous-variété de Y et σ comme dans (11).

Assumons que φ est transverse à Z, de telle sorte que pour tout $x \in X$ avec $y = \varphi(x) \in Z$, on ait

$$(12) \qquad \varphi_*(T_x) + T_{\varphi(x)}(Z) = T_y\, Y\,.$$

Soit

$$(13) \qquad \tau_x = \{X \in T_x\ ,\ \varphi_*(X) \in T_y(Z)\}\,.$$

Alors, φ_* est un isomorphisme canonique,

$$(14) \qquad \varphi_* : T_x(X)/\tau_x \simeq T_y(Y)/T_y(Z) = N_y(Z)\,.$$

Et $\varphi^{-1}(Z)$ est une sous-variété de X de la même codimension que Z avec un isomorphisme naturel de fibrés normaux

$$(15) \qquad N_{\varphi^{-1}(Z)} \simeq \varphi^*\, N_Z\,.$$

En particulier, si est donnée une δ-section généralisée d'un fibré L à support Z et un symbole $\sigma \in C^\infty(Z, L \otimes |N_Z^*|)$, on a le symbole correspondant sur $\varphi^{-1}(Z)$ qui est donné par

$$(16) \qquad \varphi^*\,\sigma(x) = \sigma(\varphi(x)) \in (\varphi^*\, L)_x \otimes |N_x^*|$$

en utilisant l'isomorphisme (15) i.e. $N_x^* \simeq N_{\varphi(x)}^*$.

Maintenant, pour toute δ-section associée à Z, σ, l'ensemble des fronts d'onde est contenu dans le fibré conormal de la sous-variété Z, ce qui montre que si φ est transverse à Z, le pullback $\varphi^*\,\delta_{Z,\sigma}$

de la distribution sur Y associée à Z, σ fait sens, il est égal à $\delta_{\varphi^{-1}(Z),\varphi^*(\sigma)}$.

Formulons alors maintenant le théorème du noyau de Schwartz. On considère une application linéaire continue,

$$T : C_c^\infty(Y) \to C^{-\infty}(X)\,, \tag{17}$$

l'énoncé du théorème peut s'écrire

$$(T\,\xi)\,(x) = \int k(x,y)\,\xi(y)\,dy \tag{18}$$

où $k(x,y)\,dy$ est une section généralisée,

$$k \in C^{-\infty}(X \times Y\ ,\ \mathrm{pr}_Y^*(|T|))\,. \tag{19}$$

Soit $f : X \to Y$ une application lisse, et $T = f^*$ l'opérateur

$$(T\,\xi)\,(x) = \xi\,(f(x)) \qquad \forall\,\xi \in C_c^\infty(Y)\,. \tag{20}$$

Montrons que le k correspondant est la δ-section associée à la sous-variété de $X \times Y$ donnée par

$$\mathrm{Graphe}(f) = \{(x, f(x))\ ;\ x \in X\} = Z \tag{21}$$

et identifions son symbole, $\sigma \in C^\infty(Z, \mathrm{pr}_Y^*(|T|) \otimes |N_Z^*|)$.

Etant donné $\xi \in T_x^*(X)$, $\eta \in T_y^*(Y)$, on a $(\xi, \eta) \in N_Z^*$ ssi il est orthogonal à $(v, f_*\,v)$ pour tout $v \in T_x(X)$, i.e. $\langle v, \xi\rangle + \langle f_*\,v, \eta\rangle = 0$ de telle façon que

$$\xi = -f_*^t\,\eta\,. \tag{22}$$

Ainsi, on a un isomorphisme canonique $j : T_y^*(Y) \simeq N_Z^*$, $\eta \xrightarrow{j} (-f_*^t\,\eta, \eta)$. La transposée $(j^{-1})^t$ est donnée par $(j^{-1})^t(Y) =$ classe de $(0, Y)$ dans N_Z, $\forall\, Y \in T_y(Y)$. Ainsi, on a le choix canonique pour le symbole σ,

$$\sigma = |j^{-1}| \in C^\infty(Z, \mathrm{pr}_Y^*(|T|) \otimes |N_Z^*|)\,. \tag{23}$$

On note la δ-distribution correspondante par

$$k(x,y)\,dy = \delta(y - f(x))\,dy\,. \tag{24}$$

On vérifie alors la formule,

$$\int \delta(y - f(x))\,\xi(y)\,dy = \xi(f(x)) \qquad \forall\,\xi \in C_c^\infty(Y)\,. \tag{25}$$

Considérons maintenant une variété M avec un flot F_t

$$F_t(x) = \exp(t\,v)\,x \qquad v \in C^\infty(M, T_M) \tag{26}$$

et l'application correspondante f,

$$(27) \qquad f : M \times \mathbb{R} \to M \ , \ f(x,t) = F_t(x) \, .$$

On applique les éléments ci-dessus avec $X = M \times \mathbb{R}$, $Y = M$. Le graphe de f est la sous-variété Z de $X \times Y$,

$$(28) \qquad Z = \{(x,t,y) \ ; \ y = F_t(x)\} \, .$$

Si φ est l'application diagonale,

$$(29) \qquad \varphi(x,t) = (x,t,x) \ , \ \varphi : M \times \mathbb{R} \to X \times Y$$

et le premier résultat est la transversalité $\quad \varphi \pitchfork Z$.

Nous avons alors besoin de considérer (12) pour chaque (x,t) tel que $\varphi(x,t) \in Z$, i.e. tel que $x = F_t(x)$. On regarde l'image par φ_* de l'espace tangent $T_x\, M \times \mathbb{R}$ sur $M \times \mathbb{R}$ en (x,t). On prend ∂_t le champ de vecteurs naturel sur $\mathbb{R}$. L'image de $(X, \lambda\, \partial_t)$ est $(X, \lambda\, \partial_t, X)$ pour $X \in T_x\, M, \lambda \in \mathbb{R}$. En divisant l'espace tangentiel de $M \times \mathbb{R} \times M$ par l'image de φ_*, on obtient un isomorphisme,

$$(30) \qquad (X, \lambda\, \partial_t, Y) \to Y - X$$

avec $T_x\, M$. L'espace tangent à Z est $\{(X', \mu\, \partial_t, (F_t)_*\, X' + \mu\, v_{F_t(x)}); \ X' \in T_x\, M, \mu \in \mathbb{R}\}$. Ainsi, la condition de transversalité signifie que tout élément de $T_x\, M$ est de la forme

$$(31) \qquad (F_t)_*\, X - X + \mu\, v_x \qquad X \in T_x\, M \ , \ \mu \in \mathbb{R} \, .$$

On a

$$(32) \qquad (F_t)_*\, \mu\, v_x = \mu\, v_x$$

de telle manière que $(F_t)_*$ définit une application quotient, l'application inverse de Poincaré

$$(33) \qquad P : T_x/\mathbb{R}\, v_x \to T_x/\mathbb{R}\, v_x = N_x$$

et la condition de transversalité (31) signifient exactement,

$$(34) \qquad 1 - P \qquad \text{est inversible.}$$

Faisons cette hypothèse et calculons le symbole σ de la distribution,

$$(35) \qquad \tau = \varphi^*(\delta(y - F_t(x))\, dy) \, .$$

D'abord, comme ci-dessus, posons $W = \varphi^{-1}(Z) = \{(x,t) \ ; \ F_t(x) = x\}$. La codimension de $\varphi^{-1}(Z)$ dans $M \times \mathbb{R}$ est la même que la codimension de Z dans $M \times \mathbb{R} \times M$, et elle est donc égale à $\dim M$, ce qui montre que $\varphi^{-1}(Z)$ est de dimension 1. Si $(x,t) \in \varphi^{-1}(Z)$ alors $(F_s(x), t) \in \varphi^{-1}(Z)$. Ainsi, si l'on suppose que v ne s'évanouit pas en x, l'application,

$$(36) \qquad (x,t) \xrightarrow{q} t$$

est localement constante sur la composante connexe de $\varphi^{-1}(Z)$ qui contient (x,t).

Cela autorise à identifier l'espace transverse à $W = \varphi^{-1}(Z)$ comme le produit

$$N^W_{x,t} \simeq N_x \times \mathbb{R} \tag{37}$$

dans lequel à $(X, \lambda\, \partial_t) \in T_{x,t}(M \times \mathbb{R})$, on associe la paire $(\widetilde{X}, \lambda)$ donnée par la classe de X dans $N_x = T_x/\mathbb{R}\, v_x$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Le symbole σ de la distribution (35) est une section lisse de $|N^{W*}|$ tensorisée par le pullback $\varphi^*(L)$ où $L = \mathrm{pr}_Y^*\, |T_M|$, et on a

$$\varphi^*(L) \simeq |p^*\, T_M| \tag{38}$$

où

$$p(x,t) = x \qquad \forall\, (x,t) \in M \times \mathbb{R}\,. \tag{39}$$

Pour calculer σ, on a besoin de l'isomorphisme,

$$N^W_{(x,t)} \overset{\varphi_*}{\to} T_{\varphi(x,t)}(M \times \mathbb{R} \times M)/T_{\varphi(x,t)}(Z) = N^Z\,. \tag{40}$$

L'application $\varphi_* : N^W_{x,t} \to N^Z$ est donnée par

$$\varphi_*(X, \lambda\, \partial_t) = (1 - (F_t)_*)\, X - \lambda\, v \qquad X \in N_x\ ,\ \lambda \in \mathbb{R} \tag{41}$$

et le symbole σ est juste

$$\sigma = |\varphi_*^{-1}| \in |p^*\, T_M| \otimes |N^{W*}|\,. \tag{42}$$

Cela fait sens puisque $\varphi_*^{-1} : p^*\, T_M \to N^W$.

Considérons maintenant la seconde projection,

$$q(x,t) = t \in \mathbb{R} \tag{43}$$

et calculons le pushforward $q_*(\tau)$ de la distribution τ.

Par construction, $\delta(y - F_t(x))\, dy$ est une section généralisée de $\mathrm{pr}_Y^*\, |T|$, de telle façon que τ est une section généralisée de $p^*\, |T| = \varphi^*\, \mathrm{pr}_Y^*\, |T|$.

Ainsi, $q_*(\tau)$ est une fonction généralisée.

On regarde d'abord la contribution d'une orbite périodique, la partie correspondante de $\varphi^{-1}(Z)$ est de la forme,

$$\varphi^{-1}(Z) = V \times \Gamma \subset M \times \mathbb{R} \tag{44}$$

où Γ est un sous-groupe discret cocompact de $\mathbb{R}$, tandis que $V \subset M$ est une sous-variété compacte de M de dimension 1.

Pour calculer $q_*(\tau)$, on définit $h(t)\,|dt|$ comme une 1-densité sur $\mathbb{R}$ et on la pullback par q comme la section sur $M \times \mathbb{R}$ du fibré $q^*\,|T|$,

$$\xi(x,t) = h(t)\,|dt|\,. \tag{45}$$

On a alors besoin de calculer $\int_{\varphi-1(Z)} \xi\,\sigma$. On peut regarder la contribution de chaque composant : $V \times \{T\}$, $T \in \Gamma$.

On obtient

$$T^{\#}\,\frac{1}{|1-P_T|}\;h(T)\,. \tag{46}$$

où $T^{\#}$ est la longueur de l'orbite primitive, ou, de manière équivalente, le covolume de Γ dans $\mathbb{R}$ pour la mesure de Haar $|dt|$. On peut alors écrire les contributions des orbites périodiques comme

$$\sum_{\gamma_p}\sum_{\Gamma} \mathrm{Covol}(\Gamma)\,\frac{1}{|1-P_T|}\;h(T)\,. \tag{47}$$

où la fonction test h s'évanouit en 0.

Le prochain cas à considérer est celui où le champ de vecteurs v_x a un zéro isolé 0, $v_{x_0} = 0$. Dans ce cas, la condition de transversalité (31) devient

$$1-(F_t)_* \quad \text{inversible (en } x_0)\,. \tag{48}$$

On a $F_t(x_0) = x_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et maintenant, le composant pertinent de $\varphi^{-1}(Z)$ est $\{x_0\} \times \mathbb{R}$. L'espace transverse N^W est identifié à T_x et l'application $\varphi_* : N^W \simeq N^Z$ est donnée par :

$$\varphi_* = 1-(F_t)_*\,. \tag{49}$$

Ainsi, le symbole σ est la fonction scalaire $|1-(F_t)_*|^{-1}$. La section généralisée $q_*\,\varphi^*(\delta(y-F_t(x))\,dy)$ est la fonction, $t \to |1-(F_t)_*|^{-1}$. Nous pouvons alors écrire la contribution des zéros du flot comme,

$$\sum_{\textit{zéros}} \int \frac{h(t)}{|1-(F_t)_*|}\;dt \tag{50}$$

où h est une fonction test s'évanouissant en 0.

Nous pouvons alors rassembler les contributions (47) et (50) en

$$\sum_{\gamma} \int_{I_\gamma} \frac{h(u)}{|1-(F_u)_*|}\;d^*u \tag{51}$$

où h est comme ci-dessus, I_γ est le groupe d'isotropie de l'orbite périodique γ, la mesure de Haar d^*u sur I_γ est normalisée de telle façon que le covolume I_γ soit égal à 1 et nous remplaçons à nouveau $(F_u)_*$ par sa restriction à l'espace transverse γ.

Bibliographie

[AB] M.F. Atiyah et R. Bott, A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes: I, *Annals of Math,* **86** (1967), 374-407.

[B] M. Berry, Riemann's zeta function: a model of quantum chaos, *Lecture Notes in Physics,* **263**, Springer (1986).

[Bg] A. Beurling, A closure problem related to the Riemann zeta function, *Proc. Nat. Ac. Sci.* **41** (1955), 312-314.

[B-C] J.-B. Bost et A. Connes, Hecke Algebras, Type III factors and phase transitions with spontaneous symmetry breaking in number theory, *Selecta Mathematica, New Series* **1**, No.3 (1995), 411-457.

[BG] O. Bohigas et M. Giannoni, Chaotic motion and random matrix theories, *Lecture Notes in Physics,* **209** (1984), 1-99.

[BK] M. Berry et J. Keating, $H = qp$ and the Riemann zeros, 'Supersymmetry and Trace Formulae: Chaos and Disorder', edited by J.P. Keating, D.E. Khmelnitskii and I.V. Lerner (Plenum Press).

[Br] F. Bruhat, Distributions sur un groupe localement compact et applications á l'étude des représentations des groupes p-adiques.*Bull. Soc. Math. france.* **89** *(1961), 43-75.*

[C] A. Connes, Noncommutative Geometry, Academic Press (1994).

[Co] A. Connes, Formule de trace en Géométrie non commutative et hypothèse de Riemann, *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B* (1996)

[D] C. Deninger, Local L-factors of motives and regularised determinants, *Invent. Math.,* **107** (1992), 135-150.

[G] D. Goldfeld, A spectral interpretation of Weil's explicit formula, *Lecture Notes in Math.,* **1593**, Springer Verlag (1994), 135-152.

[GS] V. Guillemin et S. Sternberg, Geometric asymptotics, *Math. Surveys*, **14**, *Amer. Math. Soc., Providence, R.I.* (1977)

[Gu] V. Guillemin, Lectures on spectral theory of elliptic operators, *Duke Math. J.,* **44**, No.3 (1977), 485-517.

[H] S. Haran, Riesz potentials and explicit sums in arithmetic, *Invent. Math.,* **101** (1990), 697-703.

[J] B. Julia, Statistical theory of numbers, *Number Theory and Physics, Springer Proceedings in Physics,* **47** (1990).

[K] M. Kac, Statistical Independence in Probability, *Analysis and Number Theory, Carus Math. Monographs* **18** (1959).

[KS] N. Katz et P. Sarnak, Random matrices, Frobenius eigenvalues and Monodromy, (1996) , Book, to appear.

[KS] N. Katz et P. Sarnak, Zeros of zeta functions, their spacings and spectral nature, (1997), to appear.

[LPS1] D. Slepian et H. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty I, *Bell Syst. Tech. J.* **40** (1961).

[LPS2] H.J. Landau et H. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty II, *Bell Syst. Tech. J.* **40** (1961).

[LPS3] H.J. Landau et H. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty III, *Bell Syst. Tech. J.* **41** (1962).

[M] H. Montgomery, The pair correlation of zeros of the zeta function, *Analytic Number Theory,* AMS (1973).

[Me] M.L. Mehta, Random matrices, Academic Press,(1991).

[O] A. Odlyzko, On the distribution of spacings between zeros of zeta functions, *Math. Comp.* **48** (1987), 273-308.

[P] G. Pólya, Collected Papers, Cambridge, M.I.T. Press (1974).

[Pat] S. Patterson, An introduction to the theory of the Riemann zeta function, *Cambridge Studies in advanced mathematics*, **14** Cambridge University Press (1988).

[R] B. Riemann, Mathematical Werke, Dover, New York (1953).

[S] E.Seiler, Gauge Theories as a problem of constructive Quantum Field Theory and Statistical Mechanics, Lecture Notes in Physics **159** Springer (1982).

[Se] A.Selberg, *Collected papers*, Springer (1989).

[W1] A. Weil, Basic Number Theory, Springer, New York (1974).

[W2] A. Weil, Fonctions zêta et distributions, *Séminaire Bourbaki*, **312**, (1966).

[W3] A. Weil, Sur les formules explicites de la théorie des nombres, *Izv. Mat. Nauk.,* (Ser. Mat.) **36**, 3-18.

[W4] A. Weil, Sur la théorie du corps de classes,*J. Math. Soc. Japan*, **3**, (1951).

[W5] A. Weil, Sur certains groupes d'operateurs unitaires,*Acta Math.* , **111**, (1964).

[Z] D. Zagier, Eisenstein series and the Riemannian zeta function, *Automorphic Forms, Representation Theory and Arithmetic,* Tata, Bombay (1979), 275-301.

Algèbres de Hecke, facteurs de type III et transitions de phase[1] avec brisure spontanée de symétrie en théorie des nombres[2]

Jean-Benoît BOST - Alain CONNES

Résumé Dans cet article, nous construisons un système C^*-dynamique naturel, dont la fonction de partition est la fonction ζ de Riemann. Notre construction est générale et associe à une inclusion d'anneaux (sous une condition adéquate de finitude) une inclusion de groupes discrets (les groupes $ax+b$ associés) et les algèbres de Hecke correspondantes de fonctions bi-invariantes. Cette algèbre est munie d'un groupe canonique à un paramètre d'automorphismes qui mesure le manque de normalité du sous-groupe. L'inclusion d'anneaux $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ fournit le système C^*-dynamique souhaité, qui admet la fonction ζ comme fonction de partition et le groupe de Galois $Gal(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbb{Q})$ de l'extension cyclotomique $\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}$ de $\mathbb{Q}$ comme groupe de symétrie. En outre, ce système présente une transition de phase avec brisure spontanée de symétrie à température inverse $\beta = 1$ (cf. [Bos-C]). La motivation initiale de ces résultats vient des travaux de B. Julia [J] (cf. also [Spe]).

1 Description du système et de sa transition de phase

Rappelons d'abord les notions générales de mécanique quantique statistique et des transitions de phase. Un système statistique quantique consiste en :
(α) une C^*-algèbre d'observables : A ;
(β) une évolution dans le temps $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$, qui est un groupe à un paramètre d'automorphismes de A.
Un état d'équilibre, ou état KMS$_\beta$, à température inverse β sur (A, σ_t) est un état φ sur A qui satisfait la condition KMS$_\beta$ condition relativement à σ_t, c'est-à-dire tel que pour tous $x, y \in A$, il existe une fonction bornée holomorphe (continue sur la bande fermée), $F_{x,y}(z), 0 \leq Imz \leq \beta$ telle que

$$F_{x,y}(t) = \varphi(x\sigma_t(y)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
$$F_{x,y}(t+i\beta) = \varphi(\sigma_t(y)x) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dans le cas le plus simple où $A = M_N(\mathbb{C})$ est l'algèbre des matrices $N \times N$, tout groupe à un paramètre d'automorphismes $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de A est de la forme

$$\sigma_t(x) = e^{itH} x e^{-itH} \qquad \forall x \in A, t \in \mathbb{R}$$

pour un élément auto-adjoint $H = H^* \in A$. Alors pour tout $\beta \in [0, \infty[$, on a un unique état KMS$_\beta$ pour σ_t, et il est donné par

$$\varphi_\beta(x) = \frac{\mathrm{Trace}\left(e^{-\beta H} x\right)}{\mathrm{Trace}\left(e^{-\beta H}\right)} \qquad \forall x \in A.$$

Noter ici que la normalisation additive de H peut être fixée en imposant que $H \geq 0$ et $0 \in \mathrm{Sp}H$. Alors le facteur de normalisation Trace($\mathrm{e}^{-\beta \mathrm{H}}$) est appelé la fonction de partition de (A,σ_t). La formule suivante est vérifiée :

$$\mathrm{Log\ Trace}\left(e^{-\beta H}\right) = \sup_\varphi (S(\varphi) - \beta\varphi(H))$$

[1] J'ai traduit ce texte et cette traduction comporte sûrement des erreurs qui n'engagent que moi.
[2] Selecta Mathematica, New Serie, Vol.1, No.3 (1995), 1995, Birkhäuser Verlag, Basel.

où φ varie sur tous les états de A et $S(\varphi)$ est l'entropie de l'état

$$S(\varphi) = -\mathrm{Trace}(\rho \mathrm{Log} \rho) \qquad \text{pour} \qquad \varphi = \mathrm{Trace}(\rho).$$

Plus généralement, si (A, σ_t) est un système C^*-dynamique quelconque et si φ est un état KMS_β tel que la fermeture faible de A est un facteur de type I, alors les conditions ci-dessus s'appliquent et l'énergie libre $S(\varphi) - \beta\varphi(H)$ est bien définie.

Dans une situation un peu plus contrainte que celle où $A = M_N(\mathbb{C})$, notamment pour les *systèmes sans interaction*, il est encore vrai que pour n'importe quel $\beta \in [0, \infty[$, il existe un unique état KMS_β. Plus précisément, on a comme conséquence immédiate la :

Proposition 1. *Soit $A = \otimes_{\nu \in I} A_\nu$, un produit tensoriel infini d'algèbres de matrices $A_\nu = M_{n_\nu}(\mathbb{C})$, et $\sigma_t = \otimes_{\nu \in I} \sigma_t^\nu$ un produit d'évolutions temporelles. Alors pour tout $\beta \geq 0$, il existe un unique état KMS_β φ_β pour (A, σ_t), et on a $\varphi_\beta = \otimes_\nu \varphi_{\beta,\nu}$, où $\varphi_{\beta,\nu}$ est l'unique état KMS_β pour (A_ν, σ_t^ν).*

Pour les systèmes intéressants *avec interaction*, on s'attend en général à ce que pour les *hautes* températures, i.e. pour les β petits, le désordre prédominera de telle façon qu'il existera seulement un état KMS_β. Pour les températures suffisamment faibles, un certain ordre devrait apparaître qui autorisera l'existence de phases thermodynamiques variées, i.e., d'états KMS_β variés. C'est un fait important très général de la formulation C^*-algébrique de la mécanique quantique statistique qui fait que, pour un certain β donné, tout état KMS_β se décompose *de manière unique* comme une superposition d'états KMS_β *extrêmes* :

Proposition 2. ([Br-R] [H]) *Soit (A, σ_t) un système C^*-dynamique et $\beta \in [0, \infty[$. Alors l'espace des états KMS_β est un simplexe convexe compact de Choquet. Les points extrêmes sont les facteurs d'états KMS_β et, quand ils sont de type I, ils cèdent une énergie libre bien définie.*

Pour un exposé détaillé du lien entre les états KMS_β extrêmes et les phases thermodynamiques, nous renvoyons le lecteur à [H].

Comme exemple simple illustrant la coexistence des phases aux températures basses, on peut penser au diagramme des phases de l'eau et de la vapeur ou mieux aux matériaux ferromagnétiques. Dans ce dernier exemple, quand la température T est supérieure à la température *critique* T_c, de l'ordre de $10^3 K$, le désordre domine, alors que pour $T < T_c$, les moments des spins individuels ont tendance à s'aligner les uns avec les autres, ce qui dans le cas classique à 3 dimensions amène un ensemble de phases thermodynamiques homogènes paramétré par la sphère en 2 dimensions des directions dans l'espace à 3 dimensions.

Cet exemple sert à illustrer le phénomène de *brisure spontanée de symétrie* : le groupe $SO(3)$ des rotations dans $\mathbb{R}^3$ est le groupe de symétrie du système dynamique avec lequel on commence et, pour les grandes valeurs de $T, T > T_c$, l'état d'équilibre est unique et par conséquent invariant par rotation. Pour les petites valeurs de T cependant, $T < T_c$, le groupe $SO(3)$ agit de façon non triviale sur l'ensemble des phases thermodynamiques et le choix d'un état d'équilibre brise la symétrie.

La formulation C^*-algébrique de cela est évidente. On a un groupe (compact) G d'automorphismes de la C^*-algèbre A qui commute avec l'évolution temporelle

$$\alpha_g \in \mathrm{Aut} A, \qquad \forall g \in G, \qquad \alpha_g \sigma_t = \sigma_t \alpha_g \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Un tel groupe agit de façon évidente sur l'espace compact convexe des états KMS_β et par conséquent sur ses points extrêmes.

Nous allons maintenant décrire (la motivation précise sera expliquée ci-dessous) un système C^*-dynamique intimement relié à la distribution des nombres premiers et exhibant le comportement ci-dessus de brisure spontanée de symétrie.

La C^*-algèbre A est une *algèbre de Hecke*, qui contient l'algèbre des opérateurs de Hecke usuels de la théorie des nombres, i.e., ceux qui sont reliés aux correspondances de Hecke pour les treillis dans $\mathbb{C}$ ([Sh], [Ser$_1$]). Cette dernière algèbre est commutative et c'est l'algèbre de composition des classes doubles

$$\gamma \in GL(2,\mathbb{Z}) \backslash GL(2,\mathbb{Q}) / GL(2,\mathbb{Z}).$$

Plus généralement, étant donné un groupe discret Γ et un sous-groupe Γ_0 qui est *presque normal*, c'est-à-dire qui satisfait la condition que

"les orbites de Γ_0 agissant à gauche sur Γ/Γ_0 sont *finies*",

on définit l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\Gamma,\Gamma_0)$ comme l'algèbre de convolution de fonctions ($\mathbb{C}$-valuées pour notre objectif) à support fini sur $\Gamma_0 \backslash \Gamma / \Gamma_0$. Plus spécifiquement, étant données 2 telles fonctions $f, f' \in \mathcal{H}(\Gamma,\Gamma_0)$, leur convolution est

$$(f * f')(\gamma) = \sum_{\gamma_1 \in \Gamma_0 \backslash \Gamma} f(\gamma \gamma_1^{-1}) f'(\gamma_1) \qquad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Dans cette formule, f et f' sont vues comme des fonctions Γ_0-bi-invariantes sur Γ et à support fini dans $\Gamma_0 \backslash \Gamma / \Gamma_0$.

Pour compléter $\mathcal{H}$ en une C^*-algèbre, on la ferme en norme dans la *représentation régulière* de $\mathcal{H}$ dans $\ell^2(\Gamma_0 \backslash \Gamma)$ (cf. [Bi]) :

Proposition 3. Soit $\Gamma_0 \subset \Gamma$ un sous-groupe presque normal du groupe discret Γ. Alors la formule suivante définit une représentation (involutive) λ de $\mathcal{H}(\Gamma,\Gamma_0)$ dans $\ell^2(\Gamma_0 \backslash \Gamma)$:

$$(\lambda(f)\xi)(\gamma) = \sum_{\Gamma_0 \backslash \Gamma} f(\gamma \gamma_1^{-1}) \xi(\gamma_1) \qquad \forall \gamma \in \Gamma_0 \backslash \Gamma, \qquad \forall f \in \mathcal{H}.$$

On vérifie que $\lambda(f)$ est bornée pour tout $f \in \mathcal{H}(\Gamma,\Gamma_0)$. L'involution sur $\mathcal{H}$ telle que

$$\lambda(f^*) = \lambda(f)^* \qquad \forall f \in \mathcal{H}$$

est donnée par l'égalité suivante :

$$f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})} \qquad \forall \gamma \in \Gamma_0 \backslash \Gamma / \Gamma_0.$$

Alors, prenons A la C^*-algèbre fermée en norme de $\mathcal{H}(\Gamma,\Gamma_0)$ dans $\ell^2(\Gamma_0\backslash\Gamma)$. Une bonne notation pour cette algèbre, compatible avec le cas des groupes discrets est

$$\overline{\mathcal{H}}(\Gamma,\Gamma_0) = C_r^*(\Gamma,\Gamma_0).$$

Définissons maintenant le groupe à un paramètre d'automorphismes $\sigma_t \in \mathrm{AutA}$. Nous avons d'abord besoin d'introduire les notations. Puisque toute Γ_0 orbite sur Γ/Γ_0 est finie, nous noterons, pour $\gamma \in \Gamma$

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \text{cardinalité de l'image de } \Gamma_0\gamma\Gamma_0 \textit{ dans } \Gamma/\Gamma_0 \\ R(\gamma) &= \text{cardinalité de l'image de } \Gamma_0\gamma\Gamma_0 \textit{ dans } \Gamma_0\backslash\Gamma. \end{aligned}$$

Alors, par construction, $L(\gamma) \in \mathbb{N}^*$, $R(\gamma) \in \mathbb{N}^*$, $R(\gamma) = L(\gamma^{-1})$, L et R sont toutes deux des fonctions Γ_0-bi-invariantes.

Proposition 4. Soit $\Gamma_0 \subset \Gamma$ un sous-groupe presque normal du groupe discret Γ.
Il existe un seul groupe à un paramètre d'automorphismes $\sigma_t \in \mathrm{Aut}(\mathrm{C}^*_\mathrm{r}(\Gamma,\Gamma_0))$ tel que

$$(\sigma_t(f))(\gamma) = \left(\frac{L(\gamma)}{R(\gamma)}\right)^{-it} f(\gamma) \qquad \forall \gamma \in \Gamma_0\backslash\Gamma/\Gamma_0$$

En fait, comme nous le verrons plus tard, σ_{-t} est la réduction du groupe modulaire d'automorphismes σ_t^φ pour l'état sur $M = \lambda(\mathcal{H})''$ donnés par le vecteur unité correspondant à la classe $\Gamma_0 \in \Gamma_0\backslash\Gamma$.
Considérons maintenant l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ pour les groupes :

$$\Gamma = P_{\mathbb{Q}}^+, \qquad \Gamma_0 = P_{\mathbb{Z}}^+$$

où P est le groupe des matrices 2×2 défini par $P = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}; aa^{-1} = a^{-1}a = 1 \right\}$ et où le $+$ indique que nous nous restreignons aux cas pour lesquels $a > 0$. On vérifie que $P_{\mathbb{Z}}^+$ est presque normal dans $P_{\mathbb{Q}}^+$ (cf. Lemme 13).
Nous allons maintenant décrire la transition de phase avec brisure spontanée de symétrie pour le système dynamique correspondant à $\Gamma = P_{\mathbb{Q}}^+, \Gamma_0 = P_{\mathbb{Z}}^+$. Notons par ψ_β la fonction suivante sur le groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Etant donné $n = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$, avec a premier à $b > 0$, soit

$$b = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{k_p}$$

la décomposition en facteurs premiers de b et posons

$$\psi_\beta(n) = \prod_{p\in\mathcal{P}, k_p\neq 0} p^{-k_p\beta}(1-p^{\beta-1})(1-p^{-1})^{-1}.$$

L'inclusion du sous-groupe unipotent

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; n \in \mathbb{Q} \right\} \subset P_{\mathbb{Q}}^+$$

definit un plongement $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \subset \Gamma_0\backslash\Gamma/\Gamma_0$ et des morphismes injectifs d'algèbres involutives

$$\mathbb{C}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}] \subset \mathcal{H}(\Gamma,\Gamma_0)$$

et

$$C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset C_r^*(\Gamma,\Gamma_0).$$

Le résultat principal de cet article est le

THÉORÈME 5. *Soit (A, σ_t) le système C^*-dynamique associé au sous-groupe presque normal $P_{\mathbb{Z}}^+$ de $P_{\mathbb{Q}}^+$. Alors*

(a) Pour $0 < \beta \leq 1$, il existe un unique état KMS$_\beta$ φ_β sur (A, σ_t). Sa restriction à $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset C_r^*(\Gamma, \Gamma_0)$ est donnée par la fonction ci-dessus de type positif ψ_β sur $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Chaque φ_β est un facteur d'états et le facteur associé est le facteur hyperfini de type III$_1$, R_∞.

(b) Pour $\beta > 1$ les états KMS$_\beta$ sur (A, σ_t) forment un simplexe dont les points extrêmes $\varphi_{\beta,\chi}$ sont paramétrés par les plongements complexes $\chi : \mathbb{Q}^{\text{cycl}} \to \mathbb{C}$ du sous-corps $\mathbb{Q}^{\text{cycl}}$ de $\mathbb{C}$ engendré par les racines de l'unité et dont les restrictions à $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ sont données par la formule suivante :

$$\varphi_{\beta,\chi}(\gamma) = \zeta(\beta)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} \chi(\gamma)^n$$

Ces états sont des facteurs d'états de type I$_\infty$.

(c) La fonction de partition est la fonction zêta de Riemann.

Le facteur de normalisation est l'inverse de la fonction ζ de Riemann évaluée en β. En d'autres termes, la température critique est ici $T_c = 1$ et à basse température ($\beta > 1$), les phases du système sont paramétrées par tous les plongements possibles de $K = \mathbb{Q}^{\text{cycl}}$ dans le corps des nombres complexes.

Comme nous le verrons ci-dessous, le groupe de Galois $G = Gal(\mathbb{Q}^{\text{cycl}}/\mathbb{Q})$ agit naturellement comme un groupe d'automorphismes de $C_r^*(\Gamma, \Gamma_0)$ qui commute avec l'évolution temporelle $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$, et la brisure spontanée de symétrie a lieu pour $\beta > 1$.

Avant que nous ne commencions la démonstration du théorème 5, nous allons expliquer comment le système C^*-dynamique ci-dessus est relié à la distribution des nombres premiers.

2 Seconde quantification des bosons et nombres premiers comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$

E. Nelson a dit que la première quantification est un mystère tandis que la seconde est un *foncteur*. Dans le cas des bosons, ce foncteur $\mathbf{S}$, de la catégorie des espaces de Hilbert vers elle-même, assigne à chaque espace de Hilbert $\mathcal{H}$ un nouvel espace de Hilbert $\mathbf{S}\mathcal{H}$ donné par

$$\mathbf{S}\mathcal{H} = \oplus_{n=0}^{\infty} S^n \mathcal{H}$$

où $S^n\mathcal{H}$ est la $n-$ième puissance symétrique de $\mathcal{H}$ munie du produit intérieur suivant :

$$\langle \xi_1 \dots \xi_n, \eta_1 \dots \eta_n \rangle = \sum_{\sigma} \prod_1^n \langle \xi_i, \eta_{\sigma(i)} \rangle \qquad \forall \xi_j, \eta_j \in \mathcal{H}$$

(voir par exemple [G]). Etant donné un opérateur T dans $\mathcal{H}$ (plus généralement $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$), l'opérateur $\mathbf{S}T$ dans $\mathbf{S}\mathcal{H}$ est donné par

$$(\mathbf{S}T)(\xi_1 \dots \xi_n) = (T\xi_1)(T\xi_2) \dots (T\xi_n) \qquad \forall \xi_i \in \mathcal{H}.$$

Même si T est borné, $\mathbf{S}T$ n'est pas borné en général mais si T est auto-adjoint (non-borné), il en est de même de $\mathbf{S}T$. Aussi, nous travaillerons avec de tels opérateurs. On a la formule suivante :

$$\mathrm{Trace}(\mathbf{S}T) = \frac{1}{\det(1-T)} \qquad (*)$$

qui fait sens si $\|T\| < 1$ et $T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$.

Le problème que nous allons maintenant étudier est le suivant : trouver une caractérisation simple des opérateurs auto-adjoints T dans $\mathcal{H}$ dont le spectre est le sous-ensemble $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$ formé de tous les nombres premiers, chacun avec une multiplicité de 1 :

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...\} \subset \mathbb{R}.$$

Le problème correspondant pour l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ des entiers naturels, ou pour $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$, est plus facile, et a été résolu dans l'article de Dirac [Dir] qui a inauguré la théorie quantique des champs. Dans ce cas, la solution est simplement qu'il existe un opérateur a tel que

$$aa^* - a^*a = 1, \qquad a^*a = T.$$

(Pour $\mathbb{N}^*$, il est nécessaire que aa^* soit égal à T). Etablissons maintenant le résultat pour le sous-ensemble $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$:

Lemme 6. *Soit T un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$; alors (en comptant les multiplicités)*

$$\text{Spectrum T} = \mathcal{P} \iff \text{Spectrum } \mathbf{S}\text{T} = \mathbb{N}^*.$$

Preuve. Assumons d'abord que Spectre $\mathbf{S}T = \mathbb{N}^*$. Alors, comme généralement Spec $T \subset$ Spec $\mathbf{S}T$, (en utilisant l'inclusion $\mathcal{H} \subset \mathbf{S}\mathcal{H}$), on voit que $\sum = \mathrm{Spec}(T) \subset \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathcal{P} \subset \sum$. Effectivement, prenons $p \in \mathcal{P}$ et qui n'est pas dans $\sum$. Alors, puisque $\sum \subset \mathbb{N}^*$, on a $p \notin \sum^n$ pour tout n (avec $\sum^n = \{k_1 k_2 \dots k_n;\ k_j \in \sum\}$). Cela montre que $p \notin \mathrm{Spec}(\mathbf{S}T) = \cup \sum^n$, d'où une contradiction. Ainsi $\mathcal{P} \subset \sum$. Si $k \in \sum \backslash \mathcal{P}$, alors puisque $k \in \mathcal{P}^n$ pour un certain $n > 1$, cela signifierait que k n'est pas une valeur propre simple pour $\mathbf{S}T$. Ainsi $\mathcal{P} = \sum$. L'inverse est évident et découle du théorème d'Euclide d'unicité de la factorisation, mais fixons les notations correspondantes : appelons $\mathcal{H}_1 = \ell^2(\mathcal{P})$ l'espace de Hilbert de base $(\varepsilon_p)_{p\in\mathcal{P}}$, et identifions-le au sous-espace à une particule de $\mathbf{S}\mathcal{H}_1 = \ell^2(\mathbb{N}^*)$, l'espace de Hilbert des séquences de carré intégrable de nombres complexes, avec la base canonique $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On note T l'opérateur :

$$T : \ell^2(\mathcal{P}) \to \ell^2(\mathcal{P})\ ;\ T\varepsilon_p = p\varepsilon_p \qquad \forall p \in \mathcal{P}$$

et $\mathbf{S}T$ l'opérateur correspondant

$$\mathbf{S}T : \ell^2(\mathbb{N}^*) \to \ell^2(\mathbb{N}^*)\ ;\ (\mathbf{S}T)\varepsilon_n = n\varepsilon_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Posons $H = \log(\mathbf{S}T)$. C'est le générateur du groupe unitaire à un paramètre $U_t = \exp(itH) = T^{it}$, dont le rôle est rendu clair par le cas particulier suivant de la formule (*) qui est la formule du produit eulérien pour la fonction ζ de Riemann :

$$\text{Pour Re } s > 1\ ; \zeta(s) = \mathrm{Trace}(\mathbf{S}T)^s = \frac{1}{\det(1-T^s)}.$$

La signification du Lemme 6 est que le sous-ensemble $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$ a une définition agréable à condition qu'on soit prêt à utiliser le formalisme de *la théorie quantique des champs de bosons*. Ce formalisme contient *l'algèbre* des opérateurs de création et destruction, respectivement $a^*(\xi)$ et $a(\eta)$, pour $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, donnés par

$$\begin{aligned} a^*(\xi)\xi_1 \ldots \xi_n &= \xi\xi_1 \ldots \xi_n \qquad \forall \xi_j \in \mathcal{H} \\ a(\eta) &= (a^*(\eta))^*. \end{aligned}$$

Le formalisme inclut également l'*évolution temporelle*, selon le schéma d'Heisenberg, donné par

$$\sigma_t(x) = U_t \; x \; U_t^* = e^{itH} \; x \; e^{-itH}$$

Dans notre cas, la C^*-algèbre correspondante dans $\mathbf{S}\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N}^*)$ et l'évolution temporelle sont données par la :

Proposition 7.

(a) Pour tout $p \in \mathcal{P}$, soit μ_p l'isométrie dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$ donnée par la décomposition polaire de l'opérateur de création associé au vecteur unité $\varepsilon_p \in \mathcal{H}$. La C^*-algèbre $C^*(\mathbb{N}^*)$ engendrée par les μ_p's est la même que celle engendrée par les isométries $\mu_n, n \in \mathbb{N}^*$, qui est définie par

$$\mu_n \varepsilon_k = \varepsilon_{kn} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

(b) Cette C^*-algèbre est le produit tensoriel infini

$$C^*(\mathbb{N}^*) = \bigotimes_{p \in \mathcal{P}} \tau_p$$

où chaque τ_p est la C^*-algèbre engendrée par μ_p et est la C^*-algèbre de Toeplitz.

(c) L'égalité $\sigma_t(x) = e^{itH} \; x \; e^{-itH}, \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*), t \in \mathbb{R}$, où $H = \log(\mathbf{S}T)$, définit un groupe à un paramètre d'automorphismes de $C^*(\mathbb{N}^*)$ donné comme

$$\sigma_t = \otimes_{p \in \mathcal{P}} \sigma_{t,p} \, ; \sigma_{t,p}(\mu_p) = p^{it} \mu_p \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Preuve.
(a) Par construction, μ_p est le décalage d'un côté dans l'espace de Hilbert $S\mathbb{C}\varepsilon_p$ tensorisé par l'identité dans chacun des espaces de Hilbert $S\mathbb{C}\varepsilon_q, q \neq p$ dans la décomposition

$$S\mathcal{H} = \bigotimes_{q \in \mathcal{P}} S\mathbb{C}\varepsilon_q.$$

Par rapport aux bases (ε_n) de $S\mathcal{H}$, on a alors

$$\mu_p \varepsilon_n = \varepsilon_{pn} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

de telle façon que (a) en découle.

(b) On rappelle que la C^*-algèbre de Toeplitz τ est la C^*-algèbre définie par un générateur unique u satisfaisant la relation $u^*u = 1$. Si u est une quelconque isométrie non-unitaire dans un espace de Hilbert (séparable), la plus petite C^*-algèbre contenant u est isomorphe à τ. Cette C^*-algèbre est nucléaire de telle façon que les produits tensoriels finis $\bigotimes_{p \leq n} \tau_p$, sont définis de manière non-ambigue.

La C^*-algèbre $\bigotimes_{p\in\mathcal{P}} \tau_p$ est leur limite inductive. Maintenant pour chaque p, l'isométrie μ_p engendre τ_p dans $S\mathbb{C}\varepsilon_p$ et puisque les produits tensoriels finis $\bigotimes_{p\leq n} \tau_p$ sont représentés fidèlement dans $\mathcal{H}$, on obtient (b).

(c) découle d'un calcul direct.

Le système C^*-dynamique ainsi obtenu n'est pas très intéressant parce qu'il est sans interaction (voir Proposition 8 (a)). Néanmoins, les uniques états KMS$_\beta$ associés seront utiles plus tard et sont donnés par le corollaire suivant de la Proposition 1 et par la classification d'Araki-Woods des ITPFI.

Proposition 8.

(a) *Pour tout $\beta > 0$, il existe un unique état KMS$_\beta$ sur $(C^*(\mathbb{N}^*), \sigma_t)$. C'est le produit tensoriel infini*

$$\varphi_\beta = \otimes_{p\in\mathcal{P}} \varphi_{\beta,p}$$

où $\varphi_{\beta,p}$ est l'unique état KMS$_\beta$ sur $(\tau_p, \sigma_{t,p})$ pour $\sigma_{\beta,p}$. La liste des valeurs propres de $\varphi_{\beta,p}$ est

$$\{(1-p^{-\beta})p^{-n\beta}\,;n\in\mathbb{N}\}.$$

(b) *Pour $\beta > 1$, l'état φ_β est de type I_∞ et est donné par*

$$\varphi_\beta(x) = \zeta(\beta)^{-1}\mathrm{Trace}(e^{-\beta H}x) \qquad \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*).$$

(c) *Pour $\beta = 1$, l'état φ_β est un facteur d'états de type III_1 donné par*

$$\varphi_\beta(x) = \mathrm{Trace}_\omega(e^{-H}x) \qquad \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*)$$

où Trace_ω *est la trace de Dixmier.*

(d) *Pour $0 < \beta \leq 1$, φ_β est un facteur d'états de type III_1, et le facteur associé est le facteur R_∞ d'Araki-Woods.*

L'assertion (d) pour $\beta = 1$ est due à B. Blackadar ([Bl]). Nous renvoyons le lecteur à [Co] IV.2 pour la définition de la trace de Dixmier, dont les propriétés générales rendent clair que l'égalité (c) definit un état KMS$_1$.

Preuve. (a) Montrons d'abord qu'il existe un unique état KMS$_\beta$ sur τ_p pour le groupe $\sigma_{t,p}$. On définit τ_p comme la C^*-algèbre dans $\ell^2(\mathbb{N})$ engendrée par le décalage d'un seul côté S, alors que $\sigma_{t,p}(S) = p^{it}S$ est le groupe à un paramètre d'automorphismes. D'abord soit $\varphi_{\beta,p}$ la restriction à τ_p de l'état sur $\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ donnée par

$$\varphi(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} A_{n,n}\nu(n)$$

où $\nu(n) = p^{-n\beta}\left(\sum_{m=0}^{\infty} p^{-m\beta}\right)^{-1}$.

On vérifie que $\varphi_{\beta,p}$ est un état KMS$_\beta$ sur τ_p. Inversement, soit φ un état KMS$_\beta$ sur τ_p. Alors la condition d'état KMS$_\beta$ montre que φ s'évanouit sur tout vecteur propre $A \in \tau_p$,

$$\sigma_{t,p}(A) = \lambda^{it}A \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ \text{à condition que}\ \lambda \neq 1.$$

Cela montre aussi que $\varphi(SS^*) = \varphi(S^*\ \sigma_{-i\beta}(S)) = p^{-\beta}\varphi(S^*S) = p^{-\beta}$ de telle manière que $\varphi(1 - SS^*) = 1 - p^{-\beta}$. Plus généralement, on a pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \varphi(S^k S^{*\ell}) \ &= 0 \quad &\text{si} \quad k \neq \ell \\ &= p^{-k\beta} \quad &\text{si} \quad k = \ell. \end{aligned}$$

Cela montre l'unicité de $\varphi = \varphi_{\beta,p}$ sur l'idéal $\mathcal{K}$ des opérateurs compacts, $\mathcal{K} \subset \tau_p$.
Ainsi, la différence $\psi = \varphi - \varphi_{\beta,p}$ s'évanouit sur $\mathcal{K}$ et est une forme linéaire continue sur la C^*-algèbre quotient $\tau_p/\mathcal{K} = C(S^1)$. Nous avons vu que $\varphi(S^n) = \varphi_{\beta,p}(S^n) = 0$ pour tout $n > 0$ et similairement pour $(S^*)^n$ de telle manière que $\psi = 0$ et $\varphi = \varphi_{\beta,p}$.
L'unicité de φ_β découle alors d'un argument général pour les produits tensoriels : Soit (A, σ_t^A) et (B, σ_t^B) des systèmes C^*-dynamiques et φ un état KMS_β sur $(A \otimes B, \sigma_t^A \otimes \sigma_t^B)$. Alors pour tout $b \in B$, la fonctionnelle sur A

$$\varphi_b(a) = \varphi(a \otimes b)$$

est KMS_β sur A. Par conséquent, pour tout $x, y \in A$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma_t^A(x)y \otimes b) &= \varphi(\sigma_t^{A\otimes B}(x \otimes 1)(y \otimes b)) \\ \varphi(y\sigma_t^A(x) \otimes b) &= \varphi((y \otimes b)\sigma_t^{A\otimes B}(x \otimes 1)). \end{aligned}$$

(b) On utilise la finitude de $\mathrm{Trace}(e^{-\beta H})$ pour $\beta > 1$.

(c) Par construction, on a un produit tensoriel infini de facteurs de type I avec comme liste de valeurs propres

$$\lambda_{p,n} = p^{-n\beta}(1 - p^{-\beta})\ ;$$

et ainsi, l'assertion (c) découle de [A-W].

(d) On vérifie directement la condition KMS_1, et les mêmes arguments que ceux utilisés pour (c) montrent que φ_1 est de type III_1.

3 Produits d'arbres et algèbres de Hecke non-commutatives

Dans cette section, nous allons relier le système C^*-dynamique $(C^*(\mathbb{N}^*), \sigma_t)$ de la section 2 avec des notions de la théorie basique des nombres [We$_2$] et obtenir le système dynamique de Hecke du Théorème 5.

Soit P le groupe $ax + b$, i.e. le groupe des matrices triangulaires 2×2 de la forme $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$, avec a inversible. Nous le voyons comme un groupe algébrique sur $\mathbb{Z}$, i.e. comme un foncteur $A \to P_A$ des anneaux commutatifs vers les groupes. Il joue un rôle important dans la classification élémentaire des corps localement compacts (commutatifs et non discrets) (cf. [We$_2$]). En effet, étant donné un tel corps K, alors le groupe $G = P_K$ est un groupe *localement compact*, et de ce fait, il a un module

$$\delta : G \to \mathbb{R}_+^*$$

défini par le manque d'invariance de la mesure de Haar à gauche dg sur G par les translations à droite :

$$(1) \qquad d(gk) = \delta(k)dg \qquad \forall \in G$$

(ou, de manière équivalente $d(g)^{-1} = \delta(g)^{-1}dg$ comme mesures sur G).

Ce module $\delta : P_K \to \mathbb{R}_+^*$ vaut 1 sur le groupe additif et sa restriction au groupe multiplicatif (étendu par 0 sur $K \backslash K^*$) amène une application multiplicative propre continue

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{mod}_K : K = \mathbb{R}_+.$$

En fait, si dx désigne la mesure de Haar sur le groupe additif (localement compact) K, on a

$$d(ax) = \operatorname{mod}_K(a)dx \qquad \forall a \in K^*.$$

De plus, les ensembles ouverts $\{k \in K; \operatorname{mod}_K(k) < \varepsilon\}$ forment une base de voisinages de 0. L'image de δ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}_+^*$ et excepté dans le cas de corps archimédiens $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ce sous-groupe fermé est discret et égal à $\lambda^{\mathbb{Z}}$ pour un certain $\lambda \in]0, 1[$ dont l'inverse $q = \lambda^{-1}$ est appelé le *module* de K. La fonction sur $K \times K$ $d(x, y) := \operatorname{mod}_K(x - y)$ est alors une distance ultramétrique qui donne en retour la topologie de K ([We$_2$]). En d'autres mots, on a la :

Proposition 9. *(cf. [We$_2$]) Soit K un corps localement compact non-discret commutatif, $K \neq \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors il existe un nombre premier p tel que $\operatorname{mod}_K(p) < 1$. Appelons R, R^* et P les sous-ensembles de K définis respectivement par*

$$\begin{aligned} R &= \{x \in K; \operatorname{mod}_K(x) \leq 1\}, \\ R' &= \{x \in K; \operatorname{mod}_K(x) = 1\}, \\ J &= \{x \in K; \operatorname{mod}_K(x) < 1\}. \end{aligned}$$

Alors R est le sous-anneau compact maximal de K; R^* est le groupe des éléments inversibles de R ; J est l'unique idéal maximal de R, et il existe $\pi \in J$ tel que $J = \pi R = R\pi$. La topologie sur le groupe topologique K est l'unique topologie (ultramétrique) telle que les idéaux $\pi^n R$ forment une base de voisinages de 0. De plus, le corps de restes $k = R/J$ est un corps fini de caractéristique p ; si q est le nombre de ses éléments, l'image de K^* dans R_+^* sous mod_K est le sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$ engendré par q.

Etant donné $x \in K$, l'entier $v(x)$ tel que $\operatorname{mod}_K(x) = q^{-v(x)}$ est appelé la *valuation* de x.

Comme exemple basique, le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques est défini (étant donné p un nombre premier quelconque), comme la complétion du corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels pour la fonction de distance :

$$\text{(3)} \qquad d(x, y) = |x - y|_p$$

où pour $x \in \mathbb{Q}, x = p^n \frac{a}{b}$ (avec n, a, b des nombres entiers et a, b premiers à p), on pose

$$\text{(4)} \qquad |x|_p = p^{-n}$$

Le sous-anneau maximal R de $K = \mathbb{Q}_p$ est l'anneau $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques et le corps résiduel $k = R/J$ est le corps fini $\mathbb{F}_p$.

De cette manière, on obtient, avec l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, toutes les inclusions $\mathbb{Q} \subset K$ du corps des nombres rationnels comme un sous-corps dense d'un corps local K. De telles inclusions (ou plutôt, en général, les classes d'équivalence des complétions) sont appelées *places* et pour distinguer les places réelles $Q \subset \mathbb{R}$ des autres, ces dernières sont appelées *places finies*.

En mettant ensemble les inclusions de $\mathbb{Q}$ dans ses complétions $\mathbb{Q}_v = K$ paramétrisées par les places de $\mathbb{Q}$, on obtient une seule inclusion de $\mathbb{Q}$ dans l'anneau commutatif *localement compact* des *adèles* qui est le produit restreint des corps $\mathbb{Q}_v$. Plus spécifiquement, cet anneau est le produit $\mathbb{R} \times \mathcal{A}$ où l'anneau $\mathcal{A}$ des adèles *finies* est obtenu comme suit :

(a) Les éléments x de $\mathcal{A}$ sont les familles arbitraires $(x_p)_{p \in \mathcal{P}}$ avec $x_p \in \mathbb{Q}_p$, telles que $x_p \in \mathbb{Z}_p$ pour tout p sauf pour un nombre fini.

(b) $(x+y)_p = x_p + y_p$; $(xy)_p = x_p y_p$ définit l'addition et le produit dans $\mathcal{A}$.

(c) Finalement, $\mathcal{A}$ a l'unique topologie d'un anneau localement compact tel que le sous-anneau

$$\mathcal{R} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}_p,$$

est ouvert et fermé et hérite de la topologie de produit compact.

Nous allons maintenant relier le système C^*-dynamique $(C^*(\mathbb{N}^*), \sigma_t)$ de la section 2 avec l'anneau localement compact $\mathcal{A}$ des adèles finies.

Nous avons seulement besoin de rappeler que, un groupe G quelconque localement compact étant donné, avec une fonction modulaire $\delta : G \to \mathbb{R}_+^*$, on a un groupe naturel à un paramètre d'automorphismes σ_t de $C^*(G)$ donné par la formule suivante valide sur $L^1(G)$:

$$(\sigma_t(f))(g) = \delta(g)^{-it} f(g) \qquad \forall g \in G, t \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Ce groupe d'automorphismes définit aussi un groupe d'automorphismes de la C^*-algèbre réduite $C_r^*(G)$, et le groupe σ_{-t} est le groupe modulaire d'automorphismes du poids de Plancherel sur $C^*(G)$.

Proposition 10. *Soit $\mathcal{A}$ l'anneau des adèles finies sur $\mathbb{Q}$, et $\mathcal{R}$ son sous-anneau compact maximal (ouvert). Soit G le groupe localement compact $G = P_{\mathcal{A}}$, et $e \in C^*(G)$ la fonction caractéristique du sous-groupe compact et ouvert $P_{\mathcal{R}} \in P_{\mathcal{A}}$. Alors :*

(1) On a $e = e^* = e^2$, et la C^*-algèbre réduite $C^*(G)_e = \{x \in C^*(G) \, ; ex = xe = x\}$ est canoniquement isomorphe à la C^*-algèbre $C^*(\mathbb{N}^*)$ de la section 2.

(2) On a $\sigma_t(e) = e \quad \forall t \in \mathbb{R}$, et la restriction de σ_t à la C^*-algèbre réduite $C^*(\mathbb{N}^*)$ est l'évolution temporelle de la section 2.

Nous pensons à la fonction caractéristique de $P_{\mathcal{R}}$ comme à un élément de $L^1(G, dg) \subset C^*(G)$, avec dg l'unique mesure de Haar à gauche qui attribue la mesure 1 à $P_{\mathcal{R}}$. Le groupe G est résoluble et par conséquent moyennable de telle manière qu'il n'y a pas de différence entre $C^*(G)$ et la C^*-algèbre réduite $C_r^*(G)$.

La preuve de la Proposition 10 se réduit immédiatement à une assertion *locale*, notamment : si $K = \mathbb{Q}_p$ et $R \subset K$ est le sous-anneau compact maximal, le système C^*-dynamique $(C^*(P_K), \sigma_t)$ donné par (5), réduit par la projection e_p définie comme la fonction caractéristique de P_R, est isomorphe à la C^*-algèbre de Toeplitz τ_p, avec l'évolution temporelle $\sigma_{t,p}$ de la Proposition 7 (c).

Pour vérifier cela, on utilise les isomorphismes

$$C^*(P_K) \cong C^*(K) \rtimes K^* \cong C_0(K) \rtimes K^*$$

donnés par l'identification du groupe additif K avec son dual de Pontrjagin (cf. [We$_2$] ; nous utilisons dans la suite les mêmes normalisations pour la mesure de Haar et la transformation de Fourier sur K que dans *loc.cit.*, notamment la mesure de Haar de $R = \mathbb{Z}_p$ vaut 1, et l'identification de K à son dual de Pontrjagin est telle que $R^\perp = R$). Alors, à e_p correspond l'élément du produit croisé donné par $\int_{R^*} 1_R U_g dg$. La C^*-algèbre réduite $C^*(PK)_{e_p}$ est alors engendrée par l'isométrie $\mu_p, \mu_p \in C^*(P_{\mathbb{Q}_p})_{e_p}$, donnée la par la fonction L^1 suivante :

$$\mu_p(\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}) = 1 \text{ si } b \in \mathbb{R}, \ \ \mathrm{val}(a) = 1, \text{ et est égal à } 0 \text{ sinon.} \tag{6}$$

Vérifions que μ_p est une isométrie, i.e. que $\mu_p^* \mu_p = e_p$. La mesure de Haar à gauche sur P_K est donnée par $d \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} = dbd^*a$ où d^*a est la mesure de Haar multiplicative normalisée de telle manière que $\int_{R^*} d^*a = 1$. Le module δ du groupe localement compact P_K est donné par $\delta\left(\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}\right) = |a|$. L'adjoint μ_p^* de μ_p est donné par la fonction

$$\mu_p^*(g) = \overline{\mu_p(g^{-1})}\delta(g^{-1}). \tag{7}$$

Ainsi, la convolution $\mu_p^* * \mu_p$ est donnée par l'intégrale

$$(\mu_p^* * \mu_p)(g) = \int_{P_K} \overline{\mu_p(g_1)}\mu_p(g_1 g) \tag{8}$$

Celle-ci s'évanouit à moins que $g \in P_R$, ce que l'on peut voir en utilisant $g = g_1^{-1} g_2$ pour $\mu_p(g_i) = 1$. Avec $g_i = \begin{bmatrix} 1 & b_i \\ 0 & a_i \end{bmatrix}$, on obtient $g_1^{-1} g_2 = \begin{bmatrix} 1 & -a_1^{-1} b_1 \\ 0 & a_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b_2 - a_2 a_1^{-1} b_1 \\ 0 & a_1^{-1} a_2 \end{bmatrix} \in P_R$. De plus, l'intégrale $\int_{P_K} \mu_P(g)$ est égale à 1 de telle manière qu'on obtient $\mu_p^* * \mu_p = e_p$.

On a $\sigma_t(\mu_p)(g) = 0$ à moins que $g = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $\mathrm{val}(a) = 1, b \in R$, et pour de tels g, on a $\sigma_t(\mu_p)(g) = \delta(g)^{-it}\mu_p(g) = |a|^{-it}\mu_p(g) = p^{it}\mu_p(g)$. Ainsi $\sigma_t(\mu_p = p^{it}\mu_p$.

Nous pouvons aussi écrire l'état $\varphi_{\beta,p}$ sur $C^*(P_K)_{e_p}$ en termes de fonctions bi-invariantes. On obtient l'identité suivante pour tout $f \in C^*(P_K)_{e_p}$:

$$\varphi_{\beta,p}(f) = f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + \left(\sum_{k>0} p^{k(1-\beta)} f\left(\begin{bmatrix} 1 & p^{-k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right)(1 - p^{\beta-1}) \tag{9}$$

(Observer que les éléments de $C^*(P_K)$ peuvent être identifiés à des fonctions P_R-bi-invariantes dans $L^2(P_K)$, et par conséquent à des fonctions localement constantes sur P_K ; en particulier, elles ont des valeurs bien définies sur les points de P_K). Selon la Proposition 8 (a) et sa preuve, pour démontrer (9), on a seulement besoin de vérifier que la fonctionnelle linéaire sur $C_c(P_K)_{e_p}$, définie par le côté droit de (9), satisfait la condition KMS$_\beta$; cela découle d'un calcul évident.

Le système C^*-dynamique $(C^*(P_{\mathcal{A}}), \sigma_t)$ de la Proposition 10 est sans interaction, exactement comme $(C^*(\mathbb{N}^*), \sigma_t)$ (Proposition 8), et il y a l'exacte analogue de la Proposition 8, qui établit l'existence et l'unicité (à un facteur d'échelle près) des *poids* KMS_β sur le système ci-dessus. On a besoin d'utiliser les poids car on travaille avec des C^*-algèbres non unitaires. D'un point de vue technique, de tels poids doivent être semi-continus et semi-finis (pour la topologie de la norme) (cf. [Com]). C'est cependant instructif de travailler sur la formule explicite pour ces poids KMS_β. En utilisant l'isomorphisme naturel du dual de Pontrjagin $\widehat{\mathcal{A}}$ du groupe additif $\mathcal{A}$ à lui-même (cf. [We$_2$]), on obtient un isomorphisme

$$C^*(P_{\mathcal{A}}) = C_0(\mathcal{A}) \rtimes \mathcal{A}^* \tag{10}$$

où le groupe multiplicatif $\mathcal{A}^*$ des idèles finies agit par des homothéties dans l'espace localement compact $\mathcal{A}$. Le poids KMS_β sur $C^*(P_{\mathcal{A}}), \sigma_t$ est alors le poids dual de la mesure suivante μ_β sur $\mathcal{A}$:

$$\mu_\beta(f) = \zeta(\beta)^{-1} \int_{\mathcal{A}^*} |j|^\beta f(j) d^*j \tag{11}$$

Ici d^*j est la mesure de Haar measure sur le groupe multiplicatif $\mathcal{A}^*, j \to |j|$ est le module, et la formule fait sens ainsi pour $\beta > 1$, et par prolongement analytique pour $0 < \beta < 1$ (cf. [T], [We$_1$], [Web$_2$]).

Il est clair que pour obtenir un système C^*-dynamique *avec interaction*, nous avons besoin d'utiliser non seulement l'anneau localement compact $\mathcal{A}$ mais également l'inclusion fondamentale

$$\mathbb{Q} \subset \mathcal{A}. \tag{12}$$

Nous utiliserons l'inclusion correspondante $P_{\mathbb{Q}} \subset P'_{\mathcal{A}} = G$ et l'action de $P_{\mathcal{A}}$ sur le C^*-module $\mathcal{E} = C^*(G)e$ sur $C^*(\mathbb{N}^*)$ donné par l'isomorphisme de la Proposition 10 : $C^*(G)_e = C^*(\mathbb{N}^*)$. En effet, quelle que soit la C^*-algèbre B et la projection (auto-adjointe) $e \in B$, l'espace $\mathcal{E} = Be = \{x \in B\ ; xe = x\}$ est de manière naturelle un C^*-module (à droite) sur la C^*-algèbre réduite $B_e = \{x \in B; ex = xe = x\}$. Ainsi, on définit

$$\langle \xi, \eta \rangle = \xi^* \eta \in B_e, \qquad \forall \xi, \eta \in \mathcal{E} = Be \tag{13}$$

$$\xi a \in \mathcal{E}, \qquad \forall \xi \in \mathcal{E}, \qquad a \in B_e.$$

Ce C^*-module a de plus une structure naturelle à gauche de B-module, donnée par $(b, \xi) \to b\xi \in \mathcal{E}, \forall b \in B, \xi \in \mathcal{E}$.

Dans notre cas, $\mathcal{E} = C^*(G)e$ est un espace de fonctions sur G qui sont invariantes par multiplications à droite par des éléments de $P_{\mathcal{R}} \subset G$, ou, en d'autres termes, c'est un espace de fonctions sur l'espace homogène

$$\Delta = G/P_{\mathcal{R}}. \tag{14}$$

Cet espace Δ est par construction le produit restreint des espaces

$$\Delta_p = P_{\mathbb{Q}_p}/P_{\mathbb{Z}_p} \tag{15}$$

relativement au point de base donné par $P_{\mathbb{Z}_p}$.

Proposition 11. *L'espace homogène $\Delta_p = P_{\mathbb{Q}_p}/P_{\mathbb{Z}_p}$ sur le groupe $P_{\mathbb{Q}_p} \subset GL(2,\mathbb{Q}_p)$ est naturellement isomorphe à l'(ensemble des sommets de l')arbre de $SL(2,\mathbb{Q}_p)$. Le groupe $P_{\mathbb{Q}_p}$ agit par les isométries de Δ_p, et préserve un point à l'∞.*

Rappelons (cf. [Ser$_2$]) que l'arbre de $SL(2,K)$, où K est un corps local, est défini en termes de classes d'équivalence des treillis dans un espace vectoriel de dimension 2 noté V sur K. Avec les notations de la Proposition 9, un treillis $L \subset V$ est un R-sous-module de V qui est de type fini et engendre V comme un espace vectoriel. Le groupe multiplicatif K^* opère sur l'ensemble des treillis par $(L,x) \to xL$ pour $x \in K^*$, et on définit T comme l'ensemble des orbites de cette action de K^*. Etant donné un treillis $L \subset V$ et une classe $\Lambda' \in T$, il existe un unique représentant $L' \in \Lambda'$ tel que $L' \subset L$ et $L' \not\subset \pi L$ (avec π donné par la Proposition 9). Alors $L/L' = R/\pi^n R$ et l'entier n, qui dépend seulement des classes de L et L', définit une distance d sur T, par l'égalité

$$d(\text{ classe de } L,\ \text{classe de } L') = n. \tag{16}$$

En utilisant l'ensemble des paires à distance mutuelle égale à 1 pour définir un complexe simplicial à une dimension, on obtient un arbre, l'arbre de $SL(2,K)$, et la distance ci-dessus est la longueur de l'unique plus court chemin injectif joignant les deux éléments de cet arbre (cf. [Ser$_2$]). Le groupe $GL(V)$ des automorphismes de l'espace vectoriel V agit sur l'ensemble des treillis par

$$(L,g) \to gL \qquad \forall g \in GL(V), \tag{17}$$

et, comme cette action commute avec celle de K^*, elle donne une action, par isométries, de $GL(V)$ sur l'arbre T. Identifions V avec K^2, $GL(V)$ avec $GL(2,K)$, et considérons P_K comme un sous-groupe de $GL(2,K)$: $P_K = \left\{\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} ; a \in K^*, b \in K\right\}$. Soit L_0 le treillis $R^2 \subset K^2$. Alors on vérifie que P_K agit transitivement sur T et que le stabilisateur de la classe de L_0 est P_R. Nous obtenons ainsi une identification canonique $T = P_K/P_R$. En prenant $K = \mathbb{Q}_p$, on aboutit à la conclusion.

Proposition 12.

(1) *L'espace homogène $G/P_{\mathcal{R}} = \Delta$ équipé du point de base $P_{\mathcal{R}}$ est canoniquement isomorphe au produit restreint des arbres T_p équipé des points de base $P_{\mathbb{Z}_p}$, et l'action de G sur Δ est simpliciale.*

(2) *Le sous-groupe $P_{\mathbb{Q}}^+ \subset P_{\mathcal{A}} = G$ agit transitivement sur Δ, et le sous-groupe d'isotropie du point de base $*$ est $P_{\mathbb{Z}}^+$.*

Preuve. (1) Puisque à la fois P_A et P_R sont des produits restreints, la preuve de (1) est évidente.

(2) D'abord, $\mathbb{Q}$ est dense dans le groupe additif $\mathcal{A}$ des adèles (si on enlève la place à l'∞), (cf. [Ser$_1$]).

Le sous-groupe $\mathbb{Q}_+^*$ de $\mathcal{A}^*$ est discret et on a $\mathcal{A}^* = \mathbb{Q}_+^*\mathcal{R}^*$ où $\mathcal{R}^* = \{(x_p) ; \text{val}(x_p) = 0 \ \ \forall p\}$ est un sous-groupe compact de $\mathcal{A}^*$ (cf. [We$_2$]).

Considérons la séquence exacte de groupes

$$0 \to \mathcal{A} \to P_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\rho} \mathcal{A}^* \to 1. \tag{18}$$

La fermeture de $P_{\mathbb{Q}}^{+}$ dans $P_{\mathcal{A}}$ est donnée par $\rho^{-1}(\mathbb{Q}_{+}^{*})$. Ainsi, $\overline{P}_{\mathbb{Q}}^{+} = \mathcal{A} \rtimes \mathbb{Q}_{+}^{*}$. Etant donné $g = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & h \end{bmatrix} \in P_{\mathcal{A}}$, on peut écrire $h = rs$ avec $r \in \mathbb{Q}_{+}^{*}, s \in \mathcal{R}^{*}$, alors

$$g = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & ns^{-1} \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \in \overline{P}_{\mathbb{Q}}^{+} P_{\mathcal{R}}$$

Ainsi $g \in P_{\mathbb{Q}}^{+} P_{\mathcal{R}}$ et puisque $P_{\mathcal{R}}$ est ouvert dans $P_{\mathcal{A}}$, on obtient $g \in P_{\mathbb{Q}}^{+} P_{\mathcal{R}}$. Ainsi $P_{\mathcal{A}} = P_{\mathbb{Q}}^{+} P_{\mathcal{R}}$ et $P_{\mathbb{Q}}^{+}$ agit transitivement sur Δ.

Finalement, le sous-groupe d'isotropie du point de base $* = P_{\mathcal{R}}$ est donné par $P_{\mathbb{Q}}^{+} \cap P_{\mathcal{R}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; n \in \mathbb{Z} \right\} = P_{\mathbb{Z}}^{+}$

Nous pouvons alors identifier Δ avec $P_{\mathbb{Q}}^{+}/P_{\mathcal{Z}}$, et nous allons maintenant obtenir l'algèbre de Hecke du Théorème 5 du commutant de l'action de $P_{\mathbb{Q}}^{+}$ dans l'espace des fonctions sur Δ. Nous avons besoin pour cela de considérer l'espace de Hilbert $\ell^2(\Delta) = \ell^2(P_{\mathbb{Q}}^{+}/P_{\mathcal{Z}})$.

Posons $\Gamma = P_{\mathbb{Q}}^{+}, \Gamma_0 = P_{\mathbb{Z}}^{+} \subset P_{\mathbb{Q}}^{+}$. Vérifions d'abord le

Lemme 13. L'action de $\Gamma_0 = P_{\mathbb{Z}}^{+}$ sur Γ/Γ_0 a seulement des orbites finies.

Preuve. Soit $g = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & k \end{bmatrix} \in P_{\mathbb{Q}}^{+}$. Alors

$$g\Gamma_0 = \left\{ g \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; n \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n+a \\ 0 & k \end{bmatrix} ; n \in \mathbb{Z} \right\}$$

On a

$$\begin{bmatrix} 1 & n_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n+a+n_1k \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Quand n_1 varie, n_1k prend seulement un nombre fini de valeurs modulo $\mathbb{Z}$, leur nombre dépendant du dénominateur de k. Ainsi on voit qu'on obtient par exemple une orbite finie de cardinalité le dénominateur de k.

Lemme 14.

(a) Tout élément T du commutant de Γ agissant dans $\ell^2(\Gamma/\Gamma_0)$ est caractérisé par la fonction Γ_0-bi-invariante $f_T(g) = \langle T\varepsilon_e, g^{-1}\varepsilon_e \rangle$.

(b) On a $\displaystyle\sum_{g \in \Gamma_0 \backslash \Gamma} |f_T(g)|^2 < \infty$.

(c) On a $f_{T^*}(g) = \overline{f_T}(g^{-1})$.

(d) La fonction f_{T_1,T_2} Γ_0-bi-invariante , associée au produit de deux éléments T_1 et T_2 dans son commutant est donnée par

$$f_{T_1,T_2}(g) = \sum_{\Gamma/\Gamma_0} f_{T_1}(gg_1) f_{T_2}(g_1^{-1}).$$

Preuve. (a) Tout élément de Γ agit par permutation de la base $\varepsilon_x, x \in \Gamma/\Gamma_0$ de $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma/\Gamma_0)$. Puisque T commute avec Γ, il est caractérisé par $T\varepsilon_e$ qui est déterminé par f_T. On a $f_T(g) =$

$\langle Tg\varepsilon_e, \varepsilon_e\rangle$ de telle façon que f_T est Γ_0-bi-invariante.

(b) Evident.

(c) $f_{T^*}(g) = \langle T^*\varepsilon_e, g^{-1}\varepsilon_e\rangle = \langle g\varepsilon_e, T\varepsilon_e\rangle = \overline{\langle T\varepsilon_e, g\varepsilon_e\rangle}$

(d)

$$\begin{aligned} f_{T_1T_2}(g) &= \langle T_1T_2\varepsilon_e, g^{-1}\varepsilon_e\rangle = \langle T_2\varepsilon_e, g^{-1}T_1^*\varepsilon_e\rangle \\ &= \sum_{g_1\in\Gamma/\Gamma_0} \langle T_2\varepsilon_e, g_1\varepsilon_e\rangle\langle g_1\varepsilon_e, g^{-1}T_1^*\varepsilon_e\rangle \\ &= \sum_{g_1\in\Gamma/\Gamma_0} f_{T_1}(gg_1)f_{T_2}(g_1^{-1}) \end{aligned}$$

On peut écrire (d) comme

$$f_{T_1T_2}(g) = \sum_{g_1\in\Gamma/\Gamma_0} f_{T_1}(gg_1^{-1})f_{T_2}(g_1)$$

La condition (b) montre que $f_T(g) = 0$ à moins qu'il existe un ensemble fini $F \subset \Gamma$ avec

$$\Gamma_0 \; g \; \Gamma_0 \subset F \; \Gamma_0$$

i.e., si $g \; \Gamma_0$ appartient à une orbite *finie* de Γ_0 sur Γ/Γ_0. Par le Lemme 13, on peut prendre une base de fonctions Γ_0-bi-invariantes, e_X, où X parcourt les classes doubles $X \in \Gamma_0\backslash\Gamma/\Gamma_0, e_X(g) = 0$ si $g \notin X, e_X(g) = 1$ si $g \in X$. Pour toute telle classe, on a deux entiers finis associés :

(19)

$$\begin{aligned} L(X) &= \text{cardinalité de l'image de } X \text{ dans } \Gamma/\Gamma_0 \\ R(X) &= \text{cardinalité de l'image de } X \text{ dans } \Gamma_0\backslash\Gamma. \end{aligned}$$

En fait, à chaque classe double X correspond un nombre rationnel *positif* donné par k pour tout $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & k \end{bmatrix} \in X$, et $L(X)$ est le dénominateur de k, alors que $R(X)$ est le numérateur de k.

PROPOSITION 15.

(a) *Soit f une fonction Γ_0-bi-invariante sur Γ de support fini dans $\Gamma_0\backslash\Gamma/\Gamma_0$. Alors il existe un unique élément $r(f)$ du commutant de Γ dans $\ell^2(\Gamma/\Gamma_0)$ tel que*

$$f(g) = \langle r(f)\; \varepsilon_e, g^{-1}\; \varepsilon_e\rangle \qquad \forall g \in \Gamma.$$

(b) *L'application r s'étend à un isomorphisme de $C_r^*(\Gamma, \Gamma_0)$ avec la C^*-algèbre $C = C_{\mathbb{Q}}$ engendrée par $r(f)$ dans $\ell^2(\Delta)$.*

Preuve. (a) Soit X une classe double, $X \in \Gamma_0\backslash\Gamma/\Gamma_0$ et e_X la fonction Γ_0-bi-invariante correspondante. Soit T la matrice définie par

$$\langle Tg_1\; \varepsilon_e, g_2\; \varepsilon_e\rangle = e_X(g_2^{-1}\; g_1).$$

On a, par le Lemme 13, l'inégalité

$$sup_\alpha \sum_\beta |T_{\alpha,\beta}| \leq L(X), \qquad sup_\beta \sum_\alpha |T_{\alpha,\beta}| \leq R(X)$$

qui montre que T définit un opérateur borné dans $\ell^1(\Delta)$ et dans $\ell^\infty(\Delta)$, et donc dans $\ell^2(\Delta)$. L'unicité est évidente.

(b) découle du Lemme 14 (d) et des définitions de $\mathcal{H}(\Gamma,\Gamma_0)$ et $C_r^*(\Gamma,\Gamma_0)$ (cf. Proposition 3).

Ensuite, soit φ l'état sur $C_{\mathbb{Q}}$ défini par

$$\varphi(T) = \langle T\varepsilon_e, \varepsilon_e\rangle. \tag{20}$$

LEMME 16. φ est un état KMS_1 sur C relativement au groupe à un paramètre σ_t,

$$\sigma_t(e_X) = k^{it} e_X, \qquad k = \frac{R(X)}{L(X)}.$$

Preuve. Le produit des fonctions Γ_0-bi-invariantes est donné par

$$(f_1 * f_2)(g) = \sum_{g_1 \in \Gamma/\Gamma_0} f_1(g_1) f_2(g_1^{-1} g).$$

On a

$$\begin{aligned}
\varphi(f_1 * f_2) = (f_1 * f_2)(e) &= \sum_{g_1 \in \Gamma/\Gamma_0} f_1(g_1) f_2(g_1^{-1}) \\
\varphi(e_X * f) &= \sum_{g_1 \in \Gamma/\Gamma_0} e_X(g_1) f(g_1^{-1}) \\
\varphi(f * e_X) &= \sum_{g_1 \in \Gamma/\Gamma_0} f(g_2) e_X(g_2^{-1}).
\end{aligned}$$

Soit $g \in \Gamma$ avec $X = \Gamma_0\ g\ \Gamma_0$ une classe double fixe ; alors puisque f est Γ_0-bi-invariante, les deux expressions ci-dessus sont des multiples de $f(g^{-1})$:

$$\varphi(e_X * f) = L(X) f(g^{-1}), \varphi(f * e_X) = R(X) f(g^{-1}).$$

Ainsi $\varphi(e_X * f) = \frac{L(X)}{R(X)} \varphi(f * e_X)$. Cela montre que eX est un vecteur propre du groupe modulaire d'automorphismes de l'état normal fidèle

$$T \to \langle T\varepsilon_e, \varepsilon_e\rangle$$

sur la fermeture faible C'' de C agissant dans $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma/\Gamma_0)$. Il découle alors de cela que φ est un état KMS_1 pour le groupe $\sigma_t = \sigma_{-t}^{\varphi}$. Le vecteur $\varepsilon_e \in \ell^2(\Delta)$ est toujours séparateur pour la fermeture faible de $C_{\mathbb{Q}}$ parce qu'il est cyclique pour $P_{\mathbb{Q}}^+$ par la Proposition 12 (2). Le sous-espace $\mathcal{H}_r$ de $\ell^2(\Delta)$ donné par

$$\mathcal{H}_r = \overline{C_{\mathbb{Q}} \varepsilon_e}$$

est dans le bicommutant de l'action de $P_{\mathbb{Q}}^+$ sur Δ et nous allons le calculer.

LEMME 17. *Soit $\xi \in \ell^2(\Delta)$; alors $\xi \in \mathcal{H}_r$ ssi ξ est fixe par $\Gamma_0 \subset P_{\mathbb{Q}}^+$ agissant à gauche sur $\Delta = P_{\mathbb{Q}}^+/\Gamma_0$.*

Preuve. Soit $\xi \in \mathcal{H}$ fixe par Γ_0. Alors la fonction $f(g) = \langle \xi, \varepsilon_g\rangle, g \in \Gamma/\Gamma_0$ est Γ_0-bi-invariante. Pour montrer que $\xi \in \mathcal{H}_r$, on peut assumer, en utilisant une décomposition orthogonale, que f est la fonction caractéristique d'une classe double, $f = e_X$. Nous obtenons comme ci-dessus que $e_X^*\ \varepsilon_e = \sum_{g \in F} g\ \varepsilon_e$ où $X = F\Gamma_0$, de telle manière que toutes les fonctions caractéristiques des classes doubles appartiennent à $\mathcal{H}_r$. Inversement, si $\xi \in \mathcal{H}_r$, et $\xi = T\ \varepsilon_e$ pour un opérateur T qui commute avec $P_{\mathbb{Q}}^+$, alors puisque T commute avec $\Gamma_0 \subset P_{\mathbb{Q}}^+$ et $g\ \varepsilon_e = \varepsilon_e \quad \forall g \in \Gamma_0$, on obtient que ξ reste fixe par Γ_0.

4 Présentation de la C^*-algèbre $C_{\mathbb{Q}} = C_r^*(P_{\mathbb{Q}}^+, P_{\mathbb{Z}}^+)$

Considérons d'abord l'algèbre de Hecke $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Gamma, \Gamma_0)$ où $\Gamma = P_{\mathbb{Q}}^+, \Gamma_0 = P_{\mathbb{Z}}^+$ sont définis comme ci-dessus. C'est une algèbre involutive sur $\mathbb{C}$ avec une base linéaire e_X, indexée par les classes doubles $X \in \Gamma_0 \backslash \Gamma / \Gamma_0$. Nous utiliserons les notations suivantes :

(α) Pour $n \in \mathbb{N}^*, \mu_n = n^{-1/2} e_{X_n}$ où X_n est la classe double de l'élément $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$ de $P_{\mathbb{Q}}^+$.

(β) Pour $\gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, e(\gamma) = e_{X^\gamma}$ où X^γ est la classe double de l'élément $\begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ de $P_{\mathbb{Q}}^+ / P_{\mathbb{Z}}^+$.

Proposition 18. Les éléments $\mu_n, e(\gamma), n \in \mathbb{N}^*, \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ engendre l'algèbre involutive $\mathcal{H}$ et les relations suivantes donnent une présentation de $\mathcal{H}$.
(a) $\mu_n^* \mu_n = 1 \quad \forall n$
(b) $\mu_{nm} = \mu_n \mu_m \quad \forall n, m$
(c) $\mu_n \mu_m^* = \mu_m^* \mu_n \quad$ si $(n, m) = 1$
(d) $e(\gamma)^* = e(-\gamma), e(\gamma_1 + \gamma_2) = e(\gamma_1) e(\gamma_2) \quad \forall \gamma, \gamma_1, \gamma_2$
(e) $e(\gamma) \mu_n = \mu_n e(n\gamma) \quad \forall n, \forall \gamma$
(f) $\mu_n e(\gamma) \mu_n^* = \frac{1}{n} \sum_{n\delta = \gamma} e(\delta) \quad \forall n, \forall \gamma.$

Preuve. Nous devons d'abord vérifier que les relations (a)-(f) sont respectées en utilisant les définitions du produit et de l'involution dans $\mathcal{H}$, c'est-à-dire que :

$$f_1 * f_2(g) = \sum_{g_1 \in \Gamma/\Gamma_0} f_1(g_1)\ f_2(g_1^{-1} g) \tag{1}$$

$$f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}. \tag{2}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la classe à droite $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \Gamma_0$ est déjà une classe double : X_n. Cela montre que pour toute fonction Γ_0-bi-invariante $f \in \mathcal{H}$:

$$n^{1/2} (\mu_n * f)(g) = f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n^{-1} \end{bmatrix} g \right) \qquad \forall g \in \Gamma. \tag{3}$$

De façon similaire, la classe à droite $\begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Gamma_0, \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est déjà une classe double X^γ de telle sorte que

$$(e(\gamma) * f)(g) = f\left(\begin{bmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g \right) \qquad \forall g \in \Gamma \tag{4}$$

et en utilisant l'égalité $\Gamma_0 \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = X^\gamma$,

$$(f * e(\gamma))(g) = f\left(g \begin{bmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \qquad \forall g \in \Gamma. \tag{5}$$

En utilisant (3), (4), (5), on prouve directement les relations (b), (d) et (e). La multiplication à gauche par μ_n^* est donnée par

$$n^{1/2}(\mu_n^* * f)(g) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & n\end{bmatrix} g\right) \qquad \forall g \in \Gamma \tag{6}$$

où la bi-invariance de f montre que $f\left(\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & n\end{bmatrix} g\right)$ dépend seulement de k modulo n, puisque

$$\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & k+nb\\ 0 & n\end{bmatrix}$$

L'égalité (a) découle directement de (6). Soient n, m des entiers tels que $(n,m) = 1$; en utilisant (3), on obtient que la fonction bi-invariante $n^{1/2}m^{1/2}\mu_n * \mu_m^*$ est la fonction caractéristique des classes doubles $\Gamma_0 : \begin{bmatrix}1 & \mathbb{Z}/m\\ 0 & n/m\end{bmatrix}$. En utilisant (6), on obtient que

$$m^{1/2}\mu_m^* * \mu_n(g) = \sum_{k=0}^{m-1} \mu_n\left(\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & m\end{bmatrix} g\right).$$

Soit $g = \begin{bmatrix}1 & \beta\\ 0 & \alpha\end{bmatrix} \in \Gamma$. Alors le $(k+1)$-ième terme du côté droit s'évanouit à moins que $\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & m\end{bmatrix} g \in \begin{bmatrix}1 & \mathbb{Z}\\ 0 & n\end{bmatrix}$ i.e. à moins que $\alpha = n/m, \beta + \frac{nk}{m} \in \mathbb{Z}$. Ainsi, le côté gauche s'évanouit à moins que $\beta \in \mathbb{Z}/m$ et est égal à $n^{-1/2}$ si $\beta \in \mathbb{Z}/m$ puisque, comme $(n,m) = 1$, seule une valeur de k contribuera à la somme. Cela prouve la relation (c). Pour prouver (f), on combine (3) et (4), ce qui donne

$$n^{1/2}(\mu_n * e(\gamma) * f)(g) = f\left(\begin{bmatrix}1 & -\gamma n^{-1}\\ 0 & n^{-1}\end{bmatrix} g\right) \qquad \forall g \in \Gamma$$

que l'on applique à $f = \mu_n^*$. On a $f(g) = n^{1/2}$ si $g \in \begin{bmatrix}1 & \mathbb{Z}/n\\ 0 & 1/n\end{bmatrix}$ et $f(g) = 0$ sinon. Cela montre que $(\mu_n * e(\gamma) * \mu_n^*)(g)$ s'évanouit à moins que $g = \begin{bmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ avec

$$\begin{bmatrix}1 & -\gamma n^{-1}\\ 0 & n^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{bmatrix} \in \begin{bmatrix}1 & \mathbb{Z}/n\\ 0 & n^{-1}\end{bmatrix}$$

i.e. $n\beta = \gamma$ modulo n. Puisque cette équation a n solutions $\beta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on obtient (f).

Nous avons ainsi démontré les relations (a)-(f). Inversement, soit $\mathcal{A}$ l'algèbre involutive engendrée par les éléments $(\mu_n), (e_\gamma)$ satisfaisant (a)-(f). Nous allons montrer que les monômes de la forme

$$t_{n,m,\gamma} = \mu_n e(\gamma)\mu_m^*, \qquad n, m \in \mathbb{N}^*, (n,m) = 1, \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

forment un ensemble de générateurs de l'espace vectoriel $\mathcal{A}$. Il suffit pour cela d'exprimer l'adjoint et les produits de tels monômes comme des éléments de leur enveloppe linéaire $\mathcal{L}$.
D'abord, si nous continuons en notant $t_{n,m,\gamma}$ l'expression $\mu_n e(\gamma)\mu_m^*$ quand n, m ne sont pas premiers entre eux mais s'ils sont tels que $(n,m) = q > 1$, nous pouvons écrire

$$t_{n,m,\gamma} = \mu_{n/q}\mu_q e(\gamma)\mu_q^*\mu_{m/q}^*$$

et utiliser (f) pour l'exprimer comme un élément de $\mathcal{L}$. Il est clair que $(t_{n,m,\gamma})^* = t_{m,n,-\gamma}$ de telle sorte que $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$. Calculons maintenant le produit : $t_{n_1,m_1,\gamma_1} t_{n_2,m_2,\gamma_2}$. Soit $q = (m_1, n_2)$, alors $\mu^*_{m_1}\mu_{n_2} = \mu^*_{m_1/q}\mu^*_q\mu_q\mu_{n_2/q} = \mu^*_{m_1/q}\mu_{n_2/q} = \mu_{n_2/q}\mu^*_{m_1/q}$ en utilisant (a), (b), (c).

Ainsi $t_{n_1,m_1,\gamma_1} t_{n_2,m_2,\gamma_2} = \mu_{n_1} e(\gamma_1)\mu_{n_2/q}\mu^*_{m_1/q} e(\gamma_2)\mu^*_{m_2}$. En utilisant (e) et son adjoint, on obtient alors

$$t_{n_1,m_1,\gamma_1} t_{n_2,m_2,\gamma_2} = \mu_{n_1 n_2/q}\, e\left(\frac{n_2}{q}\gamma_1 + \frac{m_1}{q}\gamma_2\right)\mu^*_{m_1 m_2/q}$$

qui est un $t_{n,m,\gamma}$ avec (n, m) non nécessairement égal à 1 et peut être exprimé comme ci-dessus comme un élément de $\mathcal{L}$.

Nous avons montré que l'enveloppe linéaire $\mathcal{L}$ des $t_{n,m,\gamma}$ est une algèbre involutive et ainsi que $\mathcal{L} = \mathcal{A}$. Dans l'algèbre $\mathcal{H}$, les $t_{n,m,\gamma}$ sont donnés par

$$t_{n,m,\gamma} = (nm)^{-1/2} e_X, \qquad X = \text{classe double de } \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & n/m \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Ainsi, ils sont linéairement indépendants dans $\mathcal{H}$ et cela suffit pour conclure que (a)-(f) est une présentation de $\mathcal{H}$.

Il est crucial que la présentation de $\mathcal{H}$ ci-dessus soit définie sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, puisque cela permettra l'action naturelle du groupe de Galois G de l'extension cyclotomique $\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}$ de $\mathbb{Q}$ sur certaines représentations de $\mathcal{H}$ que nous construirons plus tard en Section 6.

Un résultat similaire à la Proposition 18 est obtenu pour la C^*-algèbre $C_{\mathbb{Q}} = C^*_r(\Gamma, \Gamma_0)$ et du fait de la moyennabilité de $\Gamma = P^+_{\mathbb{Q}}$, la nuance entre $C^*(\Gamma, \Gamma_0)$, la C^*-algèbre universelle engendrée par les (μ_n, e_γ) avec les relations ci-dessus, et $C^*_r(\Gamma, \Gamma_0)$ ne se lève pas. On a $C^*(\Gamma, \Gamma_0) = C^*_r(\Gamma, \Gamma_0)$.

Proposition 19. *Soit π une représentation involutive de $\mathcal{H}$ comme opérateurs dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors π s'étend uniquement par continuité à une représentation de $C^*_r(\Gamma, \Gamma_0) = C_{\mathbb{Q}}$.*

Preuve. Les relations (a) et (d) montrent que $\pi(\mu_n)$ est une isométrie et $\pi(e(\gamma))$ est unitaire. Ainsi on a

$$\|\pi(\mu_n e(\gamma)\mu^*_m)\| \le 1 \qquad \forall n, m, \gamma.$$

Cela montre que $\pi(f)$ est borné pour tout $f \in \mathcal{H}$, avec

$$\|\pi(f)\| \le \|f\|_1$$

où

$$\|f\|_1 = \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_0} \delta(\gamma)^{-1/2} |f(\gamma)|, \qquad \delta(\gamma) = \frac{L(\gamma)}{R(\gamma)}.$$

Il suit alors que l'égalité suivante définit une norme sur $\mathcal{H}$ dont la complétion est une C^*-algèbre :

$$\|f\|_{max} = \mathrm{Sup}\{\|\pi(f)\| \,;\, \pi \in \mathrm{Rep}\mathcal{H}\} \tag{8}$$

où Rep$\mathcal{H}$ est la classe de toutes les représentations involutives de $\mathcal{H}$ dans un espace de Hilbert séparable fixé.

Montrons que

$$\|f\|_{\max} = \|f\|_{C_r^*(\Gamma,\Gamma_0)} \qquad \forall f \in \mathcal{H} \tag{9}$$

qui est une assertion de *moyennabilité* de la paire (Γ, Γ_0). Prouvons d'abord (9) pour les éléments de l'anneau de groupes $f \in \mathbb{C}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$, i.e. les combinaisons linéaires des $e_\gamma, \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
En utilisant les représentations de $\mathcal{H}$ dans $\ell^2(\Gamma_0\backslash\Gamma)$, on a

$$\|f\|_{\max} \geq \|f\|_{C_r^*} \qquad \forall f \in \mathcal{H}. \tag{10}$$

Ainsi, nous avons seulement besoin de prouver l'autre inégalité. La moyennabilité du groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ montre que

$$\|\pi(f)\| \leq \|f\|_{C_r^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \qquad \forall f \in \mathbb{C}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}] \tag{11}$$

pour toute représentation unitaire π de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Observons que dans la représentation de $\mathcal{H}$ dans $\ell^2(\Gamma_0\backslash\Gamma)$, la restriction à $\mathbb{C}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$ définit une représentation fidèle de $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Par exemple, la restriction de l'action de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ à l'orbite de $\varepsilon_0 = \Gamma_0$, est isomorphe à la représentation régulière de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, d'où découle le résultat. Cela prouve (9) pour les éléments de $\mathbb{C}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$ et nous autorise à voir $\mathbb{C}^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ comme une C^*-sous-algèbre de la C^* complétion $C^*(\Gamma, \Gamma_0)$ de $\mathcal{H}$ pour la norme (8). Identifions le dual du groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ avec le groupe additif $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ en utilisant l'égalité $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \mathcal{A}/\mathcal{R}$ et l'identification du groupe additif $\mathcal{A}$ avec son dual de Pontrjagin. Considérons maintenant le groupoïde localement compact $\mathcal{G}$ défini comme suit. Puisque l'espace localement compact $\mathcal{G}$ est le sous-ensemble suivant de $\mathcal{R} \times \mathbb{Q}_+^*$,

$$\mathcal{G} = \{(b, a) \in \mathcal{R} \times \mathbb{Q}^* \,; ab \in \mathcal{R}\} \tag{12}$$

qui peut être identifié à une union dénombrable d'ensembles ouverts et fermés de $\mathcal{R}$.
On a $\mathcal{G}^{(0)} = \mathcal{R} \times 1 = \mathcal{R}$ et les applications image et antécédent sont

$$r(b, a) = ab, \qquad s(b, a) = b \tag{13}$$

tandis que la composition est donnée par

$$(b_1, a_1) \circ (b_2, a_2) = (b_2, a_1 a_2). \tag{14}$$

Par construction, les fibres $\mathcal{G}^x$ et $\mathcal{G}_x, x \in \mathcal{R}$ de r et s sont des ensembles discrets dénombrables et les C^*-algèbres $C^*(\mathcal{G})$ et $C_r^*(\mathcal{G})$ de ce groupoïde localement compact font bien sens. Ce sont les complétions de l'algèbre de convolution $C_c(\mathcal{G})$ des fonctions continues à support compact sur G,

$$(f_1 * f_2)(\gamma) = \sum_{\gamma_1 \circ \gamma_2 = \gamma} f_1(\gamma_1) f_2(\gamma_2) \tag{15}$$

$$f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})} \tag{16}$$

sous les normes respectives suivantes :

$$\|f\|_{\max} = \sup\{\|\pi(f)\| \,; \pi \in \operatorname{Rep} \mathcal{G}\} \tag{17}$$

$$\|f\|_r = \sup_{x \in \mathcal{G}^{(0)}} \|\lambda_x(f)\| \tag{18}$$

où λ_x est la représentation régulière à gauche de f dans $\ell^2(\mathcal{G}^x)$ donnée par :

$$(\lambda_x(f)\xi)(\gamma) = \sum_{r(\gamma_1)=x} f(\gamma_1)\xi(\gamma_1^{-1}\gamma). \tag{19}$$

Maintenant, puisque le groupe $\mathbb{Q}_+^*$ est moyennable, il s'ensuit que le groupoïde localement compact $\mathcal{G}$ est moyennable au sens de [Ren], de telle façon que les normes (17) et (18) coïncident.

Maintenant, étant donnée une représentation π de $\mathcal{H}$, nous obtenons une représentation $\widetilde{\pi}$ de $C_c(\mathcal{G})$ comme suit. Nous identifions $\mathcal{H}$ avec une sous-algèbre de $C_c(\mathcal{G})$ en vérifiant que les éléments suivants $\widetilde{e}(\gamma), \widetilde{\mu}_n$ de $C_c(\mathcal{G})$ satisfont la présentation de la Proposition 18,

$$\begin{aligned} &\widetilde{e}(\gamma)(b,a) = 0 \qquad\qquad \text{à moins que } a = 1, \\ &\widetilde{e}(\gamma)(b,1) = \langle b, \gamma\rangle \end{aligned} \tag{20}$$

(où $\langle b, \gamma\rangle$ est l'appariement entre $\mathcal{R}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ donné par la dualité de Pontrjagin des groupes abéliens)

$$\widetilde{\mu}_n(b,a) = 0 \text{ à moins que } a = n^{-1}\,;\, \widetilde{\mu}_n(b,n^{-1}) = 1 \qquad \forall b \in \mathcal{R}. \tag{21}$$

On vérifie directement les relations (a)-(f) de la présentation de $\mathcal{H}$ en utilisant en particulier l'égalité

$$\langle n\gamma, b\rangle = \langle \gamma, nb\rangle \qquad \forall \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \qquad \forall \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \forall b \in \mathcal{R} \text{ tel que } nb \in \mathcal{R}. \tag{22}$$

Alors soit π une représentation involutive de $\mathcal{H}$. Nous avons montré ci-dessus que la restriction de π à l'anneau de groupes de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ s'étend à une représentation de $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = C_r^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Il découle alors de cela, en utilisant $\widetilde{\mu}_n$ qui, avec $C(\mathcal{R})$, engendre $C_c(\mathcal{G})$, que π s'étend à une représentation $\widetilde{\pi}$ de l'algèbre de convolution $C_c(\mathcal{G})$ du groupoïde localement compact $\mathcal{G}$. La moyennabilité de $\mathcal{G}$ amène alors

$$\|\pi(f)\| \leq \sup_{x \in \mathcal{R}} \|\lambda_x(\widetilde{f})\| \qquad \forall f \in \mathcal{H}. \tag{23}$$

L'homomorphisme $h : \mathcal{G} \to \mathbb{Q}_+^*, h(b,a) = a$, amène pour chaque $x \in \mathcal{R}$, une injection de $\mathcal{G}^x$ dans $\mathbb{Q}_+^*$ qui nous autorise à considérer le corps continu d'espaces de Hilbert $\ell^2(\mathcal{G}^x), x \in \mathcal{R}$ comme un sous-corps du corps des constantes avec comme fibre $\ell^2(\mathbb{Q}_+^*)$. Pour tout $f \in \mathcal{H}$, l'application $x \to \lambda_x(\widetilde{f})$ est alors fortement continue avec des valeurs dans $\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Q}_+^*))$. Cela peut être vérifié directement pour les $\widetilde{\mu}_n$ et pour les éléments de $C(\mathcal{R})$.
Il s'ensuit que pour toute $f \in \mathcal{H}$, la fonction sur $\mathcal{R}$, définie par $x \to \|\lambda_x(\widetilde{f})\|$, est semi-continue par le bas dans le sens où $\{x\,;\|\lambda_x(\widetilde{f}) > \alpha\}$ est un ensemble ouvert pour tout α. Ainsi

$$\sup_{x \in \mathcal{R}} \|\lambda_x(\widetilde{f})\| = \text{Ess Sup}_{x\in\mathcal{R}} \|\lambda_x(\widetilde{f})\| \tag{24}$$

et le côté droit est égal à $\|f\|_{C_r^*}(\Gamma, \Gamma_0)$ de telle façon que l'égalité (9) en découle.

5 Action de $W \times \mathbb{R}$ sur la C^*-algèbre $C_\mathbb{Q}$

Soit $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ l'action de $\mathbb{R}$ sur la C^*-algèbre $C_\mathbb{Q} = C^*(P_\mathbb{Q}^+, P_\mathbb{Z}^+)$ définie dans la proposition 4. En fonction des classes doubles X dans $\Gamma_0\backslash\Gamma/\Gamma_0, \Gamma = P_\mathbb{Q}^+, \Gamma_0 = P_\mathbb{Z}^+$, on a

$$\sigma_t(e_X) = k^{-it} e_X, \qquad k = \frac{R(X)}{L(X)}$$

et pour la classe double de $g = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \in P_\mathbb{Q}^+$, on a

(1) $$k = a.$$

Par rapport à la présentation de $C_\mathbb{Q}$ (Proposition 18), on a

(2) $$\sigma_t(\mu_n) = n^{it}\mu_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sigma_t(e(\gamma)) = e(\gamma)$$

quelque soit $\gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et quelque soit $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 20.

(a) La C^*-sous-algèbre de $C_\mathbb{Q}$ donnée par les points fixes de σ, $C_\mathbb{Q}^\sigma = \{x \in C_\mathbb{Q}\,; \sigma_t(x) = x, \forall t \in \mathbb{R}\}$ est l'image de $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ par l'isomorphisme associé à l'homomorphisme $\gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to e(\gamma) \in C_\mathbb{Q}$.

(b) Le centralisateur de l'état φ sur $C_\mathbb{Q}$ donné par le Lemme 16 est égal à $C_\mathbb{Q}^\sigma = C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Preuve. (a) Par construction, $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset C_\mathbb{Q}^\sigma$. L'action σ de $\mathbb{R}$ sur $C_\mathbb{Q}$ est presque-périodique et diagonale dans la base linéaire (e_X) de $\mathcal{H}$. La projection P sur les points fixes de σ, donnée par la moyenne presque-périodique des σ_t est l'identité sur les classes doubles $e_{X^\gamma}, \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, et elle s'évanouit, $P(e_X) = 0$, sur les classes doubles de tout $g = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}, a \neq 1$. La conclusion en découle puisque $\mathcal{H}$ est dense sur $C_\mathbb{Q}$ et P est de norme continue.

(b) découle de (a) et du Lemme 16.

Nous allons maintenant définir une action naturelle par les automorphismes de $C_\mathbb{Q}$, du groupe des classes d'idèles $W = \mathcal{A}^*/\mathbb{Q}_+^*$. Rappelons d'abord que nous avons obtenu $C_\mathbb{Q}$ dans la Proposition 15 du commutant de $P_\mathbb{Q}^+$ dans $\ell^2(\Delta)$ où $\Delta = P_\mathcal{A}/P_\mathcal{R} = P_\mathbb{Q}^+/P_\mathbb{Z}^+$. Montrons que $W = \mathcal{A}^*/\mathbb{Q}_+^*$ agit de façon naturelle sur le commutant de $P_\mathbb{Q}^+$ dans $\ell^2(\Delta)$. Le groupe $P_\mathcal{A}$ agit sur Δ et sur $\ell^2(\Delta)$ et ainsi le commutant de $P_\mathbb{Q}^+$ est le même que le commutant de sa fermeture $\overline{P}_\mathbb{Q}^+$ dans $P_\mathcal{A}$. On a (cf. Proposition 12) $\overline{P}_\mathbb{Q}^+ = \mathcal{A} \rtimes \mathbb{Q}_+^*$ qui est un *sous-groupe normal* de $P_\mathcal{A}$. Ainsi le groupe quotient

(3) $$W = \mathcal{A}^*/\mathbb{Q}_+^* = P_\mathcal{A}/\overline{P}_\mathbb{Q}^+$$

agit naturellement sur le commutant $P_\mathbb{Q}^{+\prime}$ de $P_\mathbb{Q}^+$ dans $\ell^2(\Delta)$, par

(4) $$\theta_u(x) = uxu^* \quad \forall x \in P_\mathbb{Q}^{+\prime}, \quad \forall u \in W.$$

(Le choix du représentant $u \in P_\mathcal{A}$ de la classe de u est sans importance). Cela définit une action fortement continue du groupe compact W sur l'algèbre de von Neumann $P_\mathbb{Q}^{+\prime}$.

Proposition 21.

(a) L'action θ de W sur $P_{\mathbb{Q}}^{+\prime}$ laisse la C^*sous-algèbre dense globalement invariante et est de norme ponctuelle continue (elle converge simplement en norme) sur $C_{\mathbb{Q}}$.

(b) La sous-algèbre point fixe $C_{\mathbb{Q}}^W$ est la C^*-algèbre $C^*(\mathbb{N}^*)$ engendrée par les $\mu_n \in C_{\mathbb{Q}}$.

(c) L'action de W sur $C_{\mathbb{Q}}$ préserve l'état φ et commute avec l'action $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

Preuve. Montrons d'abord que μ_n, i.e. la convolution à droite $r(f)$ dans $\ell^2(\Gamma/\Gamma_0)$ par $f = n^{-1/2} e_{X_n}$, appartient non seulement au commutant de $P_{\mathbb{Q}}^+$ (Proposition 15) mais également au commutant de $P_{\mathcal{A}}$. Par construction, on a

$$\langle \mu_n^* \varepsilon_e, g\varepsilon_e \rangle = f(g) = n^{-1/2} e_{X_n}(g) \qquad \forall g \in \Gamma \tag{5}$$

et puisque les $g\varepsilon_e,\ g \in \Gamma/\Gamma_0$ forment une base de $\ell^2(\Delta)$, nous obtenons

$$\mu_n^* \varepsilon_e = n^{-1/2} g_n \varepsilon_e, \qquad g_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \in \Gamma. \tag{6}$$

Supposons que $n = p$ est un nombre premier et montrons que $p^{1/2}\mu_p^*$ coïncide avec l'opérateur dans $\ell^2(\Delta) = \bigotimes_q (\ell^2(T_q), *)$ donné par $\widetilde{t}_p = 1 \otimes t_p \otimes 1 \otimes \ldots$, où t_p est la translation hyperbolique d'une unité de longueur vers le point à l'∞ dans l'arbre T_p de la Proposition 12.

Notons que cette translation hyperbolique est exactement p vers un de telle façon que $p^{-1/2}t_p$ est une co-isométrie sur $\ell^2(T_p)$. Maintenant, on a à la fois μ_p^* et t_p qui commutent avec l'action de $P_{\mathbb{Q}}^+$ sur $\ell^2(\Delta)$, et ε_e est cyclique pour $P_{\mathbb{Q}}^+$. Ainsi l'égalité

$$p^{1/2}\mu_p^* \varepsilon_e = \widetilde{t}_p \varepsilon_e$$

implique l'égalité des opérateurs

$$\mu_p^* = p^{-1/2}\widetilde{t}_p. \tag{7}$$

Puisque $\widetilde{t}_p$ appartient au commutant de $P_{\mathcal{A}}$, par construction, on obtient ainsi que $\mu_p \in (P_{\mathcal{A}})'$ et

$$\theta_u(\mu_n) = \mu_n \qquad \forall u \in W, n \in \mathbb{N}^*. \tag{8}$$

Pour prouver 21 (a), nous avons seulement besoin de montrer que l'action θ de W laisse la C^*-sous-algèbre $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = C(\mathcal{R})$ de $C_{\mathbb{Q}}$ globalement invariante et qu'elle est de norme ponctuelle continue sur $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Cela va découler de l'assertion plus précise suivante :

Lemme 22. *Soit $f \in C(\mathcal{R}) = C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset C_{\mathbb{Q}}$. Alors*

$$\theta_u(f)(b) = f(ub) \qquad \forall b \in \mathcal{R}, u \in \mathcal{R}^* = W.$$

Preuve. Considérons (cf. [We$_2$] p. 257) la décomposition en produit direct :

$$\mathcal{A}^* = \mathbb{Q}_+^* \times \left(\prod_p \mathbb{Z}_p^*\right) = \mathbb{Q}_+^* \times \mathcal{R}^*$$

où le morphisme $r : \mathcal{A}^* \to \mathbb{Q}_+^*$ est donné par

$$r(z) = \prod_p |z_p|_p^{-1} = \prod_p p^{\mathrm{val}(z_p)}$$

Par construction, r est l'identité sur $\mathbb{Q}_+^*$ et son noyau est $\prod_p \mathbb{Z}_p^* = \mathcal{R}^*$; ainsi, r est la projection sur le premier terme de cette décomposition comme un produit. Nous utilisons la seconde projection pour identifier W et $\mathcal{R}^*$.

L'égalité des groupes abéliens $\mathcal{A}/\mathcal{R} = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ montre que la multiplication par un élément $u \in \mathcal{R}^*$ définit un automorphisme m_u de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et pour prouver le Lemme 22, on a juste à montrer que pour tout $\gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on a

$$\theta_u(e(\gamma)) = e(m_{u^{-1}}\gamma) \qquad \forall u \in \mathcal{R}^* \tag{9}$$

Puisque ε_e est séparateur pour $P_{\mathbb{Q}}^{+\prime}$, il suffit de vérifier que $\theta_u(e(\gamma))\, \varepsilon_e = e(m_{u^{-1}}\gamma)\, \varepsilon_e$, i.e. que

$$u\, e(\gamma)\, u^*\, \varepsilon_e = e(m_{u^{-1}}\gamma)\, \varepsilon_e. \tag{10}$$

Puisque ε_e est laissé fixe par $P_{\mathcal{R}} \subset P_{\mathcal{A}}$, il est fixe par l'action de $u^* \in \mathcal{R}^* \subset P_{\mathcal{R}}$. De plus, pour tout $\delta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, l'action de $e(\delta)$ sur ε_e donne simplement $\begin{bmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \varepsilon_e$. Ainsi (10) découle de l'égalité

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \delta u^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cela complète la preuve du Lemme 22 et de la Proposition 21 (a). Pour prouver la Proposition 21 (c), noter que l'action de $\mathcal{R}^*$ dans $\ell^2(\Delta)$ fixe le vecteur ε_e, ce qui prouve que l'action de W sur $C_{\mathbb{Q}}$ préserve l'état φ. Il commute trivialement avec σ_t en tous cas. Prouvons la Proposition 21 (b). Puisque W est un groupe compact, nous pouvons considérer la projection naturelle E de $C_{\mathbb{Q}}$ sur $C_{\mathbb{Q}}^W$ donnée par

$$E(x) = \int_W \theta_u(x) du \tag{11}$$

Par construction, E est de norme continue et satisfait

$$E(axb) = a\, E(x)\, b \qquad \forall x \in C_{\mathbb{Q}}, \ \ a, b \in C_{\mathbb{Q}}^W. \tag{12}$$

Puisque par (8), on a $C^*(\mathbb{N}^*) \subset C_{\mathbb{Q}}^W$, il suffit d'utiliser la base linéaire $\mu_n\ e(\gamma)\ \mu_m^*$ de $\mathcal{H}$, pour montrer que

$$E(e(\gamma)) \in C^*(\mathbb{N}^*) \qquad \forall \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \tag{13}$$

pour conclure que $C^*(\mathbb{N}^*) = C_{\mathbb{Q}}^W$.

Finalement, pour prouver (13), noter que $E(e(\gamma)) \in C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = C(\mathcal{R})$ est donné par une fonction $f \in C(\mathcal{R})$ telle que

$$f(ub) = f(b) \qquad \forall u \in \mathcal{R}^*, \forall b \in \mathcal{R}. \tag{14}$$

Cette égalité définit une C^*-sous-algèbre de $C(\mathcal{R}) = \bigotimes_{p \in \mathcal{P}} C(\mathcal{R}_p)$, qui est identique à $C^*(\mathbb{N}^*) \cap C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Cela peut se voir localement en montrant que

$$f \in C(\mathcal{R}_p), \ \ f(ub) = f(b) \qquad \forall u \in \mathcal{R}_p^*, b \in \mathcal{R}_p \tag{15}$$

implique que f est une fonction de $|\ \ |_p$.

6 Classification des états KMS_β pour $\beta > 1$

Nous allons d'abord construire des représentations involutives π_α de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ étiquetées par le groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbb{Q})$ du sous-corps $\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}$ de $\mathbb{C}$ engendré par toutes les racines de l'unité.
Soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}^*)$, avec sa base orthonormale canonique $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Proposition 23. Les égalités suivantes définissent une représentation involutive π_1 de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Gamma, \Gamma_0)$ dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$,

(α) $\pi_1(\mu_n)\, \varepsilon_k = \varepsilon_{nk} \quad \forall n, k \in \mathbb{N}^*$

(β) $\pi_1(e(\gamma))\, \varepsilon_k = \exp(2\pi i k\gamma)\, \varepsilon_k \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Proof. Nous avons juste besoin de vérifier que les relations (a)-(f) sont respectées par les opérateurs $\mu'_n = \pi_1(\mu_n)$ et $e'(\gamma) = \pi_1(e(\gamma))$ définis par $(\alpha), (\beta)$. Puisque l'application $k \to nk$ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ est injective, la relation (a) est vérifiée et de plus, l'adjoint μ'^*_n est donné par

(1) $$\mu'^*_n \varepsilon_k = \varepsilon_{k/n} \quad \text{if } n|k \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

La relation (b) est évidente. Pour vérifier (c), noter que si $(n, m) = 1$, alors $m|k \iff m|nk$ et quand on l'applique à ε_k, à la fois $\mu'_n \mu'_m{}^*$ et $\mu'_m{}^* \mu'_n$ s'évanouissent ou sont égaux à $\varepsilon_{nk/m}$. La relation (d) est évidente ainsi que (e),

(2) $$e'(\gamma)\, \mu'_n\, \varepsilon_k = e'(\gamma)\, \varepsilon_{nk} = \exp 2\pi i(nk\gamma)\, \varepsilon_{nk} = \mu'_n\, e'(n\gamma)\, \varepsilon_k.$$

Vérifions (f). Les deux côtés appliqués à ε_k s'évanouissent à moins que $n|k$. C'est clair pour le côté gauche par (1), et c'est vrai pour le côté droit parce qu'il est de la forme

$$e'(\delta_0)\, \frac{1}{n} \sum_{n\delta=0} e'(\delta), \qquad n\delta_0 = \gamma$$

et $\sum_{n\delta=0} e'(\delta)\, \varepsilon_k = 0$ à moins que $n|k$. Ensuite, quand $n|k$ de telle façon que $k = qn$, on a :

$$\mu'_n\, e'(\gamma)\, \mu'^*_n\, \varepsilon_k = \exp(2\pi i q\gamma)\, \varepsilon_k$$
$$e'(\delta_0)\, \varepsilon_k = \exp(2\pi i k\delta_0)\, \varepsilon_k = \exp(2\pi i q\gamma)\, \varepsilon_k$$

pour tout $\delta_0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tel que $n\delta_0 = \gamma$.

Proposition 24.

(1) Pour $\alpha \in G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbb{Q})$, les égalités suivantes définissent une représentation involutive π_α de $\mathcal{H}$ dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$:
(α) $\pi_\alpha(\mu_n)\, \varepsilon_k = \varepsilon_{nk} \quad \forall n, k \in \mathbb{N}^*$
(β) $\pi_\alpha(e(\gamma))\, \varepsilon_k = \alpha(\exp 2\pi i k\gamma)\, \varepsilon_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(2) Pour tout élément $x \in \mathcal{H}(\mathbb{Q})$ de la $\mathbb{Q}$ algèbre engendrée par les μ_n et les $e(\gamma)$, les éléments de la matrice $\pi_\alpha(x)$ satisfont

$$\langle \pi_\alpha(x)\, \varepsilon_{k_1}, \varepsilon_{k_2} \rangle = \alpha \langle \pi_1(x)\, \varepsilon_{k_1}, \varepsilon_{k_2} \rangle \qquad \forall k_j.$$

Preuve. (1) La preuve ci-dessus de la Proposition 23 marche sans changement. Le seul point important est de vérifier (d), notamment que $\pi_\alpha(e(\gamma))^* = \pi_\alpha(e(-\gamma))$. Cela est vrai car la conjugaison complexe $z \to \overline{z}$ commute avec tout $\alpha \in G$.

(2) Par construction, les éléments de la matrice des π_α des générateurs satisfont la relation souhaitée qui est stable par les opérations algébriques sur des matrices n'impliquant que des sommes finies de produits.

Définissons H comme l'opérateur positif dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$ correspondant à l'évolution temporelle décrite dans la Section 2, notamment

$$H_{\varepsilon_n} = (\log n)\, \varepsilon_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{3}$$

Nous avons déjà vu dans la Section 2 que

$$e^{itH}\, x\, e^{-itH} = \sigma_t(x) \qquad \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*), \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Puisqu'il est évident que H commute avec $\pi_\alpha(y)$ pour tout $y \in C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset C_\mathbb{Q}$, nous obtenons alors

$$e^{itH}\, \pi_\alpha(x)\, e^{-itH} = \pi_\alpha(\sigma_t(x)) \qquad \forall x \in C_\mathbb{Q}, \forall t \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le :

Théorème 25. Soit $\widetilde{\pi}_\alpha$ l'extension canonique de la représentation π_α de $\mathcal{H}$ à la C^*-algèbre $C_\mathbb{Q}$, et soit $\beta > 1$.

(a) L'égalité suivante définit un état KMS_β sur $(C_\mathbb{Q}, \sigma_t)$:

$$\varphi_{\beta,\alpha}(x) = \zeta(\beta)^{-1}\mathrm{Trace}(\widetilde{\pi}_\alpha(x)\, e^{-\beta H}) \qquad \forall x \in C_\mathbb{Q}.$$

(b) L'application $\alpha \to \varphi_{\beta,\alpha}$ est un homomorphisme du groupe de Galois G de $\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}$ avec l'espace des points extrêmes du simplexe de Choquet des états KMS_β sur $(C_\mathbb{Q}, \sigma_t)$.

Preuve. (a) D'abord, par la Proposition 19, nous savons que la représentation π_α s'étend à une représentation de $C_\mathbb{Q}$ et l'égalité (5) avec la finitude de $\mathrm{Trace}(e^{-\beta H}) = \zeta(\beta)$ donne (a).

(b) Fixons $\beta > 1$ et montrons d'abord que l'application $\alpha \to \varphi_{\beta,\alpha}$ est injective.
Pour montrer cela, noter que chacune des représentations π_α de $C_\mathbb{Q}$ est irréductible et par construction, chaque $\varphi_{\beta,\alpha}$ est un facteur d'état de type I_∞. Aussi sa construction GNS détermine canoniquement l'opérateur positif $H, 0 \in \mathrm{Sp}H$, comme un opérateur non-borné associé à la fermeture faible de $C_\mathbb{Q}$: en particulier, $\varphi_{\beta,\alpha}$ détermine canoniquement l'état à température 0,

$$\varphi_{\infty,\alpha}(x) = \langle \pi_\alpha(x)\, \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle. \tag{6}$$

Quand on restreint cet état $\varphi_{\infty,\alpha}$ à l'anneau de groupes $\mathbb{Q}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$ de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ à coefficients rationnels, on trouve le plongement du corps $\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}$ des racines de l'unité dans $\mathbb{C}$:

$$\varphi_{\infty,\alpha}(\sum \lambda_j \gamma_j) = \alpha(\sum \lambda_j \exp(2\pi i \gamma_j)) \tag{7}$$

qui bien sûr détermine $\alpha \in G$ de manière unique.

Ensuite, chaque $\varphi_{\beta,\alpha}$ est un facteur d'état et ainsi, est un point extrême de l'ensemble convexe faiblement compact K_β d'états KMS_β. Soit $\mathcal{E}(K_\beta)$ l'espace des points extrêmes de K_β. Nous avons montré que l'application $\alpha \to \varphi_{\beta,\alpha}$ est une injection de G dans $\mathcal{E}(K_\beta)$.
Cette application est faiblement continue puisque, comme $\beta > 1$, la série $\sum \alpha(\exp 2\pi i k\gamma) k^{-\beta}$ est uniformément convergente. Il reste à montrer que cette application est surjective. Noter d'abord que pour tout élément u de W, il existe un élément correspondant $\alpha(u)$ de G tel que

$$\varphi_{\beta,1} \circ \theta_u = \varphi_{\beta,\alpha(u)} \tag{8}$$

et l'application $u \to \alpha(u)$ est un isomorphisme entre W et G. Ensuite, il existe sur $C_{\mathbb{Q}}$ un unique état KMS_β qui est W-invariant. Cela est vrai pour toute valeur $\beta \in]0,\infty[$ et cela découle de la Proposition 21 (b) et de la Proposition 8 (a). En effet, étant donné un tel état φ, on a $\varphi = \varphi \circ E$ où E est la projection $E = \int_W \theta_u du\ \varphi$ de $C_{\mathbb{Q}}$ sur $C_{\mathbb{Q}}^W$ et la restriction de φ à $C_{\mathbb{Q}}^W = C^*(\mathbb{N}^*)$ est unique. Alors soit ψ est un état KMS_β ; on a

$$\int_W \psi \circ \theta_u du = \int_W \varphi_{\beta,\alpha(u)} du \tag{9}$$

puisque les deux côtés sont des états KMS_β W-invariants. Maintenant, si $\psi \in \mathcal{E}(K_\beta)$ est un point extrême, cette égalité (9) donne deux décompositions du même état comme barycentre des mesures sur $\mathcal{E}(K_\beta)$, qui est un simplexe de Choquet (Proposition 2), de telle sorte que

$$\psi \circ \theta_u \in \{\varphi_{\beta,\alpha(v)}\ ; v \in W\} \quad \text{pour presque tout } u. \tag{10}$$

Finalement, cela implique que $\psi = \varphi_{\beta,\alpha(v)} \circ \theta_u^{-1}$ pour un $u, v \in W$ et ψ est dans l'image de l'application $\alpha \to \varphi_{\beta,\alpha}$. Puisque l'application $\alpha \to \varphi_{\beta,\alpha}$ est continue et bijective et puisque G est compact, il est homéomorphe à son image $\mathcal{E}(K_\beta)$ et cela prouve le Théorème 25.

Remarques 26.

(1) Nous donnerons dans la section prochaine la formule générale (pour toutes les valeurs de β) pour l'état KMS_β W-invariant φ_β sur $C_{\mathbb{Q}}$, mais nous pouvons trouver la formule pour $\beta > 1$ d'ores et déjà en utilisant l'égalité (9). D'abord, en utilisant la base linéaire $(t_{n,m,\gamma})$ de $H \subset C_{\mathbb{Q}}$ décrite dans la Section 4, on a

$$\varphi(t_{n,m,\gamma}) = 0 \text{ si } \ n/m \neq 1 \ \ \forall \varphi \in K_\beta. \tag{11}$$

Ainsi, cela suffit pour déterminer la restriction de φ_β à $C_{\mathbb{Q}}$. Pour cela, on peut par exemple utiliser le côté droit de (9) et la formule du Théorème 25 (a) pour $\varphi_{\beta,\alpha}$. Soit $\gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$. Alors on a

$$\int_G \alpha(\exp 2\pi i n\gamma)\ d\alpha = \frac{\mu(b/d)}{\varphi(b/d)} \tag{12}$$

où $\gamma = \frac{a}{b}, (a,b) = 1$ et $(n,b) = d$ est le p.g.c.d de n et b. De plus, μ est la fonction de Moebius et φ est l'indicateur d'Euler. Définissons ρ_β comme la fonction multiplicative telle que

$$\sum_{(n,b)=1} n^{-\beta} = \rho_\beta(b)\ \zeta(\beta). \tag{13}$$

On a $\rho_\beta(b) = \prod_{p|b,\, p\ premier} (1-p^{-\beta})$.

L'unique état KMS$_\beta$ W-invariant, donné par (9) satisfait

$$\varphi_\beta(e(\gamma)) = \sum_{d|b} \frac{\mu(b/d)}{\varphi(b/d)} \rho_\beta(b/d) d^{-\beta} \tag{14}$$

où b est le dénominateur de la fraction irréductible $\gamma = \frac{a}{b}$. Le côté droit de (14) est une fonction multiplicative de b et il est aussi donné par

$$\varphi_\beta(e(\gamma)) = b^{-\beta} \prod_{p|b,\, p\ premier} (1-p^{\beta-1})(1-p^{-1})^{-1} \tag{15}$$

comme cela peut être constaté en calculant le côté droit de (14) quand b est une puissance de premier. Nous donnerons une autre preuve de (15) dans la prochaine section.

(2) L'énoncé du Théorème 25 (b) s'applique aussi aux états à température 0 notés $\varphi_{\infty,\alpha}$. Pour de tels états extrêmes, l'application $\varphi_{\infty,\alpha}$ restreinte à $\mathbb{Q}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}] \subset C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ donne l'appariement associé au corps $\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}$ des racines de l'unité dans $\mathbb{C}$, comme nous l'avons vu plus haut.

(3) Le Théorème 25 montre que la fonction de partition du système C^*-dynamique $(C_\mathbb{Q}, \sigma_t)$ est la fonction zêta de Riemann.

7 Unicité des états KMS$_\beta$ pour $\beta \in]0,1]$

Dans cette section, nous allons montrer que pour $\beta \in]0,1]$, il existe un unique état KMS$_\beta$ sur la C^*-algèbre $C_\mathbb{Q}$. Nous avons vu dans la Section 5, Proposition 21, que la C^*-sous-algèbre $C^*(\mathbb{N}^*) \subset C_\mathbb{Q}$ engendrée par les μ_n est l'algèbre point fixe de l'action de W sur $C_\mathbb{Q}$:

$$C^*(\mathbb{N}^*) = C_\mathbb{Q}^W \tag{1}$$

Puisque W est un groupe abélien compact, son action sur $C_\mathbb{Q}$ a un spectre discret, et nous pouvons considérer pour chaque caractère χ de W le sous-espace spectral correspondant (cf. [Ped]),

$$C_{\mathbb{Q},\chi} = \{x \in C_\mathbb{Q}\,;\theta_u(x) = \chi(u)\,x \qquad \forall u \in W\} \tag{2}$$

Pour prouver l'unicité des états KMS$_\beta$ sur $C_\mathbb{Q}$ pour $0 < \beta \leq 1$, nous allons analyser les automorphismes partiels des facteurs de type III$_1$ associés à $(C^*(\mathbb{N}^*), \varphi_\beta)$ et à un caractère non trivial fixe χ de W.

Nous montrerons que ces automorphismes partiels sont extérieurs. Etant donné un élément V de $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = C(\mathcal{R})$ (resp. un caractère χ de W), nous dirons que V (resp. χ) est localisé dans un sous-ensemble F de $\mathcal{P}$, l'ensemble des places finies de $\mathbb{Q}$, ssi

$$V \in (\otimes_{p\in F} C(R_p)) \otimes 1 \subset C(\mathcal{R}) \tag{3}$$

(resp. si χ, vu comme un caractère de $\mathcal{A}^*$, se factorise à travers la projection $W \to \prod_{p\in F} \mathbb{Q}_p^*$).

Enonçons le lemme principal.

LEMME 27. *Soient $\beta \in]0,1]$ et ψ un état KMS$_\beta$ sur le système C^*-dynamique $(C_{\mathbb{Q}}, \sigma_t)$. Alors :*

(a) La restriction de ψ à $C^*(\mathbb{N}^*)$ est égale à φ_β.

(b) Soit χ un caractère non trivial de W et $V \in C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ une isométrie partielle tous deux localisés dans un ensemble fini $F \subset \mathcal{P}$, tels que

$$\theta_g(V) = \chi(g)V \qquad \forall g \in W.$$

Alors $\psi(Vx) = 0 \quad \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*)$.

(c) La restriction de ψ aux sous-espaces spectraux $C_{\mathbb{Q},\chi}, \chi \neq 1$ est égale à 0.

Preuve. (a) Puisque la restriction de σ_t à $C^*(\mathbb{N}^*)$ est le groupe à un paramètre d'automorphismes de la Proposition 8, la restriction de ψ à $C^*(\mathbb{N}^*)$ est un état KMS$_\beta$ et la conclusion découle de la Proposition 8 (a).
(b) Soit $E = V^*V$. Comme $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est commutatif, on a $E = VV^*$; aussi E appartient à l'algèbre $C_{\mathbb{Q}}^W = C^*(\mathbb{N}^*)$. Soit α l'automorphisme de l'algèbre réduite $C^*(\mathbb{N}^*)_E$ déterminé par l'égalité

$$\alpha(x) = V\, x\, V^* \qquad \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*)_E. \tag{4}$$

Soit M le facteur (de type III$_1$) qui est la fermeture faible de $C^*(\mathbb{N}^*)$ dans la représentation G.N.S. de φ_β. Identifions $C^*(\mathbb{N}^*)$ avec une sous-algèbre faiblement dense de M et étendons l'état φ_β à un état normal $\widetilde{\varphi}_\beta$ sur M. Puisque V appartient à l'algèbre point fixe de σ_t, il appartient au centralisateur de ψ. Il suit de là que l'automorphisme α de $C^*(\mathbb{N}^*)_E$ préserve $\widetilde{\varphi}_\beta$ et s'étend à un automorphisme de M_E. Montrons que pour $\beta \in]0,1]$, cet automorphisme est extérieur. Pour tout $q \in \mathcal{P}\backslash F$, on a

$$E\mu_q \in M_E, \;\; \alpha(E\mu_q) = \chi(g_q)\, E\, \mu_q \tag{5}$$

où $g_q \in \mathcal{R}^* = \prod \mathbb{Z}_p^*$ est donné par ses composants

$$(g_q)_p = q \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{Z}_p^* \;\text{ si } q \neq p, (g_q)_q = 1. \tag{6}$$

Pour prouver (5), notons que pour tout $f \in C(\mathcal{R}) = C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a (cf. Proposition 18 (e))

$$f\mu_n = \mu_n f_n, \quad \text{où} f_n(b) = f(nb) \qquad \forall b \in \mathcal{R}. \tag{7}$$

Ainsi, si f est localisé dans $F \subset P$ et $q \notin F$, on obtient $\theta_{g_q}(f) = f_q$,

$$f\, \mu_q = \mu_q\, \theta_{g_q}(f). \tag{8}$$

En appliquant cela à $f = V$, on obtient $V\mu_q = \chi(g_q)\, \mu_q\, V$, i.e. on obtient (5). Voyons χ comme un caractère de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ où les facteurs premiers de m appartiennent tous à F. Alors nous pouvons simplement écrire $\chi(q)$ plutôt que $\chi(g_q)$, pour $q \notin F$. Il découle de (5) que, modulo les automorphismes intérieurs, l'automorphisme α est le produit tensoriel infini

$$\alpha = \bigotimes_{q \notin F} \rho_{q,\chi(q)} \quad \text{dans} \quad M_{F^c} = \bigotimes_{q \notin F} (M_q, \varphi_{\beta,q}) \tag{9}$$

où pour tout nombre complexe $\lambda, |\lambda| = 1$, on définit $\rho_{p,\lambda}$ comme l'automorphisme de τ_p, tel que

$$\rho_{p,\lambda}(\mu_p) = \lambda \mu_p. \tag{10}$$

Cet automorphisme est un cas particulier de $\sigma_{t,p}$ et il préserve l'état $\varphi_{\beta,p}$ par construction.
Pour tout $\chi \in \widehat{W}$ localisé sur F, appelons $\widetilde{\theta}_\chi$ l'élément de $\mathrm{Ext}(M) = \mathrm{Aut}(M)/\mathrm{Int}(M)$ déterminé par la classe de

$$\left(\bigotimes_{q\in F} \mathrm{id}\right) \bigotimes \bigotimes_{q\notin F} \rho_{q,\chi(q)} \tag{11}$$

Lemme 28. $\widetilde{\theta}_\chi$ est intérieur relativement à φ_β ssi le produit infini suivant converge absolument en valeur absolue

$$\prod_{p\in\mathcal{P}} (1-p^{-\beta})(1-\chi(p)\, p^{-\beta})^{-1}.$$

Preuve. On a, dans le facteur M_p de type I_∞, associé à $(\tau_p, \varphi_{\beta,p})$, un facteur unitaire implémentant l'automorphisme $\rho_{p,\chi(p)}$; il est donné par l'opérateur diagonal qui a pour valeurs propres les $\chi(p)^j,\ j \in \mathbb{N}$. Evaluer l'état $\varphi_{\beta,p}$ sur cet unitaire donne

$$(1-p^{-\beta}) \sum_0^\infty \chi(p)^n\, p^{-n\beta} = (1-p^{-\beta})(1-\chi(p)\, p^{-\beta})^{-1}$$

et le résultat suit de critères généraux (cf. [Co]). Cela montre en utilisant le théorème de Dirichlet [Ser$_1$] que $\widehat{\theta}_\chi$ est extérieur (χ non trivial) quand $\beta \le 1$ et est intérieur (puisque φ_β est un facteur d'états de type I_∞) pour $\beta > 1$.
Ce lemme montre que, pour $\beta \in]0,1]$, l'automorphisme α de M_E donné par (4) est extérieur :

$$\{y \in M_E \;; \qquad y\, \alpha(x) = xy \qquad \forall x \in M_E\} = \{0\}. \tag{12}$$

Maintenant, soit L la forme linéaire sur M_E donnée par

$$L(x) = \psi(Vx) \qquad \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*)_E. \tag{13}$$

L'inégalité de Schwartz $|L(x)|^2 < \psi(E)\, \psi(x^*x)$ montre que c'est une fonctionnelle linéaire normale sur M_E. Soit u l'isométrie partielle, $u \in M_E$, de sa décomposition polaire $L = u\,|L|$. La condition KMS$_\beta$ pour ψ appliquée à la paire Vx, y ; $x \in C^*(\mathbb{N}^*), y \in C^*(\mathbb{N}^*)$, montre que L satisfait la condition KMS$_\beta$ α-twistée, où $L(\sigma_t(y)\, x)$ est remplacé par $L(\sigma_t(y)\, \alpha(x))$. Maintenant puisque à la fois V et ψ sont σ_t invariants, L l'est aussi et par conséquent, u et $|L|$ le sont aussi. Il suit de ça que la dérivée de Radon-Nikodym $(D|L| : D\widetilde{\varphi}_\beta)_t$ appartient au centralisateur de $\widetilde{\varphi}_\beta$ et est de la forme h^{it} avec

$$|L|(x) = \widetilde{\varphi}_\beta(hx) \qquad \forall x \in M_E. \tag{14}$$

De la condition KMS$_\beta$ twistée, on obtient

$$z\, hu = hu\, \alpha(z) \qquad \forall z \in M_E \tag{15}$$

ce qui implique par (12) que $hu = 0$ et que $L = 0$.
Cela prouve le Lemme 27 (b). Prouvons 27 (c). Il suffit pour cet objectif, étant donné un caractère $\chi \in \widehat{W}$ localisé dans $F \subset \mathcal{P}$, de trouver une séquence V_n d'isométries partielles $V_n \in C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = C(\mathcal{R})$, localisée dans F et telle que

$$\theta_g(V_n) = \chi(g) V_n \qquad \forall g \in W \;;\; \varphi_\beta(V_n V_n^*) \underset{n\to\infty}{\to} 1. \tag{16}$$

Alors, $a \in C_{\mathbb{Q},\chi}$ étant donné, on a :

$$\psi(a) = \lim_{n\to\infty} \psi(V_n\, V_n^*\, a) = 0$$

parce que $V_n^*\, a \in C_{\mathbb{Q},1} = C^*(\mathbb{N}^*)$ et le Lemme 27 (b) s'applique. Finalement la construction des V_n se réduit par le Lemme 22 à la construction de fonctions continues $V_n \in C(\prod_{p\in F} \mathbb{Z}_p)$ telles que

$$V_n(gb) = \chi(g)V_n(b) \qquad \forall b \in \prod_F \mathbb{Z}_p, g \in \prod_F \mathbb{Z}_p^* \tag{17}$$

et telles que les $|V_n|$ sont uniformément bornées et convergent ponctuellement vers 1 ; ceci est immédiat et l'existence des isométries partielles V_n en découle.

Corollaire 29. *Pour tout $\beta \in]0,1]$, il existe au moins un état KMS$_\beta$ sur $C_{\mathbb{Q}}$.*

Preuve. Le groupe W est un groupe compact tel que la somme directe des sous-espaces spectraux $C_{\mathbb{Q},\chi}$, est dense dans $C_{\mathbb{Q}}$ et cela détermine ψ de manière unique par le Lemme 27.

Nous allons maintenant construire cet unique état KMS$_\beta$ ψ_β sur $C_{\mathbb{Q}}$ de manière géométrique en utilisant l'action du produit d'arbres de la Section 3. La construction va découler du lemme général suivant, appliqué au C^*-module $\mathcal{E} = C^*(G)e$ sur $C^*(\mathbb{N}^*)$ et à l'évolution temporelle σ_t de $C^*(\mathbb{N}^*)$.

Lemme 30. *Soit C une C^*-algèbre unitaire, $\mathcal{E}$ un C^*-module sur C, $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de C, $\beta \in]0,\infty[$, φ_β un état KMS$_\beta$ sur C, et $\mathcal{H}_{\varphi_\beta}$ l'espace de Hilbert de la construction GNS pour φ_β.*

(a) *Soit $\mathcal{H}_\beta$ la complétion de $\mathcal{E}$ pour le produit intérieur donné par*

$$\langle \xi, \eta\rangle_\beta = \varphi_\beta(\langle \xi, \eta\rangle) \qquad \forall \xi, \eta \in \mathcal{E}.$$

Alors, l'action des endomorphismes $\mathrm{End}_C(\mathcal{E})$ sur $\mathcal{E}$ s'étend par continuité à $\mathcal{H}_\beta$.

(b) *Il existe une représentation unique ρ de C^0 (l'algèbre opposée de C) dans $\mathcal{H}_\beta$ telle que pour tout $\xi \in \mathcal{H}_\beta$ et $a \in C$ dans le domaine de $\sigma_{i\beta/2}$, on a*

$$\rho(a)\xi = \xi\sigma_{i\beta/2}(a).$$

Cette représentation commute avec l'action à gauche de $\mathrm{End}_C(\mathcal{E})$.

Preuve. L'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\beta$ est le produit tensoriel des C^*-modules

$$\mathcal{H}_\beta = \mathcal{E} \otimes_C \mathcal{H}_{\varphi_\beta} \tag{18}$$

de telle sorte que la première assertion en découle. La seconde assertion en découle également, en utilisant $\mathcal{H}_{\varphi_\beta}$, comme une algèbre de Hilbert gauche et le théorème de stabilisation de Kasparov [Ka].

Nous appliquons ce lemme avec $C = C^*(\mathbb{N}^*)$, $\mathcal{E} = C^*(G)e$, et $\sigma_t \in \mathrm{Aut}\ C$ donné par l'évolution temporelle (Proposition 7 (c)) de $C^*(\mathbb{N}^*)$. Comme $\mathcal{E}$ est un espace de fonctions sur Δ, il en est de même de chaque $\mathcal{H}_\beta$, et pour chaque $\alpha \in \Delta$, nous prenons ε_α la fonction caractéristique de $\{\alpha\} \subset \Delta$.

Les vecteurs $\varepsilon_\alpha, \alpha \in \Delta$ sont de longueur unité dans chaque $\mathcal{H}_\beta$ et fibrent toujours un sous-espace dense de $\mathcal{H}_\beta$. Pour $\beta = 1$, ils forment une base orthonormée de telle sorte que $\mathcal{H}_1 = \ell^2(\Delta)$. Pour calculer le produit intérieur $\langle \varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\alpha'} \rangle_\beta$ dans $\mathcal{H}_\beta$, nous allons d'abord travailler localement, i.e. nous fixons le corps local $K = \mathbb{Q}_p$, et appliquons le Lemme 30 à $C = C^*(P_K)_e$ la C^*-algèbre réduite de P_K relative à la projection $e = 1_{P_R}$, alors que le C^*-module est $\mathcal{E} = C^*(P_K)e$. Nous utilisons sur C l'état $\varphi_{\beta,p}$.
Alors le Lemme 30 fournit un produit intérieur sur l'espace des fonctions à support fini sur l'arbre $T_P = P_K/P_R$.
Calculons maintenant explicitement ce produit intérieur sur l'arbre T associé à n'importe quelle valeur β. Ainsi, K est un corps local, $K = \mathbb{Q}_p$, et nous notons d'abord qu'en transportant $\varphi_{\beta,p}$ par l'isomorphisme canonique entre τ_p et la C^*-algèbre réduite $C^*(P_K)_e$, sa valeur sur une fonction P_R-bi-invariante $f(s), s \in P_K$ est donnée par (cf. formula (9) de la Section 3),

$$\varphi_{\beta,p}(f) = \left(\sum_{k>0} p^{k(1-\beta)} f\left(\begin{bmatrix} 1 & p^{-k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right) (1 - p^{\beta-1}) + f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right). \tag{19}$$

Soit $g \in P_K, g = \begin{bmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & h_0 \end{bmatrix}$. Le produit intérieur $\langle g\,\varepsilon_0,\ \varepsilon_0 \rangle_\beta$, avec ε_0 correspondant au point de base, est égal à $\varphi_{\beta,p}(f)$, où la fonction f est associée par la formule (13) de la section 3 aux classes à droite P_R et $g\ P_R$ dans P_K/P_R :

$$f(s) = m(gP_R \cap P_R s^{-1}) \qquad \forall s \in P_K \tag{20}$$

où m est la mesure de Haar à gauche sur P_K. Nous avons juste besoin d'évaluer $f(s)$ pour $s = \begin{bmatrix} 1 & p^{-k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} P_R\ s^{-1} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & p^{-k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ ; \mathrm{val}(n) \geq 0, \mathrm{val}(h) = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & p^{-k} + n \\ 0 & h \end{bmatrix} \ ; \mathrm{val}(n) \geq 0, \mathrm{val}(h) = 0 \right\} \end{aligned} \tag{21}$$

Tous ses éléments $\begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & a \end{bmatrix}$ satisfont $\mathrm{val}(a) = 0$. Cela implique que $P_R\ s^{-1} \cap g\ P_R \neq 0$ seulement si $\mathrm{val}(h_0) = 0$. Ainsi

$$\langle g\ \varepsilon_0, \varepsilon_0 \rangle = 0 \quad \text{si} \quad \mathrm{val}(h_0) \neq 0 \quad \left(\text{pour } g = \begin{bmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & h_0 \end{bmatrix} \in P_K \right). \tag{22}$$

Supposons maintenant que $\mathrm{val}(h_0) = 0$; en remplaçant g par $g \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h_0^{-1} \end{bmatrix}$, nous pouvons supposer que $ho = 1$ sans changer $g\ \varepsilon_0$. On a

$$\begin{aligned} g\ P_R &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & n_1 \\ 0 & h_1 \end{bmatrix} \ ; \mathrm{val}(n_1) \geq 0, \mathrm{val}(h_1) = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n_1 + h_1 n_0 \\ 0 & h_1 \end{bmatrix} \ ; \mathrm{val}(n_1) \geq 0, \mathrm{val}(h_1) = 0 \right\} \end{aligned} \tag{23}$$

On a $g\ P_R \cap P_R\ s^{-1} \neq 0$ seulement si $\mathrm{val}(n_0) = -k$. Supposons que $\mathrm{val}(n_0) = -k$. Alors nous avons besoin de calculer la mesure de Haar multiplicative sur l'ensemble de $h_1 \in R^*$ telle que $h_1 n_0 = p^{-k} \bmod R$. Cela est vérifié ssi $h_1 \in p^{-k}\ n_0^{-1} + n_0^{-1}\ R = p^k\ n_0^{-1} + p^k\ R$. Les mesures de Haar additive et multiplicative coïncident sur R^* à un coefficient global près $d^*h = \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} dh$. Ainsi nous obtenons l'égalité, avec $g = \begin{bmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} 1 & p^{-k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= (1-p^{-1})^{-1}p^{-k} && \text{si } \ k = -\mathrm{val}(n_0) \\ f\left(\begin{bmatrix} 1 & p^{-k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= 0 && \text{si } k \neq -\mathrm{val}(n_0) \end{aligned} \tag{24}$$

Ceci avec la formule (19) donne l'égalité

(25) $$\varphi_{\beta,p}(f) = p^{-k\beta}(1-p^{\beta-1})(1-p^{-1})^{-1}, \quad k = -\mathrm{val}(n_0)$$

i.e.

(26) $$\langle g\ \varepsilon_0, \varepsilon_0\rangle_\beta = p^{-k\beta}(1-p^{\beta-1})(1-p^{-1})^{-1},$$

où $g = \begin{bmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, k = -\mathrm{val}(n_0)$.

L'étape suivante consiste à comprendre la signification géométrique de l'orbite de $\left\{\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} L_0\right\}$ dans l'arbre T_p et de la valeur $k = -\mathrm{val}(n)$. Puisque l'action de P_K sur l'arbre T_p fixe un point à l'∞, elle préserve les horocycles correspondant à ce point. Ces horocycles sont les classes d'équivalence de la relation $R_\infty : L \sim L'$ ssi $\exists q$ tel que $t^q\ L = t^q\ L'$ où t est la translation hyperbolique d'une unité vers le point à l'∞.

Nous vérifions d'abord que les deux treillis L, L' sont R_∞ équivalents ssi ils sont sur la même orbite du sous-groupe $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, n \in K$ de P_K. Ce sous-groupe est un sous-groupe normal et par conséquent, il définit une relation d'équivalence qui est stable par l'action à gauche de P_K. L'application t est donnée par

(27) $$t(g\ L_0) = g\ g_p\ L_0 \qquad \forall g \in P_K \quad \text{avec } g_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}$$

Plus généralement, $t^q(g\ L_0) = g\ g_p^q\ L_0 \quad \forall g \in P_K$. Ainsi $g_1\ L_0 \sim g_2\ L_0(R_q)$ ssi $g_1\ g_p^q\ L_0 = g_2\ g_p^q\ L_0$, i.e.

(28) $$g_2^{-1}\ g_1 \ \in\ g_p^q\ P_R\ g_p^{-q}.$$

Cela est vérifié ssi $g_2^{-1}g_1$ est de la forme $\begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & h \end{bmatrix}, \mathrm{val}(h) = 0, \mathrm{val}(m) \geq -q$. Ainsi $g_1 L_0 \sim g_2\ L_0(R_\infty)$ ssi $g_2^{-1}g_1 \in K \rtimes R^*$. Les deux treillis $g\ L_0$ et $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g\ L_0$ satisfont trivialement cette relation et inversement, si $g_1\ L_0 \sim g_2 L_0(R_\infty)$, nous pouvons écrire g_2 comme $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\ g_1$ sans affecter $g_j\ L_0$.

Interprétons maintenant la valeur de $-\mathrm{val}(m)$ as comme une fonction de distance entre L_0 and $L = \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} L_0$. Soit $k = -\mathrm{val}(m)$. Nous savons que $t^k(L_0) = t^k(L)$ et que cela n'est pas vrai pour $k-1$. Ainsi $d(L_0, L) = 2k$. On obtient

Lemme 31. Soit $L, L' \in T$ deux treillis.

(a) S'ils appartiennent à des classes d'équivalence d'horocycles différents, ils sont orthogonaux pour $\langle\ \rangle_\beta$.

(b) S'ils appartiennent à des classes de même horocycle à distance $d(L,L')=2k>0$, on a

$$\langle \varepsilon_L, \varepsilon_{L'}\rangle_\beta = p^{-k\beta}(1-p^{\beta-1})(1-p^{-1})^{-1}.$$

(c) Si $L=L'$, alors $\langle \varepsilon_L, \varepsilon_{L'}\rangle_\beta = 1$.

Remarques.

(a) Pour $\beta\to+\infty$, le produit intérieur ci-dessus converge vers une valeur non nulle seulement si $L=L'$ ou si $L\neq L'$ mais $L\sim L'(R_1)$, auquel cas il tend vers $-p^{-1}(1-p^{-1})^{-1}$.

(b) Pour $\beta=0$, le produit intérieur converge vers 1 sur la classe d'équivalence de chaque horocycle, qui se réduisent alors à un seul point dans $\mathcal{H}_\beta, \beta=0$.

Calculons maintenant le produit intérieur correspondant sur $\Delta=\prod(T_p,L_0)=P_{\mathbb{Q}}^+/P_{\mathbb{Z}}^+$. Appelons à nouveau L_0 le point de base. Etant donnée $\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & h\end{bmatrix}=g, n\in\mathbb{Q}, h\in\mathbb{Q}_+^*$, pour obtenir un produit intérieur non nul, $\langle g\ L_0, L_0\rangle$, nous avons besoin qu'en chaque place $p, g_p\ L_0\sim L_0(R_\infty)$ et ainsi que $\mathrm{val}(g_p)=0$. Alors $h=1$. Posons alors $N=\left\{\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}\ ; n\in\mathbb{Q}\right\}$ et essayons de comprendre le produit intérieur sur l'orbite $N\ L_0$. Nous avons une base ε_x paramétrée par $x\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$,

$$\varepsilon_x=\begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{bmatrix} L_0.$$

Le produit intérieur $\langle\varepsilon_x,\varepsilon_0\rangle_\beta$ est alors donné, en utilisant le Lemme 31, par

$$\langle\varepsilon_x,\varepsilon_0\rangle_\beta=\prod_{\substack{p\in P\\ k_p\neq 0}} p^{-k_p\beta}(1-p^{\beta-1})(1-p^{-1})^{-1}$$

où $x=a/b, (a,b)=1$ et $b=\prod_p p^{k_p}$ est la decomposition de b comme produit de puissances de premiers. Plus généralement, elle est invariante par translations, i.e. $\langle\varepsilon_x,\varepsilon_y\rangle_\beta=\langle\varepsilon_{x-y},\varepsilon_0\rangle_\beta$; ainsi la positivité qui en découle est le fait que la fonction donnée par (29) est de type positif sur le groupe des racines de l'unité $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Cette fonction est la fonction ψ_β du Théorème 5.

On a $\langle g_1\ L_0, g_2\ L_0\rangle_\beta=0$ si $g_2^{-1}g_1\notin N$.

Prenons alors une orbite arbitraire $N\ g\ L_0, g\in P_{\mathbb{Q}}^+$. Nous avons besoin de calculer $\langle(1,x)\ g\ L_0,(1,y)\ g\ L_0\rangle_\beta$ où $x,y\in\mathbb{Q}$ et $(1,x)$, $(1,y)$ sont les éléments correspondant de N. On a $\langle(1,x)\ g\ L_0,(1,y)\ g\ L_0\rangle=(\langle g\ \varepsilon_{x'}, g\ \varepsilon_{y'}\rangle=\langle\varepsilon_{x'-y'},\varepsilon_0\rangle$ où $(1,x')=g^{-1}(1,x)g$ et $(1,y')=g^{-1}(1,y)g$. Ainsi, nous voyons que les orbites $N\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}\varepsilon_0,\ \ k\in\mathbb{Q}_+^*$, sont orthogonaux deux à deux pour $\langle\ \rangle_\beta$ et le produit intérieur est, à un renommage près, donné par (29) sur chacun d'eux.

Nous sommes maintenant prêts à décrire les espaces de Hilbert $\mathcal{H}_\beta$ associés par le Lemme 30 au C^*-module $\mathcal{E}=Be$ sur $C^*(\mathbb{N}^*)$ et les états KMS φ_β, et alors à obtenir le commutant de $P_{\mathbb{Q}}^+$ dans $\mathcal{H}_\beta$ comme une représentation unitaire de la C^*-algèbre $C_{\mathbb{Q}}$.

PROPOSITION 32.

(a) *Soit $\mathcal{H}_\beta$ la complétion de l'espace de Hilbert du C^*-module $C^*(P_A)e$, sur $eC^*(P_A)e = C^*(\mathbb{N}^*)$, avec l'état φ_β. Alors $\mathcal{H}_\beta$ a une base naturelle indexée par $P_{\mathbb{Q}}^+/P_{\mathbb{Z}}^+$, et son produit intérieur est invariant par translations à gauche par $P_{\mathbb{Q}}^+$ et donné par*

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \varepsilon_e, \varepsilon_e \right\rangle = 0 \qquad \text{à moins que } a = 1$$
$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \varepsilon_e, \varepsilon_e \right\rangle = \psi_\beta(b)$$

où ψ_β est la fonction de type positif définie dans le Théorème 5.

(b) *La C^*-algèbre $C_{\mathbb{Q}}^0$ admet une représentation dans $\mathcal{H}_\beta$ donnée par la convolution droite avec $\delta^{\beta/2} f$ pour toute fonction $P_{\mathbb{Z}}^+$-bi-invariante f sur $P_{\mathbb{Q}}^+$.*

(c) *Le vecteur ε_0 = classe de $P_{\mathbb{Z}}^+$ est cyclique pour $P_{\mathbb{Q}}^+$, séparateur pour $C_{\mathbb{Q}}$, $\overline{C_{\mathbb{Q}}\varepsilon_0}$ est l'ensemble des points fixes de $P_{\mathbb{Z}}^+ \subset P_{\mathbb{Q}}^+$ et $(C_{\mathbb{Q}})''$ est le commutant de $P_{\mathbb{Q}}^+$ dans $\mathcal{H}_\beta$.*

(d) *Le vecteur ε_0 définit un état KMS$_\beta$ sur $C_{\mathbb{Q}}$.*

Preuve. La preuve de (a) découle de (29). Définissons $\mathcal{H}_{\beta,1}$ comme le sous-espace de $\mathcal{H}_\beta$ engendré par l'orbite $N\varepsilon_0$ de ε_0 sous le sous-groupe normal N de $P_{\mathbb{Q}}^+$. Plus généralement, pour $k \in \mathbb{Q}_+^*$, nous prenons

$$\mathcal{H}_{\beta,k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \mathcal{H}_{\beta,1}. \tag{30}$$

Les sous-espaces $\mathcal{H}_{\beta,k}$ sont orthogonaux deux à deux et $\mathcal{H}_\beta$ est leur somme directe.
Prouvons (b). Nous savons que l'action par convolution droite de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ d'une fonction $P_{\mathbb{Z}}^+$-bi-invariante sur $P_{\mathbb{Q}}^+$ amène une représentation de $\mathcal{H}^0$ sur l'enveloppe linéaire de la base naturelle $\varepsilon_x, x \in P_{\mathbb{Q}}^+/P_{\mathbb{Z}}^+$ de $\mathcal{H}_\beta$. Cela est encore vrai si l'on twiste cette action par l'automorphisme (non involutif) de $\mathcal{H}$ donné par la multiplication par $\delta^{\beta/2}$. Nous avons alors seulement besoin de montrer que la nouvelle représentation de $\mathcal{H}^0$ dans $\mathcal{H}_\beta$ est *involutive*. Quand nous restreignons cette représentation à l'anneau de groupes de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, nous obtenons (comme $\delta = 1$ sur les classes doubles dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$) que la représentation correspondante de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est donnée par

$$\rho(\gamma) \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \varepsilon_0 = \begin{bmatrix} 1 & b+\gamma \\ 0 & a \end{bmatrix} \varepsilon_0. \tag{31}$$

Ainsi $\rho(\gamma)$ est diagonal dans la décomposition $\mathcal{H}_\beta = \oplus \mathcal{H}_{\beta,k}$, et sa restriction à $\mathcal{H}_{\beta,k}$ est unitaire puisque l'action gauche de N sur $\mathcal{H}_{\beta,k}$ est unitaire.

Quand nous restreignons la représentation ρ de $\mathcal{H}^0$ à la sous-algèbre involutive engendrée par les μ_n, son unitarité découle du Lemme 30 (b). Le calcul explicite de l'isométrie $U_p = \rho(\mu_p^*)$ dans $\mathcal{H}_\beta$ associée à μ_p^*, p un nombre premier, est le suivant. Nous appelons comme ci-dessus t_p la translation hyperbolique d'une unité de longueur vers le point à l'∞ dans l'arbre T_p. Nous le faisons agir trivialement sur les autres arbres. On obtient alors

$$U_p\, \varepsilon_\alpha = p^{\beta/2-1} \sum_{t_p(\alpha')=\alpha} \varepsilon_{\alpha'}. \tag{32}$$

On peut vérifier directement en utilisant le Lemme 31 que U_p est effectivement une isométrie.
Nous avons ainsi montré que ρ est une représentation involutive de $\mathcal{H}^0$ dans $\mathcal{H}_\beta$ et par la Proposition 19, elle s'étend à une représentation de $C^0_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathcal{H}_\beta$. Cela prouve (b). Par construction, ε_0 est cyclique pour $P^+_{\mathbb{Q}}$. Puisque l'action ci-dessus de $\mathcal{H}^0$ (et $C^0_{\mathbb{Q}}$) commute avec $P^+_{\mathbb{Q}}$, le vecteur ε_0 est séparateur pour $C^0_{\mathbb{Q}}$. La preuve de la dernière assertion de (c) est la même que dans le cas $\beta = 1$ (cf. Lemme 17). La preuve de (d) est la même que celle du Lemme 16.
En combinant le Corollaire 29 et la Proposition 32 (d), nous obtenons que pour $\beta \in]0,1]$, l'état sur $C_{\mathbb{Q}}$ donné par

$$\varphi(x) = \langle \rho(x)\varepsilon_0, \varepsilon_0\rangle \qquad \forall x \in C_{\mathbb{Q}} \tag{33}$$

est le seul état KMS$_\beta$. Ceci combiné à 32 (a) complète la preuve du Théorème 5.

Remarques 33.

(a) Soient $\mathcal{H}_\beta$, Δ l'opérateur de multiplication par k^β sur $\mathcal{H}_{\beta,k}$. Il existe un unique poids ψ_β (à une constante multiplicative près) sur $(P^+_{\mathbb{Q}})''$ à groupe modulaire d'automorphismes

$$\sigma_t^{\psi_\beta}(.) = \Delta^{it}.\Delta^{-it}. \tag{34}$$

Pour chaque $m \in \mathbb{N}^*$, le vecteur $\varepsilon_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m^{-1} \end{bmatrix} \varepsilon_d$ est séparateur pour $C''_{\mathbb{Q}}$ mais non cyclique. Son extension cyclique $\overline{C_{\mathbb{Q}}\varepsilon_n}$, définit une projection $E_m \in (P_{\mathbb{Q}})''$ qui appartient au centralisateur de ψ_β et sur lequel ψ_β est fini. Sur le sous-espace E_m, l'opérateur modulaire de la paire $(P''_{\mathbb{Q}}/E_m, C''_{\mathbb{Q}}$ et vecteur $\varepsilon_m)$ est la restriction de Δ. Le sous-espace E_m est l'espace des points fixes du sous-groupe $\begin{bmatrix} 1 & m\mathbb{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ de $P^+_{\mathbb{Q}}$. Ces sous-espaces forment une famille imbriquée (i.e. $E_m \subset E_{m'}$ si m divise m') qui est totale dans $\mathcal{H}_\beta$.

(b) Nous avons utilisé tout au long de cet article la paire de groupes $P^+_{\mathbb{Q}}, P^+_{\mathbb{Z}} \subset P^+_{\mathbb{Q}}$ plutôt que la paire $P_{\mathbb{Q}}, P_{\mathbb{Z}} \subset P_{\mathbb{Q}}$. La relation entre les systèmes C^*-dynamiques correspondant $C^*(P^+_{\mathbb{Q}},\ P^+_{\mathbb{Q}}), \sigma_t$ et $C^*(P_{\mathbb{Q}}, P_{\mathbb{Z}}), \sigma_t$ est assez simple. En effet, le dernier est juste la C^*-algèbre des points fixes de l'involution α du premier donné par la conjugaison complexe $z \to \overline{z}$ vue comme un élément de $W = Gal(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$.

Ceci est facile à vérifier parce que la classe double X modulo $P_{\mathbb{Z}}$ d'un élément $g \in P_{\mathbb{Q}}, g = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ est la même que la double classe modulo $P_{\mathbb{Z}}$ de $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \varepsilon = \mathrm{Sign}(a)$, ce qui nous autorise à supposer que $a > 0$. Cela montre que les fonctions $P_{\mathbb{Z}}$-bi-invariantes sur $P_{\mathbb{Q}}$ incluent toutes les fonctions $P^+_{\mathbb{Z}}$ invariantes sur $P^+_{\mathbb{Q}}$, qui sont invariantes sous l'involution

$$g \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} g \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad g \in P^+_{\mathbb{Q}}. \tag{35}$$

On obtient ainsi l'égalité σ_t équivariante

$$C^*(P_{\mathbb{Q}}, P_{\mathbb{Z}}) = C^*(P^+_{\mathbb{Q}}, P^+_{\mathbb{Z}})^\alpha \tag{36}$$

et on peut réécrire le théorème principal de notre article en fonction de $C^*(P_{\mathbb{Q}}, P_{\mathbb{Z}})$.

(c) Dans cet article, nous avons ignoré la place à l'infini dans notre traitement des états ou des poids KMS$_\beta$ et dans la construction de $C_{\mathbb{Q}}$ à partir de l'action sur le produit d'arbres (Section 2). Nous avons obtenu, pour les places finies, l'action de P_K sur l'arbre de $SL(2,K)$ ainsi que le produit intérieur adéquat sur les fonctions sur l'arbre (Section 5) à partir de la compréhension des poids KMS$_\beta$ sur $C^*(P_K)$ et de la réduction par la projection $e \in C^*(P_K), e = 1_{P_R}$.

A la place infinie, le système C^*-dynamique en jeu est $C^*(P_{\mathbb{R}}), \sigma_t$ où $P_{\mathbb{R}}$ est le groupe de matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \quad ; \qquad b \in \mathbb{R}, \;\; a \in \mathbb{R}^* \tag{37}$$

et où σ_t est donné par le module δ de $P_{\mathbb{R}}$,

$$\sigma_t(f)(g) = \delta(g)^{-it} f(g) \qquad \forall f \in L^1(P_{\mathbb{R}}), \; t \in \mathbb{R}. \tag{38}$$

La C^*-algèbre de $P_{\mathbb{R}}$ est, en utilisant l'identification de $\mathbb{R}$ avec son groupe dual de Pontrjagin, donnée par

$$C^*(P_{\mathbb{R}}) = C_0(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^* \tag{39}$$

où l'action de $\mathbb{R}^*$ se fait par homothéties. Cette action a deux orbites, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $\{0\}$ et à la séquence exacte équivariante de C^*-algèbres

$$0 \to C_0(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \to C_0(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \to 0 \tag{40}$$

correspond la séquence exacte de produits croisés :

$$0 \to \mathcal{K} \to C^*(P_{\mathbb{R}}) \to C^*(\mathbb{R}^*) \to 0 \tag{41}$$

similaire à la séquence exacte de la C^*-algèbre de Toeplitz . Ici l'idéal à deux côtés $\mathcal{K}$ est la C^*-algèbre élémentaire d'opérateurs compacts. La théorie de la représentation de $C^*(P_{\mathbb{R}})$ découle immédiatement de (7) et en plus des caractères de $C^*(\mathbb{R}^*)$ qui fournissent des représentations à une dimension de $C^*(P_{\mathbb{R}})$, on a une unique représentation irréductible de dimension infinie π. Cette représentation peut être décrite comme suit.
On pose $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ avec

$$(\pi(g)\xi)(t) = |a|^{1/2}\xi(at-b) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \xi \in L^2(\mathbb{R}) \tag{42}$$

où $g = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ comme ci-dessus, appartient à $P_{\mathbb{R}}$.
Pour chaque $\beta \in]0,\infty[$, il existe, à normalisation près, un unique poids KMS$_\beta$ sur $C^*(P_{\mathbb{R}})$, donné par

$$\varphi_\beta(f) = \mathrm{Trace}(\pi(f)\Delta^{-\beta/2}) \qquad \forall f \in C^*(P_{\mathbb{R}})^+ \tag{43}$$

où $\Delta = -\frac{d^2}{dt^2}$ est le Laplacien, un opérateur auto-adjoint non-borné dans $L^2(\mathbb{R})$.
Par construction, φ_β est le poids du facteur de type I_∞ qui est le poids dominant ([C|], [C-T]) sur le facteur de type I_∞ correspondant. Il découle de cela que pour tout facteur M de poids ψ, le centralisateur de $\psi \otimes \varphi_\beta$ est l'algèbre de von Neumann semi-finie associée de la décomposition continue de M, i.e. le produit croisé par le groupe modulaire d'automorphismes σ_ψ,

$$(M \otimes I_\infty)_{\psi\otimes\varphi_\beta} = M \rtimes_{\sigma^\psi} \mathbb{R}. \tag{44}$$

Dans notre cas, avec $\beta \in]0,1]$, il est naturel de prendre pour M le commutant de $P_{\mathbb{Q}}^{+}$ agissant dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\beta$ (cf. Proposition 32). Pour obtenir le produit croisé (44), il est alors naturel d'utiliser à la place infinie l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\beta^\infty$ de la construction GNS du poids φ_β sur $C^*(P_{\mathbb{R}})$. Dans le produit tensoriel $\mathcal{H}_\beta \otimes \mathcal{H}_\beta^\infty$, on a une action naturelle de produit du groupe P_A sur les adèles $A = \mathcal{A} \times \mathbb{R}$. Le produit croisé (44) est alors contenu dans le commutant de $P_{\mathbb{Q}}^{+}$ qui est un *sous-groupe discret* de P_A.

Bibliographie

[A-W] H. Araki and E.J. Woods. A classification of factors. Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ., **4** (1968), 51-130.

[Bi] M. Binder. Induced factor representations of discrete groups and their type. Jour. Functional Analysis, to appear.

[Bl] B.E. Blackadar. The regular representation of restricted direct product groups. Jour. Functional Analysis, **25** (1977), 267-274.

[Bos-C] J.-B. Bost and A. Connes. Produits eulériens et facteurs de type III. C.R. Acad. Sci. Paris, **315** (I) (1992), 279-284.

[Br-R] O. Bratteli and D.W. Robinson. Operator algebras and quantum statistical mechanics I, IT. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1981.

[Com] F. Combes. Poids associé à une algèbre hilbertienne à gauche. Compos. Math. **23** (1971), 49-77.

[C] A. Connes. Noncommutative geometry. Academic Press, 1994.

[Co] A. Connes. Une classification des facteurs de type III. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., (4) **6** (1973), 133-252.

[C-T] A. Connes and M. Takesaki. The flow of weights on factors of type III. Tohoku Math. J., **29** (1977), 473-575.

[Dir] P.A.M. Dirac. The quantum theory of the emission and absorption of radiation. Proc. Royal Soc. London, **A114** (1927), 243-265.

[G] A. Guichardet. Symmetric Hilbert spaces and related topics. Lecture Notes in Mathematics, **261**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1972.

[H] R. Haag. Local quantum physics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1992.

[J] B. Julia. Statistical theory of numbers. in Number Theory and Physics, Les Houches Winter School, J.-M. Luck, P. Moussa et M. Waldschmidt eds., Springer-Verlag, 1990.

[P] G.K. Pedersen. C^*-algebras and their automorphism groups. Academic Press, London-New Vork-San Francisco, 1979.

[Ren] J. Renault. A groupoid approach to C^*-algebras. Lecture Notes in Mathematics, **793** (1980), Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin.

[Ser_1] J.-P. Serre. Cours d'arithmétique. P.U.F. Paris, 1970.

[Ser_2] J.-P. Serre. Arbres, amalgames, SL_2. Astérisque, **46** (1977).

[Sh] G. Shimura. Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Princeton University Press, 1971.

[Spe] D. Spector. Supersymmetry and the Möbius inversion function. Commun. Math. Phys., **127** (1990), 239-252.

[T] J. Tate. Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta function. in Algebraic Number Theory, J.W.S. Cassels et A. Frölich eds. Academic Press, 1967.

[We_1] A. Weil. Fonction zêta et distributions. Séminaire Bourbaki n°312, juin 1966.

[We_2] A. Weil. Basic number theory. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.

J.-B. Bost and A. Connes
Institut des Hautes Études Scientifiques,
35, route de Chartres,
F-91440 Bures-sur-Yvette, France

La théorie quantique de l'émission et de l'absorption de radiation

P. A. M. Dirac
St. John's College, Cambridge, et Institut de Physique Théorique, Copenhague

Communiquée par N. Bohr, For. Mem. R.S. Reçue le 2 février 1927 [1]

1 Introduction et résumé

La nouvelle théorie quantique, basée sur la supposition que les variables dynamiques n'obéissent pas à la loi commutative de la multiplication, s'est maintenant développée suffisamment pour former une théorie complète de la dynamique. Elle permet de traiter mathématiquement le problème de n'importe quel système dynamique composé d'un certain nombre de particules et des forces instantanées agissant entre elles, lorsque ce système est décrit par une fonction hamiltonienne, et on peut interpréter les mathématiques d'un point de vue physique par une méthode assez générale. D'autre part, presque rien n'a été fait jusqu'à présent sur l'électrodynamique quantique. Les questions du traitement correct d'un système dans lequel les forces se propagent à la vitesse de la lumière plutôt qu'instantanément, de la production d'un champ électromagnétique par un électron en mouvement, et de la réaction de ce champ sur l'électron n'ont pas encore été traitées. De plus, il y a une sérieuse difficulté pour faire que la théorie satisfasse toutes les exigences du principe restreint de la relativité, puisqu'alors une fonction hamiltonienne ne peut plus être utilisée. Cette question de la relativité est, bien sûr, liée aux précédentes, et il sera impossible de répondre à aucune de ces questions sans répondre à toutes. Pourtant, il semble possible de construire une théorie satisfaisante de l'émission de radiation et de la réaction du champ de la radiation sur le système l'émettant sur la base d'une cinématique et d'une dynamique qui ne soient pas strictement relativistes. C'est le principal objectif de cet article. La théorie est non-relativiste seulement par le fait que le temps est toujours compté via un c-nombre, plutôt que d'être traité symétriquement avec l'espace des coordonnées. La variation de la relativité de la masse avec la vitesse est prise en compte sans difficulté.

Les idées sous-tendant la théorie sont très simples. Considérons un atome interagissant avec un champ de radiation, que l'on peut supposer pour sa définissabilité comme étant enfermé dans une boîte de telle sorte à n'avoir qu'un ensemble discret de degrés de liberté. En résolvant la radiation en ses composantes de Fourier, on peut considérer l'énergie et la phase de chacun des composants comme étant des variables dynamiques décrivant le champ de radiation. Ainsi, si E_r est l'énergie d'un composant appelé r et si θ_r est la phase correspondante (définie comme la durée depuis laquelle l'onde est dans une phase standard), on peut supposer chaque E_r et θ_r comme formant une paire de variables canoniquement conjuguées. En l'absence de toute interaction entre le champ et l'atome, le système complet champ plus atome sera décrit par l'hamiltonien

$$H = \Sigma_r E_r + H_0 \tag{1}$$

égal à l'énergie totale, H_0 étant l'hamiltonien pour l'atome seul, puisque les variables E_r, θ_r satisfont trivialement leurs équations canoniques de mouvement

$$\dot{E}_r = -\frac{\partial H}{\partial \theta_r} = 0, \qquad \dot{\theta}_r = -\frac{\partial H}{\partial E_r} = 1.$$

[1] J'ai traduit ce texte en français et cette traduction comporte sûrement des erreurs qui n'engagent que moi, Denise Vella-Chemla.

Quand il y a interaction entre le champ et l'atome, cela pourrait être pris en compte par la théorie classique par une addition d'un terme d'interaction à l'hamiltonien (1), qui pourrait être une fonction des variables de l'atome et des variables E_r, θ_r, qui décrivent le champ. Ce terme d'interaction donnerait l'effet de la radiation sur l'atome, et également la réaction de l'atome sur le champ de radiation.

Pour qu'une méthode analogue puisse être utilisée en théorie quantique, il est nécessaire de supposer que les variables E_r, θ_r, sont des q-nombres satisfaisant les conditions quantiques standard $\theta_r E_r - E_r \theta_r = ih$ etc., où h est $(2\pi)^{-1}$ fois la constante de Planck habituelle, comme les autres variables dynamiques du problème. Cette supposition donnent immédiatement à la radiation des propriétés quantiques lumineuses[2]. Car si ν_r est la fréquence du composant r, $2\pi\nu_r\theta_r$ est une variable d'angle, de telle façon que son conjugué canonique $E_r/2\pi\nu_r$ peut seulement prendre un ensemble discret de valeurs différant par des multiples de h, ce qui signifie que E_r peut uniquement varier par multiples entiers du quantum $(2\pi h)\nu_r$. Si maintenant on ajoute un terme d'interaction (pris en compte par la théorie classique) à l'hamiltonien (1), le problème peut être résolu selon les règles de la mécanique quantique, et l'on s'attend à obtenir les résultats corrects pour l'action de la radiation et de l'atome l'un sur l'autre. Nous montrerons que nous obtenons effectivement les lois correctes pour l'émission et l'absorption de radiation, et les valeurs correctes pour les A et B d'Einstein. Dans la théorie précédente de l'auteur[3], où les énergies et les phases des composants de la radiation étaient des c-nombres, seuls les B pouvaient être obtenus, et la réaction de l'atome sur la radiation ne pouvait pas être prise en compte.

Il sera également montré que l'hamiltonien qui décrit l'interaction de l'atome et des ondes électromagnétiques peut être rendu identique à l'hamiltonien pour le problème de l'interaction d'un atome avec un ensemble de particules en mouvement à la vitesse de la lumière et satisfaisant les statistiques d'Einstein-Bose, par un choix judicieux de l'énergie d'interaction pour les particules. Le nombre de particules ayant n'importe quelle direction de mouvement et d'énergie, qui peut être utilisé comme une variable dynamique dans l'hamiltonien pour les particules, est égal au nombre de quanta d'énergie de l'onde correspondante dans l'hamiltonien des ondes. Il y a ainsi une harmonie complète entre les descriptions ondulatoire et lumineuse quantique de l'interaction. Nous allons effectivement construire la théorie à partir du point de vue quantique et montrer que l'hamiltonien se transforme naturellement en une formule qui ressemble à la formule pour les ondes.

Le développement mathématique de la théorie a été rendu possible par une théorie générale de l'auteur de transformation des matrices quantiques[4]. Comme nous comptons le temps comme un c-nombre, nous pouvons utiliser la notion de valeur de toute variable dynamique à tout instant. Cette valeur est un q-nombre, qui peut être représenté par une "matrice" généralisée selon de nombreux modèles matriciels différents, certains d'entre eux pouvant avoir des intervalles continus pour les colonnes et les lignes, et pouvant nécessiter que les éléments des matrices appartiennent à certaines sortes d'infinités (du type donné par les fonctions δ)[5]. Un modèle de matrices peut être trouvé dans lequel tous les ensembles souhaités de constantes d'intégration du système dynamique qui commutent sont représentés par des matrices diagonales, ou dans lequel les variables qui commutent sont représentées par des matrices qui sont diagonales à un temps spécifié[6]. Les valeurs des

[2]Des suppositions similaires ont été utilisées par Born and Jordan [*Z. f. Physik*, vol. 34, p. 886 (1925)] dans le but de prendre en charge la formule classique de l'émission de radiation par un dipole en théorie quantique, et par Born, Heisenberg and Jordan [*Z. f. Physik.* vol. 35, p. 606 (1925) pour calculer les fluctuations d'énergie dans le champ de radiation du corps noir.]

[3]*Roy. Soc. Proc.* A, vol. 112, p. 661, §5 (1926). Cela est cité ensuite dans *loc. cit.*, I.

[4]*Roy. Soc. Proc.* A, vol. 113, p. 621 (1927). Cela est cité ensuite par *loc. cit.*, II. Une théorie globalement équivalente a été obtenue indépendamment par Jordan [*Z. f. Physik.* vol. 40, p. 809 (1997). Voir aussi F. London, *Z. f. Physik.* vol. 40, p. 193 (1926)

[5]*Loc. cit. II,* §2.

[6]On peut utiliser un modèle de matrices dans lequel les variables qui commutent sont à tout instant représentées

éléments diagonaux d'une matrice diagonale représentant un q-nombre quelconque sont les valeurs caractéristiques de ce q-nombre. Les coordonnées cartésiennes ou le moment auront en général toutes les valeurs caractéristiques de $-\infty$ à $+\infty$, alors qu'une variable d'action prend seulement un ensemble discret de valeurs caractéristiques. (Nous prendrons pour règle d'utiliser des lettres sans prime ($'$) pour dénoter les variables dynamiques ou q-nombres, et les mêmes lettres avec prime ($'$) ou double prime ($''$) pour dénoter leurs valeurs caractéristiques. Les fonctions de transformation ou fonctions propres sont des fonctions des valeurs caractéristiques et non les q-nombres eux-mêmes, de telle sorte qu'elles peuvent toujours s'écrire en termes de variables avec prime ($'$ ou $''$).)

Si $f(\xi, \eta)$ est n'importe quelle fonction des variables canoniques ξ_k, η_k, la matrice représentant f à tout instant dans le modèle de matrices dans lequel les ξ_k à l'instant t sont des matrices diagonales peut s'écrire sans aucun problème, puisque les matrices représentant les ξ_k et les η_k eux-mêmes au temps t sont connues, notamment,

(2)
$$\begin{cases} \xi_k(\xi'\xi'') = \xi_k'\delta(\xi'\xi'') \\ \eta_k(\xi'\xi'') = -ih\delta(\xi_1' - \xi_1'') \dots \delta(\xi_{k-1}' - \xi_{k-1}'')\delta'(\xi_k' - \xi_k'')\delta(\xi_{k+1}' - \xi_{k+1}'') \dots \end{cases}$$

Ainsi, si l'hamiltonien H est défini comme une fonction des ξ_k et des η_k, on peut immédiatement écrire la matrice $H(\xi'\xi'')$. On peut ainsi obtenir la fonction de transformation, disons (ξ'/α'), qui se transforme en un modèle de matrice (α) dans lequel l'hamiltonien est une matrice diagonale, puisque (ξ'/α') doit satisfaire l'équation intégrale

(3)
$$\int H(\xi'\xi'')d\xi''(\xi''/\alpha') = W(\alpha').(\xi'/\alpha'),$$

dans lequel les valeurs caractéristiques $W(\alpha')$ sont les niveaux d'énergie. Cette équation est juste l'équation d'onde de Schrödinger pour les fonctions propres (ξ'/α'), qui devient une équation différentielle ordinaire quand H est une fonction algébrique simple des ξ_k et des η_k selon les équations spéciales (2) des matrices représentant les ξ_k et les η_k. L'équation (3) peut s'écrire sous la forme plus générale

(3′)
$$\int H(\xi'\xi'')d\xi''(\xi''/\alpha') = ih\partial(\xi'/\alpha')/\partial t,$$

forme dans laquelle elle peut s'appliquer à des systèmes pour lesquels l'hamiltonien fait intervenir le temps explicitement.

On peut avoir un système dynamique spécifié par un hamiltonien H qui ne peut pas être exprimé comme une fonction algébrique d'un quelconque ensemble de variables canoniques, mais qui peut être représenté par une matrice $H(\xi'\xi'')$. Un tel problème peut encore être résolu par la méthode présente, puisqu'on peut encore utiliser l'équation (3) pour obtenir les niveaux d'énergie et les fonctions propres. Nous trouverons que l'hamiltonien qui décrit l'interaction d'un quantum lumineux et d'un système atomique est de ce type plus général, de telle sorte que l'interaction peut être traitée mathématiquement, bien que l'on ne puisse pas alors parler d'énergie potentielle d'interaction au sens usuel.

Il faudrait observer qu'il y a une différence entre une onde lumineuse et l'onde de de Broglie ou Schrödinger associée aux quanta lumineux. D'abord, l'onde lumineuse est toujours réelle, alors que l'onde de de Broglie associée à un quantum lumineux se déplaçant dans une direction définie doit

par des matrices diagonales si l'on sacrifie la condition que les matrices satisfont les équations du mouvement. La fonction de transformation d'un tel modèle dans un modèle dans lequel les équations du mouvement sont satisfaites utilisera le temps explicitement. Voir p. 628 in *loc. cit.* II.

faire intervenir une exponentielle imaginaire. Une différence plus importante est que leurs intensités doivent être interprétées de façons différentes. Le nombre de quanta lumineux par unité de volume associés à une onde lumineuse mono-chromatique est égal à l'énergie par unité de volume de l'onde divisée par l'énergie $(2\pi h)\nu$ d'un quantum lumineux simple. D'un autre côté, une onde de de Broglie mono-chromatique d'amplitude a (multipliée par le facteur exponentiel imaginaire) doit être interprétée comme représentant a^2 quanta lumineux par unité de volume pour toutes les fréquences. C'est un cas spécial de la règle générale pour interpréter l'analyse des matrices[7] selon lequel, si (ξ'/α') ou $\psi_{\alpha'}(\xi'_k)$ est la fonction propre des variables ξ_k de l'état α' d'un système atomique (ou particule simple), $|\psi_{\alpha'}(\xi'_k)|^2$ est la probabilité que chaque ξ_k ayant la valeur ξ'_k, [ou $|\psi_{\alpha'}(\xi'_k)|^2 d\xi'_1 d\xi'_2 \ldots$ soit la probabilité de chaque ξ_k se trouvant entre les valeurs ξ'_k et $\xi'_k + d\xi'_k$, quand les ξ_k parcourent des intervalles continus de valeurs caractéristiques] selon la supposition que toutes les phases du système sont équiprobables. L'onde dont l'intensité doit être interprétée de la première de ces deux manières apparaît dans la théorie seulement quand on traite un assemblage de particules associées satisfaisant les statistiques de Einstein-Bose. Il n'y a alors pas de telle onde associée aux électrons.

2 Perturbation d'un assemblage de systèmes indépendants

Nous allons maintenant considérer les transitions produites dans un système atomique par une perturbation arbitraire. La méthode que nous adopterons sera celle précédemment fournie par l'auteur[8] qui amène simplement aux équations qui déterminent la probabilité du système d'être dans un état stationnaire quelconque du système non perturbé à tout instant[9]. Cela, bien sûr, fournit immédiatement le nombre probable de systèmes dans cet état à cet instant pour un assemblage de systèmes qui sont indépendants les uns des autres et sont tous perturbés de la même manière. L'objet de la présente section est de montrer que les équations pour les niveaux de transition pour ces nombres probables peuvent être mises sous forme hamiltonienne de manière simple, ce qui autorisera des développements plus avant dans la théorie à construire.

Soit H_0 l'hamiltonien du système non perturbé et V l'énergie perturbante, qui peut être une fonction arbitraire des variables dynamiques et peut ou peut ne pas faire intervenir le temps explicitement, de telle sorte que l'hamiltonien pour le système perturbé soit $H = H_0 + V$. Les fonctions propres du système perturbé doivent satisfaire l'équation d'onde

$$ih\partial\psi/\partial t = (H_0 + V)\psi,$$

où $(H_0 + V)$ est un opérateur. Si $\psi = \Sigma_r a_r \psi_r$ est la solution de l'équation qui satisfait les conditions initiales elles-mêmes, où les ψ_r sont des fonctions propres du système non perturbé, chacune associée à un état stationnaire indicé par r, et si les a_r sont des fonctions du temps seulement, alors $|a_r|^2$ est la probabilité que le système soit dans l'état r à tout moment. Les a_r doivent être initialement normalisés, et resteront du coup toujours normalisés. La théorie s'appliquera directement à un assemblage de N systèmes indépendants similaires si nous multiplions chacun de ces a_r par $N^{1/2}$ de manière à rendre $\Sigma_r |a_r|^2 = N$. Nous aurons maintenant que $|a_r|^2$ est le nombre probable de systèmes dans l'état r.

L'équation qui détermine le niveau de transition des a_r est [10]

$$ih\dot{a}_r = \Sigma_s V_{rs} a_s, \tag{4}$$

[7] *Loc. cit. II.* §§6, 7

[8] *Loc. cit. I.*

[9] La théorie a été récemment étendue par Born [*Z. f. Physik,* vol. 40, p. 167 (1926)] de manière à prendre en compte les transitions adiabatiques dans les états stationnaires qui pourraient être produits par la perturbation aussi bien que par les transitions. Cette extension n'est pas utilisée dans le présent article.

[10] *Loc. cit.* I, equation (25)

où les V_{rs}'s sont les éléments de la matrice représentant V. L'équation imaginaire conjuguée est

$$(4') \qquad -ih\dot{a}_r^* = \Sigma_r V_{rs}^* a_s^* = \Sigma_s a_s^* V_{sr}$$

Si l'on regarde a_r et iha_r^* comme des conjugués canoniques, les équations (4) et (4') prennent la forme hamiltonienne avec la fonction hamiltonienne $F_1 = \Sigma_{rs} a_r^* V_{rs} a_s$, notamment,

$$\frac{da_r}{dt} = \frac{1}{ih}\frac{\partial F_1}{\partial a_r^*}, \qquad ih\frac{da_r^*}{dt} = -\frac{\partial F_1}{\partial a_r}.$$

Nous pouvons transformer en variables canoniques N_r, ϕ_r, par la transformation de contact

$$a_r = N_r^{\frac{1}{2}} e^{-i\phi_r/h}, \qquad a_r^* = N_r^{\frac{1}{2}} e^{i\phi_r/h}.$$

Cette transformation rend les nouvelles variables N_r et ϕ_r réelles, N_r étant égal à $a_r a_r^* = |a_r|^2$, le nombre probable de systèmes dans l'état r, et ϕ_r/h étant la phase de la fonction propre qui les représente. L'hamiltonien F_1 devient maintenant

$$F_1 = \Sigma_{rs} V_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} N_s^{\frac{1}{2}} e^{i(\phi_r - \phi_s)/h},$$

et les équations qui déterminent le niveau auquel les transitions ont lieu ont la forme canonique

$$\dot{N}_r = -\frac{\partial F_1}{\partial \phi_r}, \qquad \dot{\phi}_r = \frac{\partial F_1}{\partial N_r}.$$

Une manière plus pratique de mettre les équations de transition dans une forme hamiltonienne peut être obtenue à l'aide des quantités

$$b_r = a_r e^{-iW_r t/h}, \qquad b_r^* = a_r^* e^{iW_r t/h},$$

W_r étant l'énergie de l'état r. On a $|b_r|^2$ égal à $|a_r|^2$, le nombre probable de systèmes dans l'état r. Pour $\dot{b}_r$, on trouve

$$(5) \qquad \begin{aligned} ih\dot{b}_r &= W_r b_r + ih\dot{a}_r e^{-iW_r t/h} \\ &= W_r b_r + \Sigma_s V_{rs} b_s e^{i(W_s - W_r)t/h} \end{aligned}$$

avec l'aide de (4). Si on pose $V_{rs} = v_{rs} b_s e^{i(W_r - W_s)t/h}$ de telle sorte que v_{rs} est une constante quand V ne fait pas intervenir le temps explicitement, cela se réduit à

$$\begin{aligned} ih\dot{b}_r &= W_r b_r + \Sigma_s v_{rs} b_s \\ &= \Sigma_s H_{rs} b_s, \end{aligned}$$

où $H_{rs} = W_r \delta_{rs} + v_{rs}$, est un élément de la matrice de l'hamiltonien global $H = H_0 + V$ avec le facteur temps $e^{i(W_r - W_s)t/h}$ éliminé, de telle façon que H_{rs} est une constante quand H ne fait pas intervenir le temps explicitement. L'équation (5) est de la même forme que l'équation (4), et peut être mise sous forme hamiltonienne de la même manière.

On devrait remarquer que l'équation (5) est obtenue directement si l'on écrit l'équation de Schrödinger sur un ensemble de variables qui spécifient les états stationnaires du système non perturbé. Si ces variables sont ξ_h, et si $H(\xi'\xi'')$ dénote un élément matriciel de l'hamiltonien global H dans le modèle (ξ), cette équation de Schrödinger serait

$$(6) \qquad ih\partial\psi(\xi')/\partial t = \Sigma_{\xi''} H(\xi'\xi'')\psi(\xi''),$$

comme l'équation (3'). Elle diffère de l'équation précédente (5) seulement dans la notation, un simple suffixe r étant utilisé là pour dénoter un état stationnaire plutôt qu'un ensemble de valeurs numériques ξ'_k pour les variables ξ_k, et b_r étant utilisé à la place de $\psi(\xi')$. L'équation (6), et par conséquent également l'équation (5), peuvent encore être utilisées quand l'hamiltonien est du type plus général qui ne peut pas être exprimé comme une fonction algébrique d'un ensemble de variables canoniques, mais peut encore être représenté par une matrice $H(\xi'\xi'')$ ou H_{rs}.

Prenons maintenant b_r et ihb_r^* des variables canoniquement conjuguées plutôt que a_r et iha_r^*. L'équation (5) et son équation conjuguée imaginaire prendra maintenant la forme hamiltonienne avec la fonction hamiltonienne

$$F = \Sigma_{rs} b_r^* H_{rs} b_s. \tag{7}$$

En procédant comme précédemment, on effectue la transformation de contact

$$b_r = N_r^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta_r/h}, \qquad b_r^* = N_r^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_r/h}, \tag{8}$$

sur les nouvelles variables canoniques N_r, θ_r, où N_r est, comme précédemment, le nombre probable de systèmes dans l'état r, et θ_r est une nouvelle phase. L'hamiltonien F deviendra alors

$$F = \Sigma_{rs} H_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} N_s^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h},$$

et les équations pour les niveaux de transitions des N_r et θ_r prendront la forme canonique

$$\dot{N}_r = -\frac{\partial F}{\partial \theta_r}, \qquad \dot{\theta}_r = \frac{\partial F}{\partial N_r}$$

L'hamiltonien peut alors s'écrire

$$F = \Sigma_r W_r N_r + \Sigma_{rs} v_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} N_s^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h}. \tag{9}$$

Le premier terme $\Sigma_r W_r N_r$ est l'énergie propre totale de l'assemblage, et le second terme peut être vu comme l'énergie additionnelle due à la perturbation. Si la perturbation est nulle, les phases θ_r augmenteront linéairement avec le temps, tandis que les phases précédentes ϕ_r seront constantes dans ce cas.

3 Perturbation d'un assemblage satisfaisant les statistiques de Einstein-Bose

Selon la section précédente, nous pouvons décrire l'effet d'une perturbation sur un assemblage de systèmes indépendants au moyen de variables canoniques et d'équations hamiltoniennes du mouvement. Le développement de la théorie qui nous vient naturellement à l'esprit consiste à faire de ces variables canoniques des q-nombres satisfaisant les conditions quantiques habituelles plutôt que des c-nombres, de telle façon que leurs équations hamiltoniennes du mouvement deviennent de vraies équations quantiques. La fonction hamiltonienne va maintenant fournir une équation d'onde de Schrödinger, qui doit être résolue et interprétée de la façon habituelle. L'interprétation donnera non seulement le nombre probable de systèmes dans n'importe quel état, mais également la probabilité d'une distribution quelconque donnée des systèmes parmi les différents états, cette probabilité étant, en fait, égale au carré du module de la solution normalisée de l'équation d'onde qui satisfait les conditions initiales adéquates. Nous pourrions, bien sûr, calculer directement à partir de considérations élémentaires la probabilité de toute distribution donnée quand les systèmes sont indépendants, puisque nous connaissons la probabilité de chaque système d'être dans un état donné particulier. Nous trouverions que la probabilité calculée directement de cette manière n'est pas en accord avec celle obtenue par l'équation d'onde, excepté dans le cas particulier où il y a seulement un seul système dans l'assemblage. Dans le cas général, il sera montré que l'équation d'onde amène à la valeur correcte pour la probabilité de n'importe quelle distribution donnée quand les systèmes, plutôt que d'être indépendants, obéissent aux statistiques de Einstein-Bose.

Supposons que les variables b_r, ihb_r^* du §2 sont des q-nombres canoniques satisfaisant les conditions quantiques

$$b_r.ihb_r^* - ihb_r^*.b_r = ih$$

ou

$$b_r b_r^* - b_r^* b_r = 1$$

et

$$\begin{array}{ll} b_r b_s - b_s b_r = 0, & b_r^* b_s^* - b_s^* b_r^* = 0, \\ b_r b_s^* - b_s^* b_r = 0 & (s \neq r). \end{array}$$

Les équations de transformation (8) doivent maintenant être écrites sous forme quantique

(10)
$$\left\{ \begin{array}{l} b_r = (N_r + 1)^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta_r/h} = e^{-i\theta_r/h} N_r^{\frac{1}{2}} \\ b_r^* = N_r^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_r/h} = e^{i\theta_r/h} (N_r + 1)^{\frac{1}{2}}, \end{array} \right.$$

de telle façon que les N_r, θ_r puissent aussi être des variables canoniques. Ces équations montrent que les N_r peuvent seulement avoir des valeurs caractéristiques entières non négatives[11], ce qui nous fournit une justification de la supposition que les variables sont des q-nombres tels que nous les avons choisis. Les nombres de systèmes dans les différents états sont maintenant des nombres quantiques ordinaires.

L'hamiltonien (7) devient alors

(11)
$$\begin{aligned} F &= \Sigma_{rs} b_r^* H_{rs} b_s = \Sigma_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_r/h} H_{rs} (N_s + 1)^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta_r/h} \\ &= \Sigma_{rs} H_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h} \end{aligned}$$

dans lequel les H_{rs} sont toujours des c-nombres. Nous pouvons écrire ce F dans la forme correspondant à (9)

(11')
$$F = \Sigma_r W_r N_r + \Sigma_{rs} v_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h}$$

dans laquelle il est à nouveau composé d'un terme correspondant à l'énergie propre $\Sigma_r W_r N_r$ et d'un terme correspondant à l'énergie d'interaction.

L'équation d'onde écrite en fonction des variables N_r est[12]

(12)
$$ih \frac{\partial}{\partial t} \psi(N_1', N_2', N_3' \ldots) = F \psi(N_1', N_2', N_3' \ldots),$$

où F est un opérateur, chaque θ_r apparaissant dans F étant interprété comme signifiant $ih\partial/\partial N_r'$.

Si nous appliquons l'opérateur $e^{\pm i\theta_r/h}$ à n'importe quelle fonction $f(N_1', N_2', \ldots N_r', \ldots)$ des variables $N_1', N_2', \ldots$, le résultat est

$$\begin{aligned} e^{\pm i\theta_r/h} f(N_1', N_2', \ldots N_r' \ldots) &= e^{\mp \delta/\delta N_r'} f(N_1', N_2' \ldots N_r' \ldots) \\ &= f(N_1', N_2', \ldots N_r' \mp 1, \ldots). \end{aligned}$$

[11] Voir §8 de l'article de l'auteur *Roy. Soc. Proc.* A, vol. 111, p. 281 (1926). Ce qu'on appelait les valeurs d'un c-nombre, et qui sont ici les valeurs qu'un q-nombre peut prendre, se verront donner le nom plus précis de valeurs caractéristiques de ce q-nombre.

[12] On suppose pour la définissabilité que l'indice r des états stationnaires prend les valeurs 1, 2, 3,...

Si nous utilisons cette règle dans l'équation (12) et que nous utilisons l'expression (11) pour F, nous obtenons[13]

(13)
$$ih\frac{\partial}{\partial t}\psi(N_1', N_2', N_3' \ldots)$$
$$= \Sigma_{rs} H_{rs} N_r'^{\frac{1}{2}} (N_s' + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} \psi(N_1', N_2' \ldots N_r' - 1, \ldots N_s' + 1, \ldots).$$

Nous voyons du côté droit de cette équation que dans la matrice représentant F, le terme de F faisant intervenir $e^{i(\theta_r - \theta_s)/h}$ contribuera seulement aux éléments de la matrice qui représentent les transitions dans lesquelles N_r décroît d'une unité et N_s croît d'une unité, i.e. aux éléments de la matrice de la forme $F(N_1', N_2' \ldots N_r' \ldots N_s'; N_1', N_2' \ldots N_r' - 1 \ldots N_s' + 1 \ldots)$. Si nous trouvons une solution $\psi(N_1', N_2' \ldots)$ de l'équation (13) qui est normalisée [i.e. une solution pour laquelle $\Sigma_{N_1', N_2' \ldots} |\psi(N_1', N_2' \ldots)|^2 = 1$] et qui satisfait les conditions propres initiales, alors $|\psi(N_1', N_2' \ldots)|^2$ sera la probabilité de cette distribution dans laquelle N_1' systèmes sont dans l'état 1, N_2 dans l'état 2, ... à tout instant.

Considérons d'abord le cas où il y a un seul système dans l'assemblage. La probabilité qu'il soit dans l'état q est déterminée par la fonction propre $\psi(N_1', N_2', \ldots)$ dans laquelle tous les N' sont égaux à zéro sauf N_q', qui est égal à l'unité. Nous noterons cette fonction propre $\psi\{q\}$. Quand elle est substituée dans le côté gauche de (13), tous les termes de la somme du côté droit s'évanouissent sauf ceux pour lesquels $r = q$, et il reste

$$ih\frac{\partial}{\partial t}\psi\{q\} = \Sigma_r H_{qs} \psi\{s\}$$

qui est la même équation que (5) avec $\psi\{q\}$ jouant le rôle de b_q. Cela établit le fait que la théorie présente est équivalente à celle de la section précédente quand il y a seulement un système dans l'assemblage.

Maintenant prenons le cas général d'un nombre arbitraire de systèmes dans l'assemblage, et supposons qu'ils obéissent à la mécanique statistique de Einstein-Bose. Cela nécessite que, dans le traitement habituel du problème, seules les fonctions propres qui sont symétriques entre tous les systèmes doivent être prises en compte, ces fonctions propres étant par elles-mêmes suffisantes pour donner une solution quantique complète du problème[14]. Nous allons maintenant obtenir l'équation pour le niveau de transition de l'une de ces fonctions propres symétriques, et montrer qu'elle est identique à l'équation (13).

Si nous indiçons chaque système par un nombre n, alors le hamiltonien pour l'assemblage sera $H_A = \Sigma_n H(n)$, où $H(n)$ est le H du §2 (égal à $Ho + V$) exprimé en fonction des variables du n-ième système. Un état stationnaire de l'assemblage est défini par les nombres $r_1, r_2 \ldots r_n \ldots$ qui sont les indices des états stationnaires dans lesquels stagnent les systèmes séparés. L'équation de Schrödinger pour l'assemblage en un ensemble de variables qui spécifient les états stationnaires sera de la forme (6) [avec H_A plutôt que H], et nous pouvons l'écrire dans la notation de l'équation (5) ; ainsi :

(14) $$ih\dot{b}(r_1 r_2 \ldots) = \Sigma_{s_1 s_2 \ldots} H_A(r_1 r_2 \ldots; s_1 s_2 \ldots) b(s_1 s_2 \ldots),$$

où $H_A(r_1 r_2 \ldots; s_1 s_2 \ldots)$ est l'élément de la matrice globale de H_A [en enlevant le facteur temps]. Cet élément matriciel s'évanouit quand plus d'un s_n diffère du r_n correspondant ; il est égal à $H_{r_m s_m}$ quand s_m diffère de r_m et que tous les autres s_n sont égaux aux r_n : et il est égal à $\Sigma_n H_{r_n r_n}$ quand tout s_n est égal à r_n. En substituant ces valeurs dans (14), nous obtenons

(15) $$ih\dot{b}(r_1 r_2 \ldots) = \Sigma_m \Sigma_{s_m \neq r_m} H_{r_m s_m} b(r_1 r_2 \ldots r_{m-1} s_m r_{m+1} \ldots) + \Sigma_n H_{r_n r_n} b(r_1 r_2 \ldots).$$

[13] où $s = r, \psi(N_1', N_2' \ldots N_r' - 1 \ldots N_s' + 1)$ doit être pris comme signifiant $\psi(N_1' N_2' \ldots N_r' \ldots)$.

[14] *Loc. cit.* §3

Nous devons maintenant contraindre $b(r_1r_2\ldots)$ à être une fonction symétrique des variables $r_1, r_2, \ldots$ de façon à obtenir les statistiques de Einstein-Bose. Cela est rendu possible puisque si $b(r_1r_2\ldots)$ est symétrique à tout instant, alors l'équation (15) montre que $\dot{b}(r_1r_2\ldots)$ est aussi symétrique à cet instant, de telle sorte que $b(r_1r_2\ldots)$ restera symétrique.

Notons N_r le nombre de systèmes dans l'état r. Alors un état stationnaire de l'assemblage décrivable par une fonction propre symétrique doit être spécifié par les nombres $N_1, N_2, \ldots N_r \ldots$ aussi bien que par les nombres $r_1, r_2 \ldots r_n \ldots$, et nous serons capables de transformer l'équation (15) en les variables $N_1, N_2, \ldots$. Nous ne pouvons pas vraiment prendre la nouvelle fonction propre $b(N_1, N_2\ldots)$ égale à la précédente $b(r_1r_2\ldots)$, mais nous devons en prendre une qui soit un multiple de l'autre de façon à ce que les deux soient correctement normalisées selon leurs variables respectives. Nous devons avoir, en fait,

$$\Sigma_{r_1,r_2\ldots}|b(r_1r_2\ldots|^2 = 1 = \Sigma_{N_1,N_2\ldots}|b(N_1, N_2\ldots|^2,$$

et ainsi, nous devons prendre $|b(N_1, N_2\ldots)|^2$ égal à la somme des $|b(r_1r_2\ldots)|^2$ pour toutes les valeurs des nombres $r_1, r_2\ldots$ de telle façon que N_1 d'entre eux soient égaux à $1, N_2$ égaux à 2, etc. Ainsi, il y a $N!/N_1!N_2!\ldots$ termes dans cette somme, où $N = \Sigma_r N_r$ est le nombre total de systèmes, et ils sont tous égaux, puisque $b(r_1r_2\ldots)$ est une fonction symétrique de ses variables $r_1, r_2\ldots$. Par conséquent, nous devons avoir

$$b(N_1, N_2, \ldots) = (N!/N_1!N_2!\ldots)^{\frac{1}{2}}\dot{b}(r_1r_2\ldots).$$

Si nous effectuons cette substitution dans l'équation (15), le côté gauche deviendra

$$ih(N_1!N_2!\ldots/N!)^{\frac{1}{2}}b(N_1, N_2\ldots).$$

Le terme $H_{r_ms_m}b(r_1r_2\ldots r_{m-1}s_mr_{m+1}\ldots)$ dans la première somme du côté droit deviendra

$$(16)\qquad [N_1!N_2!\ldots(N_r-1)!\ldots(N_s+1)!\ldots/N!]^{\frac{1}{2}}H_{rs}b(N_1, N_2\ldots N_r-1\ldots N_s+1\ldots),$$

où nous avons écrit r pour r_m et s pour s_m. Ce terme doit être ajouté pour toutes les valeurs de s sauf r, et doit alors être ajouté pour r prenant chacune des valeurs $r_1, r_2\ldots$. Ainsi chaque terme (16) se voit répété par le procédé de sommation jusqu'à ce qu'il apparaisse un total de N_r fois, de telle façon qu'il contribue

$$\begin{gathered}N_r[N_1!N_2!\ldots(N_r-1)!\ldots(N_s+1)!\ldots/N!]^{\frac{1}{2}}H_{rs}b(N_1, N_2\ldots N_r-1\ldots N_s+1\ldots)\\ N_r^{\frac{1}{2}}(N_s+1)^{\frac{1}{2}}(N_1!N_2!\ldots/N!)^{\frac{1}{2}}H_{rs}b(N_1, N_2\ldots N_r-1\ldots N_s+1\ldots)\end{gathered}$$

au côté droit de (15). Finalement, le terme $\Sigma_n H_{r_nr_n}b(r_1, r_2, \ldots)$ devient

$$\Sigma_r N_r H_{rr}.b(r_1r_2\ldots) = \Sigma_r N_r H_{rr}.(N_1!N_2!\ldots/N!)^{\frac{1}{2}}b(N_1, N_2\ldots).$$

Par conséquent, l'équation (15) devient, en enlevant le facteur $(N_1!N_2!\ldots/N!)^{\frac{1}{2}}$,

(17)

$$ih\dot{b}(N_1, N_2\ldots) = \Sigma_r\Sigma_{s\neq r}N_r^{\frac{1}{2}}(N_s+1)^{\frac{1}{2}}H_{rs}b(N_1, N_2\ldots N_r-1\ldots N_s+1\ldots) + \Sigma_r N_r H_{rr}b(N_1, N_2\ldots),$$

ce qui est identique à (13) [excepté le fait que dans (17), les primes (') ont été omis pour les N, ce qui est permis quand on n'a pas besoin de faire référence aux N comme à des q-nombres]. Nous avons ainsi établi que l'hamiltonien (11) décrit l'effet d'une perturbation sur un assemblage satisfaisant les statistiques de Einstein-Bose.

4 Réaction de l'assemblage sur le système perturbant

Jusqu'à présent, nous avons seulement considéré des perturbations qui peuvent être représentées par une énergie de perturbation V ajoutée à l'hamiltonien du système perturbé, V étant une fonction seulement des variables dynamiques de ce système et peut-être du temps. Il est possible que la théorie s'étende au cas où la perturbation consiste en une interaction avec un système dynamique perturbant, la réaction du système perturbé sur le système perturbant étant prise en compte (la distinction entre le système perturbant et le système perturbé est, bien sûr, non réelle, mais elle sera gardée par facilité).

Nous considérons maintenant un système perturbant, décrit, disons, par les variables canoniques J_k, ω_k, les J étant ses premières intégrales quand il est seul, interagissant avec un assemblage de systèmes perturbés sans interaction mutuelle, qui satisfont les statistiques de Einstein-Bose. L'hamiltonien global sera de la forme

$$H_T = H_P(J) + \Sigma_n H(n),$$

où H_r est l'hamiltonien du système perturbant (une fonction des J seulement) et $H(n)$ est égale à l'énergie propre $H_0(n)$ plus l'énergie de perturbation $V(n)$ du n-ième système de l'assemblage. $H(n)$ est une fonction des seules variables du n-ième système de l'assemblage et des J et w, et ne fait pas intervenir le temps explicitement.

L'équation de Schrödinger correspondant à l'équation (14) est maintenant

$$ih\dot{b}(J', r_1 r_2 \ldots) = \Sigma_{J''} \Sigma_{s_1, s_2} \ldots H_r(J', r_1 r_2 \ldots ; J'', s_1 s_2 \ldots) b(J'', s_1 s_2 \ldots),$$

dans laquelle la fonction propre b fait intervenir les variables J'_k.

L'élément matriciel $H_r(J', r_1 r_2 \ldots ; J'', s_1 s_2 \ldots)$ est maintenant toujours une constante. Comme précédemment, il s'évanouit quand plus d'un s_n diffère du r_n correspondant. Quand s_m diffère de r_m et que tout autre s_n est égal à r_n, il se réduit à $H(J' r_m ; J'' s_m)$, qui est l'élement matriciel $(J' r_m ; J'' s_m)$ (avec le facteur temps éliminé) de $H = H_0 + V$, l'énergie propre plus l'énergie de perturbation d'un seul système de l'assemblage ; alors que lorsque tout s_n est égale à r_n, il prend la valeur $Hp(J')\delta_{J'J''} + \Sigma_n H(J' r_n \; ; J'' r_n)$. Si, comme précédemment, nous contraignons les fonctions propres à être symétriques en les variables $r_1, r_2 \ldots$, nous pouvons à nouveau les transformer en les variables $N_1, N_2 \ldots$, ce qui amènera, comme précédemment, au résultat.

(18)
$$\begin{aligned} &ih\dot{b}(J', N'_1, N'_2 \ldots) = H_p(J') b(J', N'_1, N'_2 \ldots) \\ &+ \Sigma_{J''} \Sigma_{r,s} N_r'^{\frac{1}{2}} (N'_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} H(J' r ; J'' s) b(J'', N'_1, N'_2 \ldots N'_r - 1 \ldots N'_s + 1 \ldots) \end{aligned}$$

Ceci est l'équation de Schrödinger correspondant à la fonction hamiltonienne

$$F = H_P(J) + \Sigma_{r,s} H_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h}, \tag{19}$$

dans laquelle H_{rs} est maintenant une fonction des J et des w, telle que quand on le représente par une matrice du modèle (J), son élément $(J' J'')$ est $H(J' r ; J'' s)$ (il convient de noter que H_{rs} commute encore avec les N et les θ).

Ainsi l'interaction d'un système perturbant avec un assemblage satisfaisant les statistiques de Einstein-Bose peut être décrit par un hamiltonien de la forme (19). Nous pouvons le mettre dans une forme correspondant à (11') en observant que l'élément matriciel $H(J'_r ; J''_s)$ est composé de la somme de deux termes, un terme qui provient de l'énergie propre H_0, qui est égale à W_r quand

$J''_k = J'_k$ et $s = r$ et qui s'évanouit sinon, et un terme qui provient de l'énergie d'interaction V, qui peut être notée $v(J'_r; J''_s)$. Ainsi, nous aurons

$$H_{rs} = W_r \delta_{rs} + v_{rs},$$

où v_{rs} est cette fonction des J et des w qui est représentée par la matrice dont l'élément $(J'J'')$ est $v(J'r; J''s)$, et de ce fait, (19) devient

(20)
$$F = H_P(J) + \Sigma_r W_r N_r + \Sigma_{r,s} v_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h}.$$

L'hamiltonien est ainsi la somme de l'énergie propre du système perturbant $H_P(J)$, de l'énergie propre des systèmes perturbés $\Sigma_r W_r N_r$ et de l'énergie de perturbation $\Sigma_{r,s} v_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h}$.

5 Théorie des transitions d'un système d'un état vers d'autres états de même énergie.

Avant d'appliquer les résultats des sections précédentes aux quanta de lumière, nous allons considérer la solution du problème représenté par un hamiltonien du type (19). La caractéristique essentielle de ce problème est qu'il concerne un système dynamique qui peut, sous l'influence d'une énergie de perturbation dans laquelle le temps n'intervient pas explicitement, effectuer des transitions d'un état vers d'autres états de même énergie. Le problème des collisions entre un système atomique et un électron, qui a été traité par Born[15] est un cas particulier de ce type. La méthode de Born consiste à trouver une solution *périodique* de l'équation d'onde qui consiste, aussi loin qu'elle fasse intervenir les coordonnées de l'électron qui percute le système, en des ondes planes, qui représentent l'électron incident, et qui approchent le système atomique, et qui sont éparpillées ou diffractées dans toutes les directions. Le carré de l'amplitude des ondes éparpillées dans n'importe quelle direction avec n'importe quelle fréquence est supposé par Born être la probabilité que l'électron soit éparpillé dans cette direction avec l'énergie correspondante.

Cette méthode ne semble pas pouvoir s'étendre d'une manière simple au problème général des systèmes qui effectuent des transitions d'un état vers d'autres de même énergie. De plus, il n'y a pas à présent de moyen très direct et certain d'interpréter une solution périodique d'une équation d'onde pour l'appliquer à un phénomène physique non périodique tel qu'une collision (la méthode plus précise qui va être donnée maintenant montre que la supposition de Born n'est pas tout à fait correcte, dans la mesure où il est nécessaire de multiplier le carré de l'amplitude par un certain facteur).

Une méthode alternative pour résoudre un problème de collision est de trouver une solution non périodique à l'équation d'onde qui consiste simplement au départ en ondes planes se déplaçant dans l'espace entier dans les directions imposées avec la fréquence imposée pour représenter l'électron incident. Au cours du temps, les ondes se déplaçant dans d'autres directions peuvent apparaître de telle façon que l'équation d'onde reste satisfaite. La probabilité pour l'électron d'être éparpillé dans n'importe quelle direction avec n'importe quelle énergie sera alors déterminée par le niveau de croissance des composants harmoniques correspondant de ces ondes. La manière d'interpréter les mathématiques utilisées par cette méthode est assez bien définie, cette interprétation étant la même que celle du début du §2.

Nous allons appliquer cette méthode au problème général d'un système qui effectue des transitions d'un état à d'autres états de même énergie sous l'action d'une perturbation. Soit H_0 l'hamiltonien

[15] Born, *Z. f. Physik*, vol. 38, p. 803 (1926)

du système non pertubé et V l'énergie perturbante, qui doit ne pas faire intervenir le temps explicitement. Si nous prenons le cas d'une suite continue d'états stationnaires, spécifiée par les premières intégrales, disons α_k, du mouvement non perturbé, alors, en suivant la méthode du §2, nous obtenons

$$ih\dot{a}(\alpha') = \int V(\alpha'\alpha'')d\alpha''.a(\alpha''), \tag{21}$$

correspondant à l'équation (4). La probabilité du système d'être dans un état pour lequel chaque α_k est compris entre α'_k et $\alpha'_k + d\alpha'_k$ à tout instant est $|a(\alpha')|^2 d\alpha'_1.d\alpha'_2\ldots$ quand $a(\alpha')$ est correctement normalisé et satisfait les conditions propres initiales. Si initialement le système est dans l'état α^0, nous devons imposer que la valeur initiale de $a(\alpha')$ soit de la forme $a^0.\delta(\alpha' - \alpha^0)$. Nous laisserons α^0 prendre une valeur arbitraire, parce que ça serait un inconvénient que de normaliser $a(\alpha')$ dans le cas présent. Pour une première approximation, nous pouvons substituer à $a(\alpha'')$ du côté droit de (21) sa valeur initiale. Cela donne

$$ih\dot{a}(\alpha') = a^0 V(\alpha'\alpha^0) = \alpha^0 v(\alpha'\alpha^0)e^{i[W(a')-W(a^0)]t/h},$$

où $v(\alpha'\alpha^0)$ est une constante et $W(\alpha')$ est l'énergie de l'état α'. Par conséquent

$$iha(\alpha') = a^0\delta(\alpha' - \alpha^0) + a^0 v(\alpha'\alpha^0)\frac{e^{i[W(a')-W(a^0)]t/h} - 1}{i[W(\alpha') - W(\alpha^0)]/h}. \tag{22}$$

Pour les valeurs des α'_k telles que $W(\alpha')$ diffère de façon appréciable de $W(a^0)$, $a(\alpha')$ est une fonction périodique du temps dont l'amplitude est petite quand l'énergie perturbante V est petite, de telle sorte que les fonctions propres correspondant à ces états stationnaires ne sont pas excitées d'une quelconque façon appréciable. D'un autre côté, pour les valeurs des α'_k telles que $W(\alpha') = W(\alpha^0)$ et $\alpha'_k \neq \alpha^0_k$ pour un certain $k, a(\alpha')$ augmente uniformément par rapport au temps, de telle façon que la probabilité du système d'être dans l'état α' à tout instant augmente proportionnellement avec le carré du temps. Physiquement, la probabilité du système d'être dans un état avec exactement la même énergie propre que l'énergie propre initiale $W(\alpha^0)$ n'a pas d'importance, étant infinitésimale. Nous sommes seulement intéressés par l'intégrale de la probabilité qui couvre un petit intervalle de valeurs d'énergie propre proche de l'énergie propre initiale et qui, comme nous le trouverons, augmente linéairement avec le temps, en accord avec les lois des probabilités ordinaires.

Nous transformons les variables $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_u$ en un ensemble de variables qui sont des fonctions arbitrairement indépendantes des α telles que l'une d'entre elles est l'énergie propre W, disons les variables $W, \gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_{u-1}$. La probabilité à tout instant du système de rester dans un état stationnaire pour lequel tout γ_k est compris entre γ_k' et $\gamma'_k + d\gamma'_k$ est maintenant (au facteur de normalisation près) égal à

$$d\gamma'_1.d\gamma'_2\ldots d\gamma'_{u-1}\int |a(\alpha')|^2 \frac{\partial(\alpha'_1, \alpha'_2\ldots\alpha'_u)}{\partial(W', \gamma'_1\ldots\gamma'_{u-1})}dW'. \tag{23}$$

Pour une durée qui est grande comparée aux durées des périodes du système, nous trouverons que pratiquement la totalité de l'intégrale dans (23) provient des valeurs des W' très proches de $W^0 = W(\alpha^0)$. Posons

$$a(\alpha') = a(W', \gamma') \text{ et } \partial(\alpha'_1, \alpha'_2\ldots\alpha'_u)/\partial(W', \gamma'_1\ldots\gamma'_{u-1} = J(W', \gamma').$$

Alors, pour l'intégrale dans (23), nous trouvons, avec l'aide de (22) (à la condition que $\gamma'_k \neq \gamma^0_k$ pour un certain k)

$$\int |a(W', \gamma')| J(W', \gamma') dW'$$

$$= |a^0|^2 \int |v(W', \gamma'; W^0, \gamma^0)|^2 J(W', \gamma') \frac{[e^{i(W'-W^0)t/h} - 1][e^{-i(W'-W^0)t/h} - 1]}{(W' - W^0)^2} dW'$$

$$= 2|a^0|^2 \int |v(W', \gamma' ; W^0, \gamma^0)|^2 J(W', \gamma')[1 - \cos(W' - W^0)t/h]/(W' - W^0)^2 .dW'$$

$$= 2|a^0|^2 t/h. \int |v(W^0 + hx/t, \gamma' ; W^0, \gamma^0)|^2 J(W^0 + hx/t, \gamma')(1 - \cos x)/x^2 .dx,$$

si l'on fait la substitution $(W' - W^0)t/h = x$. Pour de grandes valeurs de t, cela se réduit à

$$\begin{aligned} &2|a^0|^2 t/h.|v(W^0, \gamma')|^2 J(W^0, \gamma') \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos x)/x^2 .dx \\ &= 2\pi |a^0|^2 t/h.|v(W^0, \gamma'; W^0, \gamma^0)|^2 J(W^0, \gamma'). \end{aligned}$$

La probabilité par unité de temps d'une transition vers un état pour lequel γ_k est compris entre γ'_k et $\gamma'_k + d\gamma'_k$ est alors (à un facteur de normalisation près)

$$2\pi |a^0|^2/h.|v(W^0, \gamma'; W^0, \gamma^0)|^2 J(W^0, \gamma') d\gamma'_1 .d\gamma'_2 \ldots d\gamma'_{u-1}, \tag{24}$$

qui est proportionnel au carré de l'élément de matrice associé à cette transition de l'énergie perturbante.

Pour appliquer ce résultat au problème d'une simple collision, nous définissons les α comme étant les composantes du moment p_x, p_y, p_z de l'électron percutant et les γ comme étant les θ, et les ϕ, comme étant les angles qui déterminent la direction du mouvement. Si en prenant en compte le changement de masse de la relativité avec la vitesse, nous appelons P le moment résultant, égal à $(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{\frac{1}{2}}$, et E l'énergie, égale à $(m^2c^4 + P^2c^2)^{\frac{1}{2}}$, de l'électron, m étant sa masse restante, nous trouvons pour le Jacobien

$$J = \frac{\partial(p_x, p_y, p_z)}{\partial(E, \theta, \phi)} = \frac{EP}{c^2} \sin\theta.$$

Ainsi $J(W^0, \gamma')$ de l'expression (24) a la valeur

$$J(W^0, \gamma') = E'P' \sin\theta'/c^2, \tag{25}$$

où E' et P' se réfèrent à cette valeur pour l'énergie de l'électron éparpillé qui rend l'énergie totale égale à l'énergie initiale W^0 (i.e. à cette valeur nécessitée par la conservation de l'énergie).

Nous devons maintenant interpréter la valeur initiale de $a(\alpha')$, notamment, $a^0\delta(\alpha' - \alpha^0)$, que nous n'avons pas normalisée. Selon le §2, la fonction d'onde des variables α_k est $b(\alpha') = a(\alpha')e^{-iW't/h}$ de telle sorte que sa valeur initiale est

$$a^0\delta(\alpha' - \alpha^0)e^{-iW't/h} = a^0\delta(p'_x - p^0_x)\delta(p'_y - p^0_y)\delta(p'_z - p^0_z)e^{-iW't/h}.$$

Si nous utilisons la fonction de transformation[16]

$$(x'/p') = (2\pi h)^{-\frac{3}{2}} e^{i\Sigma_{xyz} p'_x x'/h},$$

[16] Pour alléger l'écriture, le symbole x est utilisé pour représenter x, y, z.

et la règle de transformation

$$\psi(x') = \int (x'/p')\psi(p')dp'_x dp'_y dp'_z,$$

nous obtenons pour la fonction d'onde initiale en les coordonnées x, y, z la valeur

$$a^0(2\pi h)^{-\frac{3}{2}} e^{i\Sigma_{xyz} p_x^0 x'/h} e^{-iW't/h}.$$

Cela correspond à une distribution initiale de $|a^0|^2(2\pi h)^{-3}$ électrons par unité de volume. Puisque leur vitesse est P^0c^2/E^0, le nombre par unité de temps frappant une unité de surface à angles perpendiculaires à leur direction de mouvement est $|a^0|^2 P^0 c^2/(2\pi h)^3 E^0$.
En divisant cela dans l'expression (24), nous obtenons, avec l'aide de (25),

$$4\pi^2(2\pi h)^2 \frac{E'E^0}{c^4} |v(p';p^0)|^2 \frac{P'}{P^0} \sin\theta' d\theta' d\phi'. \tag{26}$$

C'est la zone effective qui doit être frappée par un électron de manière à ce qu'il soit éparpillé dans l'angle solide $\sin\theta' d\theta' d\phi'$ avec l'énergie E'. Ce résultat diffère par un facteur $(2\pi h)^2/2mE'$. P'/P^0 de celui de Born[17]. La nécessité du facteur P'/P^0 dans (26) aurait pu être prédite par le principe d'équilibre, puisque le facteur $|v(p';p^0)|^2$ présente une symétrie des processus direct et inverse[18].

6 Application aux quanta lumineux

Nous allons maintenant appliquer la théorie du paragraphe §4 au cas où les systèmes de l'assemblage sont des quanta lumineux, la théorie étant applicable à ce cas puisque les quanta obéissent aux lois statistiques de Einstein-Bose et n'ayant pas d'interaction mutuelle. Un quantum lumineux est dans un état stationnaire quand il se déplace à moment constant en ligne droite. Par conséquent, un état stationnaire r est déterminé par les trois composantes du moment du quantum lumineux et par une variable qui spécifie son état de polarisation. Nous travaillerons en supposant qu'il y a un nombre fini de ces états stationnaires, très proches les uns des autres, parce que ça présenterait un inconvénient d'utiliser des intervalles continus. L'interaction des quanta de lumière avec un système atomique sera décrite par un hamiltonien de la forme (20), dans lequel $H_P(J)$ est l'hamiltonien du système atomique seul, et les coefficients v_{rs} correspondent aux inconnues. Nous montrerons que cette forme du hamiltonien, avec les v_{rs} arbitraires, amène aux lois d'Einstein pour l'émission et l'absorption de radiation.

Le quantum lumineux a la particularité qu'il cesse apparemment d'exister quand il est dans l'un de ses états stationnaires, notamment l'état nul, dans lequel son moment, et par conséquent son énergie également, sont nuls. Quand un quantum lumineux est absorbé, il peut être considéré comme sautant vers son état zéro, et quand il est émis, il peut être considéré comme sautant de l'état zéro vers un état dans lequel il est physiquement en évidence, de telle façon qu'il apparaît comme venant d'être créé. Puisqu'il n'y a pas de limite au nombre de quanta lumineux qui peuvent être créés de cette manière, nous devons supposer qu'il y a un nombre infini de quanta lumineux dans l'état zéro, de telle façon que le N_0 du hamiltonien (20) est infini. Nous devons maintenant avoir θ_0, la variable canoniquement conjuguée à N_0, qui est constante, puisque

$$\dot{\theta}_0 = \partial F/\partial N_0 = W_0 + \text{ termes faisant intervenir } N_0^{-\frac{1}{2}} \text{ ou } (N_0+1)^{-\frac{1}{2}}$$

[17]Dans un article plus récent (*Nachr. Gesell. d. Wiss., Gottingen, p. 146 (1926)*, Born a obtenu un résultat en accord avec celui du présent article pour la mécanique non relativiste, en utilisant une interprétation de l'analyse basée sur les théorèmes de conservation. J'ai une reconnaissance particulière à l'égard du Prof. N. Bohr pour avoir pu lire à l'avance une copie de ce travail.

[18]Voir Klein et Rosseland, *Z. f. Physik*, vol. 4, p. 46, équation (4) (1921).

et W_0 est nul. Pour que l'hamiltonien (20) puisse rester fini, il est nécessaire que les coefficients v_{r0}, v_{0r} soient infiniment petits. Nous supposerons qu'ils sont infiniment petits de façon à rendre $v_{r0}N_0^{\frac{1}{2}}$ et $v_{0r}N_0^{\frac{1}{2}}$ finis, de façon à ce que les coefficients de probabilité de transition puissent être finis. Ainsi nous posons

$$v_{r^0}(N_0+1)^{\frac{1}{2}}e^{-i\theta_0/h} = v_r, \qquad v_{0r}N_0^{\frac{1}{2}}e^{i\theta_0/h} = v_r^*,$$

où v_r et v_r^* sont des imaginaires finis conjugués. Nous pouvons considérer que v_r et v_r^* sont des fonctions seulement des J et des w du système atomique, puisque leurs facteurs $(No+1)^{\frac{1}{2}}e^{-i\theta_0/h}$ et $N_0^{\frac{1}{2}}e^{i\theta_0/h}$ sont pratiquement des constantes, le niveau de transition de N_0 étant très petit comparé à N_0. L'hamiltonien (20) devient maintenant

(27)

$$F = H_P(J)+\Sigma_r W_r N_r+\Sigma_{r\neq 0}[v_r N_r^{\frac{1}{2}}e^{i\theta_r/h}+v_r^*(N_r+1)^{\frac{1}{2}}e^{-i\theta_r/h}]+\Sigma_{r\neq 0}\Sigma_{s\neq 0}v_{rs}N_r^{\frac{1}{2}}(N_s+1-\delta_{rs})^{\frac{1}{2}}e^{i(\theta_r-\theta_s)/h}.$$

La probabilité de transition dans laquelle un quantum lumineux dans l'état r est absorbé est proportionnelle au carré du module de l'élément matriciel de l'hamiltonien qui correspond à cette transition. Cet élément matriciel doit venir du terme $v_r N_r^{\frac{1}{2}}e^{i\theta_r/h}$ dans l'hamiltonien, et doit ainsi être proportionnel à $N_r'^{\frac{1}{2}}$ où N_r' est le nombre de quanta lumineux dans l'état r avant le processus. La probabilité du processus d'absorption est ainsi proportionnelle à N_r'. De la même façon, la probabilité qu'un quantum lumineux dans l'état r soit émis est proportionnel à $(N_r'+1)$, et la probabilité qu'un quantum lumineux dans l'état r soit bombardé dans l'état s est proportionnelle à $N_r'(N_s'+1)$. Les processus de radiation du type le plus général considérés par Einstein et Ehrenfest[19] dans lesquels plus d'un quantum lumineux entrent en jeu simultanément ne sont pas pris en charge dans la présente théorie.

Pour établir une connexion entre le nombre de quanta lumineux par état stationnaire et l'intensité de la radiation, nous considérons une boîte de volume fini, disons A, contenant la radiation. Le nombre d'états stationnaires pour les quanta lumineux d'un type donné de polarisation dont la fréquence est comprise entre ν_r et $\nu_r + d\nu_r$, et dont la direction de déplacement est plus petite que l'angle solide entre $d\omega_r$ et la direction du mouvement de l'état r sera maintenant $A\nu_r^d\nu_r d_r/c^3$. L'énergie des quanta lumineux dans ces états stationnaires est par conséquent $N_r'.2\pi h\nu_r.A\nu_r^2 d\nu_r d\omega_r/c^3$. Cela doit être égal à $Ac^{-1}I_r d\nu_r d\omega_r$, où I_r est l'intensité par unité d'intervalle de fréquence de la radiation sur l'état r. Ainsi

(28)
$$I_r = N_r'(2\pi h)\nu_r^3/c^2$$

de telle sorte que N_r' est proportionnel à I_r et $(N_r'+1)$ est proportionnel à $I_r + (2\pi h)\nu_r^3/c^2$.

Nous obtenons ainsi que la probabilité d'un processus d'absorption est proportionnelle à I_r, l'intensité incidente par unité d'intervalle de fréquence, et que celle du processus d'émission est proportionnelle à $I_r + (2\pi h)\nu_r^3/c^2$, qui sont justement les lois d'Einstein[20]. De la même manière, la probabilité d'un processus dans lequel un quantum lumineux est éparpillé d'un état r à un état s est proportionnelle à $I_r[I_s+(2\pi h)\nu_r^3/c^2]$, qui est la loi de Pauli pour le bombardement d'une radiation par un électron[21].

[19] *Z. f. Physik*, vol. 19, p. 301 (1923)

[20] Le rapport entre une émission stimulée et une émission spontanée dans la présente théorie est juste deux fois sa valeur dans la théorie d'Einstein. Cela est dû au fait que dans la présente théorie, un composant polarisé de la radiation incidente ne peut que stimuler une radiation polarisée de la même façon, alors que dans la théorie d'Einstein les deux composants polarisés sont traités ensemble. Cette remarque s'applique aussi au processus d'éparpillement.

[21] Pauli, *Z. f. Physik*, vol. 18, p. 272 (1923).

7 Coefficients de probabilité pour l'émission et l'absorption

Nous allons maintenant considérer l'interaction d'un atome et d'une radiation du point de vue ondulatoire. Nous résolvons la radiation en ses composantes de Fourier, et supposons que leur nombre est très grand mais fini. Indiçons chaque composant par un suffixe r, et supposons qu'il y a σ_r composants associés à la radiation d'un type défini de polarisation par unité d'angle solide et par unité d'intervalle de fréquence concernant le composant r. Chaque composant r peut être décrit par un potentiel vecteur κ_r, choisi de façon à annuler le potentiel scalaire. Le terme de perturbation à ajouter à l'hamiltonien sera maintenant, conformément à la théorie classique en négligeant la mécanique relativiste $c^{-1}\Sigma_r\kappa_r\dot{X}_r$, où X_r est le composant de la polarisation complète de l'atome dans la direction de κ_r, qui est la direction du vecteur électrique du composant r.

Nous pouvons, comme expliqué dans le §1, supposer que le champ peut être décrit par les variables canoniques N_r, θ_r, avec N_r le nombre de quanta d'énergie du composant r, et θ_r est sa phase conjuguée canonique, égale à $2\pi h\nu_r$ fois le θ_r de §1. Nous aurons maintenant $\kappa_r = a_r \cos\theta_r/h$ où a_r est l'amplitude de κ_r, qui peut être connecté à N_r comme suit : le flot d'énergie par unité de surface et par unité de temps pour le composant r est $\frac{1}{2}\pi c^{-1}a_r^2\nu_r^2$. Par conséquent, l'intensité par unité d'intervalle de fréquence de la radiation dans le voisinage du composant r est $I_r = \frac{1}{2}\pi c^{-1}a_r^2\nu_r^2\sigma_r$. En comparant cela avec l'équation (28), nous obtenons $a_r = 2(h\nu_r/c\sigma_t)^{\frac{1}{2}}N_r^{\frac{1}{2}}$, et par conséquent,

$$\kappa_r = 2(h\nu_r/c\sigma_r)^{\frac{1}{2}}N_r^{\frac{1}{2}}\cos\theta_r/h.$$

L'hamiltonien pour le système entier de l'atome plus la radiation sera maintenant, conformément à la théorie classique,

$$F = H_P(J) + \Sigma_r(2\pi h\nu_r)N_r + 2c^{-1}\sigma_r(h\nu_r/c\sigma_r)^{\frac{1}{2}}\dot{X}^{\frac{1}{2}}N_r^{\frac{1}{2}}\cos\theta_r/h, \tag{29}$$

où $H_P(J)$ est l'hamiltonien pour l'atome seul. En théorie quantique, nous devons faire des variables N_r et θ_r des q-nombres canoniques comme les variables J_k, w_k qui décrivent l'atome. Nous devons maintenant remplacer le $N_r^{\frac{1}{2}}\cos\theta_r/h$ dans (29) par le q-nombre réel

$$\frac{1}{2}\{N_r^{\frac{1}{2}}e^{i\theta_r/h} + e^{-i\theta_r/h}N_r^{\frac{1}{2}}\} = \frac{1}{2}\{N_r^{\frac{1}{2}}e^{i\theta_r/h} + (N_r+1)^{\frac{1}{2}}e^{-i\theta_r/h}\}$$

de telle façon que l'hamiltonien (29) devienne

$$F = H_P(J) + \Sigma_r(2\pi h\nu_r)N_r + h^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{3}{2}}\Sigma_r(\nu_r/\sigma_r)^{\frac{1}{2}}\dot{X}_r\{N_r^{\frac{1}{2}}e^{i\theta_r/h} + (N_r+1)^{\frac{1}{2}}e^{-i\theta_r/h}\}. \tag{30}$$

Celui-ci est de la forme (27), avec

$$v_r = v_r^* = h^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{3}{2}}(\nu_r/\sigma_r)^{\frac{1}{2}}\dot{X}_r \tag{31}$$

et

$$v_{rs} = 0 \qquad (r, s \neq 0).$$

Le point de vue ondulatoire est ainsi consistant avec le point de vue quantique et il donne des valeurs aux coefficients inconnus d'interaction v_{rs} dans la théorie quantique. Ces valeurs ne sont pas telles qu'elles permettent d'exprimer l'énergie d'interaction comme une fonction algébrique des variables canoniques. Puisque la théorie ondulatoire donne $v_{rs} = 0$ pour $r, s \neq 0$, cela semblerait montrer qu'il n'y a pas de processus directs d'éparpillement, mais cela pourrait être dû à une incomplétude de la théorie ondulatoire proposée ici.

Nous montrerons maintenant que l'hamiltonien (30) amène les expressions correctes des A et des B d'Einstein. Nous devons d'abord modifier légèrement l'analyse du §5 pour l'appliquer au cas où le système a un grand nombre discret d'états stationnaires plutôt qu'un continuum de tels états. Au lieu de l'équation (21), nous aurons maintenant

$$ih\dot{a}(\alpha') = \Sigma_{\alpha''} V(\alpha'\alpha'')a(\alpha'').$$

Si le système est initialement dans l'état α^0, nous devons prendre pour valeur initiale de $a(\alpha')$ la valeur $\delta_{a'a^0}$, qui est maintenant correctement normalisée. Cela donne en première approximation

$$ih\dot{a}(\alpha') = V(\alpha'\alpha^0) = v(\alpha'\alpha^0) = v(\alpha'\alpha^0)e^{i[W(\alpha')-W(\alpha^0)]t/h},$$

qui amène à

$$iha(\alpha') = \delta_{\alpha'\alpha^0} + v(\alpha'\alpha^0)\frac{e^{i[W(\alpha')-W(\alpha^0)]t/h} - 1}{i[W(\alpha') - W(\alpha^0)]/h},$$

correspondant à (22). Si, comme précédemment, nous transformons les variables $W, \gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_{u-1}$, nous obtenons (quand $\gamma' \neq \gamma^0$)

$$a(W'\gamma') = v(W', \gamma' \,; W^0, \gamma^0)[1 - e^{i(W'-W^0)t/h]}/(W' - W^0).$$

La probabilité du système d'être dans un état pour lequel chaque γ_k est égal à $\gamma_k' i$ est $\Sigma_{W'}|a(W'\gamma')|^2$. Si les états stationnaires sont proches les uns des autres et si le temps t n'est pas trop grand, nous pouvons remplacer cette somme par l'intégrale $(\Delta W)^{-1} \int |a(W'\gamma')|^2 dW'$, où ΔW est l'écart entre les niveaux d'énergie. En évaluant cette intégrale comme précédemment, nous obtenons pour probabilité par unité de temps d'une transition vers un état pour lequel chaque $\gamma_k = \gamma_k'$

(32) $$2\pi/h\Delta W.|v(W^0, \gamma' \,;\, W^0, \gamma^0)|^2.$$

En appliquant ce résultat, nous pouvons prendre pour γ n'importe quel ensemble de variables qui sont indépendantes de l'énergie propre totale W et qui avec W définissent un état stationnaire.

Nous retournons maintenant au problème défini par l'hamiltonien (30) et considérons le processus d'absorption dans lequel l'atome saute de l'état J^0 à l'état J' avec absorption d'un photon de l'état r. Nous prenons comme variables γ' les variables J' of the de l'atome avec les variables qui définissent la direction du mouvement et l'état de polarisation du quantum absorbé, mais pas son énergie. L'élément matriciel $v(W^0, \gamma' \,;\, W^0, \gamma^0)$ devient

$$h^{\frac{1}{2}} c^{-\frac{3}{2}} (\nu_r/\sigma_r)^{\frac{1}{2}} \dot{X}_r(J^0J')N_r^0,$$

où $\dot{X}_r(J^0J')$ est l'élément matriciel ordinaire (J^0J') de $\dot{X}_r$. Par conséquent, à partir de (32), la probabilité par unité de temps du processus d'absorption est

$$\frac{2\pi}{h\Delta W}\cdot\frac{h\nu_r}{c^3\sigma_r}|\dot{X}_r(J^0J')|^2 N_r^0.$$

Pour obtenir la probabilité du processus lorsque le photon vient depuis n'importe quelle direction dans un angle solide $d\omega$, nous devons multiplier cette expression par le nombre de directions possibles pour le quantum de lumière dans l'angle solide $d\omega$, qui est $d\omega\sigma_r\Delta W/2\pi h$. Cela donne

$$d\omega\frac{\nu_r}{hc^3}|\dot{X}_r(J^0J')|^2 N_r^0 = d\omega\frac{1}{2\pi h^2 c\, \nu_r^2}|\dot{X}_r(J^0J')|^2 I_r$$

avec l'aide de (28). Par conséquent le coefficient de probabilité pour le processus d'absorption est $1/2\pi h^2 c\nu_r^2.|\dot{X}_r(J^0J'|^2$, conformément à la valeur habituelle du coefficient d'absorption d'Einstein en mécanique matricielle. La concordance des coefficients d'émission peut être vérifiée de la même manière.

La présente théorie, puisqu'elle rend compte de sa propre façon de l'émission spontanée, doit supposément donner l'effet de la réaction de la radiation sur le système émettant, et permettre de calculer les largeurs naturelles des raies spectrales, si l'on réussit à dépasser les difficultés mathématiques que présente la recherche d'une solution générale au problème de l'onde correspondant à l'hamiltonien (30). La théorie permet également de comprendre comment il se fait qu'il n'y ait pas de violation des lois de conservation de l'énergie quand, disons, un photo-électron est émis par un atome sous l'action d'une radiation incidente extrêmement faible. L'énergie de l'interaction entre l'atome et la radiation est un q-nombre qui ne commute pas avec les premières intégrales du mouvement de l'atome seul ou avec l'intensité de la radiation. De ce fait, on ne peut pas spécifier cette énergie par un c-nombre en même temps qu'on spécifie l'état stationnaire de l'atome et l'intensité de la radiation par des c-nombres. En particulier, on ne peut pas dire que l'énergie d'interaction tend vers zéro quand l'intensité de la radiation incidente tend vers zéro. Il y a du coup toujours une partie non spécifiable de l'énergie d'interaction qui peut fournir de l'énergie au photo-électron.

Je voudrais exprimer ma gratitude au Prof. Niels Bohr pour son intérêt pour ce travail et pour de nombreuses discussions amicales à ce propos.

Résumé

On traite le problème d'un assemblage de systèmes similaires satisfaisant les contraintes de Einstein-Bose de la mécanique statistique, qui interagit avec un autre système différent, une fonction hamiltonienne étant obtenue pour décrire le mouvement. La théorie est appliquée à l'interaction d'un assemblage de quanta lumineux et d'un atome ordinaire, et l'on montre que cela fournit les lois d'Einstein pour l'émission et l'absorption d'une radiation.

L'interaction d'un atome avec des ondes électromagnétiques est alors considérée, et il est montré que si l'on prend des énergies et des phases d'ondes qui sont des q-nombres satisfaisant les conditions propres du quantum lui-même plutôt que des c-nombres, la fonction hamiltonienne prend la même forme que celle du traitement quantique. La théorie amène à l'expression correcte des A et B d'Einstein.

Cohomologie cyclique et
géométrie différentielle non-commutative

Alain CONNES

Proceedings du Congrès international des mathématiciens
Berkeley, Californie, Etats-Unis, 1986

La cohomologie cyclique est apparue indépendamment à partir de deux courants différents d'idées, la K-théorie algébrique et la géométrie différentielle non-commutative. J'essaierai d'expliquer dans cet article le sens de la géométrie différentielle non-commutative. Le besoin de considérer de tels espaces et de développer pour eux les analogues des outils de géométrie différentielle est mieux compris dans les deux exemples suivants. Dans les deux cas, on essaie de prouver un résultat de géométrie différentielle classique, et une preuve heuristique est possible si l'on accepte la nouvelle définition de l'espace.

Premier exemple.

THÉORÈME (LICHNEROWICZ, 1961). *Si M est un feuilletage compact de spin dont le genre $\widehat{A}$ est non nul, alors il est impossible de doter M d'une métrique Riemannienne de courbure scalaire strictement positive.*

La preuve du résultat utilise une idée globale simple. Par l'identité de Lichnerowicz, le carré de l'opérateur de Dirac est $\nabla * \nabla + \frac{1}{4}\chi$ où $\nabla * \nabla$ est un opérateur positif et χ est la courbure scalaire. Ainsi pour $\chi > 0$, l'opérateur de Dirac a un index nul. Mais par le théorème de l'index index(Dirac) $= \widehat{A}(M) \neq 0$. CQFD.

On a un résultat plus fort à propos de la non-existence d'une métrique de courbure scalaire positive qui est le résultat suivant

THÉORÈME **[14]**. *Soit M un feuilletage compact orienté avec $\widehat{A}(M) \neq 0$.*
Alors il n'y a pas de sous-fibré de spin intégrable F de TM de courbure scalaire strictement positive.

Donnons une preuve heuristique de ce résultat qui fonctionnera lorsque nous obtiendrons les bons outils. L'idée est la suivante : étant donné un sous-fibré intégrable F du fibré tangent de M, on peut a priori l'intégrer et obtenir un feuilletage de M qui crée un nouvel espace B de feuilles de cette variété feuilletée (Voir Figure 1).

Maintenant, $\widehat{A}(M)$ est l'index de l'opérateur de Dirac, au moins si M est spin, ou, équivalemment, c'est le pushforward $\pi!(L)$ du fibré trivial L sur M par la fonction $\pi : M \to \text{pt}$. Comme $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$, où π_2 est la projection de M sur l'espace de feuilles B, on a $\pi!(L) = \pi_1!(\pi_2!(L))$, mais $\pi_2!(L) \in K(B)$ est l'index de la famille d'opérateurs de Dirac le long des feuilles et par conséquent est nul puisque la courbure scalaire des feuilles est strictement positive.

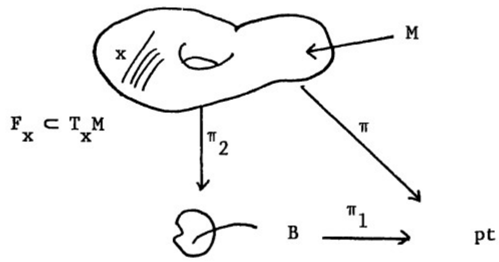


FIGURE 1

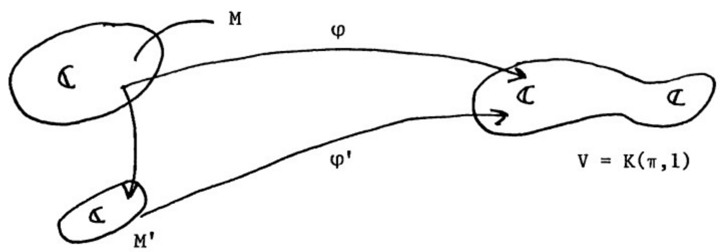


FIGURE 2

Ce raisonnement ne marche pas si l'on a juste une fibration ; on applique alors le théorème de l'index pour les familles. Pourtant, en général, étant donné un sous-fibré intégrable F, il est impossible de décider s'il crée une fibration ou un feuilletage. Par exemple, sur le deux-tore $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, l'équation $\mathrm{d}y = \theta\ \mathrm{d}x$ définit une fibration ssi θ est rationnel. Du coup, il est impossible de se restreindre au cas des fibrations, et on a besoin de gérer des espaces comme l'espace B des feuilles d'un feuilletage arbitraire. On a besoin de nouveaux outils pour comprendre et utiliser de tels espaces parce que vus seulement comme des espaces topologiques ordinaires, ils ne sont d'aucune utilité ; en général, ils devraient apporter la topologie globale et $K(B)$ serait trivial.

Second exemple. Nous passons maintenant de l'espace des feuilles d'un feuilletage à un autre exemple lié aux groupes discrets. Il vient d'un problème énoncé par Novikov - l'invariance d'homotopie des plus grandes signatures. Soit M une variété compacte orientée et φ une fonction de M vers un $K(\pi, 1)$ espace V. Par exemple, on peut prendre pour φ la fonction qui classifie la couverture universelle de M. Pour chaque classe de cohomologie $\omega \in H^*(V, \mathbf{C}) = H^*(\pi, \mathbf{C})$, la plus grande signature de la paire (M, φ) est donnée par le scalaire $\langle \mathcal{L}_M.\varphi^*(\omega), [M]\rangle$ où $\mathcal{L}_M$ est le L genre de M et $\varphi^*(\omega)$ est le pullback de ω par φ. Le problème est le suivant : le nombre bien défini ci-dessus est-il un invariant d'homotopie de la paire (M, φ) ? (voir Figure 2).

Quand $V = \mathrm{pt}$, on obtient la signature ordinaire de M, qui est un invariant d'homotopie. Par le travail de Wall et Miscenko, en théorie de la chirurgie équivariante, on peut assigner une signature π-équivariante au recouvrement $\widetilde{M}$ de M pullbacké par φ du recouvrement universel $\widetilde{V}$ de V. De plus, cette signature équivariante appartient (en négligeant la torsion) au groupe de Witt de l'anneau de groupe $\mathbf{C}\pi$ et est un invariant d'homotopie, $\text{Signature}_\pi(M) \in \text{Witt}(\mathbf{C}\pi)$. Quand π est *commutatif*, on peut prouver l'invariance d'homotopie des plus grandes signatures comme suit. Il y a par exemple un *espace* assigné au groupe π, l'espace des caractères, i.e., le dual $\widehat{\pi}$, qui est Hausdorff et compact, de dimension finie si π est finiment engendré. Alors l'anneau de groupes $\mathbf{C}\pi$ intègre comme sous-anneau l'anneau $C(\widehat{\pi})$ des fonctions continues sur $\widehat{\pi}$:

$$\mathbf{C}\pi \subset C(\widehat{\pi}).$$

La diagonalisation des formes quadratiques sur $C(\widehat{\pi})$ amène une fonction du groupe de Witt de $\mathbf{C}\pi$ sur le K^0 groupe de $\widehat{\pi}$:

$$\text{Witt } \mathbf{C}\pi \to K^0(\widehat{\pi}).$$

Maintenant n'importe quel

$$\omega \in H^n(V, \mathbf{C}) = H^n(\pi, \mathbf{C})$$

est représenté par un cocycle de groupes $\omega(g^1, \dots, g^n)$ totalement antisymétrique en les g^i.

On définit alors de manière unique un flot C sur $\widehat{\pi}$ par l'égalité :

$$\langle c, f^0 df^1 \wedge \dots \wedge df^n \rangle = \sum_{\prod_0^n g^i = 1} \widehat{f}^0(g^0)\widehat{f}^1(g^1)\dots\widehat{f}^n(g^n)\omega(g^1, \dots, g^n)$$

où les f^i sont les fonctions sur $\widehat{\pi}$ de telle façon que leur transformation de Fourier $\widehat{f^i}$ soient des fonctions sur le groupe π lui-même. Le flot C est fermé parce que ω est un cocycle de groupes.

Le lemme principal, alors, qui est un corollaire du théorème de l'index pour les familles, dit que si l'on apparie C avec le caractère de Chern de la signature équivariante, on obtient une signature plus grande :

$$\langle C, \text{Ch}(\text{Signature}_\pi(\widetilde{M})) \rangle = \langle \mathcal{L}_M . \varphi^*(\omega), [M] \rangle.$$

Ainsi le côté droit est invariant par homotopie. CQFD.

En général, *quand π n'est pas commutatif*, il n'y a pas d'espace de caractères intéressant et on ne peut pas vraiment parler du dual de π comme d'un espace. Pourtant, et cela sera l'élément clef de cette discussion, on peut assigner une C^*-algèbre non-commutative à π ; c'est la complétion de l'anneau de groupe $\mathbf{C}\pi$ agissant sur l'espace de Hilbert $l^2(\pi)$.

Une étude attentive des deux exemples précédents révèle que l'on a besoin, de manière à pouvoir procéder, d'une généralisation adéquate de la notion d'espace, qui nous autorisera à traiter à la fois les espaces de feuilles et les duaux des groupes non-commutatifs, comme si c'étaient des espaces ordinaires.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & \text{Category of sheaves on } X \\ \text{Space } X \arrow[ur, "\text{Grothendieck}"] \arrow[dr, "\text{Gelfand}"'] & \\ & \text{Algebra of complex functions on } X \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & \text{Topos} \\ \text{"Space"}\, X \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \text{Noncommutative } C^*\text{-algebras} \end{tikzcd}$$

L'idée de base sous-tendant la nouvelle notion d'espace découverte par Grothendieck - et qu'il a appelée "topos" - est que dans un espace topologique ordinaire, le rôle principal n'est plus joué par les points et par leurs relations de proximité, mais par les catégories de faisceaux sur l'espace. En effet, l'espace topologique original peut être retrouvé à partir de cette catégorie et, de plus, si l'on garde vraiment les conditions adéquates satisfaites par de telles catégories, on obtient la notion de topos qui joue un rôle fondamental implicite dans la nouvelle géométrie algébrique. La nouvelle notion d'espace avec laquelle nous allons travailler est basée sur une idée similaire, mais elle assigne un rôle spécifique aux nombres complexes $\mathbf{C}$ ou, de façon équivalente, à l'analyse fonctionnelle. Elle a pour origine la théorie de Gelfand des C^*-algèbres. Elle affirme qu'un espace topologique compact X est caractérisé par la $*$-algèbre $C(X)$ des fonctions continues à valeurs complexes sur X et que de telles algèbres sont les C^*-algèbres commutatives les plus générales. Il n'y a donc pas de bonne raison de se restreindre aux C^*-algèbres commutatives plutôt qu'aux non-commutatives et cette idée remonte aux développements initiaux de la mécanique quantique avec la découverte de la *mécanique matricielle* par Heisenberg. En comprenant, d'un point de vue très optimiste grandement renforcé par l'évidence expérimentale en spectroscopie, l'interaction de la matière avec le champ de radiation, Heisenberg a montré que les observables habituels de la mécanique classique devaient être remplacés par des matrices qui violent la commutativité de la multiplication. Ainsi l'espace des phases des particules quantiques est un des premiers exemples de ce nouveau type d'espaces que nous allons traiter. Pour pousser plus avant cette seconde idée d'espace, nous avons besoin de nombreux exemples, chacun étant utilisé comme un petit laboratoire dans lequel tester les idées et voir ce qui fonctionne. Nous résumons quelques exemples dans la table ci-dessous :

Espace	*Algebre*
X	$C(X)$
$X = \widehat{\pi}$ dual de	$C^*(\pi) \supset \mathbf{C}\pi$
un groupe discret	(complétion dans $l^2(\pi)$)
$X = M/F$ espace des feuilles	$C^*(M, F)$
Exemple : feuilletage de Kronecker	$VU = (exp\ 2\pi_i\theta)UV$
$X = \Omega/G$ espace des orbites	produit croisé $C_0(\Omega) \rtimes G$

Nous avons déjà discuté du premier exemple. Le second vient des feuilletages. Il y a une C^*-algèbre très naturelle, venant des opérateurs qui différencient seulement dans la direction des feuilles, et qui sont elliptiques dans cette direction. Ils s'avèrent avoir des paramètres naturels ;

ils sont inversibles modulo les opérateurs qui sont lisses dans la direction des feuilles. Ces opérateurs constituent une C^*-algèbre, $C^*(M,F)$. Un exemple serait de prendre le feuilletage de Kronecker du 2-tore, qui est induit par l'équation $\mathrm{d}y = \theta\ \mathrm{d}x$ où θ est irrationnel. Dans ce cas, on obtient une C^*-algèbre engendrée par les deux éléments unitaires qui ne commutent pas, mais qui commutent à une phase près égale à $\lambda = \exp 2\pi i\theta$. C'est une algèbre avec laquelle on peut faire de nombreux calculs, exactement comme si on calculait avec les fonctions ordinaires du 2-tore en utilisant l'analyse de Fourier.

Un autre exemple très important a été découvert par Bellissard [**6**] dans le domaine de la physique des états solides et de l'effet de Hall quantique. Dans l'étude des systèmes désordonnés, l'Hamiltonien H_ω est étiqueté par un paramètre $\omega \in \Omega$. De plus, H_ω ne peut commuter avec $H_{T_x}(\omega)$ où T est l'action du groupe de translation de l'espace de paramètre Ω. Ainsi le translaté de l'Hamiltonien engendre une C^*-algèbre non-commutative, qui correspond au "spectre d'énergie" du système.

Etant donnés ces exemples, on a besoin des bons outils. Le premier provient de mon domaine originale d'étude : "les algèbres de von Neumann". Ces algèbres constituent exactement l'analogue non-commutatif de la théorie de la mesure. Leur classification et compréhension ont atteint un état presque complet et satisfaisant.

Mais nous avons besoin alors d'un peu plus que de la simple théorie de la mesure ; nous avons besoin de topologie. Je décrirai maintenant l'outil de base en topologie, introduit initialement par Grothendieck en géométrie algébrique, et ensuite par Atiyah pour les objectifs de la topologie. Cet outil est la K-théorie. Il y a une relation assez simple entre les fibrés vectoriels complexes sur l'espace X et les modules projectifs sur l'algèbre $A = C(X)$; c'est le théorème de Serre-Swann :

$$K^i(X) = K_i(A = C(X)).$$

Il nous permet de faire de la K-théorie des espaces en faisant de l'algèbre linéaire où le corps $\mathbf{C}$ est remplacé par l'anneau A. Alors le groupe des dimensions des modules projectifs finis est le K-groupe $K_0(A)$. Le théorème de périodicité de Bott nous dit que les K-groupes d'une C^*-algèbre A sont les groupes d'homotopie du groupe de gauge, i.e. du groupe unitaire $\mathcal{U}$ des matrices infinies sur A :

$$K_i(A) = \pi_{i+1}(\mathcal{U})$$

A chaque fois qu'un espace est construit en collant ensemble deux espaces, de telle façon qu'on ait une séquence exacte d'algèbres, il y a une séquence exacte longue correspondante de K-groupes, qui est raccourcie grâce à la périodicité :

$$0 \to J \to A \to B \to 0 \Rightarrow \begin{tikzcd} & K_0(J) \arrow[r] & K_0(A) \arrow[dr] & \\ K_1(B) \arrow[ur] & & & K_0(B) \arrow[dl] \\ & K_1(A) \arrow[ul] & K_1(J) \arrow[l] & \end{tikzcd}$$

De plus, il y a un principe général qui est absolument crucial. Ci-dessus, nous avons utilisé deux fois le théorème de l'index pour les familles. Maintenant le principe est qu'un "espace" X sera décrit par une algèbre non-commutative A, et que quand on a une famille (D_x), $x \in X$ indexée par X, de telle façon que la famille des opérateurs de Dirac soit indexée feuille à feuille par l'espace des feuilles, alors l'index de cette famille appartient à $K^0(X) = K_0(A)$.

Ce principe est très important parce qu'il nous autorise à traduire en termes K-théoriques les propriétés analytiques de base telles que :

- L'évanouissement de l'index de la famille d'opérateurs de Dirac feuille à feuille :

$$\mathrm{Index}(\mathrm{Dirac}_L)_{L \in M/F} = 0$$

  quand la courbure scalaire des feuilles est strictement positive.

- L'invariance d'homotopie de la signature π-équivariante : $\mathrm{Signature}_\pi(\widehat{M}) \in K_0(C^*(\pi))$.

L'évanouissement dont il est question ci-dessus a lieu dans le K-groupe $K_0(C^*(M, F))$. Tous les K-groupes sont des groupes abéliens dénombrables mais sont de prime abord des objets extrêmement mystérieux, définis à travers les C^*-algèbres ci-dessus. Quand on travaille avec des espaces ordinaires, on obtient quelque intuition à propos de leurs K-groupes, mais cela est moins clair avec les C^*-algèbres. La première percée réelle qui a vraiment fait tout démarrer a été réalisée par Pimsner et Voiculescu [**26**] qui ont, en particulier, calculé les K-groupes du feuilletage du flot de Kronecker dont il a été question ci-dessus. Cela a permis à P. Baum et à l'auteur de deviner quelle serait la réponse à la fois en termes généraux et en termes géométriques. La situation se décrit ainsi : nous construisons un groupe géométrique, la K-homologie de son espace classifiant, et une fonction μ vers le K-groupe de la C^*-algèbre. L'espace classifiant fait sens dans toutes les situations ci-dessus puisque les topologues ont une manière de donner du sens, à homotopie près, à des espaces comme l'espace des feuilles d'un feuilletage ou l'espace des orbites d'une action de groupe. Ce qu'ils font c'est qu'ils amplifient l'espace, disons M, sur lequel le groupe Γ agit, en croisant M avec un espace contractible $E\Gamma$ sur lequel Γ agit librement ; alors le quotient $M \times_\Gamma E\Gamma$ fait sens et est "*homotopique à* M/Γ".

$$K_*(\text{Espace classifiant}) \xrightarrow{\mu} K(C^*\text{-algèbre})$$

L'application μ est difficile à construire [**5, 4, 12, 24**] et même quand on traite un espace à un seul point, sa simple existence découle du théorème d'Atiyah-Singer [**5**]. C'est essentiellement l'application de la dualité de Poincaré dans la mesure où elle inverse les fonctorialités. Le problème principal de la théorie est de gérer cette application μ ; tous les calculs effectués jusque-là indiquent que c'est une bijection [**4, 23, 24, 27**]. Un outil important développé par l'école russe, par Miscenko et Kasparov en particulier, et aussi par Atiyah, Brown, Douglas, et Fillmore (cf. [**23, 24, 1, 7**]), est la K-homologie pour les C^*-algèbres. Puisque cette théorie a joué un rôle crucial dans la compréhension de l'analogue de la théorie de de Rham des flots sur les espaces ci-dessus, je la rappellerai brièvement. Pour les espaces ordinaires, la K-homologie est définie, en utilisant la dualité, par un théorème général qui établit qu'étant donnée une théorie cohomologique (telle que la K-théorie), il y a une théorie correspondante de l'homologie, appelée ici K-homologie. On veut réaliser cette théorie de l'homologie concrètement. Il est assez frappant que si l'on est très conservateur et que l'on souhaite coller des espaces ordinaires, en n'acceptant pas les "espaces", on ne sera pas capable de décrire la théorie K-homologie (X) (il y a un K_{even} et un K_{odd}) comme des classes d'homotopie de classes d'applications d'espaces $\mathrm{Z}_{even}, \mathrm{Z}_{odd}$ vers l'espace X. Pourtant, avec des "espaces", c'est possible ; Z_{ev} s'obtient en collant ensemble deux "espaces" contractibles, et la C^*-algèbre $C(\mathrm{Z}_{ev})$ est l'algèbre non-commutative A_{ev}, des pairs d'opérateurs (x, y) dans l'espace de Hilbert $\hbar$ dont la différence $x - y$ est un opérateur compact. De façon similaire, $C(\mathrm{Z}_{odd}) = A_{odd}$ qui apparaît aussi dans *Beyond Affine Lie Algebras*, par I. Frenkel, est l'algèbre des matrices 2×2 (x_{ij}) d'opérateurs, tels que x_{12} et x_{21} sont compacts. Bien sûr, une "application continue" de Z_{ev} vers X est donnée par un homomorphisme de $C(X)$ vers $C(\mathrm{Z}_{ev})$, i.e., un homomorphisme de la C^*-algèbre $A = C(X)$ vers A_{ev}. On l'appelle un *module de Fredholm* sur A parce que cela revient à donner un espace de Hilbert mesuré $\mathbf{Z}/2$, $\hbar \oplus \hbar$ avec comme étalon $\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, avec une structure de A-module à gauche telle que

(1) $\varepsilon a = a\varepsilon \quad \forall a \in A$,

(2) $[F, a]$ est compact $\forall a \in A$ où $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Il y a une notion similaire de module de Fredholm impair. Sur chaque variété compacte spin^c de dimension paire, le module des spineurs L^2, avec l'étalon $\mathbf{Z}/2$ donné par la matrice γ_5 [**5**] et l'opérateur F donné par la phase $F = D|D|^{-1}$ de l'opérateur de Dirac, est un module de Fredholm qui représente la *classe fondamentale* de la variété en K-homologie [**5**]. Si l'on met ensemble cette notion d'un module de Fredholm avec les idées de Helton et Howe, Carey et Pincus [**18, 9**] sur les opérateurs commutants modulo les idéaux de la trace, on aboutit à l'analogue non-commutatif de la théorie de de Rham : la cohomologie cyclique. Helton et Howe ont associé à chaque opérateur T, normal modulo les opérateurs de classe trace, un flot de de Rham sur R^2 avec une frontière amenée par le spectre essentiel de T. Leur travail était très inspirant parce qu'il montrait que le calcul des formes différentielles pourrait naître de considérations purement théoriques sur les opérateurs dans l'espace de Hilbert. C'est ce qui est fait dans [**11**] ; étant donné un module de Fredholm sur A, on peut définir *des formes différentielles* sur l'"espace" correspondant non pas en utilisant des cartes locales et en les recollant ensemble mais directement comme des opérateurs dans $\hbar$. C'est exactement la même étape que le remplacement, en mécanique quantique, des crochets de Poisson par des commutateurs. Ainsi

$$\mathrm{d}a = i[F, a] \qquad \forall a \in A$$

définit la différentielle d'une fonction. Les formes de degré q sont obtenues comme produits de 1-formes : $\Omega^q = \{\sum x^0 \, \mathrm{d}x^1 \dots \, \mathrm{d}x^q, \quad x^j \in A\}$. De cette manière, on obtient une algèbre différentielle graduée ; le produit est le produit d'opérateurs et la différentielle est donnée par

$$d\omega = i(F\omega - (-1)^q \omega F) \qquad \text{for } \omega \in \Omega^q.$$

On a $d^2 = 0$, et le point principal est d'obtenir l'intégration des formes $\omega \to \int \omega \in \mathbf{C}$ satisfaisant $\int d\omega = 0$ et $\int \omega_2\omega_1 = (-1)^{q_1 q_2} \int \omega_1\omega_2$.
La formule qui marche est assez simple : $\int \omega = Trace(\varepsilon\omega)$. C'est là qu'apparaît la *dimension*, la trace ayant uniquement un sens si ω est un opérateur de *classe trace*. Par l'inégalité de Holder, cela est vérifié, pour tout $\omega \in \Omega^n$, si l'on suppose que $[F, a] \in \mathcal{L}^n \ \ \forall a \in A$. Ici, pour tout nombre *réel* $p \in [1, \infty]$, $\mathcal{L}^p$ est l'idéal des opérateurs compacts T avec $\sum \lambda_q(|T|)^p < \infty$, où $\lambda_q(|T|)$ est la $q^{\text{ème}}$ valeur propre de la valeur absolue de T. La *dimension* d'un module de Fredholm sur une algèbre est le plus petit des p pour lesquels $[F, a] \in \mathcal{L}^p \ \forall a \in A$. Pour la classe fondamentale des variétés M décrite ci-dessus, cela fournit la dimension de M. En général, elle n'est pas nécessairement entière. Etant donné un module pair de Fredholm de dimension p sur A, on ne peut intégrer que les formes $\omega \in \Omega^n$ de degré $\geq p$. De plus, les formes impaires ont une intégrale nulle. Du coup, la construction ci-dessus fournit pour tout entier pair $n \geq p$, la fonctionnelle τ_n appelée le caractère n-dimensionnel du module de Fredholm :

$$\tau_n(a^0, \dots, a^n) = \int a^0 \mathrm{d}a^1 \dots \mathrm{d}a^n \ \ \forall a^i \in A.$$

Une analyse attentive de ces fonctionnelles m'a amené à découvrir la cohomologie cyclique en 1981. Elle a été découverte indépendamment à partir de la K-théorie algébrique par Feigin et Tsigan [**17, 30**], en remplaçant l'homologie de groupe par l'homologie de l'algèbre de Lie dans la construction de base de la K-théorie algébrique de Quillen. Elle est aussi apparue, au moins sous une forme implicite, dans le travail de Hsiang et Staffeld sur la K-théorie algébrique des espaces [**20**]. C'est bien sûr frappant que de plusieurs courants d'idées, on obtienne la même théorie : la *cohomologie cyclique*. On a le lemme simple et crucial suivant.

LEMME. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre et τ une application $(n+1)$-linéaire $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A} \to \mathbf{C}$ telle que*
(1) $\tau(a^1, \dots, a^n, a^0) = (-1)^n \tau(a^0, \dots, a^n) \forall a^i \in \mathcal{A}$;
(2) $\sum_0^n (-1)^j \tau(a^0, \dots, a^j, a^{j+1}, \dots, a^{n+1}) + (-1)^{n+1} \tau(a^{n+1}a^0, \dots, a^n) = 0 \ \ \forall a^i \in \mathcal{A}$.
Alors l'application $e \in \mathcal{A}, e^2 = e \to \tau(e, \dots, e)$, fournit un morphisme de $K_0(\mathcal{A})$ to $\mathbf{C}$.

En fait, $K_0(\mathcal{A})$ est engendré par les idempotents $e^2 = e$ dans les matrices sur $\mathcal{A}, M_q(\mathcal{A}) = M_q(\mathbf{C}) \otimes \mathcal{A}$, et on doit étendre τ à $M_q(\mathcal{A})$ par l'égalité :

$$\tau_q(m^0 \otimes a^0, \dots, m^n \otimes a^n) = \mathrm{Trace}(m^0 \dots m^n)\tau(a^0, \dots, a^n)$$

$\forall m^j \in M_q(\mathbf{C}), a^j \in \mathcal{A}$.
Voici quelques exemples de fonctionnelles rτ qui satisfont (1) et (2) :

EXEMPLE α. Soit $\mathcal{A} = \mathbf{C}^\infty(M)$, l'algèbre des fonctions lisses sur une variété compacte, et C un flot fermé sur M de dimension k. Alors $\tau(\int^0, \dots, \int^k) = \langle C, \int^0 d \int^1 \wedge \dots \wedge d \int^k \rangle \forall \int^j \in \mathcal{A}$ a exactement les propriétés (1), (2) d'un cocycle cyclique. En fait, τ satisfait $\tau^\sigma = sign(\sigma)\tau$ pour *toute* permutation de $\{0, 1, .., k\}$, mais puisque $\mathrm{Trace}(m^0 \dots m^k)$ est invariant seulement sous les permutations *cycliques*, il n'y a que (1) qui soit satisfaite par tous les τ_q. On a $K_0(\mathcal{A}) = K^0(M)$

et le lemme fournit en retour le caractère de Chern, vu comme un appariement avec l'homologie de M.

EXEMPLE β. Soit π un groupe discret, $\mathcal{A} = \mathbf{C}\pi$ l'anneau de groupe, et $\omega \in \mathbf{Z}^n(\pi, \mathbf{C})$ un cocycle de groupe convenablement normalisé tel que $\omega(g^1, \ldots, g^n) = 0$ si $g^1 \ldots g^n = 1$. Alors l'égalité

$$\begin{aligned} &\tau(g^0, \ldots, g^n) = 0 \ \text{ if } g^0 \ldots g^n \neq 1 \ \ \forall g^i \in \pi \\ &\tau(g^0, \ldots, g^n) = \omega(g^1, \ldots, g^n) \ \text{ if } g^0 \ldots g^n = 1 \ \ \forall g^i \in \pi, \end{aligned}$$

définit un cocycle n-cyclique τ sur $\mathcal{A}$. De plus, en étendant τ aux matrices infinies sur $\mathcal{A}$, on peut montrer que

$$\langle \tau, \text{Signature}_\pi(\widetilde{M}) \rangle = \langle \mathcal{L}_M . \varphi^*(\omega), [M] \rangle$$

avec les notations du problème des plus hautes signatures. La cohomologie cyclique des anneaux de groupes est calculée par Burghelea dans [**8**].

EXEMPLE γ. Pour chaque $n \geq p$ pair, le caractère n-dimensionnel τ_n d'un module de Fredholm sur A est un cocycle cyclique. De plus, l'appariement avec $K_0(A)$, $\langle \tau_n, e \rangle$ est donné pour tout idempotent e par l'*index d'un opérateur de Fredholm*, et, en particulier, il aboutit dans $\mathbf{Z} \subset \mathbf{C}$. Il correspond à l'appariement $\mathbf{Z}$-valué entre la K-théorie et la K-homologie, ce qui assure qu'il est hautement non trivial.

Etant donnée une algèbre $\mathcal{A}$, il y a une manière évidente de construire des cocycles cycliques sur $\mathcal{A}$, notamment $\tau = b\varphi$ où $\varphi \in C_\lambda^{n-1}$ est une fonctionnelle n-linéaire sur $\mathcal{A}$ satisfaisant (1), et $b\varphi$ sa colimite de Hochschild donnée par la formule (2). Le groupe pertinent est le quotient $H_\lambda^n(\mathcal{A}) = Z_\lambda^n(\mathcal{A})/bC_\lambda^{n-1}$, où $Z_\lambda^n = \text{Ker } b$, et il est appelé la *cohomologie cyclique* de $\mathcal{A}$. Il s'avère qu'en travaillant simplement avec les modules de Fredholm de l'exemple γ, toutes les propriétés de la cohomologie cyclique permettent de retomber sur ses pieds. D'abord, un module de Fredholm a de nombreux caractères τ_q, un pour chaque entier pair $q \geq p$, et il ne serait pas déraisonnable de s'attendre à ce que $\tau_{q+2}, \tau_{q+4} \ldots$ amène une nouvelle information non contenue dans τ_q. Les calculs explicites montrent qu'il y a un opérateur de périodicité naturelle

$$S : H_\lambda^n(\mathcal{A}) \to H_\lambda^{n+2}(\mathcal{A})$$

donné en fait par le cup produit par le générateur de $H_\lambda{}^2(\mathbf{C})$ et tel que $\tau_{q+2k} = S^k \tau_q$ in $H_\lambda^{q+2k}(\mathcal{A})$. Alors, dans le but de trouver le plus petit n pour lequel τ_n est défini, on a besoin de déterminer l'image de S. Mais par construction, le complexe (C_λ^n, b) est un sous-complexe du complexe de Hochschild (C^n, b) où C^n est l'espace de toutes les fonctionnelles $(n+1)$-linéaires sur $\mathcal{A}$. Il en résulte que $\tau \in \text{Im} S$ ssi τ est trivial dans ce dernier complexe, dont la cohomologie $H^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$, la cohomologie de Hochschild de $\mathcal{A}$ à coefficients dans le bimodule des formes linéaires sur $\mathcal{A}$, est calculable par les méthodes générales de l'algèbre homologique. Le point final est la construction d'un opérateur naturel B à partir de la cohomologie de Hochschild $H^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ vers $H_\lambda^{n-1}(\mathcal{A})$ et la preuve de l'exactitude de la séquence suivante :

$$\begin{aligned} &\cdots \to H^n_\lambda(\mathcal{A}) \xrightarrow{S} H^{n+2}_\lambda(\mathcal{A}) \xrightarrow{I} H^{n+2}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*) \\ &\xrightarrow{B} H^{n+1}_\lambda(\mathcal{A}) \xrightarrow{S} H^{n+3}_\lambda(\mathcal{A}) \xrightarrow{I} H^{n+3}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*) \to \cdots \end{aligned}$$

Ainsi, la cohomologie de Hochschild et la cohomologie cyclique forment un couple exact qui avec la séquence spectrale associée devient un outil de base pour calculer la cohomologie cyclique des algèbres. La puissance de cet outil est illustrée par deux exemples :

EXEMPLE a. Soit M une variété compacte, $\mathcal{A} = C^\infty(M)$. En imposant des conditions de continuité évidentes aux cochaînes, on obtient que les groupes de cohomologie de Hochschild $H^q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ sont identifiables à l'espace Ω_q, des flots de de Rham de dimension q sur M. L'application $I \circ B$ du couple exact est la limite de de Rham d^t, et on obtient

$$H^q_\lambda(\mathcal{A}) = \{\mathrm{Ker}\ d^t \subset \Omega_q\} + H_{q-2}(M, \mathbf{C}) + H_{q-4}(M, \mathbf{C}) \dots .$$

L'homologie de de Rham de M s'identifie à la cohomologie cyclique périodique de

$$\mathcal{A} = H^*_{\mathrm{Per}}(\mathcal{A}) = \underset{\rightarrow}{\mathrm{Lim}}(H^n_\lambda(\mathcal{A}), S).$$

EXEMPLE b. Soit (M, F) une variété feuilletée, $A = C^*(M, F)$ sa C^*-algèbre correspondante. Dans A, il y a une sous-algèbre dense naturelle $\mathcal{A}$ d'éléments lisses et on doit calculer sa cohomologie cyclique. On a

$$H^*_{\mathrm{Per}}(\mathcal{A}) \cong H^*_\tau(\text{Classifying Space})$$

où le côté droit est la cohomologie avec les coefficients complexes de l'espace classifiant du groupoïde d'holonomie ou le graphe du feuilletage. L'index τ signifie que cette cohomologie est twistée par l'orientation du fibré transverse τ du feuilletage. En utilisant les fibres sur M et la construction naturelle de $\mathcal{A}$, on construit un morphisme de localisation λ_M, qui est une généralisation de grande portée du flot de Ruelle-Sullivan :

$$\lambda_V : H^*_{\mathrm{Per}}(\mathcal{A}) \overset{\lambda_M}{\to} H^*_\tau(M, C)$$

et l'on aboutit à la formulation cohomologique suivante du théorème de l'indice longitudinal pour les feuilletages [**12**].

THÉORÈME. *Soit (M,F) une variété compacte feuilletée, D un opérateur elliptique longitudinal, et τ un cocycle cyclique sur $\mathcal{A}$. Alors*

$$\langle \tau, \mathrm{Index}(D) \rangle = (\lambda_M(\tau)\mathrm{Td}(F_{\mathbf{C}})\mathrm{Ch}\ \sigma_D, [M])$$

où σ_D est le symbole longitudinal de D.

Il y a, cependant, encore une très difficile étape à franchir pour utiliser la cohomologie cyclique comme une théorie de de Rham ordinaire pour nos “espaces” - tel que l'espace des feuilles d'un feuilletage - et pour prouver le Théorème 2 de cet article, par exemple [**14**]. Le point problématique est que $\mathcal{A} \subset A$, dans l'exemple b, n'est en général pas un isomorphisme en K-théorie, et l'information analytique repose en $K(A)$ et non en $K(\mathcal{A})$. Ce problème est complètement résolu dans [**14**] pour la classe transverse fondamentale de M/F et toutes les classes venant par pull-back de la cohomologie de Gelfand-Fuchs par la fonction B(espace classifiant) $\to B\Gamma_q$.

Cette difficulté est que pour un feuilletage général, il est impossible de réduire le groupe de structure transverse à un groupe compact. De façon équivalente, pour un groupe de difféomorphismes agissant sur une variété, on ne peut pas trouver de métrique Riemannienne invariante. Le résultat implique, en particulier, la conjecture de Novikov pour les classes de cohomologie de Gelfand-Fuchs sur $B(\mathrm{Diff}\ N)$ pour tout N.

BIBLIOGRAPHIE

Commentaires bibliographiques. Pour un survol de la cohomologie cyclique et une bibliographie complète, voir [**10**, **17**]. Le calcul de l'homologie des traces sur l'algèbre différentielle universelle $\Omega(\mathcal{A})$ d'une algèbre $\mathcal{A}$ a été effectué explicitement dans [**11**, Théorème 33, p. 118]. Une fois dualisé, cela donne le calcul [**22**] en fonction de l'homologie cyclique de la cohomologie du complexe universel de de Rham introduit par Karoubi dans [**21**]. Le calcul de l'homologie de l'algèbre de Lie des matrices en fonction de l'homologie cyclique est faite dans [**25**, **30**]. L'idée d'utiliser l'identité de Lichnerowicz dans un contexte de C*-algèbres est due à J. Rosenberg [**27**].

[1] M.F. Atiyah, *Global theory of elliptic operators*, Proc. Internat. Conf. on Functional Analysis and Related Topics, Univ. of Tokyo Pres, Tokyo, 1970, pp. 21-29.

[2] _________, *K-theory*, Benjamin, New York, 1967.

[3] M. F. Atiyah and L. Singer, *The index of elliptic operators*. IV, Ann. of Math. **93** (1971), 119-138.

[4] P. Baum et A. Connes, *Geometric K-theory for Lie groups and foliations*, Preprint I.H.E.S., 1082.

[5] P. Baum et R. Douglas, *K-homology and index theory*, Operator Algebras and Applications, Proc, Sympos. Pure Math, vol. 38, part I, Amer, Math. Soc., Providence, R.I., 1982, pp. 117-173.

[6] J. Bellissard, *K-theory of C-alpebras in solid state physics* (Conf. on Statistical Mechanics and Field Theory, Mathematical Aspects, Groningen, August 26-30, 1985).

[7] L. G. Brown, R. Douglas, and P. A. Filmore, *Extensions of C^*-algebras and K-homology*, Ann. of Math. (2) **105** (107), 265-324.

[8] D. Burghelea, *The cyclic cohomology of the group rings*, Comment. Math. Helv. **60** (1985), 354-365.

[9] R. Carey et J. D. Pincus, *Almost commuting algebras, K-theory and operator algebras*, Lecture Notes in Math., vol. 575, Springer, Berin-New Vork, 1977.

[10] P. Cartier, *Homologie cyclique*, Exposé 621, Seminaire Bourbaki, Février 1984.

[11] A. Connes, *Noncommutative differential geometry. Part I, The Chern character in K-homology, Part II, de Rham homology and noncommutative algebra*, (Preprint), Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math **62** (1986), 44-144.

[12] A. Connes et G. Skandalis, *The longitudinal index theorem for foliations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984), 1139-1183.

[13] A. Connes, *C^*-algèbres et géométrie différentielle*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **290** (1980), 599-604.

[14] _________, *Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation*, Preprint I.H.E.S. M/84/7, 1984.

[15] _________, *Spectral sequence and homology of currents for operator algebras*, Math Forschungsinstitute Oberwolfach Tagungsbericht 42/81, Funktionalanalysis and C^*-Algebren, 27-9/3-10-1981.

[16] R. Douglas and D. Voiculeseu, *On the smoothness af sphere extensions*, J. Operator Theory **6** (1981), no. 1, 103-111.

[18] J. Helton and R. Howe, *Integral operators, commutators, traces, index and homology*, Proc. Conf, on Operator Theory, Lecture Notes in Math, vol. 345, Springer, Berlin-New York, 1973.

[19] _________, *Traces of commutators of integral operators*, Acta Math. **135** (1975), 271-305.

[20] W. C. Hsiang et R. E. Staffeldt, *A model for computing rational algebraic K-theory of simply connected spaces*, Invent. Math. **68** (1982), 227-239.

[21] M. Karoubi, *Connexions, courbures et classes caractéristiques en K-théorie algébrique*, CMS Conf. Proc, 2, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1982.

[22] _________, *Homologie cyclique et K-théorie algébrique*. I, II, C.R. Acad. Sci. Sér. I Math. **297** (1983), 447-450, 513-516.

[23] G. Kasparov, *K-functor and extensions of C^*-algebras*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math. **44** (1980), 571-636.

[24] _________, *K-theory, group C^*-algebras and higher signatures*, Conspectus, Chernogolovka, 1983.

[25] J. L. Loday et D. Quillen, *Cyclic homology and the Lie algebra of matrices*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **296** (1983), 295-297.

[26] M. Pimsner et D. Voiculescu, *Exact sequences for K-groups and Ext-groups of certain cross-product C^*-algebras*, J. Operator Theory **4** (1980), 93-118.

[27] J. Rosenberg, *C^*-algebras, positive scalar curvature and the Novikov conjecture*, Inst. Hautes Études Sci., Publ. Math. **58** (1984), 409-424.

[28] I. Segal, *Quantized differential forms*, Topology **7** (1968), 147-172.

[29] *Quantization of the de Rham complex*, Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, pp. 205-210.

[30] B. L. Tsigan, *Homology of matrix Lie algebras over rings and Hochschild homology*, Uspekhi Mat. Nauk **38** (1983), 217-218.

Collège de France, 75005 Paris, France

L'imagination et l'infini

Alain Connes
Alain Prochiantz [1]

Imaginations, une série d'entretiens proposée par Alain Prochiantz, neurobiologiste, professeur au Collège de France.

Alain Prochiantz : Nous sommes dans la grille d'été, sur le programme *Imaginations*, avec des philosophes, des sociologues, et des savants, et des artistes, sur le thème probablement rassembleur, entre les scientifiques et les artistes. Il faut dire que c'est comme ça qu'on a en tout cas pensé la chose. Et j'ai aujourd'hui le plaisir de recevoir Alain Connes. Alors, Alain Connes est un très grand mathématicien. Il est professeur du Collège de France, où il a occupé la chaire Analyse et géométrie. Il est récipiendaire de la plus grande récompense qu'on puisse avoir en mathématiques, qui est la médaille Fields. Et il a cet intérêt non seulement pour les mathématiques, bien entendu, mais aussi pour la musique et pour l'art, ce qui fait qu'il est vraiment une des personnes qui peut faire le lien aujourd'hui très fort entre art et science sur un mode qui n'est pas un mode plat mais qui est un mode qui engage intellectuellement celui qui fait de l'art ou celui qui fait de la science, c'est-à-dire une véritable réflexion sur le sujet de l'art et le sujet de la science. C'est un spécialiste de ce qu'on appelle la géométrie non-commutative et si je dis ça, c'est probablement parce que ce n'est pas étranger à son intérêt pour le temps, et à travers l'intérêt pour le temps, son intérêt pour la création musicale.

Alain, j'ai le devoir d'essayer d'extraire de toi, pas tout parce que c'est inépuisable, mais en tout cas des éléments de réflexion sur cette question de la science, des mathématiques, de la beauté en mathématiques, et de son lien avec la beauté artistique.

1. Cet interview d'Alain Connes, Professeur honoraire de mathématiques au Collège de France, par Alain Prochiantz, Administrateur du Collège de France ainsi que Professeur de Neurobiologie au Collège de France, a été réalisé lors d'une émission Savoirs du Cycle Imaginations sur France-Culture (22.7.2018).
Transcription par Denise Vella-Chemla (2.2.2019).

Alain Connes : Oui. En fait, donc, j'ai un peu réfléchi en ce qui concerne simplement l'imagination. Et la première chose qui m'a frappé, c'est que finalement, la radio, comme moyen de communication, est un moyen qui est beaucoup plus intéressant, au niveau de la concentration de l'auditeur, au niveau de l'écoute justement, qu'un autre moyen de communication comme la télévision. Pourquoi ? Parce que l'imagination, dans le terme imagination, il y a les images, et il est extrêmement important que l'auditeur n'ait pas un rôle purement passif, ne reçoive pas l'image telle qu'on veut la lui imposer, mais soit capable lui-même de la créer, et de la créer à partir du discours, à partir du langage. Donc, c'est la première chose qui m'a frappé, c'est à quel point une émission de radio est beaucoup plus appropriée, pour parler de l'imagination, que si on essayait de l'illustrer directement. La deuxième chose qui m'a aussi beaucoup frappé, c'est en quel sens les mathématiciens ont une utilisation de l'imagination qui a priori est très différente, très très spéciale, très différente de ce qui se passe dans les autres domaines, c'est ça que je veux essayer d'expliquer. Donc, ce que je veux dire, c'est qu'un mathématicien utilise beaucoup l'imagination, mais il l'utilise d'une manière très spéciale. C'est-à-dire qu'en fait, le rôle, le premier rôle de l'imagination pour un mathématicien, qui est un rôle essentiel, c'est celui de créer des images mentales.

Et dans ce rôle-là, en fait, bien sûr, bien entendu, ce n'est absolument pas quelque chose de passif. C'est un... comment dire... on ne peut y arriver véritablement que lorsqu'on sèche sur un problème. Donc il y a une vertu essentielle... pour un mathématicien, c'est, par exemple s'il est en train de lire un bouquin, c'est de prendre par exemple un théorème qui est dans un livre etc. et surtout, de ne pas regarder la démonstration, mais d'essayer de démontrer lui-même. Pourquoi ? Parce que lorsqu'il fait cela, en fait, il va créer dans son cerveau, je dis une image mentale mais en fait, c'est très rarement, c'est pas toujours quelque chose de géométrique, c'est pas toujours quelque chose qui peut se décrire comme une image, mais, c'est un certain assemblage dans son cerveau qui ensuite va faire que, lorsqu'il sera confronté à une page de formules, eh bien, cette page de formules va lui parler. Et dans cette page de formules, il va voir des acteurs. Il va voir des choses qui vont "résonner" entre elles, etc. La comparaison que j'ai toujours envie de prendre, c'est que supposez par exemple que vous soyez dans le métro, et que vous voyiez un passager du métro ou une passagère du métro qui est en train de lire une partition de musique. Quand on n'est pas musicien, cette partition de musique ne nous dit rien, rien du tout. Quand on n'est pas mathématicien et qu'on voit un passager en train de lire des formules de maths, on a l'impression que... je veux dire, qu'on est complètement exclu et qu'on n'a aucune chance de comprendre. Et en fait, la raison, c'est justement cette fabrication d'images mentales et cette fabrication d'images mentales, elle implique de manière absolument essentielle cette capacité d'imaginer. Cette capacité d'imaginer, là, elle joue un rôle absolument fondamental. Et je donne toujours le conseil suivant, je veux dire, par exemple, à un jeune mathématicien : le conseil, c'est si on est confronté par exemple à un calcul même très difficile, bien sûr, ce sont des calculs abstraits etc., la bonne méthode, ça n'est pas de se ruer sur l'ordinateur pour essayer de faire le calcul, ou de prendre une feuille de calculer, non ! La bonne méthode, c'est de partir pour faire un tour à pied et d'essayer de se débrouiller avec ce qu'on a, pour justement, en y réfléchissant, créer dans le cerveau ces images mentales. Et peu importe la complexité du problème.

Peu importe le caractère impossible au départ de cette création, c'est en séchant, et justement, en s'appropriant progressivement des objets mentaux qui vont correspondre au problème qu'on va progresser. Donc, il y a une part active qui est absolument essentielle et de mon point de vue, c'est ça vraiment le premier, le rôle fondamental de l'imagination en mathématiques. En ce sens-là, c'est très différent d'autres domaines, parce que, bien sûr lorsqu'on fait de la physique, et qu'on parle de l'univers, bon, eh bien, chacun a une image mentale au départ, de ce que c'est que l'univers, donc, on ne va pas avoir besoin de créer quelque chose à partir de rien, alors qu'en maths, vraiment, on est confronté à cette chose-là. Donc, de mon point de vue, il y a ce point essentiel, qui est que l'on doit être actif, et on est d'autant plus actif que l'on ne nous donne pas un modèle déjà pré-établi. Et si par exemple on était à la télévision, on essaierait d'illustrer des concepts de mathématiques par des images mais, chaque mathématicien, chaque personne, est un cas particulier et va créer dans son cerveau, une image très particulière, un assemblage très très particulier, et il est impossible de donner une forme générique comme cela.

Alain Prochiantz : Mais quand tu parles d'images mentales, je pense qu'à un certain niveau, même en dehors des mathématiques, il y a un moment où il est besoin d'avoir recours à cet espèce de fabrication d'images mentales...

Alain Connes : Tout à fait.

Alain Prochiantz : de briques que l'on manipule...

Alain Connes : ...qui s'emboîtent entre elles...

Alain Prochiantz : qui s'emboîtent ou qui ne s'emboîtent pas et ça, c'est peut-être parce que justement, la pensée mathématique est la seule façon de penser, en dehors des formules. C'est pas uniquement des formules, c'est une façon de réfléchir qui est une langue naturelle pour le savant d'une certaine façon. Donc la question que je voulais te poser, pour éclairer un petit peu, pour moi d'ailleurs, mais aussi peut-être pour ceux qui nous écoutent, c'est, je dirais "Quelle est l'image de ces images mentales ? Ca ressemble à quoi une image mentale ?"

Alain Connes : Bon, alors d'abord, il y a les images mentales les plus simples, bien entendu. C'est-à-dire que si on parle de la géométrie ordinaire, par exemple, la géométrie plane, il y a un théorème que j'aime beaucoup, c'est le théorème de Morley. Donc là, l'auditeur doit essayer d'abord d'imaginer un triangle. Alors chaque auditeur va imaginer un triangle différent, mais peu importe, d'accord. Donc on part d'un triangle. Et que dit le théorème de Morley, que dit le théorème de Morley ? C'est qu'on découpe chaque angle du triangle en trois parties égales, donc en trois angles égaux. Et on intersecte les droites correspondantes. On obtient un triangle à l'intérieur, en général, du triangle dont on est parti, et la merveille, c'est que le triangle qu'on obtient à l'intérieur est toujours, toujours, un triangle équilatère. Alors ça, c'est merveilleux ! C'est ce qu'on appelle le théorème de Morley. Et quand on a énoncé ce théorème, on a une image mentale, bien sûr. Et en fait, l'image mentale que l'on a est bien meilleure que si on dessinait sur un papier un triangle, et qu'on ait dessiné le triangle équilatère au milieu. Pourquoi ? Parce qu'on serait automatiquement perturbé par le grain du papier, par le crayon avec lequel on a écrit, etc. Donc là, il y a déjà une abstraction qui s'est produite. Mais... il y a un point essentiel justement en mathématiques. Il y a un point essentiel, c'est que j'ai pu vous expliquer ce que c'était qu'une image mentale très simple, dans le cas de la géométrie plane. Mais en mathématiques, on manipule des géométries qui sont bien plus compliquées que ça, et qui en général, sont des géométries qui sont de dimensions bien plus grandes que 3, et même en général, de dimension infinie.

C'est-à-dire on a compris, grâce à la physique par exemple, que la mécanique quantique, c'est une mécanique qui se produit dans un espace qu'on appelle l'espace de Hilbert, qui est un espace de dimension infinie. Alors, comment se fait-il que le mathématicien puisse avoir accès à cet espace, de dimension infinie ? C'est ça la question, c'est la question essentielle. Et cette question essentielle, en fait, elle a une réponse très, très, très fondamentale. Cette réponse, c'est la dualité entre la géométrie et l'algèbre.

Alors pour l'expliquer, je vais prendre un exemple. Je vais prendre un exemple plus simple que le théorème de Morley. Supposons par exemple qu'on soit frappé par le fait que les médianes d'un triangle se rencontrent en un point. Alors ça va bien quand on fait dans la géométrie plane. On voit bien ce que c'est. On a un énoncé analogue lorsqu'on va dans la géométrie dans l'espace. Mais qu'en est-il lorsqu'on regarde une géométrie en dimension arbitraire ? Ca paraît impossible parce que comment est-ce qu'on va se représenter un espace de dimension 4, un objet correspondant à un triangle en espace de dimension 4 etc. ou en dimension plus grande : la réponse est merveilleusement simple : c'est que la manière de comprendre, dans le langage, algébrique, par une formule, pourquoi les médianes d'un triangle se rencontrent, c'est simplement d'écrire les coordonnées de ce qu'on appelle le barycentre de 3 points. C'est-à-dire qu'on prend les coordonnées des points. Et puis on fait leur somme et on la divise par 3, parce qu'on est en dimension deux ; si on était en dimension 3, on diviserait par 4 et ainsi de suite. Et alors, ce qui est merveilleux, c'est que lorsqu'on a, c'est un peu comme les deux hémisphères du cerveau, c'est-à-dire il y a l'hémisphère droit et l'hémisphère gauche, ils communiquent entre eux. C'est l'hémisphère droit qui a l'image mentale du triangle, comme je vous l'ai expliqué au début. C'est-à-dire qu'il le voit, qu'il voit le triangle de Morley, etc. Et puis après, on communique.

On communique avec l'hémisphère gauche. Dans l'hémisphère gauche, il y a une formule. C'est une formule qui permet... Et cette formule, elle est complètement insensible à la dimension. C'est-à-dire qu'une fois qu'on l'a écrite en dimension 2, elle va exister en dimension 3, en dimension 4, et même en dimension infinie. Donc il y a une merveille qui se produit, qui est qu'en mathématiques, on est capable d'escalader, précisément, parce qu'il y a quelque chose qui permet de renforcer l'image mentale, qui permet de lui donner une sécurité, et c'est la formule. Et une fois qu'on a cette formule, après, on va fonctionner dans un autre mode. Et ce mode n'est plus le mode visuel, et c'est pour ça que la notion d'image mentale est réductrice, parce qu'elle réduit tout à une vision géométrique. Or, en mathématiques, il y a une dualité, entre justement la géométrie et l'algèbre. C'est-à-dire que d'un côté, on a cette vision géométrique et là, en général, la vision géométrique, c'est quelque-chose qui va s'imposer immédiatement... C'est-à-dire on a une figure, cette figure va vous parler, mais elle va vous parler tout de suite.

Alors que l'algèbre, c'est précisément autre chose. Et c'est quelque chose qui va évoluer dans le temps, et c'est une chose dans laquelle les calculs vont se faire algébriquement, et j'avoue que moi, je suis par exemple persécuté. La nuit dernière, je me suis réveillé, je me suis dit "est-ce que dans telle formule, je ne me suis pas trompé ?". Pourquoi ? Parce que mon cerveau continue à fonctionner...

Et il continue à faire les calculs etc. Et ça, c'est quelque chose qui se déroule dans le temps, et qui n'est pas du tout de la même nature, qu'une image mentale statique, une image géométrique, qui elle existe et est figée une fois pour toutes et qu'on comprend de manière immédiate.

Alain Prochiantz : Les images mentales ne sont pas forcément statiques. J'imagine qu'on les bouge, on les retourne, on les combine.

Alain Connes : On peut les bouger, on peut les retourner. Il y a le retournement de la sphère par exemple.

Alain Prochiantz : Mais probablement pas n'importe comment. C'est-à-dire est-ce qu'il y a une grammaire de la combinaison des images mentales ? Qu'est-ce qui est permis dans la manipulation des objets mentaux, de ces images, et qui fait que ce n'est pas n'importe quoi, il y a une sorte de grammaire derrière.

Alain Connes : Il y a bien sûr une grammaire derrière. Je pense que, sans doute, une des facettes les plus importantes de la grammaire, c'est le pouvoir de l'analogie. Et puis ensuite de la métaphore. Mais je pense que l'analogie, c'est quelque chose d'extraordinairement puissant, et qui pour le moment, est tout à fait inaccessible à des procédés comme le Machine Learning, l'intelligence artificielle, etc. Donc c'est un outil extraordinaire...

Alain Prochiantz : Pour toi, c'est l'intuition, l'analogie ?

Alain Connes : Non, c'est plus que ça. C'est-à-dire qu'en fait, ce qui se produit, justement, à travers les images mentales, c'est qu'à un moment donné, le cerveau s'aperçoit que deux images mentales qui paraîtraient extrêmement loin les unes des autres (c'était ce qui était arrivé à Poincaré lorsqu'il montait dans le bus), des images mentales extrêmement éloignées les unes des autres, je veux dire, il parlait de deux choses complètement différentes, en fait, il s'est aperçu à un moment donné qu'il y avait des ressemblances extraordinaires entre les deux. Et le fait qu'il y a eu ces ressemblances extraordinaires entre les deux a fait que, après, il a pu développer une analogie entre deux domaines qui a priori n'ont rien à voir les uns avec les autres.

Et alors, une analogie, c'est quelque-chose qui est extrêmement délicat à manipuler, parce que c'est pas un simple dictionnaire. Si c'était un simple dictionnaire, ce serait rasoir, c'est-à-dire si on pouvait dire "telle chose correspond à telle autre chose etc., etc". C'est une espèce de... Il y a un mathématicien japonais, qui s'appelle Oka, qui avait merveilleusement décrit, c'est une espèce de transplantation, une espèce de... On a une petite fleur et très délicatement, on essaie de la transplanter à un autre endroit, et pourquoi c'est quelque chose d'incroyablement fécond et efficace, c'est parce que en général, justement, les choses que l'on comprend d'un côté, on ne les comprend pas de l'autre et inversement. Donc ça veut dire qu'on va pouvoir transplanter la compréhension qu'on a d'un côté, et voir comment, en essayant, on fait des essais, on voit etc. mais il ne faut surtout pas, à ce moment-là du développement, il ne faut surtout pas essayer d'être trop rigoureux, parce que si on est trop rigoureux, tout va s'effondrer. Et c'est un moment, justement, qui a un aspect poétique et artistique. Pourquoi ? Parce que quand on transplante des petites fleurs, quand on fait ce procédé-là, si on essaie d'être trop intelligent, trop rapide, etc., on va dire "bah, ça va pas marcher, mais ça va pas marcher pour telle raison etc." Et à ce moment-là, on abandonne, et on a tout gâché.

Alain Prochiantz : C'est une sorte de correspondance, en fait.

Alain Connes : C'est une sorte de correspondance, d'analogie. Et on ne peut pas essayer de la codifier de manière trop précise au moment où on la découvre. C'est quelque-chose d'extrêmement fragile et cette fragilité-là fait que, si par exemple, au moment où on la découvre, on essaie de la dire, on essaie, il faut, il faut savoir que les mathématiciens sont des gens très durs, c'est-à-dire qu'en mathématiques, le rêve est exclu. Je vais revenir là-dessus. Mais si on a perçu une analogie entre deux sujets, et si on essaye de manière trop rapide, trop prématurée, de la dire, elle va être détruite. Donc il y a une partie du développement d'une nouvelle théorie comme ça, dans laquelle on doit se protéger, on doit se protéger, c'est comme un petit enfant qui doit être protégé, etc. et seulement au bout d'un moment, quand il aura fait ses preuves, quand il aura grandi suffisamment, là on pourra le dévoiler.

Alain Prochiantz : Il faut laisser mûrir l'analogie, mûrir la correspondance, pour que ça soit suffisamment solide, pour affronter l'épreuve de vérité.

Alain Connes : Alors l'épreuve de vérité est quelque-chose d'absolument terrible. Donc ce qu'il faut savoir, quand je parlais de l'imagination en mathématiques, naïvement, on pourrait croire que, l'imagination en mathématiques, c'est imaginer des choses et puis essayer de les démontrer, etc. Mais en fait, il y a un carcan en mathématiques, qui est absolument terrible, et qui, je pense, est largement semblable à celui de la physique, mais d'une manière très différente. C'est-à-dire en fait, en mathématiques, ce qui se produit, c'est qu'on peut avoir de l'imagination, on peut imaginer une nouvelle théorie etc. Mais, le problème, c'est que, très vite, on va se heurter à une réalité, qui est la réalité mathématique, et cette réalité mathématique, elle est terrible, au sens où, je veux dire, que si on n'a pas tous les éléments d'une démonstration, si on n'a pas par exemple, je veux dire, la possibilité de vérifier les choses sur un ordinateur etc., on se rend compte en fait que la liberté dont on jouit est absolument minimale. Donc c'est pour ça que j'ai insisté sur le fait que le rôle de l'imagination en mathématiques, ce n'est pas d'imaginer de nouvelles choses, etc. Pas du tout. C'est de créer une image mentale à l'intérieur du cerveau. Là, ça sert vraiment. C'est quelque chose d'essentiel. Par contre après, il y a un tel carcan au niveau de l'imagination, par rapport à d'autres sujets, je pense aux artistes, je pense aux romanciers etc., ce carcan est tellement dur, tellement contraint, qu'en fait, ça empêche, ça annihile justement toute possibilité de liberté.

Alain Prochiantz : Très bien. Nous allons peut-être passer sur une première variation sur un air national allemand de Chopin, interprétée par Nikita Magaloff, sur lequel tu nous feras un petit commentaire.

Alain Connes : Exactement, bien sûr, oui oui.

(Intermède musical) : Sur un air national allemand

Alain Prochiantz : Est-ce que tu peux nous dire pourquoi tu as choisi ce morceau ?

Alain Connes : Voilà, alors, pourquoi est-ce que j'ai choisi cet air, ces variations. Bien sûr, pour l'interprétation de Nikita Magaloff, que j'aime beaucoup. Mais, en fait, ma raison est une raison très personnelle, et qui a à voir, comment dire, avec la structuration de l'imaginaire de l'enfant. Ce que je vais dire, c'est quelque-chose de très personnel, donc, mais peu importe, je pense que c'est quelque chose de générique. C'est-à-dire en fait, mes deux grands-parents du côté de ma mère viennent de Constantine en Algérie. Ils étaient originaires de cette ville. Et mon enfance a été bercée par le fait que justement, ma grand-mère maternelle était pianiste. Et elle était orpheline, elle était devenue orpheline à l'âge de 6 ans. Ses deux parents étaient morts. Elle était en Algérie, elle avait été recueillie dans un couvent, et elle me racontait, souvent, quand j'étais gamin, quand j'étais tout petit, des histoires de son père. Et son père, quand elle était toute petite, lui avait offert un piano, et lui avait joué, sur le piano, la partie des variations de Chopin qui est si belle, pas le tout début, mais le thème majeur et qui est introduit par Nikita Magaloff de manière incroyable, parce que c'est un morceau qu'on pourrait interpréter comme un morceau de technique mais pas du tout en fait, il a compris exactement à quel point l'exposition du thème devait être précédée par un ralentissement, etc., et à quel point le thème est beau.

Et en fait, mon enfance a été bercée par cette air, que j'ai eu beaucoup de mal à retrouver ensuite, lorsque j'ai écrit la généalogie de la famille, et donc en fait, ce que je voulais dire, c'est que je pense que l'imaginaire d'un enfant est structuré très tôt en particulier par la musique, et par, cette fois, l'imaginaire, au sens naïf, de ce que l'enfant peut imaginer quand il entend des histoires comme celle-là. Donc je ne suis jamais allé à Constantine. En fait, je ne suis jamais allé en Algérie, mais j'ai toujours eu dans ma tête, une image extrêmement intéressante, justement, de ce moment auquel le père de ma grand-mère qui était médecin, en fait, lui avait offert ce petit piano. Et le rôle que ça a joué...

Alain Prochiantz : Et est-ce que ça a un rapport avec la façon de penser en mathématicien ?

Alain Connes : Eh bien, disons qu'il est très connu, chaque mathématicien est différent, donc je ne veux pas faire de généralités. Mais en fait, il est très, très admis, qu'en général, les mathématiciens sont très intéressés par la musique, à défaut, forcément, d'être musiciens, puisqu'on n'a pas beaucoup de temps lorsqu'on est mathématicien, donc, si on veut pratiquer un instrument, c'est quelque chose qui occuperait trop de temps. Mais en général, ils sont très sensibles à la musique et c'est vrai, c'est vrai, et je continue ce que je disais tout à l'heure, c'est vrai qu'il y a une analogie très forte entre l'algèbre et la musique, par le déroulement dans le temps...

J'explique toujours bien sûr le fait que le langage lui-même, le langage que nous utilisons tout le temps, est non-commutatif puisqu'on peut pas permuter les lettres entre elles, à moins de faire des anagrammes mais... donc, il y a toute une relation très forte effectivement entre la musique et l'algèbre, je pense.

Alain Prochiantz : Et donc la temporalité...

Alain Connes : Et la temporalité, bien sûr, bien entendu.

Alain Prochiantz : Tu peux nous expliquer un peu cette question de la temporalité et un petit peu la géométrie non-commutative, comment ça se met là-dedans ?

Alain Connes : Oui, bien sûr. Alors disons qu'on a écrit deux livres, avec Dany Chéreau, qui est mon épouse, et puis Jacques Dixmier qui était mon professeur de thèse. Et justement, dans ces deux livres, on a continué ce thème qui est un thème essentiel dans ce que j'ai fait, dans ma vie de scientifique, et qui a démarré par la découverte du fait que lorsqu'on fait de l'algèbre, mais de manière non-commutative, c'est-à-dire qu'on ne s'autorise pas à permuter les lettres entre elles. Alors bien sûr, c'est quelque chose qui est essentiel parce que c'est ce qu'a trouvé Heisenberg, lorsqu'il a découvert la mécanique quantique.

Lorsqu'il a découvert la mécanique quantique, il a compris que lorsqu'on traite de systèmes tout petits, de systèmes microscopiques, en fait, contrairement à ce qu'on fait lorsqu'on fait de la physique classique, où on écrit $e = mc^2$ ou $e = c^2m$, c'est la même chose. Lorsqu'on travaille avec un système microscopique, on n'a plus le droit de permuter les lettres, c'est extraordinaire, il a fait une découverte fantastique. Et d'ailleurs, il a fait cette découverte à 4 heures du matin, alors qu'il était isolé sur l'île d'Heligoland et, ce qui est merveilleux en fait, c'est à quel point les découvreurs arrivent à transmettre, dans leurs écrits, Heisenberg l'a fait dans ses mémoires, l'extraordinaire vision qu'il a eue au moment où il a fait cette découverte. Et il a dit que c'était une vision qui était effrayante, parce que du fait qu'il était le premier à voir cela, en fait, il a eu devant lui un paysage qui était presque tout le paysage, et qui était effrayant. Et il le décrit merveilleusement. Et il n'est pas le seul à avoir été capable justement, en étant le premier découvreur, à transmettre cela.

Alors de mon côté donc, ce que j'avais perçu si vous voulez, c'est que, en fait, lorsqu'on fait de la géométrie non-commutative eh bien, automatiquement, c'est un certain type d'algèbre qui a été découverte par Von Neumann, automatiquement, l'algèbre elle-même sécrète son propre temps donc le fait que l'algèbre soit non-commutative sécrète le temps, le passage du temps et ça c'est quelque chose d'absolument bouleversant d'une certaine manière, et pendant des années et des années, j'avais été fasciné par ce fait-là. Bien sûr, mathématiquement, ça a un tas de conséquences parce que par exemple, l'algèbre a des périodes, etc., mais j'avais toujours été incapable d'avoir une idée de comment cette trouvaille, si vous voulez, pouvait trouver sa place en physique et donc ça c'est le sujet de notre premier livre, qui s'appelle Le théâtre quantique, qui est publié chez Odile Jacob et dans lequel, justement, on a essayé, moi et mes deux co-auteurs, de transmettre cette trouvaille, mais de telle sorte qu'elle puisse être perçue par le public.

C'est difficile, c'est difficile. Et dans le deuxième livre alors, Le Spectre d'Atacama, on est allé beaucoup plus loin au sens où là, on a essayé de transmettre justement, ce lien entre les formes et la musique, qui est un lien aussi extrêmement important, et qui dit que, lorsqu'on essaie par exemple d'expliquer où nous nous trouvons dans l'espace eh bien en fait, on se trouve confronté à un problème mathématique qui n'est pas du tout trivial, qui n'est pas du tout évident, qui est le problème de pouvoir donner un espace ou une forme, de manière plus générale, de manière invariante. Et ce que les mathématiques nous enseignent, c'est que si on veut donner une forme de manière invariante, la première chose qu'une forme nous procure, nous donne, c'est une gamme musicale, ça paraît quelque-chose de tout à fait étonnant donc : une forme nous procure une gamme musicale qui s'appelle un spectre. Et après, bien sûr, il y a à partir de là tout un développement. Le deuxième livre s'appelle Le Spectre d'Atacama parce que précisément, ce qui se produit, et qui est tout à fait étonnant, c'est que, alors qu'on peut calculer le spectre de formes ordinaires. Donc bon, si on regarde un espace comme un tambour, c'est Marc Kac qui avait depuis longtemps posé le problème si vous voulez : est-ce qu'on peut entendre la forme d'un tambour ?

C'est-à-dire qu'un tambour a des vibrations, lorsqu'on tape dessus, et il ne faut pas croire qu'on obtiendra toujours le même son ; c'est ce que savent faire les gens qui jouent de la batterie par exemple ; donc on a des sons très différents mais ces sons forment une gamme, et une question évidente, c'est "est-ce que on peut reconnaître la forme du tambour à partir de la gamme ?".

Alors c'est une question qui a une réponse mathématique mais la chose vraiment étonnante, alors qu'on peut calculer la gamme d'un objet géométrique, d'une forme géométrique que l'on connaît, il existe des spectres, donc j'identifie la gamme si vous voulez avec la gamme des fréquences. Et ces fréquences, on va les représenter par des raies spectrales. Il y a un problème qui se pose de manière absolument insolente. C'est qu'en fait, il existe des spectres, qui apparaissent complètement naturellement, et où on a vraiment une difficulté considérable, mais bon, dans certains cas, on y arrive, à retrouver la forme, la forme physique, dont le spectre est le spectre. Et alors, il y a un exemple qu'on explique et qui justifiera le deuxième morceau de musique dont je parlerai tout à l'heure... C'est un exemple qu'on explique en grand détail dans le livre, c'est ce qu'on appelle le spectre de la guitare.

Alors je vais essayer de l'expliquer, mais à nouveau, il faut que l'auditeur se prépare à construire lui-même des images mentales dans ce que je vais expliquer. Donc la première image mentale, c'est imaginez une guitare. Bon. Vous avez une guitare. Vous avez sans doute vu des guitares, donc vous pouvez imaginer dans votre tête ce que c'est qu'une guitare, j'ai pas besoin de vous la montrer. Alors si vous regardez une guitare, vous allez voir sur le manche de la guitare, des raies qui sont perpendiculaires au manche, et qu'on appelle des frettes. Alors si vous regardez attentivement ces frettes, vous allez voir... Regardez-les dans votre tête. Vous allez voir qu'au départ, il n'y a pas de frettes, il y a un espèce de trou, bon, qui va permettre des résonances. Et puis là, les frettes commencent. Et elles ne sont pas du tout espacées de manière régulière. On aurait pu penser que simplement, lorsqu'on regarde le manche de la guitare, si vous voulez, les frettes vont être espacées également. En fait, elles ne sont pas du tout espacées également Et le mathématicien, quand il voit l'espacement des frettes, il se pose tout de suite la question "mais pourquoi est-ce qu'on n'a pas espacé les frettes de manière égale ?". Alors la réponse, c'est une réponse mathématique, mais c'est une réponse qui est merveilleuse, parce qu'elle va nous donner un spectre. Et ce spectre, après, on va devoir chercher la forme dont c'est le spectre. Alors d'abord, quel est ce spectre ? Eh bien, quand on fait de la musique, on s'aperçoit d'une chose très importante, qui est que l'oreille n'est pas du tout sensible à 1 2 3 4 5, etc. elle n'est pas sensible à additionner, elle est sensible en fait à multiplier une fréquence par quelque chose, c'est-à-dire si on prend une fréquence et qu'on la multiplie par 2, ça correspond au passage à l'octave. L'oreille est sensible au passage à l'octave, elle ressent une correspondance entre les deux fréquences, elle ressent une harmonie entre les deux fréquences. C'est la multiplication par 2. L'oreille 'est également sensible à la multiplication par 3 : quand on prend une fréquence et quand la multiplie par 3, l'oreille entend une résonance, elle entend quelque chose qui correspond. Alors maintenant, comment cela explique-t-il le spectre de la guitare ? Ca explique le spectre de la guitare parce que, lorsqu'on élève le nombre 2 à la puissance 19, on obtient pratiquement le nombre 3 élevé à la puissance 12. Ca peut pas être une égalité parce que quand on élève 2 à la puissance 19, on obtient un nombre pair. Alors que quand on élève 3 à la puissance 12, on obtient un nombre impair. Donc ça ne peut pas être une égalité. En fait, ce qui se produit, c'est que si on regarde la racine douzième de 2, c'est un nombre qui vaut 1.05 etc., et c'est pratiquement la même chose que la racine $19^{\text{ème}}$ de 3, qu'est-ce que ça veut dire ? Ca veut dire qu'en musique, ce qu'on a fait, avec les frettes de la guitare, c'est qu'on s'est arrangé pour faire croire que ces deux nombres étaient égaux et le 12 en question, ce sont les 12 tonalités de la gamme bien tempérée. Et toute la musique est basée là-dessus. Et qu'est-ce que c'est que le spectre de la guitare ? Ce sont les puissances du nombre, qui est la racine douzième de 2, et qui est pratiquement la racine $19^{\text{ème}}$ de 3. Donc c'est quelque chose d'extraordinaire. Et alors, on se trouve là confronté à un problème parce qu'on a de manière évidente ce spectre. Ce spectre est devant nous et on se demande quel est l'objet donc il est le spectre. Alors quand on est mathématicien, on a un tas d'outils pour regarder ça ? Pourquoi ? Parce que quand on regarde le spectre qui correspond au tambour, ou le spectre qui correspond à une forme qui est bi-dimensionnelle, qui est de dimension 2, on s'aperçoit que sa gamme, elle croît comme une parabole. Si on regardait un objet de dimension 3, ça croîtrait avec une puissance 3, etc. Et alors, on regarde maintenant le spectre de la guitare ? *(Claquement de langue interrogatif)*. Ah ! Il est extrêmement bizarre ! Parce que si on calcule sa dimension en utilisant ce que je vous ai dit avant, on obtient que c'est un objet de dimension 0, un objet de dimension 0 au sens où sa dimension est plus petite que tout nombre, non nul mais positif. Ah ? ! Alors la merveille, c'est qu'en fait, il y a un objet dont le spectre est le spectre de la guitare, mais c'est un objet de géométrie non-commutative. Donc on retombe sur ses pieds. Et donc en fait, le livre, le livre qu'on a écrit sur le Spectre d'Atacama, c'est un livre qui est entièrement basé sur le fait d'essayer de comprendre un spectre. Ce spectre a été observé par l'Observatoire d'Alma au Chili et pendant tout le livre, il y a un héros, enfin, il y en a plusieurs, il y a trois personnages essentiels, il y a un mathématicien, il y a une physicienne qui était là dans le premier livre, qui a échappé à un séjour quantique et tout le livre est basé sur le fait d'essayer de comprendre ce spectre mystérieux dans le désert d'Atacama.

Alain Prochiantz : Dans le désert d'Atacama. Donc nous allons écouter maintenant Salut d'amour, d'Elgar, joué par Itzhak Perlman et après, nous reprendrons notre discussion.

Alain Connes : Bien sûr.

(Intermède musical : Salut d'amour)

Alain Prochiantz : Après ce Salut d'amour, je rappelle que nous recevons aujourd'hui, dans le cadre de la série d'interviews sur le thème Imaginations, Alain Connes, mathématicien et professeur du Collège de France, titulaire de la chaire Analyse et géométrie. Alain, je crois que tu voulais t'exprimer sur ce morceau.

Alain Connes : Absolument. Pourquoi j'ai choisi cet air ? C'est pour illustrer exactement ce que je disais tout à l'heure, mais la différence entre le violon et la guitare. Donc la guitare, j'ai parlé du spectre de la guitare, et des frettes sur le manche de la guitare. Bon. C'est bien évident que quand on a un violon, on n'a pas de frettes, et la difficulté extraordinaire du violon vient du fait que justement, on n'a pas un spectre discret au sens mathématique, c'est-à-dire on n'a pas... Si vous voulez, un déplacement infinitésimal du doigt sur le manche du violon va faire toute la différence. Et cette interprétation de Itzhak Perlman Perlman, est merveilleuse, et c'est pour ça que je voulais qu'on l'écoute, elle est merveilleuse par l'infinie précision qu'il arrive à avoir, dans les sons qu'il produit ; mathématiquement, ce qu'on dit, si vous voulez, c'est que la différence entre la guitare et le violon, c'est que la guitare a un spectre discret, que j'ai expliqué tout à l'heure, le violon a un spectre continu. Mais il y a dans le spectre du violon la même difficulté que dans la guitare. C'est-à-dire qu'il y a une échelle exponentielle, c'est-à-dire que lorsqu'on passe d'une note à l' autre, naïvement on croirait qu'il faut le faire en espaçant les doigts d'une longueur égale, non, il faut le faire en les espaçant d'une longueur exponentielle, puisque ça correspond aux puissances du nombre d'avant.

Donc en fait, il y a toujours, toujours, entre deux violonistes, des différences infinitésimales et cette interprétation d'Itzhak Perlman est, de mon point de vue, une merveille parce qu'il y a de toutes petites nuances, infimes, que l'oreille perçoit bien sûr, et qui font que cette adaptation est merveilleuse.

Alain Prochiantz : Merci beaucoup, Alain Connes, j'aurais voulu revenir un tout petit peu sur la question du mathématicien, sur la question de la démonstration en fait, parce qu'il y a les conjectures. Comment ça vient une conjecture ? Et comment peut-on passer, après, du travail de la conjecture à la démonstration de la chose et ce sont deux façons différentes de faire des mathématiques. Ce sont deux types d'esprits mathématiques différents ?

Alain Connes : En fait, c'est toujours étonnant ce qui se produit avec les conjectures. C'est-à-dire en fait, un mathématicien découvre quelque chose de totalement nouveau. L'exemple que j'ai en tête, bien sûr, on en parle beaucoup dans le livre, c'est Riemann, au siècle dernier, au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, plus précisément, c'est pas le siècle dernier, qui a fait une découverte absolument phénoménale. En fait, il a trouvé qu'on pouvait comprendre les nombres premiers, donc comprendre l'aléatoire des nombres premiers, l'aléatoire qui n'était pas du tout contrôlé, à partir d'une fonction qui s'appelle la fonction zêta (ζ) et après avoir démontré une formule, donc il donne une formule exacte si vous voulez, pour le nombre de nombres premiers plus petits que n. C'est pas tellement le fait qu'il y ait une formule exacte, parce qu'il en existe d'autres, mais c'est le fait que cette formule en fait décrit exactement le comportement des nombres premiers. Et il s'est aperçu en fait, dans cette formule qu'il a démontrée, qu'il y avait une musique des nombres premiers, c'est-à-dire il a montré qu'il y avait un terme dominant, qui est facile à comprendre parce qu'en gros, les nombres premiers deviennent de plus en plus rares, en gros, comme l'inverse du nombre de chiffres du nombre qu'on regarde.

Donc quand on regarde les nombres premiers par exemple, entre 10000 et 100000, ou bien entre 100000 et 1000000, la proportion va être divisée par 2. En fait, cette chose-là, si vous voulez, ce phénomène-là, conduit à une fonction qu'on appelle le logarithme intégral, qui est effectivement le premier terme dans la formule de Riemann. Mais après, l'aléa des nombres premiers se manifeste justement par un spectre. Et se manifeste justement par ce qu'on pourrait appeler la musique des nombres premiers.

Alors en fait, quand Riemann a trouvé ça, il s'est aperçu en faisant des calculs, il a fait des calculs, il s'est aperçu que les zéros de sa fonction, qui gouverne justement le spectre, avaient l'air d'être tous sur une certaine droite. Et le fait qu'ils soient sur cette droite joue un rôle essentiel, parce que le fait qu'ils soient sur sa droite dit que la formule qu'il a donnée est une formule extrêmement précise. S'il y en avait qui étaient en dehors de cette droite, il y aurait une espèce de chaos qui s'introduit, ça ne serait pas du tout quelque chose d'agréable. Et il a conjecturé que tous ses zéros étaient là. Cette conjecture, elle a été faite donc, en gros dans les années 1850-1860, donc ça fait un temps considérable qu'elle a été faite, mais, je pense que lui était pratiquement sûr que c'était vrai, et en gros, il voulait continuer et faire une conjecture, c'est être pratiquement sûr qu'un résultat est vrai, et aller au-delà.

Alors maintenant, cette conjecture de Riemann, elle a été vérifiée avec l'ordinateur, parce qu'avec l'ordinateur, on peut aller très très loin ; en fait, on a une manière de calculer, qui est très très efficace pour cette fonction, et on l'a vérifiée pour des milliards de zéros ; donc au niveau vérification, on a une indication très forte. On ne sait pas si elle est vraie parce qu'il y a d'autres conjectures qui avaient l'air d'être vraies comme ça, mais qui ne sont pas vraies pour des nombres très très grands, donc on ne sait pas si elle est vraie mais la manière dont il l'a trouvée, c'est qu'il n'avait pas envie de s'arrêter là, si vous voulez, et il avait envie d'aller plus loin.

Et bon après lui, il y a eu un très grand nombre de mathématiciens qui s'y sont intéressés, il y a eu par exemple des mathématiciens qui, lorsqu'ils prenaient l'avion ou etc., envoyaient une lettre en disant "j'ai démontré etc." en pensant que si l'avion se cassait la gueule..., à ce moment-là... *(rires)*. Voilà. Donc j'ai toutes sortes d'histoires, autour de cette conjecture. Mais disons que, ce qu'elle a d'extraordinaire, ce qu'une conjecture comme celle-là a d'extraordinaire, c'est qu'en fait secrètement, elle a motivé la plupart des développements les plus intéressants en mathématiques au XX$^{\text{ème}}$ siècle. C'est-à-dire que si on connaît suffisamment de choses en mathématiques, on s'aperçoit que, quantité de développements qui n'ont a priori rien à voir avec la conjecture, en fait étaient motivés par celle-là ; un exemple typique, c'est toute la théorie des fonctions presque périodiques de Bohr, le footballeur, le frère du physicien, donc je veux dire, c'est étonnant, c'est étonnant. Et à ce propos-là, et ça, on l'explique en détail dans le livre, ce qu'il est important de savoir, c'est qu'un mathématicien devant un problème, a toujours une technique qui fait qu'il n'est pas désarmé et quelle est cette technique ? C'est une technique très intéressante qui je pense ne s'applique pas seulement aux mathématiques, elle s'applique, je pense, en fait à toutes sortes de domaines ; et c'est pour ça que je veux l'expliquer.

C'est une technique qui consiste à dire, face à un problème fixé, par exemple la conjecture de Riemann, au lieu d'être là à regarder le problème et puis d'être incapable de faire quoi que ce soit, non. Ce qu'on va faire, c'est la première chose qu'on va faire, c'est quelque chose de criminel d'une certaine manière. C'est-à-dire, on va prendre le problème et on va le généraliser. Alors ça paraît complètement idiot. Ca paraît complètement idiot de remplacer un problème particulier par un problème beaucoup plus général. Et l'exemple qu'on prend dans le livre, c'est l'exemple des tablettes de chocolat. C'est-à-dire qu'on est là, on vous regarde, et puis on vous demande "quelle est la manière optimale de casser une tablette de chocolat de 6 x 8 par exemple en petits carreaux ?". Et alors, l'intérêt de généraliser, c'est qu'on va maintenant pouvoir spécialiser le problème généralisé à des cas beaucoup plus simples. Ca, c'est formidable parce que si vous êtes confronté au problème d'une tablette de 6 x 8, vous êtes complètement coincé parce que vous vous dites “mais c'est trop compliqué, j'y arriverai jamais.” Par contre, si vous remplacez 6 et 8 par l et m, ça paraît bizarre. Mais maintenant, vous prenez $l = 1,\ m = 3$, vous avez une tablette de trois carreaux, trois carreaux. Bon ben pour la casser, c'est pas très difficile. Donc en fait, en mathématiques, on fait ça et on a fait ça pour l'hypothèse de Riemann, et ça a été quelque chose d'extrêmement fructueux parce que c'est ça qui a permis à André Weil justement, de démontrer une généralisation qui avait été faite et de démontrer que c'était vrai dans ce cas-là. Donc ça donne confiance et en général, justement, ça permet de donner un point d'ancrage, pour ce dont je parlais tout à l'heure, c'est-à-dire l'analogie. C'est-à-dire qu'une fois qu'on a démontré un cas particulier du problème généralisé, on a un outil extraordinaire qui est l'analogie. C'est-à-dire qu'on imagine que la démonstration qu'on a fait dans le cas particulier va pouvoir se transplanter, je ne dis pas se transposer, je dis se transplanter, comme je le disais tout à l'heure, avec les petites fleurs qui sont très fragiles. Donc elle va pouvoir se transplanter au cas qui nous intéresse vraiment. Donc le pouvoir créateur des conjectures n'est pas du tout négligeable, c'est une espèce de manière d'avoir vu plus loin que les autres, et après bon ben, après, il faut rentrer dans le dur, il faut essayer de démontrer la conjecture.

Alain Prochiantz : Mais les conjectures sont toujours démontrées ? Ou bien il y en a qui sont fausses ?

Alain Connes : Oui, bien sûr, il y en a qui sont fausses.

Alain Prochiantz : Et si on travaille sur une conjecture qui est fausse, et si on tire des résultats intéressants, et qu'on démontre qu'elle est fausse...

Alain Connes : En fait, ce qui se produit en mathématiques, c'est qu'il y a deux aspects. Il y a l'aspect il y a un problème, est-ce que ce problème est résolu ou non, bon... Ca, c'est un aspect des mathématiques. Mais il y a un aspect qui est largement aussi important, c'est l'aspect d'édifier des théories. Et par exemple Grothendieck était très connu justement pour lorsqu'on lui posait une question, etc. il essayait toujours de formuler la question dans le bon cadre, et ensuite d'édifier une théorie qui fasse en sorte que la question se résolve par elle-même. C'est Serre qui a employé la meilleure métaphore par rapport à ça : il disait que quand on lui posait un problème comme ça, il essayait de le laisser se dissoudre dans une marée montante de théories générales. Donc ça dit bien ce que ça veut dire. Et donc en fait, il y a l'impulsion qui est donnée par une question comme une conjecture etc. Très souvent justement, l'aspect le plus créateur, le plus positif d'une conjecture, c'est l'édification des théories qui vont permettre soit de la résoudre, soit de dire qu'elle est fausse. Ca peut très bien arriver. Et d'ailleurs, ce qu'on veut, c'est savoir la vérité. On ne veut pas, nécessairement, démontrer. En fait d'ailleurs, dans le livre, on raconte une histoire que je ne veux pas louper parce que le livre, Le Spectre d'Atacama, se termine par cette histoire ; cette histoire, c'est l'histoire d'un mathématicien vieillissant, bon, pensez à qui vous voudrez, qui s'est attaqué pendant des années à une conjecture bon, et qui finalement décide, parce qu'il voit qu'il n'a plus beaucoup de temps devant lui, de vendre son âme au diable, pour connaître la réponse. On dit au départ, pour connaître la réponse.

Alain Prochiantz : C'est une histoire connue, ça.

Alain Connes : Euh, pas tellement celle que l'on raconte...

Alain Prochiantz : L'histoire de vendre son âme au Diable, en tout cas.

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr. Vendre son âme au Diable, c'est un phénomène connu, mais dans ce cas-là, ce qui se produit, c'est assez étonnant, parce qu'il finit par avoir rendez-vous avec le Diable et d'ailleurs le Diable est incarné par le Machine Learning. Hein ! *(rires)* Donc il finit par avoir un rendez-vous avec le diable et puis, lorsqu'il rencontre le Diable, il le rencontre dans une banlieue mal famée de Naples et le diable commence par lui faire signer les papiers comme quoi il a vendu son âme au diable et le mathématicien ne se rend pas compte que, du fait qu'il a signé les papiers et qu'il a donné son âme au Diable, il va changer de comportement. Donc le Diable lui dit “mais bon quel est votre souhait maintenant ? Il faut que vous donniez votre souhait...” Et le mathématicien dit “je souhaite que l'hypothèse de Riemann soit fausse” *(rires)* Et c'est seulement quand il rentre chez lui qu'il réalise qu'en fait, ce qu'il vient de dire, c'est parce qu'il avait vendu son âme et que donc, au lieu de souhaiter qu'elle soit vraie, etc., il a souhaité qu'elle soit fausse.

Alain Prochiantz : Cher Alain, je pense que nous allons bientôt clôre cet entretien qui était vraiment passionnant ; j'aimerais te poser une question : “est-ce que les mathématiques sont pour toi une langue naturelle ?”

Alain Connes : Alors je pense que non seulement, c'est une langue naturelle, mais je pense que c'est la seule langue qui nous permettra de communiquer avec une intelligence extraterrestre. Et ça rejoint le livre mais je suis désolé de le mentionner trop, mais eh bien, ce qui se produit dans le livre justement, c'est que ce message qui est reçu et qui est le spectre d'Atacama, il est reçu en alternance avec les nombres premiers, et une intelligence terrestre, un mathématicien, ne peut pas manquer de reconnaître une intelligence extérieure à nous, et qui se manifeste par cette compréhension qui est extraordinaire, qui a été faite par Riemann au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, donc ce que je prétends, ...et il y a un langage qui a été inventé qui s'appelle le Lincos..., mais ce que je prétends, c'est qu'on pourra communiquer justement avec les extraterrestres grâce au langage mathématique, pourquoi ? Parce que c'est le seul langage qui n'est pas auto-référentiel. C'est le seul langage qui n'est pas auto-référentiel, c'est-à-dire que, contrairement à un dictionnaire qui, quand on cherche la définition d'un mot fait référence à un autre mot, qui lui-même fait référence à un autre mot etc. etc., n'est pas auto-référentiel.

Alain Prochiantz : Mais ce langage est composé, donc, pour revenir au point de départ, d'images mentales.

Alain Connes : Euh non, ce langage est composé, au départ, par exemple de signaux, qu'on envoie de manière spectrale, qu'on envoie de manière répétitive...

Alain Prochiantz : Mais par exemple toi, quand tu penses ?...

Alain Connes : Ah quand je pense, bien sûr, je pense à travers des images mentales, bien entendu.

Alain Prochiantz : Tu ne penses jamais en langue naturelle ?...

Alain Connes : Non, non, non. La langue naturelle, je veux dire, c'est une langue qui après, péniblement, essaie de transcrire nos images mentales, nos manières de penser, etc., mais je dis “péniblement” parce qu'en général, je n'arrive pas à transmettre ça de manière vraiment satisfaisante, j'essaie de manière orale etc., il y a des gens qui sont vraiment forts pour le faire, et je pense en particulier à Grothendieck. Grothendieck était capable lorsque, ce dont on parlait tout à l'heure, c'est-à-dire à propos d'une idée qui n'était pas encore mûre, il était capable de se mettre à écrire sur elle et ça,...

Alain Prochiantz : Ca la faisait mûrir ?...

Alain Connes : Ca la faisait mûrir, mais je pense que ça n'est pas donné à tout le monde d'être capable d'écrire sur une idée qui n'est pas encore mûre et de la faire mûrir, je veux dire.

Alain Prochiantz : De la sortir de son cocon...

Alain Connes : De la sortir de son écrin, de son cocon. Et il y a une autre chose que je voulais dire quand même, avant qu'on termine, c'est, je ne sais pas si ça a été mentionné dans un autre dialogue sur l'imagination, mais il y a un exemple extraordinaire, c'est l'exemple de Eureka d'Edgar Poe. Donc cet exemple, c'est quand même merveilleux, de savoir qu'un poète a pu, au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, avoir l'intuition pas seulement du Big Bang, mais du fait que l'univers pouvait ensuite avoir un Big Crunch, etc., et qu'il a pu être moqué, il a été moqué pendant plus d'un siècle, jusqu'à ce que finalement, on s'aperçoive qu'en fait, il avait raison, mais il avait raison par une intuition purement géniale, et purement poétique.

Alain Prochiantz : Voilà, eh bien, écoutez, je pense que c'est la meilleure façon de terminer cet entretien avec, je le rappelle, Alain Connes, titulaire de la chaire Analyse et géométrie du Collège de France. Merci Alain, d'être venu aujourd'hui et à bientôt.

Les mathématiques
et la pensée en mouvement

Alain Connes [1]

Le but de mon exposé, c'est de vous faire sentir deux choses : la première, c'est que je vais vous raconter un certain nombre d'histoires, sur des mathématiciens, et la deuxième, c'est de vous faire comprendre que les mathématiques sont une fabrique de concepts, mais de concepts absolument fondamentaux et de concepts qui ont trait, si vous voulez, à la vie, et qui ne sont pas du tout confinés a des calculs avec des nombres, ou des choses comme ça ; on a trop souvent l'impression que le mathématicien est quelqu'un qui fait des calculs ; bien sûr, ça lui arrive de faire des calculs, mais ce que je vais essayer de vous faire comprendre, justement, dans cet exposé, c'est à quel point justement, la technique mathématique débouche de temps en temps sur des concepts fondamentaux, sur des idées fondamentales, et ce sont des idées qu'on peut expliquer simplement et qui ont trait à la vie, c'est-à-dire si vous voulez, elles sont aussi importantes, je pense, pour des gens qui font des sciences humaines que pour des gens qui vont faire des sciences dures. Voilà, donc, il y aura une galerie de portraits. On va commencer par Galois.

Et si vous voulez, Galois, c'est le prototype du mathématicien qui a eu une vie absolument incroyable : il est né en 1811, et il avait 17 ans lorsqu'il a fait ses choses les plus importantes. Et ce qui s'est produit donc, il y a eu une succession d'incompréhensions, en fait. Si vous voulez, en 1829, Abel meurt. Et en gros, c'est Galois qui reprend le flambeau des idées d'Abel. Mais en fait, je me suis bien renseigné avec des spécialistes d'Abel. Abel était venu à Paris, mais il est absolument impossible qu'il ait rencontré Galois : Galois était trop jeune quand Abel est venu à Paris ; j'avais toujours imaginé qu'ils s'étaient rencontrés dans un café parisien, qu'ils avaient discuté tous les deux. Apparemment, ce n'est pas possible. Donc quand il avait 17 ans, Cauchy qui était un académicien, avait déjà fait en 1829, deux exposés sur les travaux de Galois, à l'Académie, au mois de mai et au mois de juin. Ca, c'était donc

1. Conférence du CPES (Cycle Pluridisciplinaire d'Etudes Supérieures), PSL (Paris Sciences et Lettres), le 12 novembre 2015.
Transcription de la conférence par Denise Vella-Chemla (31.1.2019).

en 1829. Et au mois de juillet 1829, le père de Galois se suicide parce qu'il avait été la victime d'une campagne de calomnie, qui avait été faite contre lui, et en plus, Galois échoue pour la deuxième fois à l'école polytechnique. Donc c'était la deuxième fois qu'il se présentait à l'école polytechnique. A l'époque, l'école polytechnique était au top des grandes écoles, donc c'est la deuxième fois qu'il échoue. C'est là qu'il y a eu la scène apparemment où il a balancé le chiffon à la tête de l'examinateur de mathématiques, parce que l'examinateur ne comprenait pas les explications de Galois sur le logarithme.

Mais heureusement, Galois est reçu à l'école normale. Et en janvier 1830, il y a une lettre de Cauchy à l'Académie qui dit qu'il va parler sur Galois. Ce serait donc pour la troisième fois, et puis finalement Cauchy renonce, et je pense, enfin on pense, et les historiens pensent, si vous voulez, qu'il s'était mis d'accord avec Galois parce qu'il y avait un Grand Prix de l'Académie qui devait être donné en 1830 et Cauchy avait convaincu Galois de réécrire son article, de réécrire ses articles et de se présenter pour ce grand prix. Alors là, ce qui s'est passé, c'était absolument dramatique parce que l'académicien qui devait rapporter sur l'article de Galois, c'était Joseph Fourier. C'est un très très grand mathématicien et Fourier apparemment, il était en haut de ses escaliers chez lui, il s'est pris les pieds dans sa robe de chambre et il a dégringolé l'escalier, il est mort. Donc, gros problème, gros problème, et si vous voulez, il y a eu un tel désordre à ce moment-là, que le manuscrit de Galois a été perdu. Alors, non seulement Galois n'a pas eu le prix, qu'il aurait peut-être mérité, le prix a été donné à Jacobi et Abel, bien sûr deux mathématiciens immenses. Jacobi était un mathématicien allemand, Abel était mort, il était mort en 1829, le prix a été donné à Abel à titre posthume.

Mais si vous voulez, Galois ne pouvait pas se plaindre de ne pas avoir eu son grand prix ; par contre, il pouvait se plaindre, à l'époque, il n'y avait pas de photocopieuse. Donc il avait écrit son manuscrit ; à l'époque, vous écriviez le manuscrit et puis c'était fini. Il l'avait donné à l'Académie mais manuscrit perdu. Donc il s'était plaint à plusieurs reprises à l'Académie, mais manuscrit perdu. Et donc en 1830, le grand prix a été donné en juin 1830 et en juillet 1830, c'est les Trois Glorieuses. C'est Les Trois Glorieuses, et Galois a été à l'école normale et là, il râlait parce que, à l'école normale, les élèves étaient confinés, ils ne pouvaient pas aller sur les barricades. Par contre, les élèves de l'école polytechnique, eux, ils pouvaient, donc alors là, Galois a commencé à vraiment se révolter. C'est très très bizarre, si vous voulez, bon, il avait à peine 18 ans. Donc il a commencé à se révolter et il s'est révolté contre le directeur de l'école normale. Et après l'été, donc, il a commencé à militer plus ou moins, et de fil en aiguille, il a réussi à se faire renvoyer de l'école Normale. Donc, il a été renvoyé de l'école Normale en janvier 1831, et il y a quelque chose d'incroyablement ironique, qui est que Galois était à la rue, si vous voulez, il n'avait plus de salaire parce qu'à l'époque, à l'époque et c'est encore le cas maintenant, les élèves de l'école Normale recevaient un petit salaire. Donc il était à la rue et alors pour gagner un peu d'argent, il avait créé un cours d'algèbre, cours d'algèbre qui réunissait un certain nombre de gens qui venaient l'écouter parce que c'était un magnifique mathématicien malgré son très jeune âge. Et l'ironie totale, c'est que son cours d'algèbre, il le donnait dans la rue qui maintenant, c'est une rue attenante à la Sorbonne, qui s'appelle la rue Victor Cousin. Pourquoi est-ce que c'est ironique ? C'est ironique parce que la personne qui a signé le renvoi de l'école Normale de Galois s'appelle Victor Cousin. Alors il y a quelques années, pour les 200 ans de la naissance de Galois, j'ai eu à donner l'exposé à l'Académie des Sciences sur Galois. Et à ce moment-là, j'ai voulu que tout le monde se mettent d'accord pour rebaptiser la rue Victor Cousin en rue Galois. Bon, ça n'a pas été possible, mais il faudrait quand même, c'est incroyable.

Donc voilà ce qui s'est passé. Alors après, donc, il faut bien dire que Galois, il est mort à 20 ans. Et les deux dernières années de sa vie, il n'a pas beaucoup fait de maths. C'est incroyable, c'est absolument incroyable. Et ce qui s'est produit, c'est qu'une fois qu'il a été renvoyé de l'école normale, il y avait quand même un autre académicien qui lui voulait du bien, il s'appelait Poisson. Et en mathématiques, il y a une formule bien connue qu'on appelle la formule de Poisson. Et si vous voulez, Poisson l'avait convaincu de réécrire son manuscrit et de le présenter à l'Académie. Donc Galois s'était exécuté. Il avait réécrit son manuscrit. Il avait travaillé, etc. Et entre temps, bien sûr, après Les Trois Glorieuses, tout le monde commençait à être extrêmement déçu par le nouveau pouvoir. Et Galois faisait partie de ces gens-là. Donc la première chose qu'il a faite, c'est pas très, pas très malin, enfin bon. Il était dans un banquet qui fêtait la libération d'opposants au pouvoir. Et alors, il était dans ce banquet, et il avait levé son verre à Louis-Philippe. Alors, tous les gens se disaient "il est complètement fou !" : il était dans un banquet contre Louis-Philippe et il levait son verre à Louis-Philippe. Et dans la main, il avait un couteau. D'abord, les gens n'avaient pas compris pourquoi il levait son verre à Louis-Philippe ; secundo, il y avait un espion qui était là et qui avait vu qu'il avait un couteau à la main. Il avait été arrêté, ça c'était au mois de mai 1831, il avait été arrêté, et il avait été jugé assez vite. Il avait été jugé par un jury populaire. Mais comme il avait été jugé par un jury populaire, les gens avaient vu qu'il était un peu bizarre, bon, enfin, je veux dire, il ne se défendait pas, en gros, il disait... Alors ils l'avaient acquitté. Je crois qu'il avait été acquitté en juin 1831. Et un mois après, il a reçu le rapport de Poisson sur son article. Alors là, catastrophe parce que Poisson disait que c'était sûrement une très très belle théorie, mais qu'il n'y avait pas assez de détails dans les démonstrations, etc. Donc il ne pouvait pas accepter l'article. Et Galois, quand il a reçu ce rapport, il a écrit à la main, dans la marge du rapport, il a écrit "Oh, chérubins !". Ca veut dire qu'il voyait que les gens ne comprenaient rien à ce qu'il faisait. A ce moment-là, il a un peu dérapé, c'est-à-dire que là, il s'est fait arrêter. Ca, c'était le 4 juillet qu'il a reçu le rapport de Poisson, il a été arrêté le 14 juillet à la tête d'une manifestation contre Louis-Philippe. Et là, il a été mis en prison pour de bon ; il a été mis dans une prison qui s'appelle Sainte-Pélagie ; et bon, il y a beaucoup d'entre vous sans doute, qui imaginent que s'ils étaient en prison, ils pourraient au moins réfléchir tranquilles avec des bouquins ; en fait, c'était pas du tout comme ça, parce que Galois, il était au milieu des condamnés et c'était absolument terrible parce que les autres condamnés l'obligeaient à boire de la liqueur très forte, etc. ; je veux dire que c'était absolument orthogonal à son... à ce qu'il faisait et en fait là, il a rencontré Nerval. Nerval l'a rencontré alors qu'il était en prison.

Et alors, c'est terrible, c'est terrible, parce que si vous voulez, Galois est resté en prison jusqu'au mois de mars de l'année d'après, 1832. Il n'avait pas 20 ans, toujours, euh, si, il avait 20 ans. Et en mars 1832, la raison pour laquelle il a été libéré, c'est qu'il y avait le choléra à Paris. Et qu'ils vidaient les prisons pour pas qu'il y ait trop de dégâts. Donc il a été mis dans une maison de santé et dans cette maison de santé, il est plus ou moins tombé amoureux d'une fille qui était là, sans se rendre compte qu'elle était déjà avec quelqu'un d'autre.

Et bon, tout ça a fini par un duel, d'accord. Et alors là, c'est pareil, si vous voulez, je suppose que chacun d'entre vous imagine que s'il était en devoir de se battre en duel, il aurait plus d'habileté que l'adversaire, donc ça irait quoi, il s'en sortirait. Malheureusement, le duel dans lequel Galois a été pris, il a essayé de s'en sortir avant. Il a essayé de dire que... Mais malheureusement, c'était un duel absolument terrible, c'était comme la roulette russe, c'était un duel dans lequel il y avait deux revolvers dont l'un seulement des deux était chargé. Et il fallait qu'ils se les mettent sur le ventre. Donc il a eu, bien sûr, une balle dans le ventre. A l'époque, et même maintenant, c'était mortel, et les autres l'ont laissé sur place.

Il a été retrouvé par un paysan sur place, qui l'a emmené à l'hôpital et il est mort le jours après. Bon. Et il a laissé une liasse de papiers, c'est ce qu'il dit, c'est ce qu'il dit dans ses trucs, donc c'était... Alors il y a des gens qui vous feront croire qu'il a trouvé tous ses résultats la veille de son duel. C'est absolument pas vrai, je veux dire, évidemment, il avait continué à réfléchir et c'était au point... il avait dû tellement se forcer à continuer à faire des maths pendant qu'il était dans des circonstances abominables, que des gens qui l'ont vu à sa sortie de prison disaient qu'il avait l'air d'avoir 50 ans alors qu'il avait 20 ans. D'accord, donc c'est vous dire un peu la passion qui l'habitait, et c'est un miracle, finalement, c'est un miracle qu'on ait eu ses travaux.

C'est un miracle absolu qu'on ait eu ses travaux. Donc ça, c'est ce qu'il écrivait et qu'il a laissé dans sa lettre-testament. C'est sa lettre-testament qu'il avait laissée à son frère, et à son ami, il avait un ami aussi.

Et ce qui s'est produit, donc, c'est que 10 ans ont passé. Et par un hasard extraordinaire, Liouville, qui était un contemporain de Galois, qui avait simplement deux ans de plus que Galois, a retrouvé les papiers de Galois. Et il a compris que c'étaient des choses absolument géniales. Et il en a parlé à l'Académie. Donc si vous voulez, 10 ans après la mort de Galois, c'est Liouville que voilà. Bon là, évidemment, il est beaucoup plus vieux mais c'était un contemporain de Galois, c'était quelqu'un qui était né en 1809, donc deux ans avant Galois. Et donc, Liouville a compris l'extraordinaire force des travaux de Galois si vous voulez.

Alors il a écrit ça, mais ça, je vous le montre écrit correctement, donc c'est comme ça.

Il en a parlé à l'Académie. Et puis, graduellement, les travaux de Galois ont été compris. Et alors ce que je vais faire, je ne veux pas vous embêter avec des mathématiques trop compliquées, je vais simplement vous donner l'essence de la théorie de Galois. Je vais vous donner l'essence en vous donnant un exemple. Ce que dit Galois dans sa lettre-testament, c'est quelque-chose d'incroyablement visionnaire, si vous voulez, ce qu'il dit, c'est :

"Tu sais mon cher Auguste, (il avait un ami qui s'appelait Auguste) *que ces sujets ne sont pas les seuls que j'ai explorés. Mes principales méditations depuis quelques temps ont étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté."*

Donc Galois a découvert cette théorie de l'ambiguïté. Et dans cette lettre, à la fin de sa vie, il dit que non seulement, il l'a appliquée à des équations polynomiales. Mais en fait, il l'a appliquée à la théorie des fonctions transcendantes. Personne ne sait ce qu'il avait exactement en tête. Ca, personne ne peut dire que l'on sait, maintenant, ce que Galois avait en tête.

Par contre, on sait très bien ce qu'il avait en tête pour les équations polynomiales.

Et donc, pour les équations polynomiales, je vais vous expliquer ce qu'est la théorie de l'ambiguïté. Donc ce que Galois a compris, si vous voulez, c'est quelque-chose d'assez extraordinaire, c'est que lorsque vous vous donnez une équation algébrique, par exemple, je vous ai donné une équation donc, on sait la résoudre. Vous savez que maintenant, je veux dire avec l'ordinateur, vous pouvez contrôler tout ça, vous pouvez tracer le graphe d'une fonction, vous pouvez résoudre une équation polynomiale, et tout ça. Mais l'ordinateur ne vous donnera jamais les zéros qu'avec une certaine précision, il ne vous donnera jamais les racines qu'avec une certaine précision.

Alors, ce que dit la théorie de Galois, elle dit quelque chose d'extraordinaire : elle dit que quand vous prenez une équation comme celle-là, qui est irréductible, c'est-à-dire qu'on ne peut pas la factoriser en un produit de 2 facteurs avec des coefficients rationnels par exemple. Donc lorsqu'une équation est irréductible, ce que dit la théorie de Galois, c'est qu'il y a un groupe qui opère sur les racines, ici sur les 5 racines, et qui fait qu'on ne peut pas, si vous voulez, isoler une racine. C'est-à-dire qu'il y a une ambiguïté entre les racines ; ce groupe, il fait tourner les racines. Et toute relation qui est vérifiée entre les racines, toute relation rationnelle qui est vérifiée entre les racines, par exemple, avec l'ordinateur, vous pouvez voir que cette relation, elle est presque vérifiée, le fait que $E = 4C^2 + 2D^2$, vous pouvez vérifier ça. En fait, ce que dit la théorie de Galois, c'est qu'il y a un groupe qui permute ces racines, c'est-à-dire qu'elles peuvent bouger de l'une à l'autre. Et de telle sorte que si une relation comme ça a lieu, elle aura lieu pour les racines permutées. Et ce que dit la théorie de Galois, c'est que par ce groupe, vous pouvez transformer n'importe quelle racine en n'importe quelle autre. Alors ce que dit Galois après, en fait ce que je vous dis en particulier ici, c'est que c'est impossible d'avoir cette relation. Pourquoi est-ce impossible d'avoir cette relation ? Parce que si vous avez cette relation, vous voyez bien que les 5 racines, elles sont réelles. Ca, c'est pas du tout difficile à démontrer. Donc vous avez bien 5 racines qui sont réelles. Mais supposez que vous ayez une relation comme celle que j'ai écrite : $E = 4C^2 + 2D^2$. Eh bien à ce moment-là, comme E peut devenir n'importe laquelle des autres racines, C et D seront d'autres racines aussi. Et vous voyez bien que toutes les racines devraient être positives, puisque ce sont des sommes de carrés. Et donc ce n'est pas possible. Ce n'est pas possible. Donc, c'est extraordinaire !

Ca vous dit que sans calculer et sans se salir les mains, ni quoi que ce soit, on sait que cette relation n'est pas possible. C'est-à-dire qu'avec l'ordinateur, l'ordinateur va vous dire "Mais elle est vraie, elle est vraie !". Il va le dire avec des décimales et tout ça. Non ! Galois dit "c'est pas possible, cette relation n'est pas vraie !". Et elle n'est pas vraie par la pensée pure, c'est extraordinaire ! C'est quelque-chose d'extraordinaire ! Parce qu'il a compris que derrière une équation, il n'y a pas seulement la valeur numérique des racines. Non. Il y a les relations entre les racines qui peuvent exister, Et ce que fait la théorie de Galois, c'est de déceler exactement toutes les relations entre les racines. Et elles sont décelées par un groupe. Alors, ne croyez pas les gens qui vous diront que c'est Galois qui a inventé la théorie des groupes. Non, les gens comme Lagrange, etc., savaient ce que c'étaient que les groupes avant lui. Mais Galois est le premier mathématicien *moderne*. C'est-à-dire que c'est le premier mathématicien qui a eu cette fulgurance, si vous voulez, qui fait que certaines choses comme ça sont vraies sans qu'on ait à calculer ou quoi que ce soit, d'accord. On a une théorie abstraite, c'est une théorie de l'ambiguïté et résoudre une équation, c'est graduellement diminuer l'ambiguïté qu'il y a, pour que finalement, sur l'équation, on puisse affirmer telle racine, et telle racine, etc. D'accord. Donc c'est ça, la théorie de l'ambiguïté. Et ici, en l'occurrence, on peut calculer ce qu'est le groupe de Galois. Donc le groupe de Galois, vous voyez les 5 racines, elles sont indiquées ici. Le groupe de Galois, il va les permuter. Et puis, mais il les permute si vous voulez de manière transitive, c'est-à-dire que si on itère ces permutations, si par exemple, je prends la racine qui est en-haut au milieu, elle va aller sur la première ; et après, si je regarde où va la première, elle va sur la dernière ; après, si je regarde la dernière, elle va sur l'avant-dernière ; si je regarde l'avant-dernière, elle va sur la seconde. Donc vous voyez que vous avez fait tout le tour d'accord.

Donc bon, et ça, c'est toujours vrai, c'est-à-dire que quelle que soit l'équation que vous preniez, Galois vous dit que si elle était réductible, il y a un groupe qui permute les racines. Alors il y a beaucoup de mathématiciens qui croient connaître la théorie de Galois, parce qu'ils disent que Galois a réussi à démontrer qu'une équation est résoluble par radicaux si et seulement si son groupe de Galois est résoluble. Mais en fait Galois, à 17 ans, avait bien mieux que ça, il avait... un théorème...

Je vais vous effrayer mais ne vous inquiétez pas, on va passer à un autre sujet tout de suite. Donc ce que Galois démontre, c'est que si on prend une équation qu'il appelle primitive. C'est une certaine définition technique, pour qu'elle soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit qu'on puisse indexer les racines par un corps fini. C'est Galois qui a inventé les corps finis. C'est assez amusant parce que les Français sont pudiques, parce que les Anglo-Saxons appellent ces corps finis les *Galois fields*. Si on traduit en français, ça se traduit par corps de Galois. Mais en France, on n'utilise pas cette terminologie : on parle de corps fini. Et alors le théorème de Galois, qu'il avait quand il avait 17 ans, c'est que pour qu'une équation primitive soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit qu'on puisse indexer ses racines par un corps fini, de telle sorte que le groupe de Galois, alors là, tenez-vous bien, accrochez-vous, soit contenu dans le produit semi-direct du groupe affine du corps fini par le Frobenius, par les puissances du Frobenius. D'accord, d'accord, ok, bon.

(rires)

Et alors quand j'ai préparé mon exposé pour l'Académie, justement, je me suis aperçu qu'en fait, Galois connaissait un nombre incalculable de choses et qu'il connaissait par exemple, maintenant ce qu'on appelle la théorie de Sylow, qui est une théorie qui a été mise au point peut-être 50 ans après la mort de Galois. Donc c'est vous dire un peu à quel point il avait réussi à voir si loin. Et à la fin de mon exposé, je vous montrerai un texte de Grothendieck et c'est un texte qui est fondamental parce que ça s'applique merveilleusement au cas de Galois d'accord, et c'est un texte sur la créativité, sur la découverte et sur le fait que la vraie créativité, elle demande justement si vous voulez de retourner à cet esprit de l'enfant qui est à la fois libre, mais aussi qui n'accepte pas si vous voulez le poids des connaissances qu'on met sur lui. Donc on y reviendra à ça, d'accord.

Alors maintenant, j'en viens à un autre sujet, parce que je ne veux pas négliger la physique. Et à un autre sujet qui me tient à cœur aussi énormément et qui est celui, si vous voulez, d'un autre grand découvreur, dans le XX$^{\text{ème}}$ siècle, si vous voulez, c'est la découverte de la mécanique quantique. Maintenant, on va passer à Heisenberg et à la mécanique quantique. Donc on fait une pause si vous voulez. Ce que j'ai essayé de faire, c'est de choisir des sujets qui vous montrent, chacun, une nouvelle notion qui a été découverte, soit en faisant de la recherche mathématique, soit en faisant une recherche sur la nature, sur la physique. Mais chacune de ces notions est une notion qui a un sens, qui a un sens absolument fondamental.

Donc, l'histoire d'Heisenberg, elle est en fait reliée à un lieu, et ce lieu, c'est une île qui en allemand s'appelle Helgoland ; en français, on traduit Heligoland. C'est une île des pays nordiques. Et c'est une île qui a une particularité, je ne sais plus si cette particularité est encore vraie de nos jours ; en tout cas, elle avait une particularité dans les années 1925, qui était qu'elle n'avait pas de pollen. Il n'y avait pas d'arbres, il n'y avait pas de sources de pollen. Alors, quel est le lien avec Heisenberg ? Le lien, c'est que Heisenberg était un étudiant en physique, enfin, un étudiant, il avait déjà de la bouteille... Il était à Göttingen, je pense. Et à un moment donné, c'était au mois de mai, il a été pris d'une allergie terrible, le rhume des foins si vous voulez. Donc il avait la tête enflée, enfin tout ça quoi, et donc à l'époque, le seul remède, on ne donnait pas d'anti-histaminiques, le seul remède, c'était de l'envoyer à Heligoland. Donc il a été envoyé sur cette île. On lui a dit "il faut arrêter de faire vos cours, etc." et on vous envoie sur cette île. Et il est arrivé sur cette île. Il était logé par une vieille dame dans une maison, peut-être une des baraques qui sont là-haut, là. Et puis à l'époque, il cherchait... *(petit bruit circonspect interrogatif)*. A l'époque, il cherchait...

Il essayait de ... A l'époque, la mécanique quantique était à un stade préhistorique, c'est-à-dire qu'on avait décidé ce qu'on appelle certains principes, qui permettaient de calculer des énergies et tout ça, mais je veux dire que ce n'était absolument pas une vraie théorie. Et Heisenberg réfléchissait sur un problème. En gros, son problème, ça prendrait trop de temps de l'expliquer, si vous voulez, l'idée, en gros, à l'époque, on concevait l'atome comme un petit système solaire. Mais ça ne marchait pas. Parce que ce qui se passe dans un système comme le système solaire, c'est que, par exemple si l'électron tournait autour du noyau, il émet de l'énergie, et donc en fait, son orbite devrait se ratatiner sur le noyau. Et ça, c'est pas ce qui se passe en réalité. Donc il y avait des choses comme ça qui ne collaient pas du tout. Et donc, Heisenberg a réfléchi là-dessus. Il est parti des résultats expérimentaux, ce qu'on appelle le principe de Ritz-Rydberg. Et puis bon, il avait ce calcul qu'il voulait faire et quand il était sur cette île, il a commencé à faire ce calcul. Il y avait des choses qu'il ne comprenait pas, tout ça. Et puis un matin, à 4h du matin, tout a marché ! Il a eu cette révélation extraordinaire ! Et au lieu d'aller se coucher, il est allé grimper sur un des pics rocheux *(rires)* qui sont au bord de l'île. Il s'est installé en haut, et il a attendu le lever du soleil. Et dans ses mémoires, il décrit de manière extraordinaire si vous voulez, cette illumination qu'il a eue et il dit vraiment, et c'est vrai, qu'il a eu tout d'un coup devant les yeux un immense paysage qui s'est dévoilé à ses yeux, mais c'était un paysage intellectuel, bien sûr ; ce paysage, c'était l'essence de la découverte qu'il a faite, si vous voulez, c'est quelque-chose d'incroyable ! Il a découvert que quand on fait des calculs, voilà Heisenberg, et on y reviendra à ça. Ce qu'il a découvert, c'est que vous voyez, quand vous faites de la physique, bon par exemple, vous écrivez $e = mc^2$ ou des trucs comme ça. Vous pourriez écrire $e = c^2$ fois m, c'est du kif-kif, ce sont des nombres. Bon, eh bien, je veux dire, ça ne change rien. Ce qu'Heisenberg a trouvé, c'est quelque-chose d'incroyable. Heisenberg a trouvé que si vous essayez de manipuler la position et le moment, on parle de la vitesse, mais il faut parler du moment : le moment, c'est le produit de la vitesse par la masse, d'accord ? Donc, si vous essayez de manipuler à la fois la position et le moment, au niveau microscopique d'un tout petit truc, d'un atome ou d'un truc comme ça, eh bien, vous pourrez toujours faire tout ce que vous voulez, vous n'arriverez jamais à mettre en défaut ce qu'on appelle le principe d'incertitude d'Heisenberg, d'accord, qui est que $\Delta x \Delta p$... Δx, c'est l'incertitude sur la position, Δp, c'est l'incertitude sur le moment. Eh bien ça, c'est toujours plus grand ou égal à $\hbar/2$, qu'est-ce que c'est que $\hbar$, c'est la constante que Planck avait introduite au début du siècle, pour expliquer certains phénomènes physiques.

Alors là, il faut que je vous raconte une petite histoire, à propos du principe d'incertitude parce que bon, *(chuchotant)* je crois qu'il y a un bouquin d'ailleurs là-dessus, qui est pas mal, d'ailleurs... Mais en fait, sur le principe d'incertitude, si vous voulez vraiment ressentir en quoi ce principe a troublé les gens, il y a une histoire qu'il faut que je vous raconte. C'est que bien sûr, Einstein n'y croyait pas. Pourtant, Einstein est à l'origine de la théorie quantique, je veux dire, c'est Einstein qui a eu l'idée que le photon avait des niveaux d'énergie qui étaient quantiques. Donc Einstein n'y croyait pas. Donc Einstein avait imaginé un dispositif.

A l'époque donc, Heisenberg a trouvé son principe d'incertitude vers la fin des années 1920. A cette époque-là, il y avait ce qu'on appelait les congrès Solvay ; c'étaient des réunions de physiciens, en petit nombre, et bien sûr, ils discutaient entre eux.

Donc il y a eu un congrès Solvay, je crois que c'était en 1830, ou quelque-chose comme ça. Et donc Einstein avait imaginé la chose suivante ; il avait imaginé pour mettre en défaut le principe d'incertitude, mais pas sur la position et le moment, mais sur $\Delta t \Delta E$; c'est à dire que...*(soupir, soupir)*... le temps, c'est la variable duale de l'énergie, de même que la position est la variable duale du moment. Et le principe d'incertitude vous donne quelque chose de semblable pour $\Delta t \Delta E$. Quelque-chose comme $\hbar$ ou $\hbar/2$, ça dépend des unités. Donc Einstein ne croyait pas à ça. Et Einstein avait imaginé... Bien sûr, il faisait toujours la même chose, c'est-à-dire que quand il ne croyait pas à quelque chose, il imaginait une expérience de pensée. Une expérience de pensée, qu'est-ce que ça veut dire ? Ca veut dire que je vais vous faire un dessin très grossier : mais en fait, on peut très bien imaginer que cette expérience soit rendue de plus en plus précise. D'accord ? Donc le dessin très grossier, c'était le suivant : *(dessinant le dispositif au tableau)* là, on va mettre un petit ressort, et puis ici, on va mettre une boîte. Et puis on va mettre comme un coucou quoi. Et puis avec, il y aura l'heure ici, d'accord ?

C'était ça son système, et puis là, il y a une espèce de truc. Et puis, là, il y a des... Voilà le système.

Alors quelle était l'idée d'Einstein ? L'idée d'Einstein, c'est que Δt, eh bien, on va le contrôler puisqu'on à l'heure ici, d'accord. Donc ça, c'est le t donc. Et ΔE maintenant ? Donc, qu'est-ce que ça veut dire, qu'est-ce que j'ai dit ici *(montrant un endroit du dessin)* ? Ca veut dire qu'il y aura un moment donné où le coucou va faire “Touc !”. Il va émettre un photon. Et on saura à quelle heure il l’a émis puisqu’il y a ce truc qui marque l’heure, d’accord. Donc Δt, *(bruit pour exprimer qu’on ne sait pas quoi...)*. Alors maintenant ΔE. Eh bien le photon, ça, Einstein, il le sait, le photon, il pèse $h\nu$, où ν c’est la fréquence du photon. Donc ça, c’est e si vous voulez, c’est l’énergie. Donc quand le photon sort, ce truc-là, il devient un petit peu plus léger... *(voyant qu’il semble peut-être avoir un peu perdu la compréhension de son auditoire)* Est-ce que vous connaissez l’histoire du camion qui transportait des trous, non ? Vous ne la connaissez pas ? Il était en montagne, d’accord, puis à un moment donné, le chauffeur, il s’est senti plus lourd, il a reculé, il est tombé dans le trou, d’accord.

(rires).

Bon, je reprends, d’accord ? Donc, ici, une fois que le photon a été émis, d’accord, ce truc-là devient un petit peu plus léger, donc ça va, si vous voulez, l’aiguille, elle va monter un petit peu, et en regardant de combien elle est montée, on va connaître ΔE donc en fait, Einstein disait “bah on va connaître ΔE, on va connaître Δt, avec une précision aussi grande que l’on veut. Donc on aura pas le principe d’incertitude”. Alors il a dit ça. Et ça a fait terriblement peur à Bohr qui était en train de discuter avec eux, parce que Bohr croyait bien sûr au principe d’incertitude, ça lui a fait terriblement peur parce que... Quelle était la raison pour laquelle il avait peur ? La raison pour laquelle il avait peur, c’est que quand vous faites les calculs avec ce système, proposé par Einstein, ce qui va intervenir, c’est la constante de gravitation parce que vous voyez, l’horloge, quand elle monte un peu, elle est dans le champ gravitationnel, donc quand vous allez chercher de combien l’énergie a diminué, vous allez faire intervenir la constante de gravitation, donc évidemment, la constante de gravitation, elle rentre absolument pas dans le $\hbar$ de Planck etc. La théorie de Planck, elle est complètement disjointe de la gravitation. Donc Bohr se disait, c’est foutu !

Donc, il y a une photo extraordinaire, sur laquelle on voit Einstein sortir très fièrement de la salle de congrès Solvay et on voit Bohr qui le suit un peu comme un petit chien, et qui est, bon... Et alors ce qui s’est passé, c’est que ce n’est pas la fin d’histoire. La fin de l’histoire est absolument merveilleuse, parce que ce qui s’est passé, c’est que Bohr est rentré à son hôtel. Evidemment, il n’a pas dormi, il n’a pas dormi de la nuit parce que bon, je veux dire... Il n'a pas dormi de la nuit, et il a trouvé la réponse... Et la réponse est fantastique. La réponse est absolument fantastique, parce que, si vous voulez, bon, ça paraissait impossible, impossible ! Pourquoi ? Parce que, comme je le disais, il y aura la constante de gravitation quand vous allez faire le calcul et ça, c'est impossible que ça marche ! C'est impossible qu'on retrouve le $\hbar$. D'où il sort ? Ce qu'a trouvé Bohr pendant la nuit, il a trouvé que le même Einstein, en fait, il avait pondu la relativité générale. *(Alain Connes écrit les formules à la craie au tableau).* A l'époque ! Ca, vous savez, maintenant, cette année, au mois de novembre, il va y avoir un tas de célébrations de la découverte de la relativité générale par Einstein. Ca fait exactement 100 ans. C'est pour ça qu'il va y avoir toutes ces célébrations. Donc ça fait exactement 100 ans. Et c'était donc une dizaine d'années, ou même plus, une quinzaine d'années avant l'histoire en question. Qu'est-ce que ça à voir avec le truc ?

Ce que ça a à voir avec le truc, c'est la chose suivante : c'est que ce que dit la relativité générale, elle dit que le passage du temps, si vous écrivez la métrique, vous avez ce qu'on appelle la métrique de Minkowski, en fait, qui est dûe à Poincaré, donc de l'espace-temps si vous voulez. Lorsque ça, c'est l'espace-temps de la relativité restreinte, et si vous regardez la métrique de l'espace-temps de la relativité générale, en première approximation, ce qui se passe, c'est que la métrique ne change pas pour les coordonnées usuelles : on est dans un espace euclidien. Par contre, elle change pour le passage du temps, et la manière dont elle change, c'est que le coefficient dt^2 est multiplié par 1+ deux fois le potentiel Newtonien $V(x, y, z)$.

Vous inquiètez pas, c'est pas... bon. Qu'est-ce que ça veut dire ? Ca veut dire que le temps passe différemment selon l'altitude, ok ? Mais l'horloge, elle a changé d'altitude un petit peu *(Eclats de rires).* Donc son temps a passé différemment. Vous faites le calcul et vous retrouvez le principe d'incertitude d'Heisenberg. C'est incroyable ! Ca veut dire que Bohr, si Einstein n'avait pas découvert la relativité générale *(Eclats de rires)* une quinzaine d'années avant, il aurait eu raison, d'accord ?... Personne n'aurait cru que le principe d'incertitude était valable. Mais, à cause de la relativité générale, que lui-même avait inventée, il a été battu, il a été mis en défaut. Donc le lendemain matin, Bohr est rentré, triomphant, je veux dire, c'est extraordinaire ! C'est vraiment extraordinaire, mais si vous voulez, tout ça, c'est pour essayer de vous faire sentir le fait qu'aucune de ces notions n'a été acceptée au début. Pas du tout ! Absolument pas. Il y a toujours une résistance absolument terrible, à des choses qui sont nouvelles comme ça... Et alors, ce qui est incroyable dans le quantique, ce qui est ahurissant dans le quantique, si vous voulez, et ça je pense que ce n'est pas vraiment passé dans les connaissances. Oui, alors, bon. J'en parlerai après de ça, j'en parlerai après. J'y reviendrai. Ce qui est incroyable dans le quantique, si vous voulez, c'est le fait que, et ça, ça vient du principe d'incertitude d'Heisenberg, c'est que, contrairement à la physique classique, quand vous faites une expérience dans le quantique, vous ne pouvez pas reproduire l'expérience. C'est quelque-chose de fondamental. Quand j'essayais de vous dire, si vous voulez, que j'allais vous expliquer des concepts ou des notions... Ce sont des notions qui font une telle cassure avec la vision classique, si vous voulez, que c'est énorme comme différence. Qu'est-ce que je veux dire par là ? Ce que je veux dire par là, c'est que si vous faites une expérience de nature quantique, par exemple vous envoyez un photon, et ce photon, il va passer par une toute petite fente qui est à peu près de la taille de sa longueur d'onde. Et après, vous allez le recevoir sur une cible. Eh bien, le fait que vous receviez le photon à un endroit x donné, cette expérience-là n'est pas reproductible. C'est-à-dire que vous pourrez refaire l'expérience avec autant de précision, donner les mêmes conditions initiales, etc., le résultat final ne sera pas le même. C'est incroyable, ça ! Et il ne sera pas le même à cause du principe d'incertitude de Heisenberg.

Alors, vous pouvez me dire “Bon bah d'accord bah bon moi, je m'en fiche, il y a un peu d'aléa, quoi ! Un aléa microscopique, je m'en fiche !”. Mais non ! Maintenant, ce qui se produit, c'est que le fait qu'il y ait cette incertitude fondamentale, si vous voulez, eh bien, ça a été utilisé pour produire des nombres aléatoires. C'est-à-dire qu'il y a des Suisses qui ont fabriqué un appareil qui marche, maintenant c'est avec une lampe LED, vous savez les petites lampes LED là, comme ça. Alors ces petites lampes envoient des photons sur une cible, voilà. On regarde à quel endroit le photon arrive, il arrive sur l'un des carreaux de la cible. Et à partir de là, on fabrique un nombre et comme c'est un phénomène quantique, c'est-à-dire que c'est un phénomène qui n'est pas reproductible, ça produit des nombres aléatoires, qui sont tellement aléatoires que, même si un attaquant voulait reproduire la même chose, ça veut dire s'il connaissait toutes les données sur le système, il n'arriverait pas à reproduire le même nombre. Alors qu'avec un ordinateur, si vous fabriquez des nombres aléatoires, si l'attaquant connaît votre système de fabrication, il arrivera à les reproduire, les nombres aléatoires, d'accord ? Donc c'est phénoménal, c'est phénoménal ! Alors, de là, si vous voulez de cette vérité extraordinaire, en fait, sort une idée, qu'on a commencé à exploiter et cette idée, c'est la suivante : vous voyez, nous, nous sommes habitués en physique a attribuer tout variabilité au passage du temps, c'est-à-dire que bon... Moi, je me souviens une fois mon prof, j'avais un prof, je ne sais plus si c'était en maths sup. Il m'a dit de passer au tableau, alors j'y passe.

Il m'interroge. Et puis, il me fait ça *(geste d'une courbe dessinée en l'air)* - Ouhouh ? ! *(rires)*. Moi, je regarde comme ça... Il me dit "Monsieur Connes, quelle est la variable ?". Alors, moi, je faisais de la cinématique. Je réfléchis... Et puis au bout d'un moment, je lui réponds : "c'est le temps !". C'était la bonne réponse ! Vous voyez, normalement, il y a un tas de choses qui sont variables. Et toute la physique est écrite en notant d/dt de quelque-chose égale quelque-chose d'autre... Toute la physique est écrite en fonction du temps. Et en fait, si on réfléchit suffisamment, au niveau conceptuel, on s'aperçoit en fait, que la mécanique quantique occasionne immédiatement des paradoxes, des paradoxes très très violents, très très forts, si vous voulez, et qui viennent précisément du fait qu'on attribue la variabilité au passage du temps.

Et il y a une idée fondamentale qui a du mal à passer, mais qu'on a essayé de vulgariser etc., et cette idée c'est en fait que la vraie variabilité, c'est la variabilité quantique et que le temps en fait, émerge de cette variabilité-là. Ca veut dire que le temps n'est qu'un phénomène secondaire, n'est qu'un phénomène émergent, qui résulte de la variabilité quantique, mais qui n'est pas du tout fondamental d'accord.

Alors pour essayer de faire passer cette idée, en fait, je ne vais pas vous donner tous les détails, on a écrit un livre, donc, avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, on a écrit un livre ensemble, qui s'appelle Le Théâtre quantique. Et dans ce livre, vous verrez une introduction à cette idée-là, qui est, on l'espère, compréhensible quoique un peu cryptique évidemment, c'est-à-dire qu'on ne donne pas tous les détails etc. Mais l'idée vient d'un autre mathématicien tout à fait extraordinaire Von Neumann.

Cest-à-dire après la découverte de Heiseberg, si vous voulez, après la grande découverte de Heisenberg, bien sûr, les mathématiciens ont formalisé ce que Heisenberg avait trouvé. Ca a pris du temps. Ce que Heiseberg avait trouvé, donc je vous le rappelle, c'était que vous ne pouvez pas permuter les lettres, les variables comme $e = mc^2$, vous ne pouvez pas écrire $e = c^2m$. On ne peut pas faire ça, d'accord ? Alors il y a des gens qui vous diront "Ouh la la la la ! Qu'est-ce que ça va être compliqué tout ça !". Mais en fait, non, revenons à Heisenberg.

Vous voyez ces deux phrases, donc ça, c'est une anagramme qui a été trouvée par Jacques Perry-Salkow, qui est tout à fait extraordinaire et qui a été la naissance du bouquin que je vous ai montré. Mais que signifie une anagramme ? Elle signifie que si j'avais le droit de permuter les lettres, j'obtiendrai le même résultat : pas terrible ! *(rires) a2bcd...* Donc vous voyez, dans le commutatif, ça vous donne le même résultat. Mais bien sûr, nous sommes tous habitués à faire attention à l'ordre des lettres... Bien sûr, c'est le langage ! Le langage est fait pour ça. Et la découverte d'Heisenberg peut se dire incroyablement simplement : elle peut se dire en disant que Heisenberg, il a trouvé qu'il fallait faire attention à l'ordre des lettres, quand on fait des calculs avec les variables microscopiques, c'est merveilleux ! C'est quelque chose d'absolument merveilleux, d'accord ! Bon alors Von Neumann a élaboré là-dessus, il a trouvé qu'il fallait un formalisme mathématique qui s'appelle le formalisme des espaces de Hilbert, c'est un truc assez compliqué.

Alors, vous savez, dans mon introduction, j'ai dit que j'allais parler des algèbres de Von Neumann, d'accord. Alors justement là j'en parle, d'accord. Je ne vous donne pas trop de détails, bien sûr, pas trop de détails sur les types et tout ça. Mais maintenant, je vais vous parler d'un autre mathématicien, et qui a été le point de départ, vraiment de mon travail, de ma thèse, etc., et qui est l'outil qui a permis d'avoir, l'outil essentiel qui permet de donner un sens à cette idée que le temps, le passage du temps émerge à partir de l'aléa du quantique. Alors, la raison pour laquelle je vous montre sa photo, c'est que malheureusement il est mort, le 9 octobre, à l'âge de 91 ans ; sa photo a été prise quand il était venu à Bures-sur-Yvette il y a exactement 30 ans. Il a passé un an à Bures-sur-Yvette il y a 30 ans, et pourquoi c'est un personnage absolument extraordinaire ? C'est un personnage extraordinaire parce que par exemple, il était dans l'armée au moment de la guerre entre le Japon et les Etats-Unis, mais il était devenu sourd à l'âge de 2 ans. Donc il y a eu un moment donné où tous ses coréligionnaires couraient aux abris, quand il y avait un bombardement. Tomita ne bougeait pas, et quand ses coorélionnaires revenaient le voir, ils lui disaient "mais tu es fou ?...". Ils le secouaient, et il leur disait "Quel bombardement ?". C'était à ce point-là, il était connu comme ça. Et alors il y a eu un épisode où le gradé qui les commandait a dit que lui ne serait pas de l'expédition qu'ils allaient faire parce que, comme il était sourd, ça posait plutôt un problème. Donc il est resté et tous les autres sont morts. Et apparemment, mais ça j'en suis moins sûr, apparemment, il était le suivant sur la liste des kamikazes au moment où la guerre s'est arrêtée.

Ensuite, il a eu un prof, il faut dire que peu après la guerre donc, quand il était à l'université, au lieu de faire des cours, enfin au lieu d'aller écouter les cours, les étudiants allaient planter des pommes de terre tellement il y avait la famine. Ils allaient planter des pommes-de-terre tout près de l'université. Donc il avait un prof. Il avait un prof pour faire sa thèse, son prof s'appelait Ono, et son prof, la première fois donc Tomita va voir son prof, parce qu'il voulait faire une thèse ; son prof prend un gros gros bouquin, je n'en ai pas amené avec moi. Le prof lui donne un livre, oh ! plus que ça, deux fois ça facile, d'accord, il le donne à Tomita et il lui dit "Lisez ce bouquin et revenez me voir quand vous aurez tout compris". Alors ça va, comme ça. Alors pendant 2 ans, ils ne se voient pas. Et puis au bout de 2 ans, par hasard, Tomita rencontre son prof dans les couloirs de l'université. Son prof se souvenait quand même : "alors ce bouquin, ça avance ?". Et Tomita lui répond "je l'ai perdu au bout d'une semaine..." *(rires)* C'était un type absolument génial. Il racontait des histoires qui étaient absolument géniales. Il a fait une découverte absolument géniale. Seulement, comme il était sourd, si vous voulez, c'était très très très difficile de communiquer avec lui. C'était vraiment très très difficile, la plupart du temps, il coupait son appareil. *(rires)*. Moi, ça a été le point de départ de mes travaux si vous voulez. Le départ de mes travaux, ça a été le fait que donc Tomita et puis après Takesaki, qui avait repris les travaux de Tomita, avait trouvé que bon, sur une algèbre de Von Neumann, comme Von Neumann les avait définies, il y avait une évolution mais qui dépendait d'un état. Et alors, ce que j'ai démontré dans ma thèse, c'est qu'en fait, elle ne dépendait pas d'un état et qu'il suffisait d'avoir la non-commutativité, c'est-à-dire qu'il suffisait d'avoir une algèbre, de faire des calculs dans lesquels vous faites attention à l'ordre des termes, pour qu'il y ait une évolution dans le temps, donc pour qu'il y ait un temps qui passe. Bon alors après, il y a eu un tas de conséquences de ça, bien entendu. Et en fait, l'essentiel de mes travaux a été si vous voulez de développer la géométrie pour des espaces qui contrairement aux espaces de Descartes, parce que Descartes si vous voulez, avait réussi à comprendre qu'il y avait une dualité entre la géométrie et l'algèbre car Descartes avait compris qu'on pouvait encoder un espace géométrique par des coordonnées et puis faire des calculs algébriques au lieu de faire des calculs géométriques. Un exemple le plus simple possible : si vous voulez démontrer que les 3 médianes d'un triangle se coupent. Eh bien, il y a plusieurs manières de faire, mais la manière la plus simple, c'est de faire le calcul du barycentre. Vous prenez les coordonnées puis vous calculez le tiers de la somme des coordonnées. Quel est l'avantage de la démonstration algébrique sur la démonstration géométrique ? Vous pouvez bien sûr faire une démonstration géométrique du fait que les 3 médianes d'un triangle se rencontrent. Mais supposez que je vous demande de le démontrer en dimension n ? *(rires)*. Alors que la démonstration algébrique, elle est évidente, vous faites $1/n$ fois la somme des coordonnées et puis c'est tout, ça vous donne le point d'intersection et puis c'est terminé. Donc vous voyez la puissance de ce va-et-vient, entre d'un côté la géométrie, et de l'autre côté l'algèbre. Alors ce qu'a découvert Heisenberg, c'est qu'il y avait des espaces incroyablement naturels dans lesquels justement, les coordonnées ne commutent pas. Et ces espaces correspondent aux observables sur un système microscopique.

Et donc moi, l'essentiel de mes travaux, ça a été de développer la géométrie, pour de tels espaces.

Alors comme le temps est encore assez court, au lieu de vous parler de mes travaux, je vais vous parler d'un autre mathématicien absolument extraordinaire, qui s'appelle Alexandre Grothendieck, et qui est mort il y a un an, et la raison pour laquelle je vais vous en parler, ce n'est pas parce que je veux vous décrire la théorie des topos, parce que ça, c'est une merveilleuse théorie mais ça ne passerait pas, je n'ai pas envie d'en parler. Après peut-être... Mais c'est surtout pour vous expliquer, pour vous montrer ce que Grothendieck dit sur la créativité et sur ce besoin absolument nécessaire de retrouver, lorsqu'on est devant un problème très très difficile, son âme d'enfant et cette espèce de, justement, d'ouverture, de sensibilité, etc. qui est en fait trop souvent complètement gommée, complètement effacée par le poids des connaissances. Donc voilà ce que dit Grothendieck, je vais le lire avec vous, et puis on s'arrêtera là. Donc voilà Grothendieck quand il était jeune. Il a eu, lui aussi, une vie extrêmement tumultueuse.

Donc voilà ce qu'il écrit. Il écrit :

Dans notre connaissance des choses de l'univers, qu'elles soient mathématiques ou autres, le pouvoir rénovateur en nous n'est autre que l'innocence.

C'est l'innocence originelle, que nous avons tous reçue en partage à notre naissance, et qui repose en chacun de nous, objet souvent de notre mépris, de nos peurs les plus secrètes. Elle seule, (donc cette innocence) *unit l'humilité* (bien sûr, la recherche est une école d'humilité, l'école quotidienne de l'humilité) *l'humilité et la hardiesse qui nous font pénétrer au cœur des choses et qui nous permettent de laisser les choses pénétrer en nous, et de nous en imprégner.* (Ca, c'est la première chose qu'il dit. Ensuite il dit :) *Ce pouvoir-là,* (Ca, c'est très très important, maintenant.) *Ce pouvoir-là n'est nullement le privilège de dons extraordinaires.*

Vous voyez, lorsque parfois on assiste à des expositions, sur les mathématiques, vous avez l'impression que ouh ! Ce sont des extraterrestres ces gens-là, non il ne faut pas du tout avoir cette peur, absolument pas. Il arrive au contraire trop souvent que les gens trop intelligents aient une réaction immédiate et que cette réaction immédiate en fait, soit fausse. C'est-à-dire ils vous disent "ça va pas marcher pour telle et telle raison...". En fait, s'ils avaient réfléchi plus, il se seraient aperçus que ça marche, d'accord. Donc ce que dit Grothendieck, c'est que donc :

Ce pouvoir là mais nullement le privilège de dons extraordinaires, d'une puissance cérébrale, disons hors du commun, pour assimiler et pour manier avec dextérité et avec aisance, une masse impressionnante de faits, d'idées et de techniques connues. Ces dons sont certes précieux et sources d'envie sûrement pour celui qui, comme moi, n'a pas été comblé ainsi à sa naissance au-delà de toute mesure...

Là, il est vraiment ironique, ironique, j'aime pas dire le plus grand parce que le plus grand, qu'est-ce que ça veut dire..., on ne peut pas comparer des choses différentes, mais il a eu une influence phénoménale sur les mathématiques du XX$^{\text{ème}}$ siècle. Une influence phénoménale. Donc l'entendre lui, dire ça... c'est rassurant, disons ! *Ces dons sont certes précieux et sources d'envie sûrement pour celui qui comme moi n'a pas été comblé ainsi à sa naissance au-delà de toute mesure. Ce ne sont pas ces dons-là, pourtant, ni l'ambition même la plus ardente* (l'ambition ne suffit en rien) *l'ambition, servie par une volonté sans faille, qui font franchir ces cercles invisibles et impérieux qui enferment notre univers. Seule l'innocence les franchit, sans le savoir, ni sans s'en soucier, à l'instant où nous nous retrouvons seuls à l'écoute des choses, intensément absorbés dans un jeu d'enfant.*

Donc ce qu'il explique, c'est qu'il n'y a rien de plus fructueux que de se saisir d'une question et d'y réfléchir, mais de cette manière-là, d'une manière complètement indépendante du poids de la science, etc. d'accord. Bien sûr, bon, pour arriver au problème, il faut connaître un certain nombre de choses mais après, il faut y réfléchir comme ça. Et donc il continue en disant :

La découverte est le privilège de l'enfant. C'est du petit enfant que je veux parler, l'enfant qui n'a pas peur encore de se tromper, d'avoir l'air idiot, de ne pas faire sérieux...

Par exemple, tout à l'heure, il y aura des questions donc d'accord, attention à ça, il ne faudra pas avoir peur. Il y a même un proverbe chinois qui dit : "si je pose une question, j'ai l'air idiot pendant 5 secondes ; si je ne la pose pas, j'ai l'air idiot tout le reste de ma vie.". Donc voilà ce qu'il dit, donc, de ne pas faire sérieux, de ne pas faire comme tout le monde. Et c'est vrai quand-même qu'il y a une attitude typiquement française assez caractéristique dans une assemblée : on a peur de poser la question, sauf quand on connaît la réponse *(rires)*.

Il n'a pas peur non plus que les choses qu'il regarde aient le mauvais goût d'être différentes de ce qu'il attend d'elles, de ce qu'elles devraient être, ou plutôt de ce qu'il est bien entendu qu'elles sont, c'est-à-dire, ce que la majorité des gens vont lui avoir dit qu'elles seraient ; il ignore les consensus muets et sans faille, qui font partie de l'air que nous respirons, celui de tous les gens sensés et bien connus comme tels. Dieu sait s'il y en a eu, des gens sensés et bien connus comme tels, depuis la nuit des âges ; nos esprits sont saturés d'un savoir hétéroclite, enchevêtrement de peurs et de paresses, de fringales et d'interdits, d'informations à tout-venant et d'explications pousse-boutons...

Un exemple typique, c'est ce qu'on appelle l'effet papillon, le nombre de gens qui ont ressassé ça sans savoir que c'était une idiotie, c'est quelque-chose de considérable. Mais je veux dire, ça a perduré, ça a perduré longtemps d'accord. Alors je continue donc.

...espace clos où viennent s'entasser informations, fringales et peurs, sans que jamais s'y engouffre le vent du large, exception faite d'un savoir-faire de routine. Il semblerait que le rôle principal de ce savoir est d'évacuer une per-

ception vivante, une prise de connaissance des choses de ce monde.

C'est ça qui compte, c'est cette perception vivante. Par exemple, pour aimer les mathématiques, il faut en faire, bien sûr. Et peu importe le problème que vous regardez, mais ce qui est important, c'est que vous en fassiez, c'est pas que vous preniez comme... Si quelqu'un vous dit un théorème, par exemple, si vous voulez, il faut pas trop avoir la démonstration. Il faut la chercher par vous-même, même si vous ne la trouvez pas. Vous allez gagner. Pourquoi ? Parce que si vous la cherchez, par vous-même, quand on vous la dira, même si vous ne la trouvez pas, et bien vous direz "mais c'est bien sûr, c'était ça, et c'était ça !". Si vous ne la cherchez pas et si on vous la donne, ça rentre par une oreille et ça sort par l'autre, et puis vous aurez oublié au bout d'une demi-heure. Donc, c'est très très important d'**en faire**, d'accord. Donc donc... *Son effet est surtout celui d'une inertie immense.* Il parle du poids de ce savoir en commun, souvent écrasant.

Le petit enfant découvre le monde comme il respire. Le flux et le reflux de sa respiration lui font accueillir le monde en son être délicat et le font se projeter dans le monde qui l'accueille. L'adulte aussi découvre, en ces rares instants où il a oublié ses peurs et son savoir, quand il regarde les choses ou lui-même avec des yeux grand ouverts, avides de connaître, avec des yeux neufs, des yeux d'enfant.

J'espère que vous ressentez le plus important dans ce que j'ai dit. C'est que ça ne s'applique pas du tout qu'aux mathématiques ; c'est-à-dire que vous vouliez faire des sciences humaines, que vous vouliez faire de la linguistique, que vous vouliez faire quelque chose que ce soit, même peut-être de l'art, si vous voulez, c'est crucial que vous ayez compris le message. Et que vous ayez compris que, en particulier les mathématiques, elles ont une portée bien bien plus grande que de calculer avec des nombres, de calculer avec des chiffres, etc. C'est pas du tout ça, c'est une espèce de version de la philosophie qui est beaucoup plus dure parce qu'effectivement, pour arriver à un concept nouveau comme le concept de topos de Grothendieck, il a fallu des années et des années de réflexion... Mais ça donne des outils de pensée absolument fondamentaux. Et j'ai pas le temps d'en parler, mais le concept de topos, c'est un concept qui vous montre que la notion de vérité, quand on dit par exemple de manière courante de quelque chose que c'est vrai ou que c'est faux, eh bien, quand on regarde dans un topos, c'est un univers qui est différent de l'univers, eh bien une chose peut être partiellement vraie partiellement fausse, elle peut être vraie pour un certain point de vue, elle peut être fausse pour un autre point de vue, etc. Donc ça donne un outil de pensée qui est incroyablement adapté en fait à la vie, à la politique, à 36 choses, mais qui n'est pas encore passé dans le domaine commun. C'est une notion qui est encore une notion dans le domaine mathématique, qui n'est pas encore passée dans le domaine commun. Et on y gagnerait énormément si vous voulez à, justement, à ce que toutes ces choses merveilleuses qui ont été découvertes, deviennent maintenant, fassent partie du domaine commun. Donc mon laïus allait dans ce sens-là d'accord, d'essayer de vous faire voir, de manière un peu surréaliste si vous voulez, qu'il existe ces choses magnifiques mais que bon bien sûr, il faut faire un effort pour les apprendre et un effort pour les connaître. Voilà.

Séance de questions à l'orateur

- Merci beaucoup. Questions. Peut-être, donc, on fait ce qu'on a dit. Si vous avez des questions, des précisions sur ce qui a été dit, donc, questions qu'il ne faut pas avoir peur de poser, moi, j'en ai quelques-unes, mais je suis sûr que vous en avez aussi...

- Vous avez parlé de l'effet papillon... Et que ça n'existait pas.

- Je n'ai pas dit que ça n'existait pas. Mais j'ai dit que c'était une vaste fumisterie. Parce que ce que je veux dire, c'est comme si on disait qu'il y a un papillon qui va voler, puis l'avion qui suit un autre avion ne va pas décoller ; il y a un effet d'amortissement qui est colossal. Bien sûr qu'on peut faire un système mathématique qui dépend de peu de variables et qui est tel que, quand on fait bouger un petit peu une variable, ça va changer les résultats. Mais de là à faire croire qu'un petit papillon qui vole à un endroit, il va créer, je ne sais pas moi, un ouragan à un autre endroit, c'est ridicule... Bon on peut rappeler d'où ça vient, ça vient du fait qu'il y a des équations différentielles en mathématiques, qui sont telles que si on change un tout petit peu les conditions initiales, ça change le résultat de manière considérable, de manière exponentiellement plus grande. Ca, c'est vrai. Mais c'est vrai dans un modèle particulier. C'est vrai dans un modèle, dans lequel il n'y a pas d'amortissement, comme il se produit dans la nature. Dans la nature, heureusement, il se produit des amortissements, parce que sinon, dans la nature, on regarderait les papillons un peu partout, et puis on aurait la trouille *(rires)*. Heureusement que c'est comme ça. Mais c'est du bon sens, c'est du bon sens. Mais on a vu peut-être je ne sais pas combien de politiques ou des gens qui répétaient l'effet papillon sans rien comprendre, puisque s'ils avaient compris quoi que ce soit, ils se se seraient aperçus que c'était, hein, bon... C'est un exemple typique de gens qui répètent les choses sans les comprendre, simplement parce qu'ils se disent : "Ah ouais, c'est quelqu'un de puissant qui l'a dit, donc ça doit être vrai, quoi !"

- Merci.

- C'était une question sur le fait que vous aviez dit que souvent, les physiciens exprimaient tout en fonction du temps, et qu'on considérait souvent que c'était la variable...

- fondamentale.

- et vous disiez qu'en fait, il se trouve que la véritable variable, c'est la variable quantique, et je n'ai pas compris comment le temps découle de cette variable.

- Ca, c'est toute une histoire. En gros, c'est l'histoire de ma trajectoire. C'est-à-dire en fait ce qui se produit, mais c'est un peu expliqué dans le bouquin, mais c'est surtout bien expliqué dans un exposé que j'ai fait à l'IHES au mois de mai, et dont je pense qu'il doit être sur le site de l'IHES, il faut aller écouter cet exposé, je pourrais en dire deux mots. Mais bon, en gros, c'est que Von Neumann a créé les algèbres de Von Neumann comme étant des systèmes où on a une connaissance partielle de la réalité. Et avec le travail de Tomita, puis mes travaux pendant la thèse, on a compris que si on avait un système qui a une connaissance partielle de la réalité, à ce moment là, il y a un temps qui émerge. C'est-à-dire il y a une évolution dans le temps. Comme tout est quantique, et que la connaissance qu'on a de la réalité est effectivement partielle, c'est ça qui, avec les travaux que j'ai fait avec Carlo Rovelli, c'est ça qui devrait expliquer le passage du temps, c'est ce qu'on appelle le temps thermodynamique. Cette idée du temps thermodynamique, elle est bien expliquée dans notre bouquin à trois voix.

- Du coup, ma question rejoint un peu la question de Constantin tout à l'heure. Donc du coup, la constante fondamentale, il n'y en a plus maintenant, puisque finalement, tout repose sur une variabilité quantique ?

- Il y a une chose dont je n'ai pas parlé mais j'avais des transparents dessus donc je peux les montrer effectivement. C'est important, c'est important, c'est cette idée de variables. Parce que finalement, on revient à l'idée de variables. Qu'est-ce que c'est qu'une variable, vous voyez ? Nous, ce qu'on nous apprend en classe, ce que c'est qu'une variable réelle... Une variable réelle, c'est une application qui va d'un ensemble X dans les réels. C'est comme ça qu'on nous dit ce qu'est une variable réelle. Or si on regarde cette définition d'une variable réelle, on s'aperçoit en fait, avec un petit raisonnement, on s'aperçoit qu'on ne peut pas avoir coexistence de ce qu'on appelle des variables continues, des variables qui prennent par exemple un intervalle de valeurs, et des variables discrètes, qui prennent des valeurs discrètes. *(Il dessine un intervalle et des points au tableau).* Et la raison pour laquelle on ne peut pas avoir coexistence, c'est que si on prend une variable continue, l'ensemble X doit au moins avoir la cardinalité du continu mais s'il a la cardinalité du continu, on ne peut pas avoir une variable discrète, parce qu'il y aura des points qui seront atteints trop de fois. On ne peut pas avoir ça. L'extraordinaire valeur du formalisme quantique, tel que Von Neumann l'a développé, c'est que dans le formalisme quantique, tout est résolu : c'est-à-dire que dans le formalisme quantique, en fait, une variable, c'est le spectre d'un opérateur auto-adjoint dans l'espace de Hilbert, c'est un peu compliqué mais là, pour les opérateurs dans l'espace de Hilbert, on peut avoir des opérateurs qui ont un spectre discret et des opérateurs qui ont un spectre continu et qui coexistent. Et alors, ce qui est extraordinaire, c'est qu'en fait, ça rejoint exactement la pensée de Newton. C'est-à-dire que Newton, dans ses écrits, quand il essayait de définir ce que c'est qu'un infinitésimal par exemple, il a écrit exactement la bonne phrase, qui correspond au quantique. C'est-à-dire, il disait une variable est infinitésimale. D'abord il disait ce qu'était une variable. Or le formalisme quantique donne exactement la bonne réponse par rapport à Newton. Ca, c'est la première chose.

Et alors donc maintenant, ce qui se produit, c'est qu'une fois qu'on a ce formalisme, de ce que c'est qu'une variable, on s'aperçoit que bien sûr, les variables discrètes ne peuvent coexister avec les variables continues que par la non-commutativité, et on s'aperçoit que c'est cette non-commutativité qui crée le passage du temps, d'accord ? Donc en fait, le $\hbar$ existe toujours en fait, la constante de Planck est toujours présente, mais ce qui est extrêmement frappant, c'est qu'on ne doit pas considérer le temps comme étant une donnée fondamentale, mais comme une donnée émergente, et que si on avait une connaissance absolue de tout, le temps ne passerait pas. C'est incroyable de penser ça, d'accord, c'est-à-dire que la raison pour laquelle on a l'impression que le temps passe, etc., c'est parce qu'on a une connaissance partielle de l'univers, d'accord. C'est ça qui est formidable si vous voulez avec ce jeu de la physique. Dans le livre qu'on a écrit avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, il faut que je vous dise que Danye Chéreau c'est mon épouse *(rires)*, ce qu'on fait, c'est qu'on a trouvé une phrase très frappante qu'on a utilisée pour exprimer l'idée que je viens de vous dire. On a dit "L'aléa du quantique est le tic-tac de l'horloge divine". Vous savez, Einstein avait dit "Dieu ne joue pas aux dés" donc voilà la réponse. La réponse du héros du bouquin à cette boutade d'Einstein, c'est que "l'aléa du quantique est le tic-tac de l'horloge divine". C'est-à-dire que c'est parce qu'il y a constamment ces petits trucs complètement aléatoires, pop ! pop ! pop ! qui se produisent, que le temps passe. La nature a une imagination phénoménale. Et c'est ce que donne l'instrument pour mesurer des nombres aléatoires, c'est incroyable, ça veut dire "il prend le pouls de la nature", pop ! Allez ça, c'est un nombre aléatoire, pop ! un autre... Vous pouvez toujours essayer de les reproduire. Bon eh bien ça, c'est incroyable, c'est la phrase qui le dit, c'est "l'aléa du quantique est le tic-tac de l'horloge divine".

- Pour essayer de mettre un petit peu ça au clair, du coup, si, admettons, bon, on peut toujours hypothétiser, si par exemple, justement, cette nature quantique était stable, si elle ne bougeait pas, le temps ne passerait pas ?...

- Eh bien, non, justement, elle n'arrête pas de bouger !

- Mais admettons qu'on imagine qu'elle ne bouge pas. Ca veut dire que le temps ne passerait pas ?...

- Ah oui ! Non, non, non, c'est pas ça ; si on la connaissait complètement, si on avait toute la connaissance, là le temps ne passerait pas. Le temps passe parce qu'on a une connaissance partielle, c'est la thermodynamique, d'accord. La thermodynamique, ça nous dit, la thermodynamique, par le génie de Boltzmann, il nous dit que l'entropie, par exemple, c'est la connaissance partielle des choses, d'accord. Donc le passage du temps est relié à ça, d'accord. Mais la nature n'arrête pas de bouger, hein, d'accord ?!... *(rires)*

- J'ai une question parce que vous dites que pour votre thèse, vous vous êtes inspiré de Tomita qui a montré donc la non-commutativité...

- Non, non, c'est pas ça. Bon oui oui, c'est un détail... ! *(rires francs)*

- Est-ce que vous pourriez juste expliquer ce qu'on appelle les types ?

- Ah oui, les types ! ! Bien sûr, bien sûr, tout à fait, ben les trois types... Alors, les trois types. Où est-ce qu'ils sont, les 3 types ? Le premier type, c'est lui... *(Il montre une photo, éclats de rires.)*

Les 3 types, donc : le type I, c'est un système quantique tel qu'en fait, l'espace de Hilbert du système quantique se casse en un produit tensoriel de deux espaces, c'est-à-dire que c'est vraiment le cas le plus simple qu'on puisse imaginer, et c'était ce dont les gens avaient imaginé que ce serait toujours le cas. Ils imaginaient toujours que quand on prenait un sous-système d'un système quantique, on pourrait casser l'espace de Hilbert en un produit tensoriel de deux, de telle sorte que le premier système corresponde au premier espace de Hilbert, aux opérateurs dans le premier espace de Hilbert, et l'autre aux opérateurs dans le deuxième espace de Hilbert. Alors ce que Von Neumann et Murray ont découvert, c'est qu'en fait, il y avait deux autres types. C'est-à-dire qu'il y avait une manière d'avoir des sous-systèmes quantiques qui ne correspondait pas du tout à un scindage de l'espace de Hilbert en un produit tensoriel. Alors le premier type, il y avait les dimensions réelles. Et puis le type III qui restait, c'étaient les autres. Et avant Tomita, on n'avait aucun outil pour attaquer le type III, d'accord. Donc ce que Tomita a trouvé, c'est que dans le type III, il y avait ce groupe $\sigma_{t\phi}$ et puis ce que j'ai trouvé dans ma thèse, moi, après, c'était que le groupe qu'avait trouvé Tomita, en fait, il était unique modulo les intérieurs, c'est-à-dire qu'il définissait une vraie évolution, indépendante de toute autre chose. Donc ça, ça a donné quantité d'invariants, etc., ça a permis de tout débloquer. D'accord ! Donc mais c'est incroyable parce que Von Neumann avait défini ces sous-systèmes quantiques de manière complètement euh, comment dire, c'est dans les écrits de Von Neumann, de manière complètement abstraite. Et jamais on aurait pu penser à l'époque de Von Neumann que ça aurait été relié au temps, au passage du temps, je veux dire, c'est absolument incroyable. Ca veut dire la profondeur du quantique. Heisenberg a découvert que ça venait de la non-commutativité, Von Neumann l'a reformulé sous forme d'opérateurs dans l'espace de Hilbert, il s'est posé le problème des sous-systèmes, et de là sort le passage du temps, c'est fabuleux !

- Est-ce que vous pourriez nous expliquer pourquoi le principe de l'entropie résulte de la connaissance partielle qu'on a du monde ?

- Ca, c'est Boltzmann et le pauvre Boltzmann était tellement incompris à son époque qu'il a fini par se suicider. Il a eu une idée absolument... Il a fait graver sur sa tombe la formule qui est la suivante $S = k\ log\ n$. Ca, c'est gravé sur la tombe de Boltzmann. Il s'est suicidé près de Trieste. Cette formule, qu'est-ce qu'elle dit ? C'est une des formules les plus simples mais l'une des plus difficiles à comprendre. Qu'est-ce que c'est que l'entier n ? C'est le nombre de réalisations microscopiques d'un état macroscopique.

Il faut que je vous raconte un peu l'histoire : l'histoire, c'est à la période où les gens avaient découvert la machine à vapeur, et puis il y avait les locomotives et tout ça, et donc ce que les gens avaient découvert, c'était qu'il y avait un moyen de transformer la chaleur en énergie, en mouvement, en tout ce qu'on veut quoi. Et c'est comme ça que le chemin de fer a commencé, etc. Et ils s'étaient posé la question de ce qu'on appelait le rendement des machines et tout ça. Et donc bien sûr, si vous voulez, il y avait des quantités de chaleur dq donc qui étaient entre deux systèmes etc. Mais on s'était aperçu assez vite que si on prenait deux chemins différents pour aller d'un point à un autre, d'un état à un autre, l'intégrale de $\int dq$ si vous voulez, c'était pas préservé, c'est-à-dire qu'on ne peut pas définir la quantité de chaleur d'un objet. Par contre, on s'est aperçu que si on divisait dq par ce qu'on appelle la température absolue, eh bien ça, cette quantité-là si vous voulez, elle était bien définie, c'est-à-dire que quel que soit le chemin qu'on prenait, entre un état et un autre, l'intégrale de ce truc-là donnait le même résultat. Et c'est ça qui avait permis de définir l'entropie.

Mais cette entropie, elle était définie pour des systèmes macroscopiques qui étaient donnés par la température, la pression, le volume, enfin je sais pas quoi, si vous voulez un certain nombre de quantités macroscopiques, il n'y avait aucune interprétation, aucune, et ça s'appelait l'entropie. Ca s'appelait l'entropie, S. Mais cette entropie, elle n'avait aucune signification philosophique puisque justement, c'est de ça dont on parle, d'accord ? Et l'incroyable génie de Boltzmann, ça a été cette formule $S = k\ log\ n.\ dq + ds = log\ n$, c'est-à-dire ce qu'a compris Boltzmann, c'est qu'à chaque fois qu'on prend un état macroscopique donc un volume donné etc., on peut avoir le même état macroscopique, à partir d'états microscopiques totalement différents. C'est-à-dire que l'exemple le plus simple, c'est de prendre des boules rouges et des boules blanches, et de les empiler dans un réservoir. Et vous avez par exemple 50 boules rouges et 50 boules blanches. Vous voyez bien que vous pouvez les empiler de 36 manières différentes, d'accord. Mais l'état macroscopique correspondant vous dira qu'il y a la moitié de boules rouges et la moitié de boules blanches et puis c'est tout. Le reste, vous vous en foutez. Eh bien, ce qu'a compris Boltzmann et qui est incroyable, c'est que l'entropie, qui était définie de manière complètement ad hoc par les gens qui faisait des systèmes de machines à vapeur et tout ça, eh bien en fait, c'était simplement le logarithme du nombre de réalisations microscopiques d'un état macroscopique donné. Bien sûr, il fallait une constante devant. C'est ce qu'on appelle la constante de Boltzmann, c'est normal qu'elle porte son nom. Donc cette constante de Boltzmann, c'est pas la même chose que la constante de Planck, et elle est, bon, évidemment il faut que ça ait la dimension d'une entropie etc. etc. d'accord. Mais c'est la formule la plus incompréhensible, et la plus géniale qui soit, cette formule d'accord. Et elle est très difficile à comprendre. Ce qui est très difficile à comprendre, c'est que les lois de la physique, pas de la physique des particules, mais les lois de la physique ordinaire, sont invariantes quand on change t en $-t$. Et si vous voulez, ce qui est très difficile à comprendre, c'est qu'un des principes fondamentaux de la thermodynamique est que l'entropie s'accroît. Alors on dit : "Mais le temps, il va dans quel sens ?. Ca, ça a hanté les gens pendant des années et des années. Et Boltzmann, il avait compris un nombre incalculable de choses simplement à cause de cette idée. C'est un exemple merveilleux, de formule très simple, mais justement si vous voulez, ça, c'est aussi une chose très importante que je n'aurais pas voulu oublier de vous dire, qui est qu'il y a un certain nombre de notions mathématiques ou de notions de physique comme ça, qui ont une qualité extraordinaire, et cette qualité, c'est de mettre la pensée en mouvement. Cette formule c'est un exemple typique, vous regardez cette formule, vous essayez de la comprendre, voilà, votre pensée est en mouvement maintenant. Elle a un potentiel extraordinaire de mise en mouvement de la pensée. Parce que vous pouvez vous dire "Pourquoi ça augmente ?". En gros, l'explication de

Boltzmann de la raison pour laquelle ça augmente, c'est que, en général, on va aller vers des états qui ont de plus en plus de réalisations microscopiques, c'est-à-dire qui sont de plus en plus probables. Et après, pour mettre ça sur des bases solides, c'est une autre histoire...

- Donc vous nous avez beaucoup parlé de la physique, et on sait qu'en ce moment la physique théorique, ça devient un peu un repaire de mathématiciens, par exemple avec la théorie des cordes, et du coup je me demandais si vous, en un sens, est-ce que vous pourriez vous considérer plutôt comme un physicien qui fait des mathématiques ?

- C'est une bonne question, j'avais des amis qui, connaissant mes opinions sur la théorie des cordes, disaient que j'étais un peu comme une machine où on met des sous, alors, mais si on met 1 euro, je vais parler pendant 10 minutes contre la théorie des cordes. Donc je vais vous épargner. Non, mais je vais vous citer une phrase de Hadamard. Il faut que je la trouve déjà *(rires)*. Attendez, il faut que je la trouve... Alors, je crois que je vais y arriver. Voilà, c'est une phrase sur le lien entre les mathématiques et la physique ; ce que dit Hadamard, pour caractériser la profondeur des concepts mathématiques qui viennent directement de la physique, il dit (je le dis en anglais donc, mais c'est très facile à traduire en français) :

...not this short lived novelty, which can too often only influence the mathematician left to his own devices, but this infinitely fecund novelty, which springs from the nature of things[2].

Donc voilà la réponse. La réponse, c'est qu'il n'y a pas d'un côté les mathématiques, et d'un autre côté la physique. C'est la même chose : on essaie tous de comprendre, d'accord. Et justement, il y a cette profondeur extraordinaire dans certains concepts mathématiques qui viennent directement de la physique. Comme Heisenberg. C'est inépuisable parce que c'est venu de quoi, c'est venu de l'expérience, c'est venu de la physique, c'est la nature qui nous parle, qui nous dit quelque chose d'accord. Ca, c'est inestimable ! Mais ce n'est pas le cas de la théorie des cordes, parce que la théorie des cordes,

2. ...non une brève nouveauté qui souvent influence le mathématicien rivé à ses propres préoccupations, mais une nouveauté infiniment féconde qui jaillit de la nature des choses. in Jacques Hadamard, Préface à l'introduction au calcul tensoriel et au calcul différentiel de G. Juvet, Albert Blanchard, Paris, 1922

c'est une déviance qui elle, est venue à partir de mathématiques abstraites etc., et qui elle n'a pas de contact avec l'expérience.

- Il y a un autre mathématicien, qui s'appelle Carlo Rovelli *(précision d'Alain Connes : "C'est un physicien, lui, c'est un physicien" (rires))* et il dit que pour lui, la beauté de la physique, c'est une idée simple, qui nous ouvre sur un monde totalement nouveau et en même temps, ce monde, il est réel, il est correct. Et je me demandais pour vous, ce que vous pensiez vous de la beauté mathématique...

- Ca, c'est une bonne question *(soupir)*. Bon d'abord, il y a beaucoup de gens qui, et je pense que c'est vrai, qui vous diront que la notion de beauté est une notion très relative, c'est-à-dire que chacun a sa notion différente etc. bien sûr. Mais bon moi, j'avoue que pour moi, la beauté mathématique, c'est quand, après des calculs terribles, terriblement compliqués, on arrive à la même chose, on arrive au résultat, mais par une idée d'une simplicité incroyable, un peu comme l'œuf de Colomb d'accord. Pour moi, c'est ça, la beauté mathématique, pour moi, la beauté, c'est la simplicité d'une idée, mais en fait, d'une idée qui va... Bon par exemple, je ne sais pas... quand on parlait de Galois, je vais vous fournir un exemple de cette beauté. Que dit Galois ? Galois dit quand on prend une équation, on prend une équation polynomiale. Alors, la première chose qu'on va faire, on va trouver une fonction des racines, qui quand on permute les racines, va prendre... Bon, par exemple, on prend une équation de degré 5. Il faut que quand on permute les racines de manière arbitraire, cette fonction prenne 120 valeurs différentes (5! valeurs différentes). Alors comment est-ce qu'il fait, Galois, pour trouver une telle fonction ? C'est très simple : il dit "si j'appelle les racines A, B, C, D, E, d'accord, je prends A plus 1 000 000 de fois B + 1 trillion de fois C etc. Evidemment, quand je vais les permuter, ça va prendre que des valeurs differentes. Ca va prendre 120 valeurs différentes". C'est la première chose. Deuxième chose, que dit Galois ? Il dit "eh bien, maintenant, prenons pour équation l'équation qui a pour racines ces 120 racines. On prend cette équation et on la décompose en facteurs irréductibles. On peut exprimer les racines de l'équation de départ en fonction de ces facteurs irréductibles et on va obtenir, en prenant ces facteurs irréductibles, des permutations des racines de l'équation. Théorème, voilà la beauté mathématique. Théorème : Le groupe de permutations obtenu ne dépend d'aucun des choix qu'on a faits. C'est-à-dire que si, au lieu d'avoir pris A plus 1 000 000 de fois B etc., j'avais pris 1 000 001 ou n'importe quoi, j'aurais obtenu le même groupe. Ca, c'est la beauté mathématique, c'est quelque chose d'incroyablement beau. Pourquoi ? Parce que ça veut dire qu'on a donné une recette, qui avait l'air complètement arbitraire, et on est arrivé à un invariant, on est arrivé à un groupe, qui est une caractéristique de l'équation, qui va donner tous les résultats qu'on veut, et qui est d'une simplicité biblique, à la fin, c'est-à-dire la manière dont il est défini, c'est d'une simplicité biblique. Pour moi, c'est ça, la beauté mathématique. Mais c'est un exemple, hein, je veux dire, la définir abstraitement, si on en donnait une définition abstraite, c'est évident qu'on pourrait trouver un contre-exemple et qu'on pourrait trouver... Mais c'est... En fait, si vous cherchez des choses générales sur la beauté en mathématiques, sur des choses comme ça, lisez *Récoltes et Semailles* de Grothendieck. Parce que c'est... Grothendieck n'était pas seulement un mathématicien, en fait, c'était un littéraire, et c'était quelqu'un qui a été capable dans ses écrits, d'aller très très loin dans l'analyse de ce que sont les mathématiques, de ce que c'est que la beauté en mathématiques, etc. Donc il a écrit 1500 pages, ces 1500 pages, vous pouvez les trouver sur internet, d'accord. Et n'écoutez pas les gens qui vous diront qu'il est fou parce que ce n'est pas vrai, ce n'est pas vrai : c'était quelqu'un qui était merveilleusement intelligent, et qui a écrit merveilleusement en tant que littéraire. Il a un vocabulaire extraordinaire, etc. J'ai fait un exposé, au séminaire d'Antoine Compagnon, sur Grothendieck et Proust, en les comparant justement, et je pense qu'il est disponible cet exposé, peut-être sur le site du Collège de France ou sur mon site. Donc, parce que je veux dire, parce que c'est très frappant, c'est très frappant de voir que ce sont deux individus qui ont réussi une chose que peu de gens réussissent, aussi bien l'un que l'autre, qui est non seulement une œuvre, pour Grothendieck, mais aussi si vous voulez ce que dit Grothendieck, ce qu'il explique, c'est qu'en fait la... En fait, si on veut se réaliser bien sûr, bon, c'est bien de faire une vraie mais en fait la principale difficulté qu'on a, c'est de se comprendre soi-même, et pour se comprendre soi-même, ça paraît idiot *(rires)*, n'est-ce pas ? Et pour se comprendre soi-même, il faut en gros s'auto-analyser, c'est ce qu'a fait Grothendieck et d'une certaine manière, c'est ce qu'a fait Proust aussi dans son livre. Ce sont aussi des gens qui, à partir d'un moment donné, ont arrêté de vivre et ont passé le reste de leur vie à ré-analyser leur vie passée, d'accord, et à la comprendre, etc. Et dans les deux cas, c'est merveilleux, le résultat est merveilleux, d'accord. Donc la meilleure réponse je crois, c'est celle-là, c'est d'aller voir dans *Récoltes et Semailles*, et de le lire, pas de le feuilleter, il faut le lire vraiment, il faut le lire attentivement, vous voyez, comme les passages que je vous ai lus tout à l'heure.

- Merci de préciser : *Récoltes et Semailles*, c'est le livre que Grothendieck a écrit et auquel on a accès depuis peu de temps, finalement...

- Non, pas peu de temps, ça fait très longtemps qu'on y avait accès mais bon, il a écrit d'autres livres. C'est un personnage, tous ces personnages-là ont des vies extraordinaires. Grothendieck a eu une vie extraordinaire parce qu'en gros, en 1970, il a quitté l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques (l'IHES) et il est redevenu, parce que c'était son tempérament fondamental je pense, un peu un paria si vous voulez. Et à partir de 1991, il s'est réfugié dans un village des Pyrénées. Et plus personne n'avait de nouvelle de lui, mais il continuait à travailler, il continuait à écrire. Et alors, il n'a pas seulement écrit *Récoltes et Semailles*, il a aussi écrit un autre texte magnifique, qui s'appelle *La clé des songes*. Et c'est un texte mystique, mais bon alors, je vais dire c'est pareil, je veux dire, c'est pareil... Mais c'est extrêmement intéressant, mais je pense que par exemple, pour des gens qui font de la littérature, ces textes-là ont une valeur infinie. Il y a des thèses à faire là-dessus, il y a 36 choses à faire, bien sûr...

- Alors moi j'avais vu quelque part sur internet je crois, je ne suis pas sûre de mes sources, qu'en fait vous pensiez que les mathématiques existaient sans les hommes en fait, que même ce n'étaient pas une invention faite par les hommes, et j'ai un peu de mal à comprendre ça en fait, parce que souvent, on voit les maths comme quelque chose de très abstrait qui n'existerait pas sans que les hommes les aient inventées, donc, pouvez-vous expliquer ça ?

- Bon, je peux vous donner la réponse. La réponse est très simple. Vous prenez, vous prenez la chimie. C'est un sujet que j'exécrais, moi, lorsque j'étais en maths sup et maths spé, donc vous avez tous ces trucs-là. Alors on a les corps composés puis on a les corps simples. Les corps simples, il y a le tableau périodique des éléments. Le tableau périodique des éléments, incroyable mais vrai, il y a le principe d'exclusion de Pauli, et une toute petite équation, qui vous le donne. Ca me suffit, moi. Pourquoi ? Parce qu'imaginons qu'il y ait un autre système planétaire etc. Si ce sont des êtres intelligents, ils vont comprendre la chimie, qu'il y a des corps simples, ce sera les mêmes, ils n'auront pas... je veux dire ils n'auront pas des corps chimiques, ils n'auront pas des corps simples différents des nôtres, donc ils vont comprendre les corps simples. Et puis, s'ils sont vraiment intelligents, ils vont essayer de trouver, bon, ils auront le tableau périodique des éléments. Ils vont essayer de trouver quelle est l'origine abstraite du tableau périodique des éléments. Ben, s'ils sont vraiment intelligents, ils trouveront la même chose, ils trouveront qu'il y a le principe d'exclusion de Pauli. Et puis, il y a cette petite équation... Qu'est-ce que ça veut dire ? Ca veut dire que, derrière l'apparente, comment dire, arbitraire du monde qui nous entoure, il y a des choses incroyablement simples qui le régissent, la chimie, l'itération puisque les arbres, tout ça, c'est régi par l'itération, et qu'en fait, il y a une manière de comprendre le monde, qui au lieu d'être un chaos, si vous voulez, est quelque chose de beaucoup plus structuré, et qui est structuré par les mathématiques. Et il n'y a aucune raison pour que, bien-sûr, les gens donnent le même nom aux concepts mathématiques qu'ils auront utilisés, mais c'est bien clair qu'ils utiliseront la... , s'ils sont des êtres différents et ils auront 1, 2, 3, 4, 5. Ils ne le diront pas de la même manière, mais ils utiliseront le langage mathématique, ce langage sera en correspondance avec le nôtre, comme le langage des chinois est en correspondance avec le nôtre.

Donc, c'est en ce sens-là, c'est en ce sens absolument fondamental, que je dis que les mathématiques pré-existent, pourquoi ? Parce que ce serait incroyablement prétentieux de dire que nous avons inventé les nombres entiers. Alors à ce moment-là, pourquoi la chimie aurait déjà utilisé ces choses-là pour exister ? Ca paraît complètement débile. Donc en fait, ce que je dis, c'est que, quand on a trouvé, quand Watson et Crick ont trouvé la structure en double hélice de l'ADN, ils ne l'ont pas *inventée*, personne ne va croire qu'ils l'ont *inventée* bien sûr, ils ont *découvert* ça. C'était une réalité, et cette réalité, elle pré-existait à eux. Eh bien, pour les mathématiques, c'est pareil, c'est exactement pareil, c'est-à-dire que nous découvrons, un peu comme un explorateur va découvrir quelque chose. Cet explorateur, il a un libre-arbitre, il peut aller à tel endroit ou à tel autre endroit. C'est ce qui fait croire à des gens qu'en fait, c'est comme l'art. Mais non ! Ce n'est pas de l'art, c'est de l'exploration. Et c'est une exploration d'autant plus... comment dire ? réelle, que cette réalité, elle résiste. Si c'était de l'art, on pourrait faire dire n'importe quoi, et n'importe quoi. Ce n'est pas le cas. Ce n'est pas le cas. Il y a une résistance terrible... Et alors un exemple, un autre exemple typique, c'est que si par exemple, j'écris une équation etc., et puis bon, par exemple, Galois avait dit que les calculs qu'on devait faire pour suivre sa méthode étaient impossibles à faire et à son époque, c'était impossible à faire. Et pour montrer que c'était impossible à faire, quand j'ai donné mon exposé à l'Académie, j'ai expliqué aux gens la méthode de Galois et je leur ai demandé "est-ce que vous pouvez me donner une idée... ?", bon, parce que chaque racine s'exprime comme un polynome en fonction des racines de l'équation auxiliaire. Je leur ai demandé, je leur ai donné une équation comme celle que je vous ai donnée tout à l'heure je leur ai dit "est-ce que vous pouvez me donner l'ordre de grandeur du coefficient d'ordre 0 du polynome qui exprime la première racine ?"... 1 million sur 1 million, ou quelque chose comme ça. Non, la réponse, c'est un nombre à 500 chiffres sur un nombre à 500 chiffres ! L'ordinateur le fait maintenant, et l'ordinateur vérifie que Galois avait raison d'accord ! Alors dire que Galois l'a inventé, je veux dire, c'est un peu gros, quoi ! Non, non, non ! Non, non, non ! On *découvre*, on *découvre*, mais exactement comme il avait fallu le microscope électronique, pour découvrir la structure en double hélice de l'ADN, le mathématicien invente des outils conceptuels pour réussir à percevoir cette réalité. Mais il invente des outils conceptuels bien entendu. Mais c'est une réalité qui est là, elle résiste, elle est complètement tangible et elle régit la nature. Elle est plus fondamentale, pour moi, cette réalité-là est plus fondamentale que la nature qui nous entoure. Elle pré-existe à ça d'accord. Si vous voulez, ce serait même... je pense que ce ne serait pas juste de dire que la nature est seulement écrite dans le langage des mathématiques ; les mathématiques, c'est plus que ça, c'est plus que ça. La nature est consubstantielle des mathématiques. Nous, on ne s'en rend pas compte parce qu'on n'est pas suffisamment intelligent pour se rendre compte de l'explication qui est derrière tous ces phénomènes. Si on s'en rendait compte plus, on le saurait beaucoup mieux. Et c'est d'autant plus vrai avec le quantique. Je veux dire, le quantique, là, c'est flagrant. Le quantique, c'est une réalité qu'on ne perçoit que par les mathématiques, on ne la perçoit absolument pas autrement. C'est-à-dire que les gens qui font des expériences avec le quantique, en optique quantique, ils comprennent ce que c'est que l'espace de Hilbert, ils le touchent comme ça, d'accord, c'est incroyable, ça, ça, c'est vraiment incroyable !

- Merci.

- Vous êtes prêt à répondre encore à quelques questions ?

- Oui, ça va, ça va.

- Pour que l'on ait plus de facilités par exemple avec les notions abstraites, en mathématiques ou en physique, ou même avec les raisonnements, qu'est-ce que vous préconiseriez dans l'éducation et dans l'enseignement, à présent, dans l'école primaire ou même dans le secondaire ?

- Je vais répondre, d'abord pas dans l'école primaire, ni dans le secondaire, je réponds pour vous, parce que c'est le plus utile. Donc pour vous, ce que je préconise, c'est la chose suivante. Pour répondre à une question, même une question de calcul compliquée, vous laissez tout en plan, vous allez faire un tour à pied, d'accord. Et la question, vous la gardez dans la tête, d'accord, vous la gardez dans la tête, et vous réfléchissez. Evidemment, ça peut être différent selon les individus, mais pour moi, c'est le grand secret. C'est-à-dire un calcul, aussi compliqué soit-il, vous pouvez vous dire “Oh ! Jamais je vais y arriver si j'essaie comme ça !” Non ! Vous partez faire un tour à pied, et vous réfléchissez à la structure du truc, et après quand vous reviendrez, bon, vous verrez que ça améliore drôlement les choses.

Bon alors maintenant, dans le primaire, j'en sais rien, moi, tout ce que je peux vous dire, c'est ma propre expérience, parce que je n'en connais pas d'autre. Mais ma propre expérience, c'est quand j'étais gamin, quand j'avais 5 ans, mon père nous imposait de faire des calculs. On était dans le jardin avec lui, il était avec nous, et il nous faisait faire des opérations, et à l'époque, on faisait les quatre opérations, c'est-à-dire on faisait la division, à 5 ans, on faisait la multiplication, on n'avait pas attendu la sixième pour apprendre la division, et tout ça donc, on faisait ça. Et après une autre expérience qui m'est arrivée... Et moi, j'adorais ça, c'était sans doute aussi ma relation avec mon père, il me faisait à la fois peur, mais j'étais content de lui faire plaisir, enfin bon, je ne sais pas, donc je ne sais pas, je ne sais pas comment expliquer ça : je vais dire que je pense qu'il y avait une vertu extraordinaire au fait de faire des opérations comme ça, c'est-à-dire d'apprendre par cœur la table de multiplication et puis, on ne l'oubliait pas la table de multiplication, si on faisait des multiplications et des additions à longueur de journée, on ne l'oubliait pas, on la savait après. Et ça devenait un automatisme absolu. Donc il y avait ça, et moi, ça me plaisait énormément. Une autre histoire que j'ai, c'est qu'une fois, ça, je trouve ça absolument extraordinaire, une fois, j'ai rencontré un ami que je n'avais pas vu, on jouait au foot ensemble, dans le temps, et puis peut-être 8 ou 9 ans après, je prends le TGV pour aller à, je crois que c'était à Rennes ou un truc comme ça, et puis je vais à ma place de TGV et puis, je regardais mon numéro, et je vois quelqu'un à côté qui regardait son numéro et c'était mon copain. On a commencé à discuter etc. Et puis alors, la discussion habituelle, tu as des enfants, il commence à m'expliquer qu'il a un fils, et que son fils est bizarre. Il faut dire que mon copain est littéraire. J'ai dit "pourquoi ?". Bon tu sais, bon d'abord, il avait été malade quand il était petit et puis une fois, quand il avait 5 ans, on était ensemble, on était sur la plage et puis il avait l'air souffreteux ; moi j'étais inquiet, je veux dire pendant une heure, il était là, au lieu d'aller se baigner, il était un peu blanc et puis au bout d'une heure, il vient me voir, donc c'est mon copain qui raconte, il vient me voir, et il me dit : "papa il n'y a pas de plus grand nombre !". Je lui dis "Ecoute, ton fils, il est génial !" *(rires)*. Il me dit. "Ah oui, bien sûr !". Je lui ai demandé si son fils avait trouvé une démonstration et il avait trouvé une démonstration, qui n'est pas la démonstration usuelle, c'était pas rajouter 1, c'était multiplier par 2 ou quelque-chose comme ça, peu importe, il avait trouvé une démonstration. C'est incroyable, mais après, il me dit, "tu sais, il a eu des problèmes à l'école" *(francs éclats de rires)*. Alors, il m'a raconté ses problèmes à l'école. Alors ça, ça va répondre à votre question pour l'école primaire. C'est qu'à l'école primaire, donc on lui avait posé le problème suivant : c'était "une fleuriste a 120 fleurs, elle fait 4 bouquets de 17 fleurs, combien lui reste-t-il de fleurs ?", d'accord. Alors lui, il avait eu "zéro, n'a pas le sens des opérations". Il était pas con, il lui en reste 120 puisqu'elle ne les a pas données *(rires de tous)*. Quand il m'a eu raconté ça, j'ai dit "bah écoute ton fils, c'est un mathématicien". Et alors, on a organisé donc avec son père une rencontre au Tea Caddy à Paris, c'est un endroit charmant. Et son fils à l'époque avait 12 ans. Donc bon, les choses ont évolué, ça fait un certain moment, et maintenant, c'est un grand mathématicien qui est prof à Orsay. Alors incroyable, incroyable, incroyable ! Donc je crois que ce qui compte, c'est ce que dit Grothendieck, c'est de retourner dans cet état d'enfance et de se poser les bonnes questions, et puis de ne pas hésiter à être à contre-courant etc. Surtout je veux dire que le moment où on devient mathématicien, c'est le moment où on est capable de dire au prof qu'il a tort et pourquoi, ça veut dire être capable de résister à son autorité, pour dire qu'on a réfléchi, et qu'on n'est pas d'accord, et puis d'être sûr de soi, parce qu'on a réfléchi par soi-même, c'est hyper-important.

- Non en fait, j'ai une question, même si je pense que vous avez un peu répondu à cette question par vos propos, mais j'aimerais vraiment savoir pour vous quel est le but du travail d'un scientifique, enfin, si vous pensez que c'est plutôt d'augmenter, de faire avancer la connaissance fondamentale, ou de le rendre accessible à son public pour une éventuelle application.

- Il y a ces deux aspects, que l'on ne doit pas mélanger du tout, il y a ces deux aspects. Je pense que la vraie motivation, c'est de faire avancer la connaissance fondamentale. C'est-à-dire qu'en fait, la vraie motivation qui doit être justement indépendante de toute autorité, de tout désir de reconnaissance, etc., la vraie motivation, c'est d'essayer de comprendre, comprendre là où on est, là où on a atterri, d'accord, c'est ça, c'est tout simple à comprendre, c'est là où on est.

- Non mais sur cette question de la vulgarisation des savoirs et en particulier des savoirs mathématiques. A vous entendre, il y a un risque : l'effet papillon en est un. Moi j'allais dire ce que j'avais retenu, par exemple, de l'entropie, ce que les philosophes, ce que certains philosophes peuvent faire de l'entropie, il y a parfois effectivement un grand danger d'une espèce de ... et en même temps, vous semblez dire qu'il y a un besoin. Donc si on vous demandait en gros "comment faire pour éviter le danger et répondre au besoin", est-ce que vous seriez... ?

- Oui, oui, c'est une très bonne question. Il y a eu Sokal, il y a eu Deleuze. Il y a eu Lacan, je ne sais pas si vous savez, mais Lacan a dit dans un séminaire que le nombre $\sqrt{-1}$ est le symbole du sexe mâle, d'accord. C'est ce qu'on appelle le nombre imaginaire pur ! ! *(rires)*. Il fallait le faire quand-même, hein ? ! Et en plus, il a fait une fois un séminaire, où il avait un théorème d'accord, et son théorème, c'était que "Don Juan est compact". Quelqu'un lui avait dit la définition d'un espace compact en mathématiques. Donc ça, évidemment, c'est débile, d'accord, c'est absolument débile. Et qu'est-ce que c'est ? Ce sont des concepts mathématiques mal compris qui sont utilisés comme une autorité psychologique sur les autres, c'est-à-dire qu'ils sont utilisés parce que les gens ne comprendront pas et l'effet papillon en est un exemple flagrant, comme une autorité psychologique parce que les gens quand ils ne comprennent pas, ils sont en position d'infériorité, leur compréhension s'arrête, et si vous voulez, ils sont impressionnés etc. Donc, il y a cette manière terrible d'utiliser les mathématiques, qui est justement d'utiliser de grands mots, comme une espèce de pouvoir psychologique sur les foules. Alors ça, c'est à bannir à tout prix. Par contre, moi ce qui me désole si vous voulez, c'est que des concepts aussi beaux que le concept de topos de Grothendieck, ne soit pas plus connu par des gens qui en auraient besoin parce que comme je vous le dis, nous sommes tous maintenant victimes du scientisme qui consiste à croire qu'une chose est vraie ou fausse alors que dans la réalité, il y a des situations qui sont bien plus subtiles que ça, bien plus subtiles que ça et qui demandent un outil de pensée que la notion de topos donne et c'est une notion qui est délicate, qui est difficile, qui demande, pour la connaître, pour la comprendre, une connaissance mathématique. Donc ce que je dirai si vous voulez, c'est qu'il y a un magnifique boulevard qui est ouvert. Ce boulevard consiste à apprendre suffisamment de mathématiques pour après les utiliser de la bonne manière, dans d'autres domaines, mais il faut d'abord commencer par apprendre suffisamment de mathématiques, c'est ça le prix à payer, c'est absolument nécessaire d'accord.

- Moi c'était justement par rapport à la question de la vérité : à vous entendre, on a l'impression que vraiment les mathématiques, ça permettait d'atteindre cette vérité avec la physique quantique, et je voulais savoir, je crois que c'est Einstein qui disait que "le monde est un peu comme une horloge fermée", on peut juste voir ce qui se passe, mais on ne peut jamais être sûr que ce qu'on trouvera, c'est vrai. Et qu'est-ce que vous en pensez de ça, de l'idée que peut-être que tout ce qu'on explique, ce sont des théories qui sont finalement fausses comme par exemple, Einstein, qui a tout remis en cause dans la physique... ?

- Il y a toujours effectivement la possibilité d'une théorie au-dessus, qui simplifiera ce qui est à l'étage avant etc. Mais on voit quand même qu'on progresse, de ce point de vue-là. Ce que j'essayais de faire passer justement, c'est l'extraordinaire subtilité, la richesse de la nature, de là où on est, quoi. Le fait qu'à chaque fois, on aura des surprises et on aura des surprises extraordinaires. Puisqu'à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, il y avait des physiciens qui disaient qu'on avait tout compris. Et justement, on était avant l'ère quantique, avant tout ça, avant la relativité générale. C'est vrai, parfaitement vrai, ce que vous dites. Mais, j'insisterai plus sur la merveilleuse imagination de la nature, quoi, je veux dire, on est sûrement très, très loin, il y a peut-être des civilisations, il y a sûrement des civilisations, dans d'autres planètes habitées, dans lesquelles les gens ont été beaucoup plus loin que nous. Ca, c'est bien possible et ils nous prendraient pour des primitifs. C'est bien possible, c'est tout à fait possible.

- Vous avez dit que les mathématiques n'étaient pas dans le domaine du connu, et globalement, les sciences. Mais est-ce que vous ne pensez pas que c'est parce que les mathématiciens, les physiciens et autres, ne participent pas assez au débat, par exemple, lors de la définition de programmes scolaires, on entend des philosophes, des historiens...

- Ca, c'est vrai, il y a du vrai là-dedans, il y a du vrai. Mais d'un autre côté, c'est pas tellement le problème. Je ne dirai pas que le problème vient du fait que ce n'est pas assez vulgarisé. Je pense que le problème vient plus de la lenteur de l'absorption par l'ensemble de la société de notions élaborées. Par exemple, je prends un exemple typique, qui pour moi est important. Vous voyez, au moment où l'imprimerie a été découverte, la notion de nombre a été transmissible. C'est-à-dire, il y a eu des bouquins, etc., etc. Maintenant, on en est au point où ce n'est plus le nombre qui est transmissible, mais c'est la notion de fonction, de graphe, etc. Et il y a un vocabulaire qui est passé dans le grand public, par exemple, quand on dit qu'on va inverser la courbe du chômage *(rires)*. Alors ça, ça fait intervenir l'annulation de la dérivée seconde. Si on nous disait "on va faire annuler la dérivée seconde...", il y aurait de quoi se marrer *(rires)*. Bon, enfin, vous voyez un peu le genre... Donc c'est sûr que, si vous voulez, il y a maintenant certaines notions mathématiques, dont la notion de fonction de croissance, de décroissance, de dérivée première, d'annulation de dérivée première, etc. qui sont passées dans le grand public, d'accord, mais il y a des notions beaucoup plus subtiles, comme la notion de topos, comme les notions qui viennent du quantique etc. qui ont plus de mal à passer dans le grand public. Comment les faire passer dans le grand public ? Sans doute par l'éducation, mais à ce moment-là, il faudrait qu'on soit beaucoup plus courageux, dans le système scolaire, c'est évident, c'est absolument évident. Il faudrait qu'on ne soit pas dans le renoncement actuel qui est lamentable. Je sais qu'à mon époque, bon je veux dire, qu'on n'arrêtait pas, moi, je n'arrêtais pas et mes copains n'arrêtaient pas, de faire des problèmes de géométrie. On rentrait chez nous, et on faisait des problèmes, et c'étaient pas du tout des problèmes faciles. Et maintenant, c'est fini ! Maintenant, on apprend des recettes, on apprend à appliquer des recettes ; bien sûr, c'est beaucoup plus facile pour un prof. Un jour, quand vous aurez des enfants, vous vous apercevrez d'une chose qui est absolument fondamentale, c'est que quand vous avez un petit enfant, vous avez le choix. Le petit enfant, il essaie de faire quelque chose, vous avez deux possibilités : la première possibilité, c'est de faire cette chose pour lui, vous croyez que vous l'aidez, en fait, vous ne l'aidez pas du tout, vous lui nuisez, en faisant ça ; la deuxième chose, c'est d'être patient, et d'attendre qu'il y arrive par lui-même. Et là, vous faites quelque chose de vraiment utile, d'accord. Donc bon, dans ce qu'on fait dans le système scolaire actuel, qui est d'apprendre des recettes toute faites pour résoudre des problèmes tout faits, ça consiste à faire les choses à la place de l'enfant. C'est exactement ça qu'on fait, c'est exactement ce truc-là. Alors que la vraie découverte du travail, la vraie découverte de l'école, elle doit se faire entre 11 et 12 ans. Et elle doit se faire en séchant devant des problèmes dont on ne nous donne pas la solution, mais dont on vous demande de la trouver, d'accord, où l'on vous demande de sécher. Et à partir du moment où à cet âge-là, on a compris ce qu'est le vrai travail, ça va, ça va, c'est OK. Et ça, ce n'est pas le cas dans le système scolaire actuel. Bien sûr, loin de là, terriblement. Bien sûr. Il y a Laurent Lafforgue qui a essayé, et de toutes ses forces, d'aller dans ce sens-là, bon, il y a dépensé énormément d'énergie ; dire qu'il y est arrivé, ce ne serait pas vrai, je vais dire, en tout cas, il y a des gens qui ont fait un effort colossal pour aller dans le bon sens, maintenant après, il y a une résistance terrible du système.

Un topo sur les topos

Alain Connes [1]

Donc j'espère que je resterai dans l'esprit du séminaire et je pense que l'esprit du séminaire, c'est Grothendieck, avant tout. Donc ce que je vais faire, c'est essayer de m'effacer le plus possible devant Grothendieck et essayer d'expliquer justement, comme je le disais dans mon abstract, le parcours qui l'a amené aux topos, et surtout, je vais essayer de vous donner une métaphore éclairante pour ce que c'est qu'un topos, et vous expliquer ce qu'il y a d'extraordinaire dans cette découverte, au sens, surtout pour les philosophes, au sens où ça introduit des nuances considérables dans la notion de vérité. J'essaierai d'expliquer cela par un exemple, parce que rien de tel qu'un bon exemple pour expliquer. Il y aura l'un de mes slides qui s'appelle "à deux pas de la vérité" et je vais vraiment vous donner un exemple d'un topos qui permet de dire qu'on est par exemple à 10 pas de la vérité, ou qu'on est à 15 pas de la vérité, etc. Donc écoutez bien. Je vous ferai entendre Grothendieck, la voix de Grothendieck, parce que Grothendieck a fait 100 heures de conférences à Buffalo en 1973, et dans ces 100 heures de conférence, il y a des choses qui nous intéressent. Bien sûr, je ne vous le ferai pas écouter longtemps mais je le ferai écouter à un moment-donné, où il explique ce que c'est qu'un faisceau à des gens qui ne connaissent pas du tout. Et il explique comment il va faire son cours sur les topos. On verra, il y aura aussi un intermède encore plus marrant à un moment-donné, on n'entendra pas la voix de Grothendieck mais on entendra la voix d'Yves Montand. Vous verrez, enfin, vous entendrez tout ça.

Donc la première image que je vous montre, c'est une image que je dois à Charles Alunni qui m'a envoyé un email un jour en me disant qu'il aurait bien voulu avoir la deuxième thèse de Grothendieck. Mais à l'époque, quand on faisait une thèse, quand j'ai fait ma thèse par exemple, il y avait toujours une deuxième thèse. Cette deuxième thèse n'était pas écrite. C'était une deuxième thèse qu'on devait défendre devant le jury. Et on avait un sujet qui nous était donné. Ce qui est assez extraordinaire, c'est que dans le cas de Grothendieck, il a fait sa thèse sur les espaces nucléaires, sur les espaces vectoriels topologiques et sur les espaces nucléaires, et il a fait une contribution fondamentale à l'analyse fonctionnelle et ce qui est extraordinaire, c'est qu'on peut penser que ce qui a fait bifurquer Grothendieck, et qui éventuellement l'a amené à l'idée du topos, à cette idée merveilleuse, c'est sa deuxième thèse. Pourquoi ? Parce que la deuxième thèse de Grothendieck, c'est écrit dans ce texte, elle est sur la théorie des faisceaux.

Et alors sur cette page, si vous êtes perspicace, vous allez trouver qu'il y a une erreur, ce qui montre qu'on n'est jamais à l'abri des erreurs. Parce qu'il y a un des examinateurs, si vous regardez bien, qui s'appelle *Georges* Choquet *(rires)* Alors j'ai cherché, pour dire peut-être que je me suis trompé, il y a 3 examinateurs, il y a Henri Cartan, il y a Laurent Schwartz et puis il y a *Georges* Choquet. Alors j'ai cherché sur wikipedia pour voir s'il n'y avait pas un mathématicien qui s'appelait Georges Choquet. En fait, non, il y a un ecclésiastique qui s'appelait Georges Choquet et qui est mort pendant la deuxième guerre mondiale. Donc il n'y a pas de problème, c'est bien une erreur, et c'est bien Gustave Choquet qui était l'examinateur de Grothendieck. Donc sa thèse il l'a passée en 53.

Et déjà en 55, il s'intéressait bien sûr aux faisceaux, qui était une découverte merveilleuse de Leray. Et donc là, j'ai commencé par quelques échanges de lettres entre Serre et Grothendieck parce que finalement, c'est dans ces échanges de lettres que l'on voit apparaître ce qu'on appelle l'article qui est tellement fameux qu'on l'appelle Le Tohoku cet article. Cet article est paru dans un journal qui s'appelle le Tohoku Maths Journal mais l'article est tellement fameux qu'en fait, on l'appelle Tohoku.

Donc voilà ce que dit Grothendieck ; il dit :

"Mon Cher Serre,
Merci pour les divers papiers que généreusement tu m'as envoyés, ainsi que pour ta lettre. Rien de neuf de mon côté."

Alors ça, ça justifie ce que j'ai écrit quand j'ai annoncé mon laïus :

1. Conférence d'Alain Connes, le 7 novembre 2017, dans le cadre du séminaire "Lectures grothendieckiennes" de l'ENS. Alain Connes présente la démarche intellectuelle qui a mené Alexandre Grothendieck, à partir d'une "emmerdante" rédaction qu'il devait faire pour Bourbaki sur l'algèbre homologique, à découvrir et mettre au point la notion de topos et il essaie d'expliquer en quel sens cette notion a une portée considérable grâce en particulier aux nuances qu'elle introduit entre le vrai et le faux (*organisateur du séminaire* : Frédéric Jaëck (ENS), *transcription* : Denise Vella-Chemla)

“J’ai fini mon emmerdante rédaction d’algèbre homologique.”

Alors on va voir très graduellement quelle est la philosophie que Grothendieck utilise tout le temps quand il travaille, c’est-à-dire qu’il n’hésite jamais devant une tâche que n’importe quel mathématicien normal considérerait comme étant sans intérêt, rébarbative, n’allant rien lui rapporter. Donc il continue :

“... que j’ai envoyée à Delsarthe qui manquait de la rédaction pour la dactylo.”

Il dit :

“Je l’ai proposée à Tannaka pour le Tohoku.”

Le Tohoku, c’est le Tohoku Maths Journal.

“Il paraît que les articles-fleuve ne les rebutent pas.”

Alors il est vrai que Grothendieck, en général, quand il écrit, le minimum, c’est au moins 100 pages. Ensuite, il parle de Weil. Je vais vous épargner ce qu’il en dit parce qu’il dit :

“J’ai lu au moins les énoncés des livres de Weil sur les variétés abéliennes dans l’espoir qu’on a arrangé depuis les démonstrations vraiment décourageantes chez Weil, son langage me dégoûte.”...

En plus ! *(Rires)* Je passe... Il dit :

“Je passe mon temps soit à apprendre, soit à rédiger les variétés. C’est amusant mais long bien sûr, mais il n’est pas question de recherche avant d’avoir avalé une montagne de choses nouvelles.”

Alors ensuite, très important, c’est sans doute la chose la plus importante dans cet échange, il dit à un moment-donné :

“Je me suis aperçu qu’en formulant la théorie des foncteurs dérivés pour des catégories plus générales que les modules...”

(il faut dire qu’à l’époque, il y avait le livre de Cartan-Eilenberg qui était en gestation, Serre l’appelle le Cartan-Sammy - parce que c’est Sammy Eilenberg - et dans ce livre, il y avait bien-sûr les foncteurs dérivés mais c’était toujours appliqué à des catégories de modules. C’est-à-dire qu’on prenait la catégorie des modules sur un anneau non nécessairement commutatif et toute l’algèbre homologique était développée comme ça. Mais évidemment, elle était très analogue dans sa formulation avec ce qui se passait pour la cohomologie à coefficients dans un faisceau. Donc ce que dit Grothendieck, c’est :

“Je me suis aperçu qu’en formulant la théorie des foncteurs dérivés pour des catégories plus générales que les modules, on obtient à peu de frais la cohomologie des espaces à coefficients dans un faisceau.”

Il faut savoir qu’à l’époque, quand on prenait la cohomologie à coefficients dans un faisceau, c’était toujours la cohomologie de Čech. C’est à dire qu’on prenait des recouvrements de l’espace topologique, et puis on fabriquait un complexe ou un bi-complexe avec ces recouvrements et on définissait la cohomologie comme ça. Voilà.

Donc voilà ce qu’il dit, et ce point-là, dans sa correspondance, c’est un point absolument essentiel. Alors ensuite, il continue, et donc ça, c’est une lettre du 4 juin 1955, donc on est 2 ans après sa thèse, donc :

“Ci-joint le résultat de mes premières cogitations en forme, sur les fondements d’algèbre homologique.”

Donc après, je ne vous détaille pas le reste puisque c’est sur des suites spectrales, etc. Mais disons que là, Grothendieck explique qu’il s’était planté sur l’existence de suffisamment de faisceaux projectifs mais à ce moment-là, il a démontré qu’il y avait suffisamment de faisceaux injectifs, et ça lui a permis de définir les foncteurs dérivés et ça lui a permis de définir si vous voulez la cohomologie à coefficients dans un faisceau sans hypothèse sur l’espace topologique. Si on a de bonnes hypothèses sur l’espace topologique, à ce moment-là, ça coïncide avec la cohomologie de Čech. Mais ça n'est pas vrai en général. Alors voilà la réponse de Serre. Donc là, il y avait autre chose dans la correspondance, il y avait autre chose qui était ce qu'on appelle l'Im_1, c'est à dire le foncteur pour les limites projectives, comment ça commute avec la cohomologie. Mais ce qu'il faut lire, c'est le deuxième paragraphe.

"Le fait que la cohomologie d'un faisceau soit un cas particulier des foncteurs dérivés, au moins dans le cas para-compact..."

(parce que dans le cas para-compact, ça coïncide avec la cohomologie de Čech, donc celle qui est définie à partir des recouvrements)

"...n'est pas dans Cartan-Sammy."

(Cartan-Sammy, c'est Cartan-Eilenberg)

"Cartan en avait conscience."

Donc, Cartan avait conscience du fait que, quand ils avaient développé avec Eilenberg toute la théorie cohomologique sur les modules, il avait conscience bien-sûr de l'analogie avec le cas de la cohomologie des faisceaux, mais bon, ils n'avaient pas voulu s'embarrasser pour le faire dans leur livre, et Cartan en avait conscience et avait dit à Buchsbaum de s'en occuper. Donc c'est Buchsbaum en fait qui, indépendamment de Grothendieck, a aussi défini les catégories abéliennes. Il avait commencé à le développer mais il ne s'était pas occupé de la cohomologie.

"Mais il ne me semble pas que celui-ci l'ait fait. Donc l'intérêt de ceci serait de voir quelles sont au juste les propriétés des faisceaux fins qu'il faut utiliser. Ainsi on pourrait peut-être se rendre compte si oui ou non..."

(c'est Serre qui parle, bien sûr)

"... il y a suffisamment de faisceaux fins dans le cas non-séparé.".

Alors le cas non-séparé est extrêmement important bien sûr pour la géométrie algébrique et c'était à un moment où justement, Serre développait la géométrie algébrique à partir de la théorie des faisceaux de Leray en prenant au départ la topologie de Zariski et la topologie de Zariski, elle n'est pas séparée. Je veux dire, donc, on a exactement ce problème-là. Donc cet échange est extrêmement important, c'est un échange qui date de l'année 55. Et l'article de Grothendieck donc, il est marqué *Reçu* 1^{er} *mars 1957*, donc c'est cet article *"Sur quelques points d'algèbre homologique"* qui est vraiment l'ancêtre, on peut vraiment placer si vous voulez l'origine des topos dans cet article.

La raison pour laquelle on peut placer l'origine des topos dans cet article, c'est que dans cet article, si vous voulez, d'abord, bien sûr, il introduit ce que sont les catégories abéliennes. Donc ça, c'est extrêmement important, avec toutes leurs propriétés, etc. Il développe l'algèbre homologique dans le cadre des catégories abéliennes. Donc ça, c'est ce qu'il fait, si vous voulez. Mais, ce qui est beaucoup plus important, c'est qu'il prend deux types d'exemples, dans son article, de catégories abéliennes. Le premier exemple de catégorie abélienne qu'il prend, c'est la catégorie abélienne des modules sur un anneau. Ca, ça appartient à Cartan-Eilenberg. Là-dessus, il n'y a pas de problème, mais il prend aussi l'exemple des faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique, bien entendu ; là encore, pas de surprise puisque c'était pour unifier les 2 qu'il avait fait son travail de généralisation. Mais ce qui est absolument crucial, c'est qu'il avait un autre exemple en tête, un troisième exemple en tête, et c'est ce qu'il appelait les catégories de diagrammes. C'est-à-dire, ce qu'il faisait, c'était qu'il avait l'idée que si vous prenez des diagrammes de groupes abéliens, mais quels que soient les diagrammes que vous regardiez, eh bien, ça, ça forme encore une catégorie abélienne. Eh bien en fait, si on pense juste, on s'aperçoit qu'il avait là les deux piliers de la notion de topos. C'est-à-dire qu'il avait la notion d'espace topologique, qui donne la notion de faisceaux de groupes abéliens, etc., et il avait aussi la notion de catégories de diagrammes et on verra que ces catégories-là, elles donnent naissance à un topos. Et ces topos ont un rôle absolument fondamental qu'on va utiliser tout le temps, tout le temps, tout le temps.

Alors, il y a une chose qui est à remarquer : il définit ce que c'est qu'une catégorie abélienne. Donc ce que dit Grothendieck, c'est qu'une catégorie abélienne, c'est une catégorie additive. Alors je vais vous expliquer en deux mots la misconception qu'on a sur la catégorie additive qui satisfait aux deux axiomes supplémentaires suivants : alors, il y a le fait qu'un morphisme doit avoir un noyau et un co-noyau, ça, c'est une notion abstraite, si vous ne la connaissez pas, bon, ça prendrait un certain temps, c'est un peu une gymnastique, et la deuxième condition, c'est le fait d'être un morphisme exact. C'est-à-dire le fait que si vous divisez par le noyau et si vous regardez par rapport à ce qu'on appelle l'image en la définissant par rapport au co-noyau, eh bien à ce moment-là, vous avez un isomorphisme entre le quotient par le noyau et l'image. Et ça, c'est extrêmement important, ce n'est pas vrai pour des applications dans des espaces topologiques par exemple, si vous prenez un espace de Hilbert et si vous prenez les applications linéaires continues dans l'espace de Hilbert, ça ne vérifie pas ces deux conditions. Ca n'est pas une catégorie abélienne et la raison, c'est que vous pouvez avoir un morphisme qui a une image, mais il est dense dans son image et son image n'est pas fermée et à ce moment-là, la deuxième condition AB2 n'aura pas lieu.

Alors il y a une misconception que Grothendieck reproduit quand il définit les catégories additives dans son article et qui est la chose suivante : c'est qu'en général, les gens définissent une catégorie additive en disant "une catégorie additive, c'est une catégorie où on rajoute une structure supplémentaire qui est la structure de groupe additif sur les morphismes." Eh bien, c'est une hérésie. Je vais vous expliquer pourquoi ; parce qu'en fait, ça n'est pas du tout une structure supplémentaire. Et il y a un exercice dans MacLane que je vous ai noté là qui montre que c'est une hérésie. Quelle est cette hérésie ? L'hérésie est que quand vous prenez une catégorie comme une catégorie abélienne, elle a des produits et des co-produits. Ca, c'est une chose très simple. Et elle a un objet qui est à la fois initial et final, c'est l'objet 0 ; dans les groupes abéliens, c'est le groupe qui est réduit à 0. D'accord ? C'est un objet initial parce que vous avez une seule flèche qui va de 0 vers n'importe quel groupe abélien, et c'est un objet final parce que vous avez une seule flèche qui va d'un groupe abélien vers 0. Tout s'envoie vers 0. Donc il y a un objet qui est à la fois initial et final. Eh bien, si vous avez ça, vous pouvez dire, quand la catégorie est abélienne. Comment ?

Eh bien, parce que ce qui se produit, vous avez une flèche complètement canonique, complètement naturelle, qui va du coproduit de deux objets vers le produit de deux objets. Parce qu'en utilisant le 0, vous pouvez envoyer la moitié sur 0 et l'autre moitié sur 0 et à ce moment-là, vous avez une flèche qui est complètement naturelle. Si vous demandez si cette flèche est un isomorphisme, vous avez fait la moitié du parcours. Parce que comme cela est expliqué dans ce texte de MacLane, à ce moment-là, vous avez une addition pour les morphismes. Simplement en utilisant le fait que cette flèche naturelle qui va du coproduit vers le produit est un isomorphisme. Vous avez une addition naturelle pour les morphismes et une fois que vous avez cette addition naturelle, vous pouvez prendre l'axiome supplémentaire qu'il y a un signe moins, si vous voulez, pour cette addition, bien sûr en général, vous n'aurez pas un signe moins, c'est ce qu'on appelle les catégories semi-additives, elles sont très intéressantes, mais si vous voulez une catégorie additive, vous demandez simplement qu'il y ait un inverse. Et alors, donc, ça n'est pas une structure supplémentaire. C'est une hérésie de croire qu'une catégorie additive est donnée par une catégorie + une structure supplémentaire. Ca n'est pas vrai. Donc c'est une misconception.

Alors, maintenant, je vais vous lire du Grothendieck, puisque le principe du séminaire est de s'effacer devant Grothendieck. Et même à un moment-donné, on va l'écouter. Et puis lorsqu'on aura lu et écouté suffisamment Grothendieck, là, je prendrai une métaphore, puis on verra un exemple. D'accord, donc soyez patients, je ne vais pas faire que lire ou vous faire écouter du Grothendieck, il faut être patient, mais écoutons-le quand-même. Voilà ce qu'il dit :

> *"Le point de vue et le langage des faisceaux introduit par Leray nous a amené à regarder les "espaces" et "variétés" en tous genres dans une lumière nouvelle. Ils ne touchaient pas, pourtant, à la notion même d'espace...*"

Donc ce que dit Grothendieck, c'est que Leray avait envisagé un espace sous la forme des faisceaux sur cet espace, mais en fait, d'ailleurs, Leray ne considérait que les faisceaux de groupes abéliens. Et on va voir le changement que Grothendieck a apporté déjà même là.

> *"Ils ne touchaient pas, pourtant, à la notion même d'espace, se contentant de nous faire appréhender plus finement, avec des yeux nouveaux, ces traditionnels "espaces", déjà familiers à tous. Or, il s'est avéré que cette notion d'espace est inadéquate pour rendre compte des "invariants topologiques" les plus essentiels qui expriment la "forme" des variétés algébriques "abstraites" (comme celles auxquelles s'appliquent les conjectures de Weil), voire celle des "schémas" généraux...*"

Alors là, c'est le moment où je vais vous faire entendre Grothendieck. Pourquoi, parce qu'on va entendre Grothendieck qui définit ce que c'est qu'un faisceau. Donc, je pense que c'est important que vous l'écoutiez, d'accord, parce que vous ne savez pas forcément ce que c'est qu'un faisceau, on va écouter Grothendieck en parler, d'accord, et une fois qu'on aura écouté Grothendieck en parler, on reviendra à nos moutons. C'est le début de ses conférences à Buffalo.

"Topoi are the essence of general topology. A topos could be considered as the main object of study of topology. And so topoi is a generalisation of classical general topology... have some familiarity with... and on the other hand familiarity with... but in order to understand notions of topoi, one would require some familiarity with the language of sheaves on topological spaces. Now I guess that those notions..."

Voilà, je m'arrête ici, notre patience est sans doute épuisée. Mais, je vais dire qu'une des raisons pour lesquelles je vous ai fait entendre Grothendieck est assez compliquée : il faut qu'on s'habitue à cette incroyable patience qu'il a d'expliquer tous les détails, de rentrer, d'aller jusqu'au bout de tous les détails. Et ça, on le verra, je veux dire, c'est une qualité absolument essentielle dans sa démarche. Donc je continue à lire ce qu'il disait sur le point de vue et le langage des faisceaux introduit par Leray. Grothendieck continue, il dit :

"Pour les "épousailles" attendues, "du nombre et de la grandeur", c'était comme un lit décidément étriqué, où l'un seulement des futurs conjoints (à savoir, l'épousée) pouvait à la rigueur trouver à se nicher tant bien que mal, mais jamais les deux à la fois ! "

Donc là, si vous voulez, il avait en tête effectivement toutes sortes de développements qui étaient de nature combinatoire, qui étaient reliés à la théorie des nombres, par opposition à ce qui se passait en topologie mais bon, bien sûr, il y avait le travail de Serre sur l'utilisation de la topologie de Zariski.

"C'est le point de vue des faisceaux qui a été le guide silencieux et sûr, la clef efficace (et nullement secrète), me menant sans atermoiements ni détours vers la chambre nuptiale au vaste lit conjugal. Un lit si vaste en effet (telle une vaste et paisible rivière très profonde. . .), que
"tous les chevaux du roi
y pourraient boire ensemble..." "

On y reviendra à ça.

"comme nous le dit un vieil air"

(que je vous ferai entendre tout à l'heure)

"comme nous le dit un vieil air que sûrement tu as dû chanter toi aussi, ou au moins entendre chanter. Et celui qui a été le premier à le chanter a mieux senti la beauté secrète et la force paisible du topos, qu'aucun de mes savants élèves et amis d'antan..." (rires)

Bon, il y a bien sûr dans cette phrase, le fait que nous connaissons, sans doute, beaucoup d'entre nous, qui est que le premier à dévoiler un certain paysage mathématique en a une appréhension qui est incomparable (c'est ce qui est arrivé à Galois par exemple) par rapport aux autres mathématiciens qui viennent après lui et le comprennent. Ca, c'est une chose très frappante, il dit quelque chose de plus méchant, de beaucoup plus méchant.

"La clef a été la même, tant dans l'approche initiale et provisoire (via la notion très commode, mais non intrinsèque du "site")" (dont je vous parlerai, bien sûr)

"...que dans celle du topos. C'est l'idée du topos que je voudrais essayer à présent de décrire.".

Donc laissons parler Grothendieck bien sûr.

"Considérons l'ensemble formé de tous les faisceaux sur un espace (topologique)"

Alors, à l'intention du mathématicien, à vrai dire, il s'agit ici des faisceaux d'ensembles, ça, c'est absolument fondamental, c'est un pas énorme, qu'il ait remplacé les faisceaux de groupes abéliens, qui étaient intéressants, on pensait que c'étaient les seuls intéressants, puisque ce sont les seuls qui vont donner une cohomologie, etc. Non ! Il a eu l'idée, qui paraît complètement naïve, de remplacer les faisceaux de groupes abéliens par des faisceaux d'ensembles, et on va voir la portée que ça donne.

"Je crois d'ailleurs".

(et c'est ce qu'il dit)

"être le premier à avoir travaillé systématiquement avec les faisceaux d'ensembles à partir de 1955. Quel est l'avantage de travailler avec les faisceaux d'ensembles, on va le voir, c'est que quand vous travaillez avec les faisceaux d'ensembles, vous pouvez définir ce que c'est qu'un groupe dans ce truc-là, vous pouvez définir ce que c'est qu'une algèbre dans ce truc-là, parce que ce que vous faites, c'est que vous travaillez comme si vous travailliez dans les ensembles mais il y a une variabilité. C'est-à-dire qu'il y a quelque-chose qui bouge, mais sinon, vous faites exactement comme si vous travailliez dans les ensembles, habituels. Donc vous pouvez définir ce que c'est qu'un groupe. Alors, si vous cherchez ce que c'est qu'un groupe abélien dans cette catégorie des faisceaux d'ensembles, eh bien, vous trouvez les faisceaux de groupes abéliens. Donc on retombe sur ses pieds."

Ensuite ce que dit Grothendieck :

"Nous considérons cet "ensemble" ou "arsenal" comme muni de sa structure la plus évidente, laquelle y apparaît, si on peut dire, "à vue de nez" ; à savoir, une structure dite de "catégorie"."

Alors bien sûr, nous, on a été éduqués, du moins à mon époque, avec la théorie des ensembles. En fait, c'était sans doute une erreur. La vraie manière de penser, c'est la théorie des catégories. Donc, il pense à cette espèce de théorie qu'il a devant les yeux comme une catégorie.

"(Que le lecteur non mathématicien ne se trouble pas, de ne pas connaître le sens technique de ce terme. Il n'en aura nul besoin pour la suite.)"

C'est-à-dire que ce qu'il faut que le lecteur non-mathématicien pense, simplement, c'est qu'il a un analogue, maintenant, de la théorie des ensembles, dans cette nouvelle catégorie, dans cette catégorie des faisceaux d'ensembles. Il y a quelque chose qui ressemble à la théorie des ensembles, et on va voir que cette métaphore va très loin.

"C'est cette sorte de "superstructure d'arpentage", appelée "catégorie des faisceaux" (sur l'espace envisagé), qui sera dorénavant considérée comme "incarnant" ce qui est le plus essentiel à l'espace."

Alors on verra une métaphore, que je développerai plus loin, mais je peux déjà en dévoiler une partie. Si vous voulez, d'habitude, quand on parle d'un espace, je vais vous la montrer tout de suite parce que je ne veux pas attendre, pour cette métaphore. Voilà, la métaphore est la suivante : si vous voulez, avant Grothendieck, on avait l'habitude, quand on étudiait un espace, je ne sais pas moi, une courbe, ou n'importe quoi, on mettait l'espace... sur la scène. Et puis, on le regardait, on l'étudiait, comme un ensemble muni d'une structure, etc. Eh bien, ce que fait Grothendieck, c'est... non ! L'espace n'est pas sur la scène, l'espace, il est dans les coulisses. Sur la scène, il y a les acteurs habituels de la théorie des ensembles : les groupes abéliens, les algèbres, etc. Mais, l'espace en question, il est dans les coulisses, comme un espèce de *Deus ex machina* qui introduit une variabilité dans les personnages qui sont sur la scène. C'est-à-dire que maintenant les personnages qui sont sur la scène, ils vont dépendre d'un aléa. Cet aléa, il est gouverné par le topos. Et quand on a un topos de Grothendieck, il y a aussi les constantes, c'est-à-dire qu'il y a aussi les ensembles qui ne dépendent pas de l'aléa. Et la cohomologie, elle se définit en comparant les deux.

Donc c'est absolument fondamental que vous essayiez progressivement d'acquérir une image mentale, même si vous n'êtes pas mathématicien, pour comprendre que l'espace qui est donné par le topos, il va apparaître derrière, il est dans les coulisses, il n'est pas sur le devant de la scène, ça n'est pas lui qu'on étudie ; on étudie la théorie des ensembles, mais il y a ce bon Dieu de topos, qui est caché et qui fait tout varier, qui introduit une variabilité là-dedans, d'accord. Donc alors, c'est ce que dit Grothendieck d'une autre manière : *"ce qu'il considère comme cet ensemble ou "arsenal" comme muni de sa structure la* *plus évidente"*, il y pense comme à une catégorie, cette catégorie de faisceaux d'ensembles. Alors ensuite que dit-il ? *"Que c'est une chose licite d'oublier l'espace et de ne considérer que la catégorie des faisceaux d'ensembles."*

Pourquoi est-ce que c'est une chose licite ? C'est une chose licite parce qu'on n'a pas perdu l'espace en cours de route. On retrouve les points de l'espace. Alors, comment est-ce qu'on retrouve les points de l'espace dans la métaphore que je vous ai donnée ? Parce que lui dit *"c'est un simple exercice de le vérifier : une fois qu'on a posé la question."*. Bon. Effectivement, vous pouvez vous amuser, en pensant en termes classiques, si vous avez les faisceaux d'ensembles sur un espace topologique ordinaire, comment est-ce que vous allez retrouver l'espace lui-même, c'est-à-dire les points de l'espace ? Vous pouvez vous poser cette question. Alors en fait, dans la métaphore que je vous ai donnée, les points de l'espace, c'est quand vous prenez un instant donné, un temps figé. Quand vous prenez un temps qui est figé, eh bien à ce moment-là, il n'y a plus de variabilité, et vous avez la théorie des ensembles ordinaire. C'est ce qu'on appelle abstraitement dans la théorie des topos un point d'un topos, c'est-à-dire que c'est ainsi qu'on appelle un morphisme géométrique, qui va de la théorie des ensembles ordinaire vers le topos considéré. Mais ça revient exactement à figer les choses à un instant donné.

Lui dit *"de vérifier est un simple exercice."*. En fait, ce n'est pas toujours vrai ; comme il dit *"(à l'intention du mathématicien) A strictement parler ceci n'est vrai que pour des espaces dits "sobres" "*. Il faut quand-même qu'il y ait un minimum de séparation dans l'espace. Et il y a un exemple extrêmement intéressant, que je vous invite à faire, parce qu'il faut toujours... on ne fait pas des maths en écoutant, on fait des maths en faisant des exercices. Donc il y a l'exercice déjà sur les catégories abéliennes de tout à l'heure. Et voilà un autre exercice maintenant. C'est que vous prenez une courbe avec sa topologie de Zariski. Ou vous prenez plutôt une surface avec sa topologie de Zariski. Et vous calculez les points du topos correspondant, c'est-à-dire de la topologie des faisceaux pour la topologie de Zariski. Eh bien vous allez vous apercevoir qu'il y a plus de points, parce que l'espace en question, il n'était pas sobre, et vous allez obtenir exactement les points du schéma correspondant. Donc je vais dire, déjà, dans cet exemple-là, on voit le potentiel absolument incroyable de cette manière de penser. Il dit :

"...nous pouvons désormais "oublier" l'espace initial, pour ne plus retenir et ne nous servir que de la "catégorie" associée, laquelle sera considérée comme l'incarnation la plus adéquate de la "structure topologique" (ou "spatiale") qu'il s'agit d'exprimer."

Alors ce qu'il explique après, c'est :

"Comme si souvent en mathématique, nous avons réussi ici (grâce à l'idée cruciale de "faisceau", ou de "mètre cohomologique") à exprimer une certaine notion, (celle d'"espace"), en termes d'une autre (celle de "catégorie")."

Donc on a remplacé, toujours en suivant la métaphore, l'espace par cette catégorie, qui est une catégorie d'ensembles, ce sont des ensembles.

"A chaque fois, la découverte d'une telle traduction d'une notion (exprimant un certain type de situations) en termes d'une autre (correspondant à un autre type de situations), enrichit notre compréhension."

Bien entendu.

"et de l'une et de l'autre notion, par la confluence inattendue des intuitions spécifiques qui se rapportent soit à l'une, soit à l'autre."

"Ainsi, une situation de nature "topologique" (incarnée par un espace donné) se trouve ici traduite par une situation de nature "algébrique" (incarnée par une "catégorie") ; ou, si on veut, le "continu" incarné par l'espace, se trouve "traduit" ou "exprimé" par la structure de catégorie, de nature "algébrique" (et jusque là perçue comme étant de nature essentiellement "discontinue" ou "discrète")."

On dénie, a priori, à une catégorie le droit de représenter quelque-chose de continu. Or c'est le cas ici. C'est le cas parce qu'on retrouve les points et on retrouve la topologie des points, simplement à partir de la catégorie, qui *ressemble* à la catégorie des ensembles.

"Mais ici, il y a plus. La première de ces notions, celle d'espace, nous était apparue comme une notion en quelque sorte "maximale" - une notion si générale déjà, qu'on imagine mal comment en trouver encore une extension qui reste "raisonnable". Par contre, il se trouve que de l'autre côté du miroir, ces "catégories" " (donc les catégories que l'on obtient comme catégories de faisceaux d'ensembles) *"sur lesquels on tombe, en partant d'espaces topologiques, sont de nature très particulière."*

"Le "miroir" dont il est question ici, comme dans Alice au pays des merveilles, est celui qui donne comme "image" d'un espace, placé devant lui, la "catégorie" associée."

Donc cette catégorie si vous voulez, c'est la catégorie de la scène derrière laquelle est le topos.

"Elles jouissent en effet d'un ensemble de propriétés fortement typées, (on ne va pas en parler tout de suite) qui les font s'apparenter à des sortes de "pastiches" de la plus simple imaginable d'entre elles." Quelle est la plus simple d'entre elles ? C'est la théorie des ensembles. Donc les catégories que vous obtenez comme ça, à partir d'un topos, sont des pastiches de la théorie des ensembles. C'est ce que dit Grothendieck.

"Ceci dit, un "espace nouveau style" (ou topos), généralisant les espaces topologiques traditionnels, sera décrit tout simplement comme une "catégorie" qui, sans provenir forcément d'un espace ordinaire, possède néanmoins toutes ces bonnes propriétés." Donc on les appelle topos, alors il va le dire d'ailleurs, attendez, il faut que je le trouve...

"Le nom "topos" a été choisi (en association avec celui de "topologie", ou "topologique") pour suggérer qu'il s'agit de "l'objet par excellence" auquel s'applique l'intuition topologique. Par le riche nuage d'images mentales que ce nom suscite, il faut le considérer comme étant plus ou moins l'équivalent du terme "espace" (topologique), avec simplement une insistance plus grande sur la spécificité "topologique" de la notion. Ainsi..." Bon, il parle des espaces vectoriels, etc. Donc je reviens en arrière.

*"Voici donc l'idée nouvelle. Son apparition peut être vue comme une conséquence de cette observation, quasiment enfantine à vrai dire, que ce qui compte vraiment dans un espace topologique, ce ne sont nullement ses "points" ou ses sous-ensembles de points, et les relations de proximité etc. entre ceux-ci, mais que ce sont les faisceaux sur cet espace, et la catégorie qu'ils forment. Je n'ai fait, en somme, que mener vers sa conséquence ultime l'idée initiale de Leray - et ceci fait, **franchir le pas**. Comme l'idée même des faisceaux (due à Leray), ou celle des schémas, comme toute "grande idée" qui vient bousculer une vision invétérée des choses, celle des topos a de quoi déconcerter par son caractère de naturel, d' "évidence", par sa simplicité."*

En fait, on sait quand on fait des maths, quand on est sur la bonne voie, quand quelqu'un vous dit *"Oh, ce n'est que ça !". (rires)*

Voilà ce que dit Grothendieck, donc :

"...par cette qualité particulière qui nous fait nous écrier si souvent : "Oh, ce n'est que ça !", d'un ton mi-déçu, mi-envieux ; avec en plus, peut-être, ce sous entendu du "farfelu", du "pas sérieux", qu'on réserve souvent à tout ce qui déroute par un excès de simplicité imprévue. A ce qui vient nous rappeler, peut-être, les jours depuis longtemps enfouis et reniés de notre enfance..."

Donc là, il revient à la notion de schéma :

"Elle constitue un vaste élargissement de la notion de "variété algébrique", et à ce titre elle a renouvelé de fond en comble la géométrie algébrique léguée par mes devanciers. Celle de topos constitue une extension insoupçonnée, pour mieux dire, une métamorphose de la notion d'espace."

Si vous voulez, ce qui est absolument extraordinaire, au départ, même, dans la notion de topos, c'est la manière dont l'espace est appréhendé. Comme je le disais, il n'est plus appréhendé par les points, il est appréhendé par l'aléa qu'il introduit : il introduit un aléa dans la théorie des ensembles ; il introduit une variabilité dans la théorie des ensembles. Et ça, c'est extraordinaire.

"Par là, elle porte la promesse d'un renouvellement semblable de la topologie, et au delà de celle-ci, de la géométrie. Dès à présent d'ailleurs, elle a joué un rôle crucial dans l'essor de la géométrie nouvelle."

Ca, c'est pour la cohomologie l-adique, ou pour la cohomologie cristalline.

"Comme sa sœur aînée (et quasi-jumelle)[2]*, elle possède les deux caractères complémentaires essentiels pour toute généralisation fertile, que voici."*

Primo, il ne faut pas que cette notion soit trop vaste, je passe assez vite là-dessus ; il parle des topos, on en a parlé ; il faut que "les constructions géométriques les plus essentielles" s'appliquent bien entendu, qu'elles "puissent se transposer de façon plus ou moins évidente." Il ne faut pas qu'elle soit trop générale, il ne faut pas que la notion que vous preniez soit, par exemple, la notion générale de catégorie. Si c'était la notion générale de catégorie, on n'irait pas loin. Donc il faut qu'elle ait cette propriété.

Il explique : *"Parmi ces "constructions", il y a notamment celle de tous les "invariants topologiques" familiers."*

Il explique très bien : *"Pour ces derniers, j'avais fait tout ce qu'il fallait dans l'article déjà cité de "Tohoku" (1955)."*

Donc l'origine, vous voyez, elle vient de là. Comme je le disais tout à l'heure, dans l'article de Tohoku, il y avait à la fois les faisceaux sur un espace topologique et il y avait aussi, et c'était extrêmement important, les catégories de diagrammes, il parlait des catégories de diagrammes et on va voir qu'elles jouent un rôle absolument essentiel, de la même manière. Donc il parle des associations mentales, et de notions moins techniques, bien sûr.

"Secundo, la nouvelle notion est en même temps assez vaste pour englober une foule de situations qui, jusque là, n'étaient pas considérées comme donnant lieu à des intuitions de nature "topologico-géométrique" - aux intuitions, justement, qu'on avait réservées par le passé aux seuls espaces topologiques ordinaires."

Comme on le verra dans un exemple que je vous donnerai dans relativement peu de temps, comme on le verra, ce qui se produit dans la métaphore dont je vous parlais, ce qui va se produire, c'est que comme il y a cet aléa, comme il y a cette variabilité dans la théorie des ensembles, on ne peut plus appliquer le principe du tiers-exclus. Par contre, l'intuitionnisme marche. Et donc, ce que ça va engendrer, cette nuance, c'est pour ça que je veux vous y amener pas à pas, on est lent, mais il faut que nous soyons lents, donc je vous montrerai un exemple, comme je l'ai dit au début, dans lequel la notion de vérité associée au topos sera beaucoup plus subtile que la notion de vérité ordinaire, et j'aurai un transparent, sur lequel il y aura marqué "à deux pas de la vérité" et je vous donnerai un topos dans lequel on sera "à 10 pas de la vérité", "à 15 pas de la vérité", "à 20 pas de la vérité", etc. On prendra un exemple parce que tant qu'on n'a pas pris un exemple, tant qu'on parle abstraitement, on ne sait pas trop ce qu'on fait. Donc on se dirige vers là.

"La chose cruciale ici, dans l'optique des conjectures de Weil, c'est que la nouvelle notion est assez vaste en effet, pour nous permettre d'associer à tout "schéma" un tel "espace généralisé" ou "topos" (appelé le "topos étale" au schéma envisagé). Certains "invariants cohomologiques" de ce topos (tout ce qu'il y a de "bébêtes"!) semblaient alors avoir une bonne chance de fournir "ce dont on avait besoin" "

Il continue et on se relaxe un peu avant de venir aux exemples et aux choses vraiment cruciales.

"C'est dans ces pages que je suis en train d'écrire que, pour la première fois dans ma vie de mathématicien, je prends le loisir d'évoquer (ne serait-ce qu'à moi-même) l'ensemble des maître-thèmes et des grandes idées directrices dans mon œuvre mathématique. Cela m'amène à mieux apprécier la place et la portée de chacun de ces thèmes, et des "points de vue" qu'ils incarnent, dans la grande vision géométrique qui les unit et dont ils sont issus. C'est par ce travail que sont apparues en pleine lumière les deux idées novatrices névralgiques dans le premier et puissant essor de la géométrie nouvelle : l'idée des schémas, et celle des topos."

Et là, il insiste :

"C'est la deuxième de ces idées, celle des topos, qui à présent m'apparaît comme la plus profonde des deux. Si d'aventure, vers la fin des années cinquante..."

2. la théorie des schémas

Donc Grothendieck a introduit les topos dans une période un peu dépressive qu'il avait eue après la mort de sa mère en 1957, il a introduit les topos en 58. Donc on sera, l'année qui vient, au 60ème anniversaire de la naissance des topos.

"Si d'aventure, vers la fin des années cinquante, je n'avais pas retroussé mes manches, pour développer obstinément jour après jour,"

Ca, c'est Grothendieck : "Obstinément, jour après jour..."

"tout au long de douze longues années, un "outil schématique" d'une délicatesse et d'une puissance parfaites - il me semblerait quasiment impensable pourtant que dans les dix ou vingt ans déjà qui ont suivi, d'autres que moi auraient pu à la longue s'empêcher d'introduire à la fin des fins (fut-ce à leur corps défendant) la notion qui visiblement s'imposait, et de dresser tant bien que mal tout au moins quelques vétustes baraquements en "préfab", à défaut des spacieuses et confortables demeures[3] *que j'ai eu à cœur d'assembler pierre par pierre et de monter de mes mains."*

Là, il parle des schémas.

"Par contre, je ne vois personne d'autre sur la scène mathématique, au cours des trois décennies écoulées, qui aurait pu avoir cette naïveté, ou cette innocence, de faire (à ma place) cet autre pas crucial entre tous, introduisant l'idée si enfantine des topos (ou ne serait-ce que celle des "sites"). Et, à supposer même cette idée-là déjà gracieusement fournie, et avec elle la timide promesse qu'elle semblait receler..."

Vous savez, quelqu'un vous dirait : "Je vais faire ça...". "Bonne chance !", vous diriez ! D'accord... *(rires*[4]

"...je ne vois personne d'autre, que ce soit parmi mes amis d'antan ou parmi mes élèves, qui aurait eu le souffle, et surtout la foi, pour mener à terme cette humble idée (si dérisoire en apparence..."

Qu'est-ce que c'est que de s'évertuer sur les faisceaux d'ensembles sur un espace topologique ?...

"...(si dérisoire en apparence alors que le but semblait infiniment lointain...) : depuis ses premiers débuts balbutiants, jusqu'à la pleine maturité de la "maîtrise de la cohomologie étale", en quoi elle a fini par s'incarner entre mes mains, au cours des années qui ont suivi."

Bon après, il parle de détails, enfin, de choses qui sont importantes pour le mathématicien, mais il parle de la cohomologie étale et c'est à ce propos, comme il le dit :

"C'est inspiré par ce propos que j'avais découvert la notion de site en 1958." Donc, il a découvert la notion de site en 1958, et c'est cette notion, bien sûr, et le formalisme cohomologique, qui ont été développés plus tard.

Il dit :

"Quand je parle de "souffle" et de "foi"," (ça, c'est toujours pour le mathématicien), *"il s'agit là des qualités de nature "non-techniques" "*

Grothendieck a écrit quelque-part dans Récoltes et Semailles qu'il n'était pas rapide, qu'il était entouré de gens beaucoup plus rapides que lui, mais bon, c'est un exemple qui montre à quel point, il ne faut pas se décourager, quand on n'est pas rapide, bon quand on parle avec des gens dont on s'aperçoit qu'ils comprennent dix fois plus vite que vous, il ne faut pas se décourager. Par contre, ce qui est absolument crucial, c'est d'être persévérant, et d'avoir la foi dans une idée.

C'est-à-dire si vous avez une idée, il faut d'abord que vous vous l'appropriez, que vous la fassiez vôtre. Et une fois qu'elle est vôtre, il faut la protéger ;au départ, il faut la protéger comme un tout petit enfant qui vient de naître. Il ne faut pas trop la montrer, pas trop, etc. *(petits rires)* Et puis après... Pas tellement parce que quelqu'un peut vous la prendre mais parce qu'il faut que vous la testiez, on va en parler plus

3. adresse de l'orateur au public : "là, il parle des schémas"
4. pour souligner l'ironie de l'euphémisme du Bonne chance par rapport à l'ampleur de la tâche que cela représente.)

tard, il faut que vous la testiez, il faut que vous vous habituiez à elle, en privé.

"A un autre niveau, je pourrais y ajouter aussi ce que j'appellerais le "flair cohomologique", c'est-à-dire le genre de flair qui s'était développé en moi pour l'édification des théories cohomologiques."

Après, il râle un peu contre ses élèves, mais ça, on en a l'habitude avec Grothendieck.

On va faire une petite pause : on ne va pas s'arrêter mais je vais vous faire écouter Yves Montand *(rires)*.

"Oui, la rivière est profonde, et vastes et paisibles sont les eaux de mon enfance, dans un royaume que j'ai crû quitter il y a longtemps. Tous les chevaux du roi y pourraient boire ensemble à l'aise et tout leur saoul, sans les épuiser ! Elles viennent des glaciers, ardentes comme ces neiges lointaines, et elles ont la douceur de la glaise des plaines. Je viens de parler d'un de ces chevaux, qu'un enfant avait amené boire et qui a bu son content, longuement. Et j'en ai vu un autre venant boire un moment, sur les traces du même gamin si ça se trouve -mais là ça n'a pas traîné. Quelqu'un a dû le chasser. Et c'est tout, autant dire."

La fille qui a tant d'amoureux qu'elle ne sait lequel prendre et qui a choisi son petit cordonnier...

Voilà, on revient aux choses sérieuses.

Alors, il continue, il dit :

"Je vois pourtant des troupeaux innombrables de chevaux assoiffés qui errent dans la plaine - et pas plus tard que ce matin même leurs hennissements m'ont tiré du lit, à une heure indue, moi qui vais sur mes soixante ans et qui aime la tranquillité. Il n'y a rien eu à faire, il a fallu que je me lève. Ca me fait peine de les voir, à l'état de rosses efflanquées, alors que la bonne eau pourtant ne manque pas, ni les verts pâturages. Mais on dirait qu'un sortilège malveillant a été jeté sur cette contrée que j'avais connue accueillante, et condamné l'accès à ces eaux généreuses. Ou peut-être est-ce un coup monté par les maquignons du pays, pour faire tomber les prix qui sait ? Ou c'est un pays peut-être où il n'y a plus d'enfants pour mener boire les chevaux, et où les chevaux ont soif, faute d'un gamin qui retrouve le chemin qui mène à la rivière..."

Alors, avec Pierre Cartier et Olivia Caramello, on a organisé un colloque, il y a de ça deux ans, à l'IHES, justement pour raviver l'idée des topos, mais vraiment des topos de Grothendieck, et le colloque a été remarquable, ça s'est très très bien passé.

Alors qu'est-ce qu'un topos de Grothendieck ? Donc maintenant on revient aux mathématiques. Donc il y a trois manières de les définir : c'est sans doute la première manière qui est la plus simple. Alors, si vous voulez, comme Grothendieck l'expliquait quand il fait son cours, la chose importante, au départ, c'étaient des pré-faisceaux, c'est-à-dire c'étaient des foncteurs contravariants qui allaient de la catégorie des ouverts, mais c'est une catégorie extrêmement simple, hein. Je veux dire c'est une catégorie pour laquelle entre deux objets, il y a au plus un morphisme donc c'est vraiment quelque-chose d'extrêmement simple. Donc on regardait les foncteurs contravariants qui allaient de cette catégorie vers les ensembles. Alors maintenant, on enlève toutes les conditions sur cette catégorie, sauf que c'était une petite catégorie. Qu'est-ce que ça veut dire une petite catégorie ? Ca veut dire que les objets forment un ensemble. Et puis les morphismes aussi bien entendu. Donc on regarde une petite catégorie et on regarde tous les foncteurs contravariants de cette petite catégorie vers les ensembles. On oublie le fait qu'on avait les ouverts et qu'on avait une catégorie extrêmement particulière en regardant les ouverts. D'accord, on prend n'importe laquelle. Et alors maintenant, ce qu'on demande, bien sûr, on ne va pas prendre tous les foncteurs contravariants, puisqu'on sait bien, et Grothendieck l'expliquait dans ce qu'on a écouté, qu'on ne va pas prendre tous les pré-faisceaux. Parmi ces pré-faisceaux, on va en sélectionner qu'on va appeler des faisceaux. Quelle est la propriété importante de cette sélection ? Il y a deux choses qui sont très importantes dans cette sélection : la première, c'est qu'on ne va pas changer les morphismes ; la première chose qui est fondamentale, c'est que quand vous prenez un morphisme d'un faisceau vers un autre faisceau, en fait, vous pouvez oublier que ce sont des faisceaux. C'est un morphisme de pré-faisceaux, d'accord. Donc en fait, quand on va sélectionner la sous-catégorie de la catégorie des pré-faisceaux, on va prendre une sous-catégorie pleine. Sous-catégorie pleine, ça veut dire qu'on ne va pas changer la notion de morphisme. D'accord, c'est crucial, ça, si vous écoutiez Grothendieck plus loin, il en parle et il dit bien que c'est crucial. Donc première chose. Deuxième chose, qui est extrêmement importante, c'est qu'il y a un moyen, lorsque vous avez un pré-faisceau de le faisceautiser, de le transformer en un faisceau. Donc ça veut dire que les faisceaux sont des pré-faisceaux particuliers, mais il y a une espèce de projection qui vous permet de remplacer un pré-faisceau par un faisceau. Alors quelle est la manière de le dire qui est correcte : c'est que le foncteur qui inclut la catégorie des faisceaux dans la catégorie des pré-faisceaux, bon d'abord il est plein, il est fidèle, parce qu'on n'oublie rien, mais surtout, il a un adjoint à gauche, qui est la faisceautisation, et par miracle, cette action à gauche, il est exact à gauche, ce qui n'est normalement jamais le cas pour un adjoint à gauche. Normalement, un adjoint à gauche, on sait que dans tous les cas, il va préserver ce qui s'appelle les colimites, mais c'est très rare qu'il préserve les limites. Eh bien là, ça préserve les limites. Donc c'est ça la condition. Donc si vous voulez une définition courte de ce que c'est qu'un topos, c'est ça.

Alors maintenant ce qu'on va voir, et puis on va voir ce que c'est qu'un site, il y a une autre manière de le dire qui est plus précise : c'est qu'en fait, on sait que toute faisceautisation, comme celle dont je vous parlais, en fait, elle provient de ce qu'on appelle une topologie de Grothendieck sur la petite catégorie dont on est parti. Alors on va voir ce que c'est. Et puis en fait, il y a une troisième définition de ce que c'est qu'un topos. Mais alors ça, c'est vraiment une définition, comment dire, très abstraite mais c'est une définition qui énonce des propriétés qui sont vraies pour la théorie des ensembles, d'accord. Et on demande que le topos les vérifie aussi. Alors ça, ça a engendré une autre théorie des topos, qu'on appelle la théorie des topos élémentaires, qui ne sont pas des topos de Grothendieck en général. Mais alors, qu'est-ce qu'il manque à un topos élémentaire, donc un topos qui vérifie des propriétés naïves de théorie des ensembles, pour être un topos de Grothendieck ? Ce qui lui manque, ce sont les constantes. C'est-à-dire que tout à l'heure, dans la métaphore, je vous disais qu'on a des ensembles variables, qui dépendent d'un aléa. Eh bien, quand on a un topos de Grothendieck, il y a ce qu'on appelle un morphisme géométrique, qui va du topos vers le topos des ensembles, et ça permet de parler des constantes. Or parler des constantes, lorsqu'on fait de la cohomologie par exemple, c'est absolument essentiel. Parce que ce sont les constantes qui permettent par exemple de définir les sections globales d'un faisceau, etc., etc. Donc c'est pas du tout innocent, et il y a une différence très grande entre un topos de Grothendieck et ce qu'on appelle un topos élémentaire qui rassemblerait des propriétés élémentaires de la théorie des ensembles.

Alors les exemples. Bon alors parmi les exemples, il y a bien sûr l'exemple des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique. C'est le premier exemple. Le deuxième exemple, j'en ai déjà parlé, ce sont les faisceaux pour la topologie de Zariski, donc c'est un cas particulier des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique. Mais comme je le disais, l'intérêt, c'est que quand on cherche les points, pour ce topos-là, on trouve les bons points du schéma, d'accord. Et enfin, il y a un troisième exemple, qui est ce que Grothendieck a introduit en 58 pour avoir la cohomologie étale, c'est-à-dire qu'on part d'un schéma, et il y a un topos qui est associé au schéma, mais ça n'est plus un topos qui provient d'une topologie sur le schéma. Donc c'est quelque-chose qui est au-dessus et qui, bon, bien sûr, là, c'est déjà un topos au sens original si vous voulez, qui est en dehors des espaces topologiques.

Donc je reviens à Grothendieck, il dit :

Le thème du topos est issu de celui des schémas, l'année même où sont apparus les schémas - mais en étendue il dépasse largement le thème-mère. C'est le thème du topos, et non celui des schémas, qui est ce "lit", ou cette "rivière profonde", où viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre, la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des structures "discontinues" ou "discrètes". Si le thème des schémas est comme le cœur de la géométrie nouvelle, le thème du topos en est l'enveloppe, ou la demeure. Il est ce que j'ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse, par un même langage riche en résonances géométriques, une "essence" commune à des situations des plus éloignées les unes des autres, provenant de telle région ou de telle autre du vaste univers des choses mathématiques. Ce thème du topos est très loin pourtant d'avoir connu la fortune de celui des schémas.

Il y a une espèce de malédiction sur les topos. Il y a une malédiction qui règne, on y reviendra peut-être si on a le temps. Alors voilà la métaphore. Donc la métaphore dont je vous parlais tout à l'heure. Il faut absolument que vous ayez une image mentale de ce que c'est qu'un topos. Donc on avait l'habitude, comme je le disais, de mettre l'espace à étudier sur le devant de la scène. Ce que fait Grothendieck, c'est de lui faire jouer ce rôle de Deus ex machina, qui n'est pas présent, qui reste dans les coulisses. Mais ce qui est important, c'est de savoir que, quand vous avez un topos, vous pouvez faire toutes les manipulations, vous pouvez parler de groupes abéliens, vous pouvez parler d'algèbres, etc., et si vous travaillez avec un topos provenant d'un espace topologique, ça vous donnerait les faisceaux de groupes abéliens, ou les faisceaux d'algèbres, etc., c'est formidable, c'est formidable d'avoir cette liberté de manœuvre. Bon, alors, lorsqu'on travaille dans un topos, tout se passe comme si on manipulait des ensembles ordinaires. Donc c'est ça qu'il faut savoir. En fait, dès qu'on fait des fibrés vous savez sur un espace, on prend l'habitude de penser à un fibré comme à un espace vectoriel variable. Mais là, la variabilité, c'est la **bonne** notion de variabilité, parce que ça paramétrise les ensembles. Sauf que l'on ne peut plus appliquer la règle du tiers-exlus. Donc ce qui apparaît si vous voulez, c'est qu'on ne peut plus, pour une proposition dire la proposition p est vraie, ou la proposition *non p* est vraie, on n'a plus le tiers-exclus. Alors on va très vite voir un exemple concret d'un topos pour lequel cette notion de vérité devient plus subtile que le simple vrai ou faux que nous utilisons familièrement. Par exemple, si vous voulez, si vous regardez la télévision, et vous regardez une discussion politique à la télévision ; eh bien, nous avons l'habitude de dire "celui-là a raison et celui-là a tort". Eh bien, je prétends qu'on n'a pas l'outil conceptuel qu'il faut pour juger. Et je vais vous donner des exemples. Je vais vous montrer à quel point la notion de vérité est une notion beaucoup plus subtile et à quel point l'idée du topos permet de la formaliser. Donc on va faire marcher ça sur un exemple. Pour faire marcher ça, on va introduire des topos qui sont autres que les topos qui viennent d'un espace topologique et qui ont une nature extrêmement simple : ce sont les topos qui consistent à prendre une petite catégorie et à prendre simplement la catégorie de tous les foncteurs contravariants vers les ensembles. Donc là, on ne fait pas de distinction entre faisceaux et pré-faisceaux. On prend tous les pré-faisceaux. On dit que ce sont tous des faisceaux. Donc à une petite catégorie, on va associer un topos qui est son espèce de dual, si vous voulez, qui est tous les foncteurs contravariants de cette petite catégorie vers les ensembles, et on va s'amuser avec ça.

Alors en 91, Grothendieck était encore parfaitement en contact avec certains mathématiciens, et voilà ce qu'il écrivait, c'est dans une lettre à Thomasson, il dit :

"D'autre part pour moi, le paradis originel pour l'algèbre topologique n'est nullement la catégorie simpliciale..." donc, je ne sais pas si on aura le temps d'en parler, mais il parle des topos.

"En effet, les topos ayant comme catégories des faisceaux d'ensembles les $\hat{C}$, avec C une petite catégorie, sont de loin les plus simples des topos connus." Et c'est pour l'avoir senti qu'il insiste tant sur ces topos catégoriques dans SGA4. Donc si vous regardez SGA4, vous verrez qu'il y a deux exemples fondamentaux de topos ; bien sûr, il y a le topos étale, et puis il y a les topos qui sont duaux d'une catégorie. D'accord. Alors on va s'amuser avec ça.

Alors quelle est la notion de vérité dans un topos ? *(rires)* En quel sens la notion de vérité est différente dans un topos ? Alors, en quel sens d'abord, est-ce qu'on est capable, dans les ensembles, de définir le vrai et le faux ? Alors, comment va-t-on définir le vrai et le faux dans la théorie des ensembles ? On va s'intéresser à essayer de classifier les sous-ensembles d'un ensemble, d'accord. Vous voyez, si vous travaillez avec les ensembles ordinaires, et si je vous dis "j'ai un foncteur qui, si vous me donnez un ensemble, lui associe tous ses sous-ensembles.". C'est un foncteur parce que si vous avez une application qui va de X dans Y, vous pouvez rappeler en arrière les sous-ensembles de Y, donc c'est un foncteur. Alors maintenant, la question, c'est "est-ce que ce foncteur est représentable ?". C'est une notion mathématique, d'accord, et alors dans les ensembles, il est représentable à cause d'une notion que nous, nous connaissons très très bien : c'est qu'à un sous-ensemble, on associe ce qu'on appelle sa fonction caractéristique. C'est-à-dire quand on a un sous-ensemble d'un ensemble, on définit une fonction : cette fonction, elle vaut 1 si on est dans le sous-ensemble, et elle vaut 0 si on n'est pas dans le sous-ensemble. Alors cette fonction, il se fait qu'elle a une propriété assez miraculeuse : c'est qu'elle classifie, c'est-à-dire qu'elle représente ce foncteur. Dans le cas des ensembles, il y a un objet privilégié Ω qui est l'objet qui est formé de l'ensemble $\{0, 1\}$, l'ensemble à deux points, et quand vous regardez tous les sous-ensembles d'un ensemble, ça revient à regarder toutes les applications de cet ensemble vers l'ensemble $\{0, 1\}$. Puisque quand vous avez une application qui va vers l'ensemble $\{0, 1\}$, le sous-ensemble, il est défini par le sous-ensemble sur lequel elle prend la valeur 1. Mais là où elle ne prend pas la valeur 1, eh bien, elle prend forcément la valeur 0. Eh bien, si on réfléchit suffisamment, en logique, en pensant dans le langage des topos, on s'aperçoit que c'est ce simple fait qu'il n'y avait que 0 et 1 dans les ensembles qui permet d'avoir le principe du tiers-exclus.

Donc maintenant on va s'amuser avec un topos qui est un tout petit peu plus compliqué. On va prendre, alors, c'est ce que j'appelle "à deux pas de la vérité". Alors, qu'est-ce qu'on va prendre comme topos ? On va prendre la catégorie C qui n'a qu'un seul objet, et qui a pour morphisme les puissances d'un seul morphisme. C'est-à-dire que je choisis un seul morphisme qui va de cet objet dans lui-même et je l'élève à des puissances, d'accord, T^n. Alors qu'est-ce que ça veut dire, un objet de la catégorie des foncteurs contravariants de cette catégorie vers les ensembles ? Ca veut simplement dire un ensemble avec une application de X dans X. C'est tout. Pourquoi vous n'avez qu'un seul ensemble ? Parce que la catégorie n'avait qu'un objet. Donc vous n'avez qu'un ensemble. Et en fait, la catégorie, elle n'avait qu'un seul morphisme, bon, on l'élève à ses puissances, mais, je veux dire... il suffit de le connaître, il suffit de connaître son image. Qu'est-ce que c'est que son image ? C'est une transformation T de X dans X. Quel est le topos ? Eh bien, ce sont les ensembles munis d'une transformation. Bon eh bien, les ensembles munis d'une transformation, ça fait un topos. C'est une catégorie, d'accord. Comment est-ce une catégorie ? C'est une catégorie parce que si vous avez deux ensembles avec une transformation, vous avez les applications de X dans Y qui respectent la transformation. C'est à dire qu'ils vérifient que l'image de TX $(f(TX))$, c'est $Tf(x)$. Donc vous avez une catégorie, et cette catégorie, c'est un topos. Pourquoi c'est un topos ? Parce que c'est le dual d'une petite catégorie que je vous ai donnée.

Bon alors maintenant, on va chercher Ω, pour ça. Donc on va chercher à classifier les sous-objets d'un objet. Alors, pourquoi est-ce embêtant, d'essayer de classifier les sous-objets d'un objet ? Eh bien, on va essayer avec $0, 1$. On va essayer avec la fonction caractéristique, comme on faisait tout à l'heure. Après tout, si je prends un ensemble avec une application, si je prends un sous-objet, c'est un sous-ensemble qui est stable par l'application, d'accord. Donc si je prends mon X, je vais prendre un sous-ensemble Y qui était invariant, qui était invariant par l'application T. Bon. Très bien. Il est invariant par l'application T. Donc je vais associer la valeur 1 sur ce sous-ensemble, d'accord. Sur le sous-ensemble, je vais donner 1. Pourquoi est-ce que je ne peux pas donner la valeur 0, sur le complémentaire ? Eh bien parce qu'il peut y avoir des points du complémentaire qui vont finir par atterrir dans l'ensemble en question. Je ne suis pas du tout assuré que le complémentaire va être invariant par T. Il peut très bien se produire qu'un point du complémentaire, au bout d'un moment, tac !, il va taper dans le sous-ensemble en question. C'est pas parce que le sous-ensemble en question est invariant que son complémentaire est invariant. Bien sûr que non ! La transformation, je n'ai pas pris une action de Z, j'ai pris une action de N. Alors comment on va faire ? C'est embêtant ! Ca veut dire que l'application qui allait vers 0 et 1, elle ne marche pas, elle ne marche pas. Bon ! Eh bien, il faut se creuser la tête un petit peu. Qu'est-ce qu'il faut faire ? Eh bien, quand je prends un x qui est dans X, il va exister un plus petit entier, un premier entier, tel que quand j'applique T n fois, ça tape dans le sous-ensemble. D'accord. Donc je vais lui associer cet entier. Cet entier, il sera l'infini, bien sûr, si jamais on arrive dans le sous-ensemble.

Donc on voit qu'il faut remplacer l'ensemble $\{0, 1\}$ par l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, \ldots, \infty\}$. Et comment va-t-on faire de cet ensemble un ensemble muni d'une transformation ? Eh bien, on s'aperçoit que si je regarde le h, c'est-à-dire le plus petit entier pour TX, eh bien le plus petit entier pour TX, ça va être le plus petit entier pour X moins 1 sauf si ça devient négatif ; si ça devient négatif, ça ne marche pas ; donc je prends le *sup* avec 0. D'accord.

Donc vous voyez que pour ce topos, alors la notion de vérité qui avant était simplement 0 ou 1, maintenant, elle est donnée par l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, \ldots, \infty\}$, avec la transformation qui remplace par $N - 1$. Alors qu'est-ce que ça veut dire ? Eh bien, ça veut dire qu'on a un exemple incroyablement simple d'un topos qui permet de dire "Ouais, ce que tu fais, ouais, euh, je dirais, euh, c'est à 10 pas de la vérité...". Moi, j'ai toujours dit que les gens qui font de la théorie des cordes, c'est à une infinité de pas de la vérité. *(rires)*

Donc vous voyez que cette notion, pour innocente qu'elle soit, pour bêbête qu'elle ait l'air, en fait, elle a un potentiel d'une richesse absolue. Et ce que je prétends, c'est que notre esprit, notre formation logique, est extrêmement primitive parce que nous avons l'habitude, lorsque nous écoutons une discussion politique de décréter "oui ou non", "telle personne a raison, telle personne a tort" et on est dans l'erreur en faisant cela et s'il y avait des philosophes, bon, je rêve hein, s'il y avait des philosophes connaissant les maths, et qui comprennent les topos de l'intérieur, et il y en a très peu, qui comprennent les topos de l'intérieur, ils seraient capables de donner des modèles, qui seraient utiles, pour beaucoup mieux apprécier ce genre de discussions, ce genre de situations, qui sont en fait beaucoup plus subtiles par rapport à la notion de vérité, que cette notion d'une inefficacité absolue, que nous utilisons tout le temps, et qui est "un tel a raison ou un tel a tort.". Donc, je voulais absolument vous donner cet exemple pour que vous le gardiez en tête, et que vous essayiez de construire d'autres exemples semblables ; il y a des exemples finis bien entendu, ne soyez pas effrayés par le fait qu'il y a des n qui vont de 0 à l'infini, en fait, vous pouvez très bien imaginer des constructions finies, d'accord. Les constructions finies, il y a une richesse combinatoire dans les topos qui fait que les constructions finies ont un potentiel extraordinaire.

Alors qu'est-ce qu'un crible ? Cet exemple va nous permettre de définir ce que c'est qu'un crible. Qu'est-ce que c'est qu'un crible ? Je vous ai donné un exemple de crible. Le Ω en général, quand vous prenez la catégorie, qui est donnée par, euh le topos pardon, qui est donné par tous les foncteurs contravariants d'une petite catégorie vers les ensembles, eh bien on construit le Ω et comment est construit le Ω ? Le Ω, il est construit à partir d'un crible. Alors qu'est-ce qu'un crible ? Eh bien un crible sur un objet d'une catégorie, le Ω va être construit à partir des objets de cette catégorie, rappelons-nous que la catégorie dont j'ai parlé tout à l'heure, elle n'avait qu'un seul objet. Donc pour le moment, on n'a rien. On a un seul objet. Alors, un crible sur un objet X, sur notre objet $\star$, c'est la donnée d'une famille de morphismes $C(x)$ qui est contenue dans tous les morphismes dont l'image est X... enfin, ça va d'un ensemble Z vers X, dont le codomaine est X, et qui est stable par composition à droite.

Quels sont les cribles, dans l'exemple de tout à l'heure ? On avait un seul objet ; les morphismes qui allaient dans cet objet, c'étaient simplement les entiers, puisque c'étaient les puissances de T, il y avait $T^0, T^1, T^2, \ldots$. Qu'est-ce que c'est qu'un crible ? Eh bien, un crible, c'est un espèce d'idéal si vous voulez, c'est-à-dire que c'est une famille de morphismes qui est stable par composition à droite, par n'importe quel morphisme. Donc dans le cas de tout à l'heure, qu'est-ce que c'est que la composition à droite ? Ca rajoute à un entier, eh bien, ça lui rajoute n'importe quel entier. Ca revient à regarder tous les intervalles infinis d'un côté. Alors, parmi les intervalles infinis, vous avez quoi, vous avez 0, jusqu'à l'infini, ça, c'est ce qu'on appelle... enfin, c'est un crible qui doit être toujours présent ; c'est le crible qui est formé de tous les morphismes. Et puis ensuite, on avait tous les morphismes qui étaient à partir d'un certain entier n. Ca, c'était un crible, d'accord, et c'était quand on était à distance n. Et puis, il y a le crible où il n'y en a aucun, c'est l'ensemble vide, et ça, ça correspondait à l'infini tout à l'heure. Voilà.

Alors il se fait que donc en général, on peut définir le Ω, les valeurs de vérité si vous voulez, pour le dual d'une petite catégorie, et on le définit exactement à partir des cribles. Quand on calcule Ω donc, on construit cet objet, simplement comme toujours comme un foncteur contravariant d'un ensemble etc., mais on le construit à partir des cribles sur chacun des objets de la catégorie. Dans notre cas, il y avait un seul objet donc c'était très simple. C'était très très simple.

Alors moi j'ai été longtemps fasciné par l'idée que Grothendieck avait appelé crible et qu'il n'ignorait pas que ce nom avait déjà été utilisé par les mathématiciens, et qu'il y a par exemple un crible qui est bien connu et qui est le crible d'Eratosthène. Alors j'ai finalement trouvé la réponse, j'ai finalement trouvé pourquoi le crible d'Eratosthène est un crible, au sens de Grothendieck et ça, ça vient d'un travail en commun qu'on a fait avec Katia Consani et dans lequel la catégorie qu'on prend, elle est très semblable à celle de tout à l'heure, où il y avait une seule transformation, mais cette fois, elle est un peu plus compliquée quand-même, parce que, au lieu d'avoir (on a toujours un seul objet, comme avant), mais au lieu d'avoir les puissances d'un seul morphisme, on a une action des entiers multiplicatifs. C'est-à-dire que pour chaque entier, on a un morphisme, et quand on fait le produit de deux entiers, les morphismes se composent. Alors c'est un exercice de démontrer que le crible d'Eratosthène est un crible de la manière suivante : c'est très amusant. Parce que... qu'est-ce que c'est que le crible d'Eratosthène ? Le crible d'Eratosthène, ça consiste à prendre le premier nombre non trivial. On va foutre en l'air 1, hein, on s'en fout de 1, d'accord. Donc on prend le premier nombre non trivial qui est 2. Et que fait le crible ? Le crible considère tous les multiples de 2, tous les nombres pairs, sauf 2. Et puis après, il reste des choses, bon. Il reste 3 par exemple, alors il prend tous les multiples de 3 sauf 3. Et puis il reste des choses, 4 on l'a déjà pris puisque... Donc il prend tous les multiples de 5 sauf 5. Eh bien, je prétends que si vous regardez les entiers comme les morphismes, les entiers multiplicatifs, comme les morphismes d'une catégorie qui n'a qu'un seul objet, et si vous regardez tout ce que je viens de vous dire, c'est-à-dire si vous regardez tous les entiers pairs sauf 2, tous les multiples de 3 sauf 3, etc., ça, ça fait un crible au sens que je vous ai donné tout à l'heure. Et ça vous montre à quel point la notion de vérité est subtile pour cette catégorie-là, parce que ça, je vous ai donné seulement **un** exemple de crible. Vérifier que c'est un crible, c'est trivial, c'est pas la question, c'est pas la difficulté.

Alors maintenant, une fois qu'on a la notion de crible, on va voir la notion de topologie de Grothendieck. Je ne pouvais pas faire un exposé sur les topos sans donner la définition d'une topologie de Grothendieck. Alors, moi, je vais vous dire le moment qui pour moi a été crucial dans l'appréciation de la notion de topos. Le moment qui a été crucial, c'est le suivant : c'est que avant, quand on me présentait un topos, on me présentait toujours un topos en me disant "je prends une catégorie, une petite catégorie, et je suppose qu'elle est stable par produit fibré." A ce moment-là, mon oreille se fermait et je pensais à autre chose, d'accord *(rires)*. Et la raison, c'est la suivante : c'est que, quand on dit ça, et qu'après on écrit ce que c'est qu'une base, etc., on a bien sûr en tête l'intuition topologique ; c'est-à-dire que quand on dit que la catégorie a des produits fibrés, on pense à deux ouverts qui ont une intersection. Et à partir de là, bon, on peut développer les choses. Et alors, ce qui pour moi a été crucial, c'est le moment où j'ai compris en fait que, déjà dans SGA4, Grothendieck avait défini les sites, et les produits fibrés sur les sites, *sans aucune hypothèse* sur la petite catégorie, *sans aucune hypothèse* sur la petite catégorie, on n'a absolument pas besoin de supposer *quoi que ce soit* sur la petite catégorie, et l'avantage énorme, c'est que lorsqu'on fait ça, on comprend mieux ce dont on parle. Vous savez, en mathématiques, il y a une chose qu'il faut comprendre, c'est que la principale difficulté quand on est devant un problème, c'est d'arriver à **penser juste**. Et penser juste, ça a l'air idiot, ça a l'air de... chercher à penser juste... mais une fois qu'on arrive à penser juste, les choses tombent comme des fruits mûrs, mais il faut savoir penser juste. Et ça n'est pas penser juste que de demander à la petite catégorie d'avoir des produits fibrés. Penser juste, c'est ce qu'il y a là, c'est-à-dire le crible maximal, le fait que quand vous avez un crible... Donc, qu'est-ce que c'est qu'une topologie de Grothendieck, c'est une collection de cribles, on donne pour chaque objet une collection de cribles, et on a des conditions de compatibilité. Mais quelle est l'intuition qu'il faut avoir derrière ? Peu importe le détail des axiomes. Quelle est la... Quand vous faites de la topologie, vous avez l'intuition des recouvrements ouverts. C'est une intuition qui est très délicate, je vais vous expliquer pourquoi elle est très délicate. Prenez par exemple l'intervalle $[0,1]$. Et puis ne prenez dans l'intervalle $[0,1]$ que les nombres rationnels. Ils sont denses, donc vous reconnaîtrez les ouverts, avec les nombres rationnels, puisque les ouverts, ce sont des réunions d'intervalles. Un intervalle, je le connais par son intersection avec les rationnels. D'accord ? Qu'est-ce qui va changer ? Pourquoi est-ce que si je prends le topos qui est donné par les rationnels avec ces ouverts-là, j'obtiens quelque-chose de différent que le topos qui est donné par l'intervalle $[0,1]$ avec ses ouverts ordinaires ? Ils se ressemblent, ils ont l'air d'être les mêmes. Eh bien, si vous cherchez, vous allez trouver qu'en fait, il y a beaucoup plus de recouvrements ouverts pour les rationnels qu'il n'y en a pour les réels. Pour les rationnels, il y a des recouvrements ouverts qui sont là alors qu'ils ne sont pas là pour les réels. Voilà. Typiquement si vous voulez, c'est que si vous prenez une suite d'ouverts de plus en plus grands mais dont la limite est un nombre irrationnel, eh bien, cela, ça va apparaître comme un recouvrement au niveau rationnel mais ça ne sera pas un recouvrement au niveau réel. D'accord ? C'est-à-dire qu'au niveau réel, si vous prenez le complémentaire de ça, la réunion des deux, ça ne sera pas un recouvrement ouvert. Donc en fait, il y a beaucoup moins de recouvrements ouverts pour les réels qu'il n'y en a pour les rationnels. Quand on pense topologiquement, on pense comme ça. Quand on pense au niveau des topos, on pense différemment : comment on pense au niveau des topos ? On pense que les cribles, ça signifie des choses petites, ça signifie des objets petits. Passer au crible, ça revient à donner des objets qui sont petits. Et à ce moment-là, les axiomes, ils deviennent presque absolument évidents. Et qu'est-ce que ça signifie qu'un objet est petit par rapport à un recouvrement ouvert ? Qu'est-ce que ça signifie qu'un recouvrement est petit par rapport à un recouvrement ouvert ? Ca signifie qu'il passe à travers, ça signifie qu'il est contenu dans un des ouverts du recouvrement : il passe à travers un trou. Donc, c'est ça l'intuition qu'il faut avoir : l'intuition du crible, c'est que ce sont des choses qui sont petites, et qui passent à travers les trous. D'accord.

Alors ceci dit, maintenant, on a l'intuition d'une topologie de Grothendieck quand il y a une base, etc. ; je ne vais pas vous embêter avec ça. Alors il y a une notion essentielle dans les topos mais c'est pareil, je ne vais pas en parler trop longtemps : c'est la notion de point. Et surtout la notion de morphisme géométrique. Donc si vous voulez, les topos... Il se fait qu'une fois qu'on pense juste à propos des topos, les mêmes propriétés qui sont vraies pour les espaces topologiques continuent à avoir un sens, mais évidemment, elles sont beaucoup plus subtiles. Typiquement, ce qui se produit, et ça, j'ai copié une page de SGA4, c'est ce que c'est qu'un morphisme d'un topos dans un autre, ce qu'on appelle un morphisme géométrique.

Alors pour comprendre ce que c'est qu'un morphisme géométrique, c'est-à-dire un morphisme d'un topos dans un autre, il faut avoir une certaine familiarité avec les faisceaux sur un espace. Pourquoi ? Parce que lorsqu'on a une application continue d'un espace X vers un espace Y, si j'ai une application continue f qui va de X dans Y, eh bien, il se fait qu'il y a deux manières de relier les faisceaux sur X avec les faisceaux sur Y. Il y a deux manières de le faire. Et ces deux manières, il y en a une qui est tautologique, presque triviale, et qui consiste à prendre un faisceau sur X et à l'envoyer en avant vers un faisceau sur Y. Et ça, en quel sens c'est trivial ? C'est trivial parce qu'il vous suffit, quand vous prenez un ouvert sur Y, de prendre son image inverse et de regarder les sections du faisceau sur X sur cet ouvert, sur l'image inverse. Donc ça, ça fait un faisceau, il n'y a pas de problème. Donc cette définition, elle va de soi. Mais il y a une autre manière de relier les faisceaux de X et les faisceaux de Y qui va dans l'autre sens, c'est-à-dire qui envoie un faisceau sur Y vers un faisceau sur X, et celle-là, elle est beaucoup plus intéressante, elle est beaucoup moins triviale. Elle est visuellement évidente si on pense à un faisceau comme un espace étalé sur l'espace de base, et c'est en particulier le cas pour les faisceaux d'ensembles, mais, là où elle est extrêmement intéressante, c'est que cette application qui va dans l'autre sens, elle a une propriété merveilleuse, elle a une propriété totalement inattendue. D'abord, elle est adjointe à gauche de l'autre. Ca, ça se vérifie, ça n'est pas une grande chose, on aurait pu la définir comme ça. Donc elle est adjointe à gauche de l'autre, de celle qui allait en avant, très bien. Mais elle a une propriété merveilleuse, et cette propriété merveilleuse, c'est la propriété qu'elle est exacte à gauche, c'est-à-dire qu'elle commute avec les limites. Donc ça, c'est une propriété extrêmement puissante, extrêmement étonnante, et je pense que l'exemple qui est dû à Pierre, l'exemple le plus frappant de ça, il faut être frappé par un exemple, tant que vous n'êtes pas frappé par un exemple, vous ne comprendrez pas. L'exemple le plus frappant de ça, c'est ce qu'on appelle les ensembles simpliciaux, les complexes simpliciaux. Donc ce que vous faites, il y a une petite catégorie, donc un peu plus compliquée que celle de tout à l'heure, (intervention de Pierre Cartier) *dont Grothendieck ne veut pas*, repris par Alain Connes, dont Grothendieck ne veut pas, précisément. Je vais revenir à la page de Grothendieck parce qu'il n'en veut pas. C'est amusant d'ailleurs. Voilà.

C'est celle dont Grothendieck ne veut pas. C'est cette petite catégorie qu'on appelle Δ^{op}, c'est la catégorie semi-simpliciale, c'est quoi ? Ce sont les ensembles finis, totalement ordonnés, avec les applications non décroissantes. Cette catégorie, elle est très importante pour la raison suivante : en topologie, dans les années 40-50, s'est développée une notion, au départ, elle était formulée de manière un peu trop simple, qui était la notion de complexe simplicial. On prenait un espace et on le triangulait. Quand on prend l'espace ordinaire, on peut le trianguler, ou bien en dimension plus grande, etc. Quand on le triangule, on peut donner une donnée combinatoire qui encode la triangulation. Cette donnée combinatoire, on peut la formuler en regardant ce qu'on appelle le complexe simplicial mais de manière entièrement combinatoire, en prenant des simplexes, etc. Alors, il se fait que si on fait les choses comme ça, ça ne marche pas très bien du tout pour le produit. C'est-à-dire que comme le produit de deux simplexes n'est pas un simplexe, par exemple, le produit de deux intervalles, c'est un carré, ça n'est pas un simplexe, mais ça ne marche donc pas bien du tout pour le produit. Mais c'est parce qu'on n'a pas pensé juste. Et c'est parce qu'on n'a pas fait une chose qui paraît triviale quand on la fait, mais qui en fait est fondamentale. Et cette chose qui est triviale quand on la fait, mais qui en fait est fondamentale, c'est qu'il faut beaucoup mieux comprendre la réalisation géométrique de cet objet combinatoire, et cette réalisation géométrique de l'objet combinatoire, en fait, c'est un point d'un topos. Il se fait qu'à cette catégorie est associé un topos, le topos bêbête, le topos des foncteurs contravariants qi va de cette catégorie vers la catégorie des ensembles, et que, c'est un théorème qu'on peut démontrer facilement, les points de ce topos, dans un sens sur lequel on ne va pas s'éterniser, les points de ce topos, ce sont exactement les intervalles. C'est-à-dire ce sont exactement les ensembles totalement ordonnés qui ont un plus petit élément et un plus grand élément. Donc les points de ce topos sont donnés exactement comme ça. Et quand on a un point du topos, eh bien, le foncteur d'image inverse, qui va vers les ensembles, eh bien, ce foncteur, c'est le foncteur de réalisation géométrique si on prend pour l'espace totalement ordonné avec un plus petit élément et un plus grand élément, si on prend l'intervalle $[0, 1]$, ça donne exactement la réalisation géométrique du simplexe, du complexe simplicial.

Alors maintenant, merveille des merveilles : ce foncteur préserve les limites finies et donc, il préserve les produits. Et donc, quand on prend le produit bêbête de deux ensembles simpliciaux, c'est-à-dire de deux foncteurs contravariants de cette petite catégorie vers les ensembles, eh bien, quand on prend la réalisation géométrique, ça va donner le produit des réalisations géométriques. C'est un exercice immédiat de vérifier que c'est compatible avec la topologie. Ca ne présente pas de difficulté, la difficulté, elle est purement ensembliste. Et, Pierre, c'est toi qui as démontré ce théorème pour la première fois, non ? (Pierre Cartier répond "Milnor"). Oui, Milnor ou toi. Mais, ce qu'il faut bien voir, c'est que la notion de topos comprend cette chose-là. Elle comprend cette chose-là et elle la généralise à un point absolument incroyable, c'est-à-dire qu'un point d'un topos maintenant, va justement préserver non seulement les colimites arbitraires, mais va préserver les limites finies, donc va préserver les produits, etc.

Et c'est pourquoi quand on prend un point d'un topos, ça nous emmène vers la théorie des ensembles mais en respectant tout ce qu'on sait. C'est à dire que ça va transformer un groupe abélien dans le topos en un vrai groupe abélien ; ça va transformer toutes les notions élémentaires qu'on peut avoir en une vraie notion en théorie des ensembles. Alors, il y a un pas sur lequel je ne vais pas m'attarder du tout, mais qui est extrêmement important et dans lequel justement, il y a des travaux très très intéressants qui se font maintenant, qui est celui des topos classifiant. C'est-à-dire qu'exactement comme il y a un espace classifiant pour les fibrés, ou vectoriel, etc., il y a un topos classifiant pour des notions logiques. Et une des merveilles de ça, qui répond un peu à la question de Grothendieck quand il dit "la sempiternelle catégorie Δ^{op}", c'est que le topos qui est associé, pas cette catégorie, mais le topos qui est associé à cette catégorie, c'est exactement le topos qui classifie les intervalles. C'est-à-dire que si on définit abstraitement ce que j'ai expliqué tout à l'heure, c'est-à-dire un intervalle, un ensemble totalement ordonné, mais il ne faut pas parler d'ensemble, dans une théorie arbitraire, eh bien on s'aperçoit que cette notion a un topos classifiant et que ce topos classifiant, c'est exactement le dual de la catégorie Δ^{op}. Bon.

Alors on ne va pas rentrer dans les détails. Maintenant on va faire autre chose : je ne veux pas rentrer dans les détails techniques, je ne veux pas. On va revenir à Grothendieck, on va relire du Grothendieck et puis on terminera en lisant la fin de l'échange entre Grothendieck et Serre dans leur correspondance. Donc voilà ce que dit Grothendieck. Bon, c'est très important d'avoir parlé des topos, mais c'est encore plus important d'essayer d'avoir perçu la manière de travailler de Grothendieck, parce que c'est de ça dont nous avons besoin. Bon, bien sûr, on va peut-être utiliser les topos pour faire toutes sortes de choses, mais on a aussi besoin, terriblement, dans notre civilisation : quand on assiste maintenant à un laïus qui est fait en public, on s'aperçoit qu'il y a un tiers des gens qui ont leur ordinateur ouvert devant eux et qui font leurs emails, *(rires)*, ou qui font autre chose, ou téléphone portable. Mais c'est une catastrophe, parce que quand on lit Grothendieck et quand on s'imprègne de sa manière de penser, on s'aperçoit d'une chose, la chose qui frappe le plus, c'est le temps dont il disposait. On a l'impression qu'il disposait d'un temps infini, d'un temps infini, qu'il n'était pas constamment dérangé. Vous savez, maintenant, on parle de la génération Y, c'est-à-dire ce sont les gens qui font 3 choses à la fois. On croit qu'on gagne du temps, mais ça n'est pas vrai. On a un besoin maintenant fondamental, dans notre civilisation, de s'isoler, et de pouvoir penser lentement, et de prendre le temps de tout vérifier, pour être sûr des choses, pour le faire deux fois, pour le faire trois fois, etc. C'est pour ça que j'ai fait durer, quand Grothendieck parlait des faisceaux, ça durait, hein, *(rigolard)*, ça durait, mais c'est exprès que je l'ai fait, je l'ai fait à dessein, parce que je voulais que vous vous rendiez compte de cette lenteur fondamentale. C'est une lenteur qui, quand on la ressent au premier degré, est irritante. C'est la lenteur de la tortue et du lièvre, si vous voulez *(rires)* Et c'est elle qui gagne. Donc voilà ce que dit Grothendieck :

"Quand je suis curieux d'une chose, mathématique ou autre, je l'interroge. Je l'interroge, sans me soucier si ma question est peut-être stupide ou si elle va paraître telle, sans qu'elle soit à tout prix mûrement pesée. Souvent la question prend la forme d'une affirmation - une affirmation qui, en vérité, est un coup de sonde. J'y crois plus ou moins, à mon affirmation, ça dépend bien sûr du point où j'en suis dans la compréhension des choses que je suis en train de regarder. Souvent, surtout au début d'une recherche, l'affirmation est carrément fausse - encore fallait-il la faire pour pouvoir s'en convaincre. Souvent, il suffisait de l'écrire.".

Une chose fondamentale que fait souvent Grothendieck, c'est qu'il est capable d'écrire une idée qui n'est pas encore mûre. Il est capable de se mettre à écrire, ça, c'est fantastique comme qualité.

"Souvent, il suffisait de l'écrire pour que ça saute aux yeux que c'est faux, alors qu'avant de l'écrire il y avait un flou, comme un malaise, au lieu de cette évidence. Ca permet maintenant de revenir à la charge avec cette ignorance en moins, avec une question-affirmation peut-être un peu moins "à côté de la plaque". Plus souvent encore, l'affirmation prise au pied de la lettre s'avère fausse, mais l'intuition qui, maladroitement encore, a essayé de s'exprimer à travers elle est juste, tout en restant floue."

Je m'arrête une seconde : quand il parle d'écrire, c'est encore une catastrophe l'ordinateur, parce qu'on écrit mieux, dans ce genre de situation lorsqu'on écrit sur du papier avec un crayon, parce que quand on écrit sur l'ordinateur, il faut que ça ait l'air parfait. On va se poser des question de LaTex, on va se poser des questions comme ça, mais c'est complètement ridicule, on n'en est pas là, on en est à un point où on a envie de laisser le crayon qui fait ce qu'il veut sur la feuille de papier. C'est très très important ça. Donc voilà ce qu'il dit :

"Cette intuition peu à peu va se décanter d'une gangue toute aussi informe d'abord d'idées fausses ou inadéquates, elle va sortir peu à peu des limbes de l'incompris qui ne demande qu'à être compris, de l'inconnu qui ne demande qu'à se laisser connaître, pour prendre une forme qui n'est qu'à elle, affiner et aviver ses contours, au fur et à mesure que les questions que je pose à ces choses devant moi se font plus précises ou plus pertinentes, pour les cerner de plus en plus près. Mais il arrive aussi que par cette démarche, les coups de sonde répétés convergent vers une certaine image de la situation,..."

Ca, ça veut dire qu'on est en train de se faire une image mentale.

"...sortant des brumes avec des traits assez marqués pour entraîner un début de conviction que cette

image-là exprime bien la réalité - alors qu'il n'en est rien pourtant, quand cette image est entachée d'une erreur de taille, de nature à la fausser profondément. Le travail, parfois laborieux ; qui conduit au dépistage d'une telle idée fausse. à partir des premiers "décollages" constatés entre l'image obtenue et certains faits patents, ou entre cette image et d'autres qui avaient également notre confiance".

Il faut dire là, que c'est très bien, dans ces cas-là qu'il décrit, de prendre un peu de recul, de faire autre chose, et Grothendieck avait souvent, Cartier me disait souvent qu'il avait 100 fers au feu. Quand on voit que les choses ont tendance à déconner un petit peu, il vaut mieux prendre du champ, parce qu'en fait, on est viscéralement attaché aux idées qu'on avait, et on ne veut pas accepter qu'elles soient fausses.

"Ce travail est souvent marqué par une tension croissante, au fur et à mesure qu'on approche du noeud de la contradiction, qui de vague d'abord se fait de plus en plus criante - jusqu'au moment où enfin elle éclate, avec la découverte de l'erreur et l'écroulement d'une certaine vision des choses, survenant comme un soulagement immense, comme une libération. La découverte de l'erreur est un des moments cruciaux, un moment créateur entre tous, dans tout travail de découverte, qu'il s'agisse d'un travail mathématique, ou d'un travail de découverte de soi. C'est un moment où notre connaissance de la chose sondée soudain se renouvelle."

Et voilà maintenant un des paragraphes les plus magnifiques que je connaisse :

"Craindre l'erreur et craindre la vérité est une seule et même chose. Celui qui craint de se tromper est impuissant à découvrir. C'est quand nous craignons de nous tromper que l'erreur qui est en nous se fait immuable comme un roc. Car dans notre peur, nous nous accrochons à ce que nous avons décrété "vrai" un jour, ou à ce qui depuis toujours nous a été présenté comme tel. Quand nous sommes mûs, non par la peur de voir s'évanouir une illusoire sécurité, mais par une soif de connaître, alors l'erreur, comme la souffrance ou la tristesse, nous traverse sans se figer jamais, et la trace de son passage est une connaissance renouvelée.".

Si un jour, vous n'avez pas le moral ou tout ça, relisez cette phrase. C'est une espèce de talisman. Alors je vais terminer en... J'avais commencé par la discussion entre Serre et Grothendieck, au tout début, sur l'article de Tohoku de Grothendieck, et je vais terminer avec une note assez différente, d'une tonalité très différente, qui est justement la réaction de Serre quand il a reçu *Récoltes et Semailles.* Donc euh, bon, je ne sais pas si vous connaissez Serre, mais je veux dire, il n'a pas l'habitude de mâcher ses mots, et il n'aime pas trop les états d'âme en général et donc, je veux dire, c'est extrêmement intéressant que dans la correspondance entre Serre et Grothendieck, ils aient continué leurs échanges, au moment où Grothendieck, qui s'était isolé si vous voulez délibérément du monde mathématique. Je veux dire, ce n'est pas le monde mathématique qui l'avait chassé, c'est Grothendieck qui s'est chassé lui-même, qui s'est isolé du monde mathématique, il a écrit ce texte ; tous les passages que je vous ai lus de Grothendieck sont dans *Récoltes et Semailles*, donc c'est un texte admirable, et il faut le lire avec un certain recul, bien entendu, parce qu'il y a des moments où, si vous voulez, il dit des choses qui ne sont pas idéales, mais en tout cas, il s'exprime. Alors voilà ce que dit Serre après l'avoir reçu :

"Cher Grothendieck,
J'ai bien reçu le fascicule de Récoltes et semailles que tu m'as fait envoyer. Merci beaucoup. Il me manque encore l'avant-dernier fascicule, dont j'ai seulement quelques pages isolées." (rires)

Bon évidemment, il y a tellement de pages. Moi, je dois vous dire, d'ailleurs, que c'est un texte qu'il faut lire... il ne faut pas lire plus de 5 pages à la fois. Je me souviens d'avoir passé un été extraordinaire en lisant en parallèle *Récoltes et Semailles* et *A la recherche du temps perdu* de Proust. Et je veux dire, de la même manière. C'est-à-dire que, bien sûr, les gens qui cherchent des anecdotes croustillantes, ils vont le lire en sautant les pages, si vous faites ça, vous perdez tout. C'est exactement pareil avec Proust. Proust, on ne peut pas le lire en lisant plus de 5 pages à la fois, il faut les méditer, il faut les repenser, etc. Il faut se laisser pénétrer par une atmosphère qui est absolument extraordinaire. Donc voilà ce que dit Serre, il dit :

"Une chose me frappe. Dans les textes que j'ai pu voir, tu t'étonnes et tu t'indignes de ce que tes anciens élèves n'aient pas continué l'œuvre que tu avais entreprise et menée en grande partie à bien. Mais tu ne te poses pas la question la plus évidente, celle à laquelle tout lecteur s'attend à ce que tu répondes : "Pourquoi toi, tu as abandonné l'œuvre en question ?"." (rires)

C'est quand-même une sacrée question. Et alors après, ce qui est formidable, c'est que Serre a une réponse, et ce n'est pas du tout une réponse évidente. Non, non, mais c'est une lettre de Serre mais il continue sa lettre et il a une proposition pour expliquer pourquoi Grothendieck est parti. Alors voilà ce qu'il dit, il dit :

"J'ai l'impression que malgré ton énergie bien connue, Tu étais tout simplement fatigué de l'énorme travail que tu avais entrepris."

Bon ça, tout le monde le comprendra. Je veux dire quand je parlais du temps, ça veut dire qu'il avait peu de temps pour faire autre chose. Donc je veux dire, c'est immense. Au début, je vous ai lu des passages dans lesquels il parlait de tout ce qu'il devait absorber, etc., bon je veux dire, c'est monstrueux comme quantité de travail.

"D'autant plus qu'il y avait aussi les SGA qui prenaient du retard, année après année. Je me souviens notamment de l'état plutôt désastreux de SGA5 où les rédacteurs se perdaient dans des masses de diagrammes, dont ils étaient réduits à affirmer sans preuve la commutativité, au signe près en étant optimistes." (rires)

"et ces commutativités étaient essentielles pour la suite. C'est à cet état désastreux et non pas idyllique, tel qu'on le croirait à lire Récoltes et Semailles que se réfère ma phrase du séminaire Bourbaki, la version définitive du SGA5 qui devrait être plus convaincante que les exposés et polycopiés existant."

C'est du Serre craché.

"On aimerait avoir tes impressions sur tout ceci, même modifié par 15 ans d'enterrement pour employer tes termes, on reste sur sa faim."

Alors maintenant, il va aller à une explication beaucoup plus profonde :

"on peut se demander par exemple s'il n'y a pas une explication plus profonde que la simple fatigue d'avoir à porter à bout de bras tant de milliers de pages. Tu décris quelque part ton approche des maths, où l'on n'attaque pas un problème de front, mais où on l'enveloppe et le dissout dans une marée montante de théorie générale."

C'est ce dont je parlais tout à l'heure quand je parlais de penser juste. Et par exemple, il y a une anecdote, Cartier ne me contredira pas, qui est qu'une fois, en remontant de la cafétéria à l'IHES, il y a je crois que c'est Demazure qui pose une question à Grothendieck sur $SL(\mathbb{Z})$ ou sur... voilà. Et alors Grothendieck dit que ça n'est pas la bonne manière de formuler cette question et le résultat, ça a été SGA3, c'est-à-dire la théorie des groupes algébriques de Grothendieck *(rires)*. Voilà, donc, ce que fait Grothendieck, c'est... il peut avoir une question précise, on peut lui formuler une question précise, mais il va dire "cette question n'est pas dans le bon cadre". Et il va développer une théorie générale de telle sorte que la question devienne naturelle. Et à partir du moment où la question est naturelle, et où on a pris la peine et le temps de penser juste, elle va tomber comme un fruit mûr. Donc c'est ce que dit Serre quand il dit :

"...mais où on l'enveloppe et le dissout dans une marée montante de théorie générale."

Donc la question se dissout. Et dans *Récoltes et Semailles* d'ailleurs, Grothendieck a de très belles images, il parle d'une noix, et il dit qu'il y a deux manières de s'occuper de la noix : la première manière, c'est de prendre un marteau et de la casser, et la deuxième manière, c'est justement de la laisser s'assouplir dans de l'eau, etc., de telle sorte que finalement, elle s'ouvre d'elle-même.

"Très bien. C'est ta façon de travailler et ce que tu as fait montre que ça marche effectivement, du moins pour les EVT[5] et la géométrie algébrique."

Alors voilà ce que dit Serre, et ça, c'est du sérieux. Il dit :

5. Espaces vectoriels topologiques

"C'est beaucoup moins clair pour la théorie des nombres, où les structures en jeu sont loin d'être évidentes, ou plutôt, toutes les structures possibles sont en jeu."

Et je préfère terminer là-dessus. C'est-à-dire, si vous voulez, c'est extrêmement frappant de voir ces deux manières de penser les mathématiques. La manière de Grothendieck, d'accord, qui est une manière qui consiste justement à essayer de penser juste, et à essayer de formuler, si un problème est donné, de le formuler de telle sorte qu'il tombe tout seul, et si vous voulez, d'explorer tous les coins, les moindres recoins. Dans sa demeure, la demeure dont il parle, il n'y a aucun coin qui est sale, qui n'est pas exploré, etc. Il veut que tout soit impecc. Et il ne peut penser que quand c'est comme ça. Et le prix à payer, c'est un travail colossal. Mais c'est un travail qui n'est pas vraiment difficile, au sens où, on développe les choses, etc., etc. A aucun moment donné si vous voulez, on n'est sur une falaise raide, et on risque de tomber, à aucun de ces moments-là. C'est un peu comme si vous connaissez Israël, comme la manière dont les romains ont voulu attaquer Massada, je ne sais pas si vous connaissez. Bon, c'est quelque-chose de très frappant parce qu'ils ont remblayé de la terre, de la terre, de la terre, pour que ça arrive finalement au niveau... et ça leur a pris, je ne sais pas, je crois que c'est une dizaine d'années ou quelque-chose comme ça. *(le public donne son avis, 3 ou 4 ans).*

La méthode de Grothendieck, c'est ça. Et ce que l'on voit avec le recul, c'est tout ce qu'on peut en apprendre, de cette méthode. Tout ce que nous pouvons en apprendre... Par opposition à une autre méthode, que moi, j'aime beaucoup, qui consiste à, dans les couloirs de l'Ecole Normale, dans le temps, quand j'étais à l'Ecole, il y avait un copain qui m'avait posé un problème : il était au troisième étage et moi, j'étais au rez-de-chaussée, et puis j'étais parti en week-end, et puis j'avais passé tout mon week-end à essayer de résoudre... bon. C'est le problem solver, si vous voulez, on vous donne un problème, et vous cherchez à le résoudre, eh bien, vous cherchez à le résoudre de la manière la plus efficace possible. Ce sont deux manières complètement orthogonales d'agir et en fait, Grothendieck a toute une discussion dans *Récoltes et Semailles* sur ces deux manières d'agir et il les distingue, bon, il les formule avec le yin et le yang. Bon, mais c'est très très important : il dit que la méthode qu'il a, elle est plus féminine, si vous voulez, que l'autre, qui est une méthode masculine. Ca, c'est difficile de le dire exactement. Mais c'est très important, quand on fait des maths, de s'imprégner de cette idée, effectivement, qu'il y a ce besoin, et que souvent, on ne le croit pas. Par exemple, récemment, j'avais un collègue qui m'avait posé un problème à l'Académie que j'ai fini par résoudre, mais j'étais sidéré de voir que je l'ai résolu quand j'ai commencé à penser juste. Ca m'a sidéré ! Parce qu'on me dirait "mais tu veux résoudre un problème, mais pourquoi est-ce que tu te préoccupes de ça ?". Non, ça n'est pas vrai, c'est quelque-chose de fondamental, arriver à penser juste, c'est quelque-chose d'absolument fondamental. Jamais, ça ne sera inutile d'essayer de penser juste. Jamais ça ne sera inutile, d'accord.

Donc j'espère que je vous aurai donné envie de lire *Récoltes et Semailles* et puis surtout, de manipuler des topos les plus simples, et d'essayer de vous en servir, par rapport à notre logique, qui est bien pauvre, même dans des circonstances tout à fait extérieures aux mathématiques. Evidemment, ça demande du travail, ça demande un travail qui est très lent, etc. qui est celui de s'approprier la notion. Et c'est une notion qui est maudite, elle est maudite : avec Pierre, et puis surtout avec Laurent Lafforgue, par exemple, on a essayé pendant plusieurs années, de soutenir une mathématicienne très très brillante, qui est Olivia Caramello, et on s'est heurté à l'hostilité, pour ne pas dire le mépris, du monde mathématique en général. Et on a pu expérimenter à cette occasion à quel point il y a une espèce de, je ne sais pas, de fatalité, sur la notion de topos, il y a quelque-chose qui irrite les gens, parce que sans doute, ils ressentent, c'est ce que dit Grothendieck, il le dit tellement bien, il le dit explicitement, il l'avait déjà ressenti à son époque, sans doute, ils ressentent qu'il y a quelque-chose, mais ils ne le comprennent pas vraiment. Et pour le comprendre vraiment, il faut en faire, bien sûr, mais il y aura un moment où la notion va vous appartenir et vous allez arriver à vous l'approprier. Et la meilleure manière, c'est cette métaphore, c'est le fait que l'espace n'est pas au-devant de la scène, il est derrière, c'est une espèce de Deus ex machina, et c'est lui qui fait tourner les ensembles, c'est lui qui introduit un aléa, un aléa dans les ensembles, dans la théorie des ensembles. De même qu'il y a un aléa dans les nombres premiers, que nous connaissons tous, et de même qu'il y a un aléa du quantique, donc voilà, il faut garder tout cela en tête, et je vais m'arrêter là.

Conseils au débutant

Alain Connes
Collège de France,
Institut des Hautes Etudes Scientiques
Université de Vanderbilt.

Les mathématiques sont la colonne vertébrale de la science moderne et une source remarquablement efficace de nouveaux concepts et outils pour comprendre la réalité à laquelle nous participons. Les nouveaux concepts eux-mêmes sont le résultat d'un long processus de distillation dans l'alambic de la pensée humaine.

On m'a demandé de donner quelques conseils aux jeunes mathématiciens. La première observation est que chaque mathématicien est un cas particulier et en général, les mathématiciens ont tendance à se comporter comme des "fermions", i.e. à éviter de travailler dans des endroits trop "branchés" alors que les physiciens se comportent comme des "bosons" qui fusionnent en gros paquets et souvent "sur-vendent" leurs travaux, une attitude que les mathématiciens méprisent.

Il peut être tentant à première vue de voir les mathématiques comme l'union de parties séparées telles que la Géométrie, l'Algèbre, l'Analyse, la Théorie des nombres, etc. avec la Géométrie dominée par la compréhension du concept d'"espace", l'Algèbre par l'art de manipuler les "symboles", l'Analyse par l'accès à l'infini et le continu, etc.

Cela pourtant ne rend pas justice à l'une des caractéristiques les plus essentielles du monde mathématique, notamment au fait qu'il est virtuellement impossible d'isoler l'une quelconque des parties ci-dessus des autres sans la priver de son essence. En cela, le corpus mathématique ressemble à une entité biologique qui ne peut survivre que comme un tout et qui mourrait si on la coupait en morceaux disjoints.

La vie scientifique des mathématiciens peut être décrite comme un voyage à l'intérieur de la géographie de la "réalité mathématique" qu'ils révèlent graduellement dans leur schéma mental personnel.

Traduction de l'article Advice to the beginner ici
http://alainconnes.org/docs/Companion.pdf

Cela commence souvent par un acte de rébellion par rapport à la description dogmatique existante qu'on peut trouver dans les livres de la littérature mathématique. Les jeunes "mathématiciens-en-devenir" réalisent dans leur propre esprit que leur perception du monde mathématique capture quelques aspects qui ne s'adaptent pas au dogme existant. Ce premier acte est souvent dû à l'ignorance mais il permet à la personne de se libérer de la révérence à l'autorité en l'enjoignant à faire confiance à son intuition propre, à condition que celle-ci s'appuie sur des démonstrations effectives. Lorsque ces jeunes mathématiciens acquièrent une réelle connaissance, obtenue d'une manière originale et "personnelle", d'une petite partie du monde mathématique, aussi ésotérique qu'elle puisse avoir l'air au départ [1], leur voyage peut vraiment commencer. C'est bien sûr vital tout au long du parcours de ne pas rompre ce "fil d'Ariane" qui permet de garder constamment un regard neuf sur tout ce que l'on pourra rencontrer en chemin, et de revenir à la source lorsqu'on se sent perdu parfois...

Il est aussi vital de toujours rester en mouvement. Le risque sinon est de rester confiné dans une petite zone de spécialisation extrêmement technique, rétrécissant notre perception du monde mathématique et de sa diversité déroutante.

Le point vraiment fondamental par rapport à ça c'est qu'alors que de nombreux mathématiciens ont passé leur vie scientifique entière à explorer ce monde, ils tombent tous d'accord sur ses contours et sa connexité : quelle que soit l'origine de l'itinéraire, un jour ou l'autre, on est amené à atteindre une ville bien connue, i.e. par exemple à rencontrer les fonctions elliptiques, les formes modulaires, les fonctions zeta. "Tous les chemins mènent à Rome" et le monde mathématique est "connecté". Bien sûr, cela ne signifie pas que toutes les parties des mathématiques se ressemblent et il convient de citer Grothendieck (dans "Récoltes et semailles") dans sa comparaison du paysage de l'analyse dans laquelle il a travaillé au départ avec celui de la géométrie algébrique dans laquelle il a passé le reste de sa vie mathématique :

> *"Je me rappelle encore de cette impression saisissante (toute subjective certes), comme si je quittais des steppes arides et revêches, pour me retrouver soudain dans une sorte de "pays promis" aux richesses luxuriantes, se multipliant à l'infini partout où il plaît*

1. Mon point de départ a été la localisation des racines des polynômes, mais j'ai eu la chance d'être invité très jeune à une conférence à Seattle où j'ai trouvé les racines de tous mes travaux futurs sur les facteurs.

> *à la main de se poser, pour cueillir ou pour fouiller...".*

La plupart des mathématiciens adoptent une attitude pragmatique et se voient comme des explorateurs de ce "monde mathématique" dont ils n'ont aucun souhait de mettre l'existence en doute, et dont ils découvrent la structure par un mélange d'intuition, pas si étranger au "désir poétique" [2], et une bonne dose d'intenses périodes nécessitant leur concentration rationnelle.

Les générations successives de mathématiciens construisent l'"image mentale" de leurs propres compréhensions de ce monde et construisent des outils mentaux de plus en plus profonds (pénétrant) pour explorer des aspects précédemment cachés de cette réalité.

Là où les choses deviennent vraiment intéressantes, c'est lorsque des points inattendus émergent entre différentes parties du monde mathématique, qui étaient précédemment comprises comme étant éloignées les unes des autres dans les outils mentaux qu'une génération avait élaborés. A ce moment, on a le sentiment qu'un vent soudain a balayé le brouillard qui était sur les parties cachées d'un beau paysage. Dans mon propre travail, ce genre de "grande surprise" est venu principalement de l'interaction avec la physique. La profondeur des concepts mathématiques qui proviennent directement de la physique a été décrite dans la citation suivante de Hadamard :

> *"Non cette nouveauté à la vie courte qui trop souvent ne peut qu'influencer le mathématicien rivé à ses propres préoccupations, mais cette nouveauté infiniment féconde qui jaillit de la nature des choses."*

Je terminerai par quelques conseils pratiques [3].

- *Marches*
  Un exercice très sain, quand on se bat avec un problème très difficile (impliquant souvent de nombreux calculs), est d'aller faire une longue promenade (sans papier ou crayon) et de faire les calculs dans sa tête (en dédaignant le premier sentiment "c'est trop compliqué pour être fait comme ça !"). Même si l'on n'y parvient pas, cela entraîne la "mémoire vive" et aiguise les compétences.

- *Se coucher*
  Les mathématicien(ene)s ont habituellement du mal à expliquer à leur

2. comme souligné par le poète Paul Valéry.
3. En rappelant que chaque mathématicien est un "cas particulier", ne prenez pas ce conseil trop à la lettre.

compagnon que les moments où ils travaillent le plus intensivement sont ceux où ils sont couchés dans le noir sur un canapé. Malheureusement, avec les emails et l'invasion des écrans d'ordinateurs dans tous les instituts de mathématiques, bien que cette manière de s'isoler soi-même et de se concentrer tende à devenir de plus en plus rare, elle reste la meilleure façon de réfléchir.

- *Etre courageux*
  Il y a plusieurs phases dans le processus amenant à une "nouvelle découverte" mathématique. Et alors que la phase de "vérification" est effrayante et ne nécessite que rationnalité et concentration, la phase "créative" est d'une nature totalement différente. En un certain sens, elle nécessite une sorte de protection de sa propre ignorance dans la mesure où il y a toujours des billions de raisons rationnelles de ne pas étudier un problème qui a déjà été étudié par des générations de mathématiciens.

- *Reculs*
  Cela arrive souvent dans la vie d'un mathématicien et à n'importe quelle niveau (souvent très tôt) de leur vie scientifique, d'obtenir un preprint d'un compétiteur par exemple et de se sentir perturbé. La seule recette que j'ai là est d'"essayer" de transformer (ce n'est pas toujours facile) ce sentiment de frustration en énergie positive pour travailler encore plus dur.

- *Approbation à contrecœur*
  Un collègue à moi m'a dit un jour "Nous [4] travaillons pour l'approbation à contrecœur de quelques amis". Il est vrai que dans la mesure où le travail de recherche est de nature plutôt solitaire, nous avons sérieusement besoin de cette approbation d'une manière ou d'une autre, mais franchement, n'en attendez pas beaucoup... En fait, il n'y a pas moyen de leurrer le seul juge que l'on est à soi-même, et attendre trop du jugement d'autrui est un gaspillage de temps : jusqu'à aujourd'hui, aucun théorème n'a été prouvé par résultat d'un vote. Comme Feynman l'a dit "Pourquoi te préoccupes-tu de ce que les autres pensent ? !".

4. les mathématiciens.

MES RENCONTRES AVEC JACQUES

Entretien d'Alain Connes avec Jacques Dixmier

Alain Connes : Je vais essayer de raconter ma première rencontre avec Jacques, y a eu une suite de circonstances favorables, la première c'est que j'avais été invité en 71 à Seattle pour une conférence, et en fait, j'avais acheté, au hasard un *Lecture Notes* quand j'étais passé par Princeton, c'était un mathématicien japonais, Takesaki, qui exposait le travail d'un autre mathématicien japonais, qui est Tomita. Et j'avais été fasciné, sans vraiment comprendre, pendant tout le voyage en train qu'on faisait à travers le Canada, euh, parce que ça me paraissait extrêmement intéressant. Et quand j'étais arrivé à la conférence, que j'avais vu qu'il y avait le Japonais juste avant qui expliquait la théorie, j'avais trouvé ça formidable, et donc j'avais décidé, en voyant ce hasard, de n'aller écouter que ce cours et de travailler complètement là-dessus. Et quand je suis rentré de ce voyage aux Etats-Unis, donc, j'étais jeune marié, avec Danye, j'ai décidé...

Le séminaire de Dixmier

...d'aller au séminaire de Jacques Dixmier, qui était à Paris, qui avait pour sujet les algèbres d'opérateurs et y a eu un concours de circonstances extraordinaire qui a fait que, à nouveau au hasard, parmi les articles que Jacques proposait d'exposer au séminaire, j'en ai choisi un, et quand je suis rentré en banlieue en train, en lisant cet article, je me suis rendu compte qu'en fait il y avait un lien formidable entre les deux théories. A ce moment-là, j'ai envoyé une petite lettre d'une page à Jacques, il m'a répondu presque tout de suite en me disant : « Je comprends pas, c'est trop court, il faut beaucoup plus de détails », je lui ai réécrit, deux jours après, en lui envoyant une lettre de quatre pages, et c'est là que notre entente a commencé, il m'a reçu dans son bureau, et je me souviens très, très bien qu'il m'a dit un seul mot, il m'a dit : « Foncez ! »

Jacques Dixmier : La deuxième rédaction qu'il m'a envoyée et qui était détaillée, je me souviens qu'il obtenait des résultats qui étaient nouveaux, visiblement importants, et inattendus, j'ai été ahuri de voir ça démontré en quatre pages, quoi... C'est pour ça que j'ai dû lui dire « Foncez ! » Et puis

---

http://llx.fr/site/wp-content/uploads/2017/04/Connes-Dixmier_tapuscrit.pdf alors, bon, les quatre pages sont devenues quand même les cent et quelques pages de ta thèse...

La trace de Dixmier

AC : Y a un autre épisode où on a vraiment renoué ensemble, c'était à l'IHES ! Jacques avait fait dans les années 50 une découverte, il avait trouvé une trace exotique sur les opérateurs...

JD : Euh, on parlait, je crois, des algèbres hilbertiennes, et je t'ai dit, « je m'étonne que cet exemple que j'ai fabriqué n'ait pas servi à faire des contre-exemples »... Parce que, ce que j'avais trouvé, tu dis exotique, pour moi c'était une monstruosité mathématique ! Et une monstruosité mathématique, souvent ça ressert à faire d'autres monstres ! Je me souviens encore Alain disant, « mais c'est exactement c'qu'y m'faut ! »

AC : Oui, alors en fait, maintenant ça s'appelle la trace de Dixmier, mais il se fait que dans les bons cas, cet objet converge, c'est-à-dire que normalement, c'est un objet qui est exotique ou monstrueux parce que y a une quantité qui n'a pas de limite, mais en fait dans les bons cas, la quantité en question a une limite ! C'est une espèce de mesurabilité... Et alors y a un phénomène extraordinaire qui se produit, c'est qu'en fait pratiquement toutes les intégrales qu'on connaît, en mathématiques, sont un cas particulier de cette construction...

JD : Oh là, t'exagères, quand même...

AC : Ah, j'exagère pas ! J'exagère pas, c'est-à-dire que, d'habitude en mathématiques, quand on écrit $\int f(x)dx$, le signe d'intégrale est indissociable de ce qu'on appelle la mesure, c'est-à-dire ce qu'on appelle $d\mu(x)$. Y a pas un sens à l'intégrale et un sens séparé pour $d\mu(x)$... C'est l'ensemble, c'est le package, qui a un sens... Eh bien, grâce à ce procédé, on peut donner un sens à l'intégrale, on peut donner un sens aux infinitésimaux, etc., etc., et à ce moment-là on peut dissocier l'intégrale de l'autre côté. Alors il y a un autre intérêt, c'est qu'en fait les physiciens se sont aperçus que dans leurs travaux, y a beaucoup de, ce qu'on appelle de divergences et en particulier ce qu'on appelle les divergences logarithmiques. Et ce qu'a fait Jacques, quand il a défini sa trace, il a montré que le coefficient d'une divergence logarithmique, ça définit une trace, ça a permis de donner un statut mathématique à quelque chose qui normalement n'aurait pas de statut mathématique, qui sont précisément ces divergences logarithmiques...

JD : Ah, si Leibniz y savait ça ! Ah, là là !

AC : Oui, mais justement, là, y a une différence extrêmement forte et frappante entre Leibniz et Newton ! Ce que la trace de Dixmier permet de faire et ce que le formalisme quantique permet de faire, c'est beaucoup plus quelque chose qui va dans le sens de Newton que dans le sens de Leibniz, c'est-à-dire que Newton avait l'idée que les quantités infinitésimales, ce ne sont pas des nombres, ce sont des variables... Or, en mathématiques, on s'aperçoit que la bonne formulation de la notion de variable réelle, la seule qui permette la coexistence entre les variables continues et les variables discrètes, c'est le formalisme quantique, c'est-à-dire que les variables réelles, ce sont des opérateurs auto-adjoints dans l'espace de Hilbert, et les opérateurs auto-adjoints y peuvent avoir un spectre continu mais y peuvent aussi avoir un spectre discret, et tout ça, ça agit dans le même espace de Hilbert... Et alors ce qui est formidable, c'est que quand on lit le détail de la définition de Newton, de ce qu'il appelle les variables infinitésimales, on tombe exactement sur ce qu'on appelle les opérateurs compacts... Non seulement on tombe sur les opérateurs compacts, mais on tombe aussi sur le fait qu'un infinitésimal peut avoir un ordre 1, un ordre α où α est un nombre réel, donc y a toute une hiérarchie d'infinitésimaux, et précisément la trace que Jacques avait construite, c'est une trace qui intègre les infinitésimaux d'ordre 1, et qui donne un résultat nul pour tous les infinitésimaux d'ordre plus élevé que 1... Donc sa trace c'est une espèce de filtre, qui va filtrer tous les détails quantiques, d'une certaine manière, et qui va donner une image classique d'un résultat... Et ça, ça a joué, dans les développements qu'on a faits ensuite, un rôle absolument essentiel !

JD : On, c'est pas moi, hein !

AC : Mais, donc, ce que je veux dire, c'est que, on a eu cette nouvelle rencontre, qui s'est faite aux déjeuners de l'IHES, par hasard...

Le boson de Dixmier

AC : Et alors l'épisode relativement récent, c'est, il y a peut-être cinq ou six ans, on était à la campagne avec Danye, et on reçoit une petite carte postale, que Jacques nous avait envoyée : Voilà, j'ai le titre d'un livre... Alors c'était : *"Bossons sur le boson... !*. Et alors y dit, vous l'écrivez, je corrigerai les épreuves !

JD : Ah, y faut dire que c'était dans un contexte où on parlait beaucoup de découverte du boson de Higgs, qui était pas encore trouvé...

AC : Au même moment, j'avais eu vent, par Etienne Klein, d'une anagramme qui était assez étonnante, qui s'intéressait précisément au boson de Higgs... Cette anagramme c'était le boson scalaire de Higgs, et de l'autre côté c'était l'horloge des anges ici-bas... Voilà...Et si on passe au commutatif, c'est-à-dire si on ignore l'ordre des lettres, on obtient exactement la même chose... Alors, on avait trouvé une horloge ornée d'anges, comme y en avait au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle, on fait une belle image, et puis on avait répondu à Jacques... Bien sûr pour le moment c'était encore une boutade, et puis on a commencé à communiquer énormément avec Jacques, et puis le bouquin a pris forme ! Et dans lequel au bout d'un moment on a rajouté de plus en plus de détails scientifiques, mais qui a existé comme ça, presque, bon, je dirais pas sans efforts...

JD : Pour ce qui est des efforts, là je peux dire que je ne suis plus capable d'inventer des mathématiques et je trouve que c'est infiniment plus facile d'écrire un roman que d'écrire un article de maths !

Les matroïdes de Dixmier

AC : Mais y a aussi un épisode récent, et qui était que je suis arrivé une après-midi chez Jacques et je lui ai montré la note au compte-rendu qu'on avait écrite avec Katia Consani sur ce qu'on appelle le site arithmétique. Jacques a lu cette note avec attention et...

JD : Sans y comprendre grand-chose !

AC : Oh, oh, oh... Oui, sauf qu'il a compris quelque chose d'extraordinaire, il a compris que c'était relié à un travail qu'il avait fait dans les années 60, Jacques avait classifié les matroïdes et il s'est aperçu en lisant notre compte-rendu, que l'espace qui classifiait les matroïdes était le même que l'espace des points du topos qu'on obtenait... Mais en regardant de plus près, on s'est aperçu qu'en fait, le topos en question, c'était un topos qui était sous-jacent à toute la géométrie non-commutative, et la raison c'est que, en géométrie non-commutative, le point est représenté par l'algèbre des opérateurs compacts, cette algèbre elle a des endomorphismes et ces endomorphismes définissent exactement le topos qu'on avait eu... Quand on regarde cette algèbre comme un faisceau sur le topos, le faisceau a des fibres, sur chacun des points, et on obtient exactement les algèbres que Dixmier avait classifiées... Au niveau conceptuel, ça a montré que le topos qu'on avait trouvé, c'était simplement le point en géométrie non-commutative... Et ça, alors c'est extrêmement satisfaisant et c'est venu du fait que Jacques a lu notre note en grand détail et a fait la connexion avec le travail qu'il avait fait des années auparavant.

Paris-Shanghai, 1 avril 2017
09min 50sec

Les processus mentaux de la création

Gustave Choquet [1]

A 30 ans, on cherche et on trouve ; un peu plus tard on forme des chercheurs, et plus tard encore on parle des processus mentaux de la création : c'est ce que je me propose de faire ici.

Je ne donnerai pas de recette pour devenir un découvreur, cela s'apprend en découvrant. Mais plusieurs fois j'ai constaté qu'une réflexion sur les raisons d'un succès, améliorait mes recherches ultérieures ; mon expérience peut donc être utile.

Il semble d'ailleurs que de plus en plus de chercheurs comprennent qu'il n'est pas possible de dissocier la science de l'activité humaine qui la crée ; et qu'ainsi les millions de théorèmes qui reposent sur les rayons des bibliothèques ne sont que la cendre refroidie, d'ailleurs précieuse, du feu créateur qui les a fait naître ; d'où chez les chercheurs un intérêt grandissant pour l'histoire des sciences et techniques.

Les témoignages de chercheurs, sans être encore nombreux, constituent néanmoins une bonne base d'étude ; j'en citerai quelques uns : celui de René Descartes qui, le 10 Novembre 1619, à 23 ans, dans une nuit d'enthousiasme fait trois rêves exaltants et découvre les fondements "d'une science admirable" (voir Bell, "Men of mathematics"). Le récit d'Henri Poincaré concernant sa découverte des groupes fuchsiens et de leur lien avec certaines formes quadratiques, est célèbre à juste titre.

Jacques Hadamard a réuni en 1959 ses analyses commencées en 1937 sur la psychologie de l'invention (134 pages).

Paul Levy, en 1970, s'est longuement exprimé dans "Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien" (Albert Blanchard, épuisé).

---

1. Séminaire de philosophie et mathématiques, 1994, fascicule 4, p.1-21, http://www.numdam.org/item?id=SPHM$_1$994$_{4A^1{}_0}$, ©ENS, IREM Paris Nord, Ecole centrale des arts et manufactures, 1994.
Synthèse de trois conférences : Séminaire Loi (1993), à Clermont-Ferrand (1994) et à Koxty (?) (République Tchèque, 1994).

En 1976 j'ai, dans le Séminaire Loi, parlé de "La naissance de la théorie des capacités" (publié dans "La vie des Sciences" de l'Académie des Sciences, 1986).

Laurent Schwartz, après avoir en 1982 raconté à l'Université de Patras (Grèce) l'histoire de sa théorie des distributions, a fait en 1987 une conférence sur la découverte en Mathématiques.

André Weil et Alain Connes, plus récemment, se sont aussi exprimés brièvement à ce sujet dans la revue "Pour la Science".

Dans les sciences expérimentales, les témoignages abondent : Ceux de Newton, Pasteur, Darwin, Einstein, Fleming, Watson ("La double hélice", 1968). En chimie le demi-rêve de Kekule qui, d'après lui, l'aurait conduit à la structure hexagonal du benzène (un serpent se mordant la queue) est notable car il est exceptionnel que les rêves conduisent à des découvertes importantes.

Le cerveau, organe de notre pensée

Bien que l'introspection ait été longtemps un outil essentiel d'étude des processus mentaux, et qu'elle joue encore un rôle important (le livre d'Hebb de 1949 reste un ouvrage de référence), des outils performants tels que l'imagerie médicale permettront certainement de progresser dans l'étude de ces processus. Le terrain aujourd'hui est encore peu sûr ; on sait toutefois que toutes les parties du cerveau sont interdépendantes et que son fonctionnement est extrêmement complexe ; ce que j'en dirai aura surtout pour but de souligner cette complexité, et de justifier en partie certaines affirmations.

Une vue fort schématique du cerveau lui attribue une structure ternaire :

- Le cerveau postérieur, dit parfois reptilien, regroupe la moelle épinière, le bulbe rachidien, le mésencéphale. Il est responsable de la vie inconsciente des organes et de pulsions primitives.
- Le système limbique regroupe des structures très diverses, telles que l'hippocampe, l'hypothalamus. Il joue un rôle important dans la mémoire et la genèse des états de motivation. Ses lésions modifient les comportements alimentaires, sexuels, sociaux.

- Le néo-cortex (ou cortex, ou matière grise).

Ces trois parties sont interconnectées et jouent donc un rôle dans le processus de la recherche, ce qui après coup justifie la phrase célèbre de Pascal "L'homme n'est ni ange ni bête". Il est probable que leur plus ou moins grand rôle détermine le style de la recherche.

Les connections cérébrales sont redondantes, à des degrés variés, ce qui explique peut-être que la folie ou la dépression n'empêche pas toujours le travail mathématique, artistique ou littéraire : rappelons le cas d'André Bloch qui, après avoir tué à coups de hache plusieurs membres de sa famille entra en relation, de son asile-d'aliénés, avec Georges Valiron et découvrit plusieurs beaux théorèmes ; et celui plus célèbre encore de Cantor, victime dès l'âge de 46 ans de graves crises de dépression, mais qui après ces crises se sentait l'esprit très clair et faisait d'excellent travail.

Neurones

Notre cerveau comporte de 50 à 100 milliards de neurones. Chacun d'eux est constitué d'un corps cellulaire contenant le noyau, d'où émergent d'une part de nombreuses dendrites munies de protubérances appelées épines, d'autre part un long axone muni à son extrémité de nombreuses terminaisons axonales.

Chaque neurone est en relation avec d'autres neurones par des synapses, les unes électriques, d'autres chimiques, qui unissent épines et terminaisons axonales. Certains neurones peuvent avoir jusqu'à 30 000 synapses avec d'autres neurones ; il peut exister aussi certaines relations de neurone à neurone à travers leurs axones.

Bien qu'élevé, le nombre des neurones et des synapses n'expliquerait sans doute pas la multitude de possibilités de notre cerveau : pensons par exemple à la vision d'un paysage en mouvement et à son enregistrement ne serait-il que partiel. La solution de cette énigme semble résider dans une observation mathématique élémentaire : Un ensemble fini de N éléments contient 2^N sous-ensembles distincts, nombre gigantesque dès que N dépasse 1000 ; si donc neurones et synapses s'organisent en groupements fonctionnels, le nombre de ces groupements peut être d'un ordre de grandeur incomparablement supérieur au nombre de ces neurones et synapses.

Les plus petits de ces groupements ont une structure en réseaux vaguement rectangulaires ; ce sont des sous-unités de traitement (recevant par exemple des informations visuelles, auditives, tactiles) qui peuvent elles-mêmes s'organiser en assemblées plus importantes que j'appellerai ici faisceaux.

Associations d'idées et facilitation

Les connections de neurones dans les réseaux et faisceaux expliquent les précieuses associations d'idées qui sont une base essentielle du fonctionnement, conscient ou non, du cerveau.

C'est elles qui se manifestent dans les calembours et coq-à-l'âne ; mais les personnes âgées en prennent conscience de façon encore plus tangible lorsqu'elles perdent la mémoire des noms propres ou de certains noms communs ; elles peuvent souvent les retrouver par un long cheminement conscient, de proche en proche, utilisant analogie ou chronologie. Le fait qu'elles conservent plus longtemps leur maniement de notions complexes, leur possibilité de discourir longuement, s'explique par le fait, justement, de cette complexité : ces activités peuvent s'effectuer de nombreuses façons différentes, grâce à des chaînes variées d'associations d'idées, et leur but n'est pas un point précis, mais une zone assez floue mais étendue.

Les associations d'idées sont aussi une des explications des rêves, de leur motivation - liée tantôt à notre vie active, tantôt à un passé lointain - , mais aussi de leur mélange de fantaisie et de cohérence : car si les associations d'idées obéissent au même déterminisme physico-chimique que les neurones, elles dépendent aussi comme eux d'un chaos déterministe qui nous apparaît comme le fruit du hasard, de la fantaisie.

Mais surtout c'est leur vie souterraine, cachée, qui nous donne l'explication du subconscient (ou préconscient de Freud) et sans doute de l'inconscient, dans la mesure du moins où celui-ci a une réalité définissable et n'est pas simplement un subconscient profond et refoulé depuis longtemps.

Je vois dans le subconscient la source de ce que j'appellerai illumination (pour les mystiques on dit révélation, et pour les poètes et musiciens, inspiration) ; et aussi un des facteurs de l'intuition.

Subconscient, illumination, hasard, intuition

Le subconscient travaille sans relâche ; les associations d'idées qui en sont la base ne se font pas arbitrairement ; leur dynamique est régie en partie par le hasard, mais surtout par le phénomène de *facilitation* (les interactions entre neurones au niveau des synapses sont plus ou moins grandes, en fonction de leur activité passée). Ce phénomène rend compte de nos habitudes, du petit robot qui semble prendre en charge certaines de nos actions ; d'où l'importance considérable, bénéfique ou néfaste, de l'éducation, qu'elle vienne du monde extérieur ou de notre activité cérébrale consciente.

L'activité subconsciente peut impliquer simultanément plusieurs aires corticales : on peut être au même instant amoureux et préoccupé d'un problème mathématique.

Chez un mathématicien qu'un problème a intéressé, récemment ou dans le passé, s'est constitué à son insu un groupement de faisceaux liés à ce problème, et dont l'activité peut s'être progressivement renforcée par des retours conscients au problème. Dans des cas favorables, par exemple grâce à des contacts mathématiques en apparence sans rapport avec le problème, ce groupe de faisceaux acquiert une vie cohérente et assez intense pour qu'un petit événement (par exemple détente après une grande fatigue, changement agréable d'activité, ou une simple tasse de café) déclenche brusquement un passage du subconscient au conscient : c'est l'*illumination*, expérience merveilleuse dont on garde précieusement le souvenir. Elle ne diffère que par la nature de son objet de l'extase mystique, ou de l'inspiration des grands artistes ou poètes qui leur permet de réaliser en un temps très bref des œuvres qui nous étonnent (Mozart, etc.).

Stendhal donnait à ce phénomène le nom de *cristallisation*, qui évoque le changement brusque d'état d'une solution saline sursaturée ou le gel brutal d'une eau en surfusion.

J'ai raconté déjà dans le Séminaire Loi les illuminations, grandes ou petites qui m'ont conduit, vers 1950, à créer la théorie des capacités ; en voici une autre : vers 1960 j'avais pris nettement conscience qu'il y avait en Analyse des cônes convexes importants sans base compacte (e.g. le cône des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ dont toutes les dérivées sont positives) ; je ne savais donc pas, en particulier, s'ils possédaient tous des génératrices extrémales. Je cherchais donc à construire de tels cônes sans génératrices extrémales, par un procédé de limite projective à partir de cônes ayant une base compacte. Et voici qu'un matin du printemps 1962, alors qu'avec ma femme je passais une semaine de vacances dans un petit hotel de Barbizon, nous décidons d'aller nous promener en forêt ; un seul pas séparait notre chambre du sable de la forêt ; je franchis le seuil et “Joie, pleurs de joie” : Oui, comme on coupe en biseau une branche pointue avec une lame aiguisée, il faut, de ces cônes détacher un petit copeau compact, convexe ainsi que le reste du cône. En une minute je vois la structure des opérations à effectuer sur ces copeaux, appelés plus tard “chapeaux”, et comment les utiliser.

C'est une illumination du même type qui donna à Schwartz sa théorie des distributions : en 1935 nous avions tous deux organisé l'Ecole Normale Supérieure un baby-Séminaire où je parlais des travaux de Baire et de Cantor, et où lui parlait de son anxiété devant les comportements différents des équations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0;$$

cette anxiété le poursuivit jusqu'en 1944. Il n'avait pas cessé pendant ces 10 années de s'intéresser aux équations linéaires aux dérivées partielles, sans pouvoir pénétrer le secret de leur vie cachée ; mais son subconscient travaillait lui aussi de son côté. C'est alors qu'arrive 1944 ; je venais, avec Jacques Deny, de terminer un travail sur une caractérisation des fonctions polyharmoniques dans le plan ; nous y utilisions les séries de Fourier, ce qui ne s'étendait pas à l'espace à 3 dimensions ; je demandai alors à Schwartz s'il connaissait une façon de s'en passer ; il la trouva assez rapidement en utilisant des fonctions indéfiniment dérivables à support compact, et peu de temps plus tard, une illumination lui donna au cours d'une seule nuit, en utilisant une idée analogue, la plupart des théorèmes de sa théorie.

Citons encore deux mathématiciens fort différents l'un de l'autre :

Jean Dieudonné, cité dans le livre de Pierre Dugac (Gabay 1995) : "Qu'est-ce qui se passe dans la vie d'un chercheur ? On est sur un problème ; on réussit quelquefois et il y a même ce qu'on appelle des illuminations... Moi je peux dire que cela m'est arrivé trois ou quatre fois dans ma vie en tout".

Alain Connes : "En revenant de conduire ma femme au lycée, alors que je pensais à tout autre chose, j'eus la certitude absolue, devant un feu rouge, que les calculs longs et pénibles que je faisais depuis 6 mois, s'éclairaient à la lueur d'une astuce mathématique. Tout s'était passé comme si mon inconscient s'était brutalement exprimé".

Certes de grandes illuminations de ce type restent des instants mémorables de notre vie, mais toute activité mathématique qui ne soit pas de pure routine est parsemée de mini-illuminations. C'est par exemple celle de l'élève lent mais obstiné qui, après bien du travail et quelques aides extérieures dit brusquement "J'ai compris" et toute sa journée en est éclairée, et parfois sa vie changée : il vient de subir une mutation mentale.

J'ai souvent constaté que des mini-illuminations pouvaient être déclenchées par des modifications physiologiques : se lever ; faire quelques pas après une longue station assise ; se livrer à une activité très différente, lecture, musique, marche ; sortir d'un engourdissement qu'on finirait par confondre avec du travail.

Le hasard. Il est temps de dire clairement ici qu'un chercheur débutant qui attendrait d'une illumination ou d'un hasard heureux la solution d'un problème difficile irait vers des désillusions. On souligne parfois le rôle du hasard dans une découverte scientifique, et on cite le cas de Fleming qui, arrivant un matin dans son laboratoire découvre sur la gélatine d'une boîte de Petri abandonnée un rond, vide de bactéries ; une analyse lui montre que le responsable de ce rond - qui fait penser aux "ronds de sorcière" dans certains prés - est une moisissure du genre pénicillum : il vient de découvrir la pénicilline, le premier d'une longue série de nos antibiotiques.

Mais Fleming était déjà un bactériologiste compétent ; depuis plusieurs années il avait mis en évidence dans la salive et dans les larmes des substances antibiotiques ; et c'était un esprit curieux, exigeant, qui, mis en présence d'un petit fait inattendu, en cherchait l'explication. Un autre chercheur, moins motivé par une longue recherche préalable, et aussi moins exigeant, aurait rageusement jeté à la poubelle cette boîte de Petri gâchée, ce que ne fit pas Fleming.

L'anthropologue qui, tête baissée marche lentement sous le soleil dans la vallée de l'Omo, à la recherche du "chaînon manquant" et qui heurte du pied une mâchoire d'homme fossile, a-t-il mérité sa chance ?

Il y a des hasards qui peuvent devenir heureux, mais seulement pour les chercheurs qui l'ont mérité par un long travail préalable, de l'intelligence et une curiosité qui ont développé en eux sens critique et intuition. "Tu ne me chercherais pas si tu ne m'avais déjà trouvé" ; cette phrase de Pascal pourrait conclure ma réflexion sur le hasard, mais je préfère la conclure par une anecdote : voici quelques années j'accompagnais mon ami Jacques Deny dans un petit bois, à la recherche d'un petit champignon curieux qui ne pousse que dans le chrysalide d'un papillon précis ; il en trouva de nombreux spécimens ; je n'en trouvai pas un seul, mais il était mycologue et je ne l'étais pas.

L'intuition. Comme les illuminations, elle dépend des associations d'idées ; mais contrairement aux illuminations, c'est un état acquis, stable et qui peut s'enrichir par un travail soutenu, bien que son acquisition dépende beaucoup de dons innés.

Elle apparaît comme une connaisance globale et presque immédiate d'un vaste domaine, mais c'est une connaisance non déductive et parfois assez floue ; l'intuitif est semblable au jeune bébé qui, d'un seul coup d'œil, reconnaît sa mère ; il est plus un stratège qu'un tacticien qui, lui, a besoin de connaître les détails et leurs relations mutuelles.

- Pour un géomètre intuitif, la division du plan en deux régions par toute courbe fermée est une évidence, même s'il n'en a pas de preuve.
- Le Saint Curé d'Ars avait une telle intuition des problèmes moraux de ses pénitents que son confessionnal ne désemplissait pas.

Au début de mes recherches j'avais l'ambition de bien connaître tous les ensembles fermés plans, ambition irréaliste certes, mais j'avais néanmoins réussi à me sentir proche d'eux et à deviner, souvent avec succès, leurs propriétés topologiques : j'en avais l'intuition ; c'est qu'en effet l'intuition se développe *par le travail*, beaucoup de travail conscient ; c'est un ensemble déjà bien organisé d'associations d'idées liées à la mémoire parfois ancienne et dont on n'a conservé que celles qu'un jugement subconscient ou partiellement conscient juge bonnes.

Glaeser qui s'est beaucoup occupé de la formation des géomètres différentiels, leur conseillait de se constituer un florilège personnel d'êtres différentiels remarquables, éventuellement pathologiques, dont l'ensemble constituerait une bonne approximation du domaine étudié. On pourrait presque dire que l'intuition, qui doit être une des qualités d'un stratège se construit par un patient travail préparatoire de tacticien. Un tel travail préalable éviterait à certains débutants des échecs cuisants lorsque par exemple ils se lancent dans l'étude d'une structure axiomatique sans avoir vérifié l'existence d'êtres intéressants vérifiant les axiomes.

L'exemple des géomètres algébristes italiens montre clairement tout ce qu'une bonne intuition peut apporter, et aussi ses limites. Ces géomètres avaient étudié tant de courbes et surfaces qu'ils avaient énoncé sans démonstrations des théorèmes généraux d'une grande beauté ; mais il fallut attendre pour leur preuve la naissance d'outils nouveaux (A. Weil, etc.).

L'exemple d'Euclide est également éclairant ; parmi ses axiomes figure celui-ci "Une ligne droite est une ligne (i.e. "qui a une longueur sans largeur") qui repose également avec les points sur elle même". Euclide avait certainement une grande intuition géométrique et cet axiome devait avoir pour lui un sens précis, mais aucun commentateur, pas même Proclus n'a bien réussi à le comprendre.

Tous les bons chercheurs ont de l'intuition, qu'elle soit géométrique, algébrique ou combinatoire ; sinon leur démarche s'apparenterait à une reptation plutôt qu'au survol indispensable pour attaquer les problèmes aux points sensibles, et planifier leur recherche. Mais il faut, impérativement, vérifier les théorèmes suggérés par l'intuition, par de véritables démonstrations ; celui qui se contente de lancer des idées sans prouver des théorèmes n'est pas un mathématicien ; il est ce que les Américains appellent un "theoretical mathematician", ce que je traduirai plutôt par "mathématicien flou".

Je possède une intuition géométrique et celà, je crois, depuis la classe de $1^{\text{ère}}$; j'aimais la géométrie et j'avais pris l'habitude de résoudre de tête, dans l'obscurité, des problèmes assez complexes de géométrie plane ou spatiale. Je pense que mes contributions en Analyse et en Topologie sont toutes nées d'une vision géométrique, souvent très simple, des problèmes : par exemple en Théorie du potentiel, c'est la géométrie du triangle qui m'a donné une des clefs de l'étude des grands principes de cette théorie.

Je me sens très proche d'Henri Lebesgue ; lorsqu'il était jeune normalien et qu'on lui enseignait que les surfaces applicables sur le plan sont réglées, il sortait de sa poche un mouchoir ou un papier bien chiffonné et demandait à ses camarades "Cette surface est-elle réglée ?". Ce mouchoir fut le point de départ de sa thèse et de sa théorie de l'intégration. Plus tard, c'est la vue d'un mur de briques en construction, où il observa que ce mur comportait toujours des points de contact de 4 briques, qui le conduisit à la meilleure définition existante de la dimension topologique d'un continu.

Citons Lebesgue "Je veux dire ici que toutes mes recherches ont ce caractère commun de procéder d'une vue directe, et en quelque sorte géométrique, des problèmes étudiés". Et ailleurs "J'ai toujours été guidé dans mes recherches par des considérations géométriques ; il me semble que j'ai fait constamment des applications de la géométrie à l'Analyse".

Mais Lebesgue a fait aussi une autre remarque intéressante : "Non, ce n'est pas l'intuition qui trompe, c'est le fait de ne pas avoir assez d'intuition". Certes, mais on pourrait dire aussi : c'est le fait de ne pas vérifier pas à pas les suggestions de l'intuition ; ce qui me conduit à rappeler une erreur célèbre de Lebesgue : dans un de ses mémoires célèbres, il énonce que la projection de tout ensemble borélien est aussi un ensemble borélien, en utilisant la relation visiblement fausse $p(\cap_n X_n) = \cap_n p(X_n)$; son théorème était faux et l'erreur, relevée par Lusin, conduisit Lusin et Souslin à la belle théorie des ensembles dits analytiques. Erreur fructueuse donc, mais erreur quand même, née d'une insuffisance de vérification.

Les intuitions des bons chercheurs ne sont pas toutes géométriques, même lorsque comme André Lichnerovicz ils sont géomètres différentiels. Michel Talagrand a une intuition combinatoire qui s'est confirmée au cours de sa carrière ; ses succès récents dans l'étude des processus gaussiens et des produits infinis de mesures sont dus à cette intuition.

Laurent Schwartz a un type d'intuition difficile à classer ; elle n'est certainement pas géométrique ; il ne "voit" pas géométriquement dans l'espace et prétend qu'il ne voit que par le calcul, même s'il ne s'agit, par exemple, que de troncatures de polyèdres convexes réguliers. On pourrait qualifier son intuition de culturelle ; il a en effet une vaste culture mathématique, qui figure dans sa conscience comme un ensemble de fils tendus entre de nombreuses théories (concrétisées par ses dossiers). Quand il cherche, il se réjouit de "sécher" en se disant que si ça résiste, c'est que c'est intéressant puisque ce qu'il connaît ne lui apporte pas de réponse.

On oppose parfois abstraction et intuition, en sous-entendant sans doute que l'intuition concerne le concret. Ce n'était certainement pas l'avis de Jean Dieudonné qui déjà, à propos de sa thèse, déclarait : "Dans les démonstrations de beaucoup de propositions de ce travail, je n'ai pas craint de faire appel à l'intuition géométrique". Mais surtout, dans un intéressant article de Dialectica, Vol.29, 1975, il étudie les liens entre abstraction et intuition :

"La qualité essentielle d'un mathématicien est l'imagination ; la logique ne sert qu'à mettre les démonstrations sous une forme irréfutable, elle est incapable de les suggérer. L'imagination se fonde sur une sorte d'"intuition" des objets mathématiques étudiés, mais cela n'a que très peu de contact avec ce qu'on appelle d'ordinaire l'intuition sensible, les objets mathématiques considérés étant le plus souvent l'aboutissement d'un long processus d'abstraction qui leur ôte toute possibilité de représentation concrète. Cette "intuition" mathématique est avant tout le résultat d'une longue familiarité avec le sujet étudié ; mais en outre il peut s'opérer des "transferts" d'intuition d'une théorie dans une autre... La première conclusion que j'en tirerai, c'est qu'il n'y a certainement pas une intuition en mathématiques ; il y en a toute une série de fort diverses, avec des liens inattendus. La deuxième, c'est que les intuitions mathématiques ne sont pas du tout stables, elles se modifient sans cesse par de nouveaux apports, de nouveaux résultats, de nouvelles idées... Je crois que les progrès de l'intuition mathématique... , sont toujours allés de pair avec les progrès de l'abstraction mathématique".

Cette analyse de Jean Dieudonné est remarquable, et surprend aujourd'hui sous la plume de celui qui, onze ans plus tôt, dans l'introduction de son livre "Algèbre linéaire et géométrie élémentaire" (Hermann 1964) soutenait que l'enseignement de la géométrie élémentaire doit être basé sur l'algèbre linéaire. Il n'avait pas encore compris que l'intuition des objets de cette algèbre ne s'obtient que par un "transfert" progressif à partir de l'intuition géométrique, essentiellement visuelle, acquise par le maniement préalable de concepts issus du monde sensible, droites et parallélisme, distance, cercles, orthogonalité.

Les transferts d'intuition et de savoir-faire sont importants et même essentiels pour le progrès dans tout genre d'activité humaine ; le psychologue Henri Pieron l'a bien souligné dans le "Traité de psychologie appliquée" ; mais ils supposent toujours, bien sûr, une bonne maîtrise d'une activité initiale.

Le physicien Anatole Abragam en souligne l'importance, sans utiliser d'ailleurs le mot de "transfert" : on sait bien que le renouvellement de la science se fait souvent aux points de contact de deux disciplines jusque-là étrangères ; comment alors un chercheur va-t-il utiliser dans une discipline l'intuition acquise dans l'autre ; voici ce qu'en dit Abragam :

"Un chercheur qui s'est confirmé dans une discipline et qui en aborde une autre, peut retrouver l'enthousiasme de ses débuts. Il n'y arrive pas les mains vides. Il apporte avec lui des concepts, des habitudes de pensée, des méthodes et des techniques qui lui permettent d'aborder des problèmes d'une façon nouvelle pour le laboratoire qui l'accueille. Il y a là une cross-fertilisation".

J'ai pu vérifier moi-même cette observation lorsque, en 1980, je commençai à me passionner pour un problème à la frontière de l'Analyse et de la Théorie des nombres, à savoir l'étude de la distribution des points $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ modulo 1 sur le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et plus généralement les suites $(k\theta^n)$ modulo 1, où k, θ sont réels et $\theta > 1$.

Stratèges, tacticiens et les deux hémisphères du cortex

Notre cortex est divisé en deux parties appelés hémisphères et réunies par le corps calleux de couleur blanche. Ce corps calleux a une importance considérable ; si on le sectionne, les deux hémisphères deviennent presque indépendants ; son importance est telle que si à la naissance il est peu développé, d'autres voies se créent entre les deux hémisphères. C'est son existence qui explique les correspondances notées par des écrivains et des poètes : Baudelaire dans son sonnet "Correspondances".

> "Les parfums, les couleurs et les sons se répondent
> ....
> Il est des parfums frais comme des chairs d'enfant,
> Doux comme les hautbois, verts comme les prairies"

Rimbaud, jeune poète inspiré, dans le sonnet "Voyelles" écrit à 16 ans

> "A noir, E blanc, I rouge, U vert, O blanc, voyelles,
> Je dirai quelque jour vos naissances latentes".

Est-il utile aussi de rappeler les pages célèbres de Marcel Proust sur le flot de souvenirs que réveille le goût d'une madeleine ?

Bien qu'il n'y ait pas de certitude absolue sur les rôles respectifs des deux hémisphères, de nombreux neurologues sont assez d'accord sur les faits suivants (chez les droitiers) révélés par l'observation des blessés et par la tomographie.

Relèvent de *l'hémisphère gauche* les processus déductifs linéaires ; la pensée logique et analytique ; les capacités linguistiques ; apprentissage, production et compréhension du langage : ceux, en gros où excellent les *tacticiens*. Cet hémisphère est bien adapté à la vie quotidienne, mais il est trop critique et sans grande intuition ni créativité. Ce que mesurent les tests de QI sont essentiellement les performances de cet hémisphère.

Relèvent de *l'hémisphère droit* l'imagination, la reconnaissance des formes, la créativité, les associations d'idées multiples, les fonctions intellectuelles non verbales et un traitement global des informations. C'est l'hémisphère des *stratèges*. Il jouerait peut-être un rôle dans l'élaboration des rêves. Cet hémisphère voit le monde sous des couleurs parfois déplaisantes et hostiles.

Le droit invente, le gauche enseigne ces découvertes, en parle rationnellement, les met en forme. Mais cette dichotomie ne doit pas être exagérée ; en particulier, il peut y avoir substitution de leurs activités en cas de besoin, par exemple lors de la lésion d'un hémisphère. Et surtout le progrès scientifique exige la collaboration de deux tels hémisphères, qu'ils appartiennent tous deux à un même individu, ou à deux individus qu'on pourrait appeler complémentaires : c'est peut-être là l'explication du succès de la collaboration de certains couples de chercheurs, dont le plus fameux fut sans doute le couple Einstein, Mileva Marič, en 1903-1905, avant même leur mariage ; Einstein ayant les idées, Mileva les discutant apportant sa virtuosité mathématique.

Certes les caractéristiques respectives des deux hémisphères que je viens d'évoquer font un peu trop penser aux affirmations graves des voyantes extralucides. Toutefois pour chacun d'eux le faisceau de ces caractéristiques semble assez cohérent et suggère l'intérêt d'une étude expérimentale des corrélations entre les compétences supposées d'un même hémisphère et des corrélations croisées entre les deux hémisphères.

Il semblerait en tout cas que chez les bébés et les jeunes enfants ce soit l'hémisphère droit qui domine.

Il est probable aussi que le style des recherches d'un mathématicien révèle la prédominance d'un de ses hémisphères ; c'est ainsi que je déciderais volontiers que mon hémisphère dominant est le droit : goût de la poésie, de la rêverie, difficultés linguistiques (je conçois facilement, mais souffre pour mettre en forme mes pensées). Il semble que, l'âge venant, mon intuition géométrique s'exerce encore sur de nombreux îlots assez représentatifs d'un champ assez vaste, mais que la mise en ordre, puis en forme, de ces observations intérieures demanderait des dons de tacticien qui me font défaut. C'est pourquoi la plupart de mes travaux ont concerné des structures si simples à mes yeux que j'ai de chacun d'eux une vision immédiate et facilement communicable : "C'est trivial" ai-je envie de dire quand j'en parle ; par contre les deux seuls articles assez techniques que j'ai publiés m'ont coûté de pénibles efforts de rédaction, bien que leur conception ne m'ait pris que quelques heures.

Je souffre assez peu pour préparer une conférence, mais incomparablement plus pour la rédiger !

Facteurs propices à la création

Jeunesse

Neurones et faisceaux de neurones sont encore presque intacts, énergie nerveuse et sexuelle à son summun (pensons à Einstein et Mileva), aptitude à une concentration prolongée, curiosité encore fraîche, un cerveau peu encombré par les préjugés du passé : Newton à 23 ans, en 1666, fait les trois découvertes qui lui assureront l'immortalité.

Einstein à 26 ans, en 1905, fait lui aussi trois de ses plus belles découvertes.

Motivation

La motivation, née d'une pulsion intérieure, soutenue d'abord par l'approbation d'un maître et l'estime des pairs mais soutenue ensuite par les défis, intérieurs ou extérieurs, par le plaisir de faire fonctionner son cerveau et, pourquoi pas, par l'espoir de laisser un nom célèbre, ainsi que nous le confie André Weil "Dès mon jeune âge, j'ai espéré que mon travail aurait une certaine place dans l'histoire des mathématiques. N'est-ce pas une motivation aussi noble que de prétendre au Prix Nobel ?".

En ce qui me concerne je voudrais dire que ma motivation a toujours été le plaisir de créer de belles mathématiques, utiles ou simplement élégantes, et d'avoir l'approbation de mes pairs. Puis-je ajouter que j'ai souvent été étonné que la société me donne un salaire convenable pour une activité qui me procure tant de plaisir, alors que nombre de mes contemporains reçoivent un salaire très inférieur pour un travail répétitif et ennuyeux.

L'enthousiasme, la joie de la création, les instants brefs mais inoubliables des illuminations, sont le véritable aiguillon du chercheur. Que Dieu a dû bien s'amuser pendant les six jours de la création, mais quel ennui après le jour de repos !

En Mai 68, j'ai entendu des étudiants, mécontents de leur passivité dans les salles de cours, dire à leur professeur : "Nous avons tous le droit de faire de la recherche ; dites-nous ce qu'il faut faire et nous le ferons". Je vois dans cette déclaration à la fois une critique des cours magistraux, et aussi une méconnaisance des facteurs qui soutiennent l'activité du chercheur, en particulier succès et enthousiasme qui s'engendrent mutuellement. Comme le dit le physicien George Charpak "Si la vie d'un chercheur se résume à exécuter des tâches qu'il ne trouve pas intéressantes, autant entrer dans l'industrie". (C'est dur pour l'industriel).

Facteurs sociaux, émulation

Je voudrais revenir un instant sur le rôle des facteurs sociaux, de l'émulation et des challenges. Que la recherche en sciences expérimentales, avec ses laboratoires et ses équipes ait besoin d'une société bien organisée est une évidence. Mais c'est vrai aussi de la recherche mathématique, et pas seulement à cause de l'utilisation accrue des ordinateurs et du développement du travail en équipe ; c'était vrai déjà du temps d'Euclide et d'Archimède où les Académies, le soutien de princes éclairés, l'échange de lettres, constituaient une stimulation indispensable ; c'était vrai au XVII$^{\text{ème}}$ siècle où le Père Mersenne, conscient de ce besoin, se fit la boîte-aux-lettres mathématique de l'Europe. La recherche mathématique a commencé avec la naissance des grandes villes ! Un Robinson Crusoe, mathématicien avant son naufrage, et encore productif sur son île, est-il crédible ?

Jusqu'à quand notre République étouffera-t-elle l'éclosion des talents dans nos écoles de tous niveaux en luttant, par la loi et par des mesures de fausse démocratisation contre émulation et compétition ; ce n'est pas seulement sur les stades que la compétition est indispensable !

Les excitants

J'ai mentionné déjà l'importance pour Einstein au début de ses travaux, de ses liens amoureux avec Mileva. Il y eut alors une conjonction heureuse de cet amour mutuel et de l'excitation cérébrale apportée par leur collaboration.

Une relation amoureuse peut donc être un facteur favorable à la recherche, mais elle est rarement neutre et peut au contraire avoir un effet déstabilisant.

Puis-je rappeler enfin l'importance du thé et du café ? Lorsque mon ami

Marcel Brelot, après une période de dure recherche sans succès sentait que cependant il avait en mains tous les atouts, il s'enfermait dans son vaste bureau de l'Institut Fourier de Grenoble et se faisait une tasse de thé fort pour provoquer le déclic, l'illumination cherchée car, disait-il, les découvertes se font lors de pointes de l'activité cérébrale, après un long travail de défrichement. (Mais aucune tasse de thé ne transformere un champion du 100 m en marathonien).

Est-il nécessaire de souligner ici l'illusion de l'efficacité de "drogues" pour réussir en recherche ? Je ne connais aucun chercheur scientifique dont les découvertes aient été faites sous l'emprise de la drogue.

Facteurs défavorables

Age

Les soucis, la fatigue physique ou nerveuse, et l'âge : à 30 ans le travail vous tire en avant, à 70 il faut le tirer, et c'est difficile ! Mais si un âge avancé n'est jamais favorable à la découverte, une meilleure hygiène alimentaire, de meilleures relations scientifiques allongent la période de productivité des mathématiciens. Sans donner de chiffres précis, disons seulement qu'à 60 ans ou même un peu plus, ils peuvent encore faire des travaux de qualité honnête et rendre des services à la communauté mathématique s'ils acceptent de ne pas utiliser leur notorieté pour soutenir abusivement des recherches qui prolongent les leurs.

Et puis parfois, une bonne surprise, telle celle d'Apery qui à 61 ans démontra l'irrationalité de $\zeta(3)$.

Les pertes de performance ont des causes exactement opposées à celles qui favorisent la jeunesse :
Détérioration des neurones, perte de mémoire et baisse de l'intuition ; moins bonne irrigation sanguine, pulsions amoureuses diminuées. Impression de "déjà vu", d'où motivation moins grande ; et après tout, on a déjà une certaine célébrité qu'on ne peut espérer accroître ! Mais surtout, tous les fils-à-la patte : comités de rédaction, assemblées générales, lettres de recommandation, ... qui grignotent temps et l'énergie. Voyons sur un exemple célèbre

comment vieillissait un mathématicien au début de ce siècle ; dans une des lettres de Lebesgue à Borel, retrouvées dans les sous-sols de l'Institut H. Poincaré, Lebesgue écrit ceci, alors qu'il n'avait encore que 35 ans :

"Mon cher ami, ce n'est pas par coquetterie que je dis que je baisse. Je sais fort bien que depuis 5 ans je n'ai rien fait de nouveau... C'est à une place de Recteur que j'aurais dû être candidat."

Il avait fait sa théorie de l'intégration à 27 ans, et son travail sur les fonctions représentables analytiquement à 30 ans.

Mais il faut savoir aussi quelle était sa vie : mauvaise santé familiale, préoccupations de carrière, gêne financière, début de sa polémique avec Borel.

Blocages, collectifs ou individuels

Il y a des blocages *collectifs* : celui lié au postulatum d'Euclide n'a commencé à céder que le jour où on a commencé à en douter ; il avait duré plus de 2000 ans. Ceux liés à la notion d'infini, actuel et potentiel ; les vaines disputes de caractère parfois métaphysique concernant l'infini ne furent balayés que par les premières définitions de Cantor, en particulier celle de bijection.

Tout déblocage est comme l'ouverture d'une vanne, qui laisse couler l'eau à grands flots, l'eau qui apporte une vie nouvelle : Géométrie non-euclidienne et les travaux de Poincaré ; la théorie des ensembles et tout un pan des mathématiques modernes.

Les blocages collectifs, et surtout ceux qui durent des siècles sont dus au conservatisme de l'esprit humain : l'homme a tendance à prendre pour des vérités intangibles ce qu'il a appris dans son enfance et qu'il transmet à ses enfants. Pour sortir du sillon de la tradition, il a besoin de l'aiguillon de la nécessité, les impasses d'une science, la rencontre d'un petit fait qu'aucune théorie admise ne peut expliquer.

Il faut se méfier des modes, des grands gourous, rechercher les fleurs vénéneuses, ... et changer nos méthodes d'enseignement. On peut rêver à ce que serait l'évolution de la science si n'existaient pas ces longs blocages collectifs ;

mais peut-être Dieu après le 7ème jour fut-il un peu machiavélique et a-t-il, depuis l'épisode de la pomme, prévu des blocages comme garde-fous contre une évolution trop rapide de l'humanité !

Mais il y a aussi des blocages *individuels*, même chez les créateurs authentiques ; nous retrouvons ici Lebesgue :
L'observation d'un petit fait, son mouchoir chiffonné l'avait conduit, après avoir précisé la théorie de la mesure de Borel, à définir la notion d'intégrale de certaines fonctions mesurables, mais l'histoire serait trop simple s'il avait, du premier coup, défini les fonctions intégrables quelconques. Lui aussi est resté pendant des années esclave de la tradition : l'intégrale de Riemann supposait les fonctions bornées ; Lebesgue conserve cette restriction dans sa thèse de 1902 ; en 1905, à propos des fonctions non bornées il écrit encore à Borel “Il est si difficile d'attaquer ces maudites fonctions” ; et alors qu'en 1908 l'obstacle semble tout à fait surmonté, il en reste encore des traces dans ses “Leçons sur l'intégration” de 1928, comme si dans son esprit les fonctions intégrables non bornées étaient un luxe, une curiosité ; et pourtant le théorème de Riesz-Fischer qui s'exprime en termes de fonctions non-bornées avait été publié en 1907.

Comment éviter les blocages ? L'humanité va-t-elle répéter l'erreur catastrophique qu'elle a faite pendant 15 siècles en acceptant comme canonique l'enseignement d'Aristote, erreur qui n'a cessé qu'après le choc, psychologique, technique ou scientifique qu'a constitué la rencontre avec d'autres civilisations, par les croisades, Marco Polo, Christophe Colomb ?

Aujourd'hui deux faits nous protègent peut-être des blocages : communication et information rapides, et l'accroissement considérable du nombre des chercheurs.

La probabilité de blocage existe encore, mais elle restera minime si l'on sait se méfier des modes et des gourous. Le grand gourou mathématicien de notre temps est Bourbaki ; son porte-parole le plus connu, Jean Dieudonné, a laissé croire, en insistant sur “Le choix bourbakiste”, que c'était l'unique choix, et que les disciplines naissantes ne méritaient pas l'attention tant qu'elles n'étaient pas structurées en un bel échafaudage formalisable.

Or les clefs de l'avenir, celles qui vont peut-être nous donner une nouvelle façon de regarder le monde existent peut-être dès aujourd'hui à l'état de germes ; laissons-les germer. Ce sont ces concepts nouveaux qui constituent les mutations humaines de notre temps.

Citations

Vérités établies et gourous. Il faut parfois déboulonner les statues trop imposantes, y compris notre statue intérieure. On peut s'aider, un temps, des épaules des plus grands, mais il faut être soi-même dès qu'on se sent assez fort. Plusieurs penseurs, venus d'horizons différents l'ont excellemment dit :

Krishnamurti : "Toute autorité aveugle et tue.". Il rejette les gourous et refuse d'en être un ; il dit d'un de ses visiteurs "Il avait tant lu qu'il lui était difficile de savoir où commençait sa propre pensée".

Machado : "Marcheur, le chemin, ce sont tes traces et rien de plus. Marcheur, il n'y a pas de chemin ; c'est toi qui le traces en marchant."

Gide : "Nathanael, jette mon livre, ne t'y satisfais point. Ne crois pas que ta vérité puisse être trouvée par quelqu'autre".

Lavelle, lui aussi s'élève contre les dogmes : "Il n'y a rien que nous ayons pensé une fois pour toutes et qui soit tel qu'il suffirait d'en garder la mémoire et de le convertir en règles".

C'est dire qu'il n'y a pas de vérité ; c'est sa recherche qui importe. L'architecte et le maçon sont plus précieux que le monument qu'ils ont édifié !

Les dons

Unicité des hommes, dons et génie

Chaque homme est unique, irremplaçable. Nous classons trop souvent nos contemporains suivant des critères utilisant un très petit nombre de paramètres, les maigres et les gros, les honnêtes et les malhonnêtes, les bons en gymnastique, les forts en thème, etc. : classement certes facile mais qui occulte, de chaque individu sa richesse, sa diversité, son unicité en un mot ; car on sait maintenant, après la mise en évidence et le comptage des gènes, des groupes sanguins (dont le système HL-A) et des mutations des acides aminés, qu'au sens biologique il n'y a pas deux hommes identiques, même si ce sont de vrais jumeaux, et que ce serait vrai encore si l'humanité était mille fois plus nombreuse. Mais c'est autre chose d'en prendre une pleine conscience.

Combien apparaît misérable, dans cette lumière, le racisme, linguistique, social, religieux, ethnique ou tribal. Il y a racisme parce que l'Autre dérange nos habitudes, et nous obligerait pour le comprendre à sortir de notre cocon, aussi inconfortable soit-il. Si nous en prenons une pleine conscience, nous devons en assumer toutes les conséquences : une ouverture totale envers tous les êtres, mais aussi puisque chacun de nous constitue une synthèse unique ne serait-ce que par notre sensibilité et notre vision du monde, comprendre que notre devoir envers nous-mêmes doit être de faire fructifier au mieux notre unicité.

Puisque chaque homme est unique, il mériterait que tous les chercheurs du monde se penchent sur lui pour l'étudier ; mais de cette synthèse unique, ne nous frappent souvent que les facettes les plus brillantes et les plus rares, qu'on appelle des dons. Il s'agit de caractéristiques humaines, physiques, intellectuelles ou morales considérées comme souhaitables : beauté, force, adresse, grâce, amabilité, dévouement, résistance physique, persévérance, mémoire, etc. ... Ce sont ces dons que les bonnes fées des contes apportent dans le berceau des jeunes princesses ; mais on sait aussi que de vieilles sorcières jalouses apportent de leur côté des anti-dons, que l'on appelle des mauvais sorts : paresse, jalousie, esprit brouillon, laideur, etc. ...

Lorsqu'un don se manifeste avec une intensité exceptionnelle, et surtout chez un jeune sujet, il frappe d'étonnement ceux qui en sont les témoins et on use, et abuse, du mot génie. Quant à moi, je serais tenté de n'appliquer ce qualificatif qu'à ceux dont l'action a déterminé une mutation de l'humanité : des savants, philosophes, artistes, musiciens, poètes, mais aussi des fondateurs des grandes religions.

Mais où s'arrête l'échelle des génies ? William James disait : “Le génie n'est guère plus que la faculté de percevoir sur un mode inhabituel" ; à ce compte, tout mathématicien ou scientifique, créateur d'une nouvelle notion féconde serait génial, ce qui certainement ne lui déplairait pas ! Je préfère donc parler de dons exceptionnels ; ces dons se manifestent presque toujours dans la jeunesse.

Certains enfants manifestent une précocité exceptionnelle pour parler, lire, écrire, mais ce don ne préjuge d'ailleurs nullement de leurs aptitudes d'adultes. D'autres, très jeunes encore telle Anne Frank, tiennent un journal intime qui nous émeut encore. J'ai un collègue qui, dans sa jeunesse, avait un tel besoin de s'exprimer qu'il payait sa sœur cadette pour qu'elle l'écoute parler. La plupart des mongoliens ont reçu, par leurs gènes, le don d'une affection débordante. Certains enfants autistes gardent en mémoire, avec leurs dates, le détail des jours passés. Mais les calculateurs prodiges n'ont presque tous (si l'on excepte Gauss et quelques autres) en dehors du calcul que des capacités intellectuelles moyennes.

Mais revenons aux très grands, dont il est agréable et réconfortant d'égrener quelques noms ; ce furent toujours des êtres d'une grande intelligence, en dehors même de leur orientation maîtresse.

Un grand conquérant, Alexandre, élève d'Aristote, meurt à 33 ans après avoir en 12 ans conquis un immense empire, de la Macédoine à l'Indus.

Des musiciens dont les dons se manifestent très tôt : Mozart à 4 ans, Beethoven, Chopin à 7 ans, Prokofiev avant 9 ans. Des peintres, sculpteurs, architectes : Bruegel l'Ancien, Michel-Ange, Léonard de Vinci, Van Gogh, Picasso, etc. ...

Des philosophes comme Pic de la Mirandole, proclamé à 10 ans "Prince des orateurs et des poètes", mort à 31 ans, laissant une œuvre immense.

Pascal, mathématicien, physicien et philosophe, célèbre dès l'âge de 16 ans, créateur du calcul des probabilités avec Fermat, et de la machine arithmétique.

Descartes, créateur du lien entre géométrie et algèbre, et auteur du "Discours de la Méthode".

Newton, mathématicien et physicien crée entre 22 et 23 ans la théorie moderne des couleurs et le calcul des fluxions pour développer la théorie de l'attraction universelle et poser les bases de la mécanique rationnelle.

Leibniz, créateur universel, qui partage avec Newton la gloire de la création du calcul différentiel et qui, à 15 ans formule ses premières idées sur la logique.

Einstein que l'on cite souvent comme l'exemple d'un génie de première grandeur qui n'a pas manifesté précocement ses dons, publia pourtant, à 26 ans, trois mémoires fondamentaux qui changèrent la physique : Relativité restreinte, effet photo-électrique, mouvement brownien.

En mathématiques, la liste est longue de ceux que nous admirons :

Les Bernoulli, exemple remarquable d'hérédité (8 en 3 générations) dont certains allaient vers les mathématiques comme les alcooliques vers leur drogue.

Euler, élève de Jean Bernoulli qui sera à 16 ans professeur à l'Ecole d'Artillerie de Turin et décidera à 17 ans, malgré son père, de se consacrer aux mathématiques.

Laplace qui, très jeune avait déjà une mémoire prodigieuse.

Monge, géomètre né, professeur de physique à 16 ans.

Gauss, mathématicien, physicien, astronome et calculateur prodige, dont le génie exceptionnel se manifeste très tôt.

Galois mort à 21 ans, et Abel mort à 27 ans, les deux cadets des mathématiques, à la trajectoire courte mais fulgurante.

Poincaré, esprit universel, issu d'une famille distinguée, doué d'une mémoire puissante, et dont la passion mathématique débuta à 15 ans.

Cantor, créateur de la théorie des ensembles, dont les dons se manifestèrent vers 15 ans.

Ramanujan, fils de l'Inde, autodidacte, énonça sans preuve de nombreuses identités remarquables entre séries, si cachées que toutes n'ont pas encore été démontrées.

Cette courte liste ne contient aucun nom de femme parce qu'elle concerne une période où il était encore malséant pour une femme de consacrer son énergie à une œuvre scientifique ou même artistique, et où de plus l'éducation était le privilège de classes aisées ; on ne peut cependant pas oublier la lutte que dut mener la jeune Sophie Germain pour étudier les travaux de Gauss et lui adresser ses propres résultats en théorie des nombres et sur les surfaces élastiques ; ni les travaux plus connus encore de Sophie Kovalevskaia, lauréate à 28 ans de l'Académie des Sciences.

Hérédité et génétique des dons

J'entends par hérédité la transmission de certaines caractéristiques d'un couple, animal ou humain, à sa descendance ; et par génétique la détermination des caractéristiques d'un individu par le génome de l'œuf fécondé d'où il provient. L'hérédité ne détermine qu'en partie ce génome, puisque la loterie génétique intervient au moins à deux étapes de sa formation.

Cependant n'existerait pas de sélection des animaux domestiques si l'hérédité ne déterminait pas fortement chez ces animaux leurs traits physiques et certains traits du comportement ; n'existeraient pas la race des percherons et celle des pur-sang, les teckels ni les Saint-Bernard.

Il n'y a aucune raison pour qu'il en soit autrement dans l'espèce humaine ; de fait il est rare que les fils de deux parents longilignes soient petits et trapus, ou inversement ; ou, de façon plus frappante encore, qu'une fille de paysans chinois soit une blonde aux yeux bleus. J'ai eu au lycée un camarade qui était petit, rond, de caractère aimable et s'appelait Triboulet ; son père, son frère et sa sœur étaient petits, ronds et souriants !

La transmission par hérédité de caractères physiques dans l'espèce humaine ne fait donc pas de doute ; c'est là l'origine de la notion de race, basée sur un tout petit nombre de traits physiques.

Il en va tout autrement de la transmission des traits de caractère et surtout de ce que l'on peut appeler les dons intellectuels.

S'il est vrai que pendant les deux derniers siècles s'est produite en Chine une stagnation des innovations scientifiques et techniques, la cause en est culturelle et sociale, mais non raciale ; pendant des millénaires sa civilisation avait ébloui les explorateurs, tel Marco Polo, et ses apports à la science et à la technique étaient fondamentaux. Et depuis son récent réveil, elle commence à produire des chercheurs de très haut niveau international, annonciateurs peut-être d'un avenir culturel et scientifique de premier plan.

Il est donc possible, bien qu'une preuve scientifique n'existe pas encore, que tout don intellectuel soit la résultante d'une coexistence harmonieuse d'un petit nombre de gènes, ou encore une synergie non contrariée par l'existence d'anti-dons ; on chercherait donc en vain à localiser sur un gène, un don pour les mathématiques ou même un penchant pour les sciences.

Il existe cependant des lignées célèbres de peintres, de musiciens (les Bach, Strauss). En mathématiques, les Bernoulli sont un exemple éclatant et assez mystérieux d'une telle lignée ; je ne vois pour l'expliquer sans faire intervenir la vertu de l'exemple, de l'émulation, de l'environnement, que l'existence dans le génome du premier grand Bernoulli, d'une assemblée de gènes dominants, responsable de ses dons mathématiques, et si fortement soudés que la probabilité de sa transmission sur trois générations n'était pas négligeable.

Certes la probabilité pour qu'un couple ait un enfant doué est plus grande si ce couple est lui même doué que s'il ne l'est pas ; mais cette condition n'est ni nécessaire, ni suffisante ; il existe des exemples fameux de très grands hommes issus de parents ne brillant par aucun don :
Le père de Newton était "sauvage, extravagant et faible" ; sa mère était simplement économe, travailleuse et bien organisée.
Laplace était le fils de pauvres paysans normands.
Le père de Gauss était un homme tout ordinaire ; toutefois sa mère était une femme remarquable.
La première épouse et collaboratrice d'Einstein, Mileva Mariè était une femme

exceptionnelle par son énergie, son enthousiasme et ses dons mathématiques ; et cependant, de leurs deux fils, le premier Hans Albert (né en 1904) devint simplement ingénieur, puis professeur d'hydraulique ; et le second, Edward (né en 1910), très doué dans son enfance, devint schizophrène à 19 ans ; sa ressemblance *physique* avec son père était frappante ; il mourut à 55 ans.

Le développement du cerveau est différent chez l'homme et chez les animaux ; chez ceux-ci les premières semaines et même parfois les premières minutes de la vie ont une importance considérable. Les travaux sur les oiseaux de Heinroth (1910) puis de K. Lorenz (1935) ont montré que le premier objet mobile aperçu pendant une période critique de quelques heures ou même de quelques minutes chez certaines espèces peut devenir définitivement un objet-parent ou même un objet sexuel.

Chez les chatons dont on empêche les paupières de s'ouvrir pendant quelques semaines, les connections des neurones optiques dégénèrent ou ne s'établissent pas, et le chaton devient définitivement aveugle.

Ces conclusions ne s'étendent pas sans précautions aux jeunes humains, sans doute parce que dans leur cerveau le nombre de synapses potentielles ou déjà établies est si grand que, par des voies indirectes peuvent s'établir, même tardivement, des faisceaux supplétifs de neurones. Toutefois l'observation des "enfants sauvages" au cours des derniers siècles montre que contrairement au Mowgli de Kipling, ces enfants ont été incapables d'acquérir un développement physique et mental normal.

Il est donc clair que l'éducation familiale d'abord, puis l'école et la société jouent un rôle essentiel dans la formation du cerveau et la maturation d'un don d'origine génétique : "Lorsqu'une semence tombe sur un terrain pierreux, elle lève mais dès que le soleil paraît, elle est brûlée et sèche faute de racines".

Mais comment reconnaître les enfants doués puis, les ayant reconnus, quelle éducation leur donner ? C'est la grande responsabilité à la fois de leur famille et de l'école.

Les Américains, souvent excessifs, ont créé à côté de leurs écoles publiques assez médiocres, des écoles pour surdoués, dont la réussite est fort controversée.

En France des gouvernements successifs, mus par un faux esprit démocratique ou par démagogie, ont prétendu vouloir donner à tous, les mêmes chances de succès, et ont pour cela rendu obligatoires les classes indifférenciées, néfastes pour les enfants au rythme lent, et désastreuses pour les enfants doués. Il faut se réjouir que la pression conjuguée de certains enseignants et des familles ait conduit à certains palliatifs, mais la loi, même absurde, reste la loi : l'erreur a la vie dure. Alors que le but de l'école devrait être de développer au mieux les possibilités, parfois très différentes, des enfants, la loi slogan actuelle pourrait s'énoncer “Tous les enfants doivent recevoir la même éducation”.

Je ne saurais mieux conclure mon éloge de la “différence” que par cette citation de Lavelle :

“Si l'on veut que tous les hommes soient semblables, ils ne cesseront de se heurter et de se haïr ; sinon chacun d'eux sera pour tous les autres une révélation et un soutien”.

Epanouissement d'un don

Il ne suffit pas d'avoir un don à la naissance ; encore faut-il qu'il puisse se développer, fructifier et ne soit pas “laissé sous le boisseau”. Que de dons perdus chez les bébés chinois pendant les deux derniers siècles de décadence de l'empire chinois !
Un minimum de mémoire est indispensable ; Einstein se plaignait de la sienne, mais apparemment elle était suffisante ; et inversement une mémoire non sélective peut encombrer l'esprit, comme le soulignait Krishnamurti parlant d'un de ses visiteurs.

Il faut certes, de la curiosité et de l'imagination, mais aussi de la suite dans les idées, de la persévérance et un travail soutenu - avant et après l'illumination espérée ; celle-ci lorsqu'elle se produit doit être une “ivresse maîtrisée”.

Une certaine forme de culture est indispensable, acquise non de façon passive, mais avec appétit, avec l'objectif plus ou moins proche de l'utiliser dans la recherche en cours. En un siècle où les mathématiques accèdent à l'unité, où les sciences expérimentales ont à se préserver de certains effets néfastes d'un réductionnisme pourtant nécessaire, une telle façon active d'acquérir de la culture semble être la plus efficace. Topologie et géométrie algébriques, variétés différentiables et groupes de Lie, ont tissé des liens féconds avec la physique et chacune de leurs facettes est vitalisée par les autres ; ces liens doivent être présents dans le subconscient et dans la mémoire consciente de tout chercheur, ne fut-ce qu'à l'état d'ébauches.

Certes il n'est ni possible ni souhaitable de définir des règles précises pour développer un don, car l'originalité du chercheur doit aussi consister à découvrir son propre cheminement ; "Marcheur ; il n'y a pas de chemin ; c'est toi qui le traces en marchant".

Poisons de la création

A côté des dons il y a les anti-dons, dont les enseignants et les chercheurs doivent se méfier.

- Soit internes tels que manque de vitalité, manque de confiance en son étoile, fragilité psychologique par trop de sensibilité aux coups inévitables de l'environnement : un créateur doit avoir une âme robuste et savoir, quand il le désire, protéger du monde extérieur son activité de recherche.
- Soit externes comme les pressions familiales pour imposer à un jeune doué une profession qui lui déplaît. Que de savants illustres n'ont échappé que par miracle ou par leur force de caractère à de telles pressions ; mais nous ne connaîtrons jamais ceux qui n'ont pas eu cette chance.
- Poison aussi, bien que plus subtil, l'effet que j'ai déjà souligné, néfaste après avoir été fécond, d'une grande synthèse de concepts présentés comme des vérités immuables. Les gourous, quelle que soit leur valeur personnelle, ne doivent être écoutés que d'une oreille mais bien sûr, les plus dangereux sont les "petits gourous" et ceux qui se complaisent dans ce rôle.

Il faut savoir *donner congé au dogmes.*

En présence d'un jeune doué, le devoir d'un maître à quelque niveau que ce soit, doit être seulement de l'aider à se mieux connaître, et à trouver seul sa voie.

La lumière sous le boisseau

Nous avons pris l'habitude de publier dès que possible tout résultat scientifique, avant même parfois d'en avoir une preuve écrite, détaillée et convaincante ; la compétition internationale, accentuée par la rapidité des communications électroniques, ainsi que par les règlements des jurys d'évaluation, en sont en grande partie responsables.

Il n'en a pas toujours été ainsi : sans avoir le goût du secret aussi poussé que l'école Pythagoricienne, les mathématiciens du XVII$^{\text{ème}}$ siècle n'annonçaient souvent leurs découvertes que sous forme de cryptogrammes ou de problèmes signés d'un pseudonyme. Souvent aussi, leur amour-propre d'auteur se contentait de l'estime de quelques amis ou correspondants au courant de leurs recherches. Il faut dire que les revues scientifiques n'existaient pas encore, d'où le rôle important d'un altruiste éclairé comme le Père Mersenne.

C'est peut-être là qu'il faut voir la raison principale du retard de la publication par Newton de sa "Méthode des fluxions" et surtout de ses "Principes mathématiques de la philosophie naturelle" qu'il ne se décida à rédiger que sous l'amicale insistance de Halley, pour paraître en 1686, donc 20 ans après leur création.

Plus de 130 ans plus tard, Gauss allait récidiver. Plusieurs de ses découvertes, telles que les propriétés des fonctions elliptiques ou le critère d'analyticité des fonctions continues, restèrent enfouies, souvent à l'état d'esquisse ou sous forme cryptique dans son journal personnel publié seulement 62 ans après sa mort. Pourquoi tant de richesses cachées ? Certes, avant l'âge de 20 ans il avait tant d'idées que le temps lui manquait pour les développer ; mais il semble établi qu'il considérait comme secondaire la publication de résultats que seule une motivation intérieure puissante l'avait conduit à formuler et à démontrer. Pareil désintéressement ne semble pas menacer aujourd'hui le monde mathématique et on peut s'en réjouir si l'on désire que continue l'actuel développement explosif des mathématiques. Encore faudra-t-il veiller à ce que la qualité ne soit pas étouffée par la quantité, et à préserver l'unité féconde de l'édifice mathématique en développant un réseau de diffusion et de synthèse accessible à tout bon chercheur.

Amour et idée intérieure

Me voici bientôt parvenu au terme de ma trop longue réflexion sur les processus mentaux de la création : trop longue mais cependant très incomplète puisque l' "homo creator" est un être complexe et qu'ainsi la seule création mathématique, par exemple, ne peut être bien comprise, à la fois dans un seul cerveau ou dans le mégacerveau de l'humanité tout entière, que par ses interactions avec les autres modes de création, musicale, artistique, poétique, etc. ...

Si l'on définit l'amour d'un être humain comme un élan mental de cet être vers un objet, inerte, animé ou purement conceptuel, on pourrait dire que toute création est mue par un amour. Mais je préfère, lorsque cet objet est purement conceptuel, reprendre pour cet amour le nom d'"idée intérieure" : Cette notion a été formulée par Nietzsche, après le peintre allemand Caspard David Friedrich, et reprise récemment par J. Harthong pour l'appliquer à G. Reeb dans son article "Comment j'ai connu et compris Georges Reeb". Friedrich affirmait : "Il existe un sentiment esthétique spontané qui permet à l'artiste de sentir en lui-même ce qu'est le beau et ce qu'il doit représenter". C'est donc un sentiment personnel, une pulsion subjective qui dicte la voie à suivre ; c'est donc lui qui aide le marcheur de Machado déjà cité, à trouver son chemin en marchant.

Le beau conte de Paulo Coelho "L'alchimiste" est une belle illustration du développement d'une idée intérieure : les suggestions voilées que son jeune berger reçoit de mystérieux vieillards, y apparaissent comme les pulsions d'une voix intérieure :
"Tu dois essayer de vivre ta légende personnelle."
"Quand tu veux quelque chose, tout l'univers conspire à te permettre de réaliser ton désir."
"On a toujours la possibilité de faire ce que l'on rêve."

Une idée intérieure puissante est en général liée à un don - par exemple une mémoire exceptionnelle dans le cas de calculateurs prodiges. Elle peut exister et se manifester très précocement, comme chez Mozart ; mais souvent elle est d'abord imprécise et même multiforme, puis elle se précise et se nourrit par l'expérience, pour se manifester enfin dans une trajectoire éblouissante.

Une étude approfondie de la formation de l'idée intérieure chez les grands hommes du passé permettrait de comprendre mieux les rôles respectifs des dons d'origine génétique et de l'environnement ; les matériaux pour une telle étude ne manquent pas ; ils illustrent de façon convaincante la puissance et l'efficacité des idées intérieures, par exemple celles des fondateurs de grandes religions, Bouddha, Jésus, Mahomet, ou d'hommes dont le charisme était si puissant qu'il pouvait entraîner tout un peuple.

Aussi les exégètes et les Pères de l'Eglise, surtout préoccupés par l'aspect messianique de Jésus, me semblent-ils avoir trop négligé les facteurs de formation de son idée intérieure : équilibre, dons de synthèse, vision de plus en plus claire de sa mission, contacts encore mal connus avec les Esséniens, mais surtout l'importance, non plus seulement de l'Ancien Testament, mais d'un amour pour tous les hommes qui ira lorsque l'affrontement avec les prêtres du Temple lui apparaîtra comme inévitable, jusqu'à lui faire préférer sa mort à la violence.

Une étude comparative de la formation des idées intérieures des fondateurs des grandes religions permettrait de mieux comprendre l'évolution de ces religions et leurs facettes actuelles, comme si le présent était la fleur épanouie du bouton qu'elle fut voici plus d'un millénaire.

Les exemples fameux d'idées intérieures puissantes ne manquent pas :
Celles des grands mystiques, des martyrs et des grands saints, mais aussi sous une forme pervertie, celles des fanatiques politiques ou religieux.
Celle de Mahatma Gandhi qui, à mains nues, mais avec une volonté inflexible, a fait céder le puissant Empire anglais.
L'idée intérieure d'Alexandre le Grand, dont il prit progressivement conscience, au fur et à mesure de sa progression vers l'Est, était le rêve d'une synthèse des cultures grecques et orientales.
Celle de Newton, qu'il a résumée dans cette courte phrase : "Je ne forme pas d'hypothèses", exprimant ainsi sa réaction contre la tendance de nombreux savants de son temps, à vouloir expliquer le monde par des explications a priori et des théories non basées sur l'expérience, telle la théorie des tour-

billons de Descartes.
Celle d'Einstein qui, vers 15 ans, cesse d'être simplement un bon élève un peu lent : trouver des explications *simples* et *belles* aux problèmes du Temps, de la lumière et de la gravitation. Il disait souvent que ses grandes idées lui étaient dictées par une voix intérieure.
Plus proche de nous, Lebesgue, dont l'idée intérieure était une vision géométrique des objets mathématiques. Il affirmait "Pour ma part, j'ai toujours été guidé dans mes recherches par des considérations géométriques et, si je ne puis donner aucun de mes mémoires comme une application certaine de l'Analyse à la Géométrie, il me semble que j'ai fait constamment des applications de la Géométrie à l'Analyse".

L'auteur d'une œuvre scientifique ne prend parfois conscience de ce qu'est l'idée intérieure qui oriente son activité créatrice qu'après plusieurs années de recherche. Ce fut mon cas ; je pourrais reprendre en partie à mon compte ce que dit Lebesgue ; dès le début de mes recherches, j'ai toujours cherché à voir simplement les choses simples, à en avoir une vision directe, géométrique et quasiment visuelle. Mais en outre, il s'est greffé sur cette approche stratégique des mathématiques, après plusieurs années de recherche où mon seul plaisir était de résoudre les problèmes variés qui se présentaient à moi, une préoccupation qui est vite devenue comme une seconde nature, à savoir de ne m'intéresser qu'à des problèmes difficiles mais d'énoncé simple, et d'adopter pour les résoudre un cheminement propre à faire de la solution trouvée un outil commode et utile dans un cadre général.

La morale de cette histoire !

Il n'existe aucune recette que l'on puisse donner à un jeune chercheur pour l'aider à trouver sa voie. On peut lui dire seulement - et c'est aussi un message pour tous les éducateurs
"Sois toi-même. Développe et fortifie ton idée intérieure. Crois en toi et tu pourras soulever le monde".

Les grandes lignes de l'évolution des mathématiques

Jean Dieudonné [1]

Je vais tâcher dans cette conférence inaugurale de dégager quelques traits généraux de l'évolution des mathématiques et de dissiper à cette occasion quelques idées inexactes assez répandues dans les milieux intellectuels qui s'intéressent aux sciences, sans être très au courant des mathématiques d'aujourd'hui.

Dans ce séminaire, vous allez entendre une série d'exposés sur l'histoire des mathénatiques, depuis les Grecs jusqu'au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, qui seront certainement très instructifs. Mais la première remarque que je voudrais faire, et dont peu de gens, hormis les mathématiciens professionnels, ont conscience, c'est qu'au moins 80 % des connaissances mathématiques d'aujourd'hui remonte à moins de 150 ans tant en ce qui concerne les résultats que les méthodes et techniques imaginées pour les obtenir.

Dans un livre intitulé “Panorama des mathématiques pures”, publié il y a 2 ans, j'ai réparti, pour la commodité de l'exposé, les mathématiques actuelles en 26 rubriques. Or il n'y en a qu'une seule, l'Analyse classique, dont on peut dire que la moitié était connue avant 1850. Par contre, 9 rubriques n'existaient pas avant 1895 : Topologie générale, Topologie algébrique, espaces vectoriels topologiques, théorie spectrale, algèbre de von Neumann, théorie ergodique, analyse harmonique non commutative, théorie des catégories, algèbre homologique. Quatre autres ne remontent pas plus haut que 1870 : Théorie des ensembles, groupes de Lie, formes modulaires et automorphes, fonctions de plusieurs variables complexes. Enfin, des 12 autres : Logique mathématique, Algèbre, Théorie des nombres, Algèbre commutative, Géométrie algébrique, Théorie des groupes, Intégration, Analyse harmonique commutative, équations différentielles, équations aux dérivées partielles, Géométrie différentielle, Probabilités, on peut dire que les 4/5 au moins de leurs méthodes et résultats sont postérieurs à 1840.

Pour quelles raisons cette accélération du progrès s'est-elle produite, et comment s'est-elle manifestée ? Pour le voir, nous sommes amenés à exa-

1. Séminaire de philosophie et mathématiques, 1980, fascicule 3, p. 1-10, http://www.numdam.org/item?id=SPHM$_1$980$_{3A^10}$, ©ENS, IREM Paris Nord, Ecole centrale des arts et manufactures, 1980

miner comment, en gros, s'est déroulée l'histoire des mathématiques depuis 200 ans. Il faut d'abord faire justice d'une théorie assez répandue qui voudrait que toutes les notions mathématiques aient été introduites au fur et à mesure des besoins de la société ambiante, des techniques ou des sciences expérimentales. Certes, il serait absurde de nier que l'origine des nombres et de la géométrie provient des nécessités de la pratique : décompte d'objets, opérations commerciales, architecture ou irrigation. En outre, à partir de la Renaissance, la Mécanique, l'Astronomie, la Physique et même de nos jours la Biologie n'ont cessé de poser aux mathématiciens des problèmes qui exercent leur sagacité, notamment dans le domaine des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles ; qui plus est, ce sont souvent des notions issues de l'expérience : conservation de l'énergie, principes "extrémaux" variés, qui ont suggéré aux mathématiciens de fécondes méthodes d'attaque de ces problèmes. Plus récemment, l'Algèbre et les théories combinatoires, sans parler du calcul des probabilités, ont reçu des applications inattendues, avec le double courant d'échanges fructueux que cela implique nécessairement.

Mais cela dit, des 26 rubriques citées ci-dessus, l'histoire montre que plus de la moitié sont apparues sans aucune influence de la réalité sensible, ou n'ont avec elle que des liens extrêmement ténus : Algèbre, Théorie des groupes, Théorie des nombres, Géométrie algébrique, fonctions de plusieurs variables complexes se sont développées de façon complètement indépendante des sciences expérimentales depuis 1800 et dans les autres théories mathématiques, un problème issu de besoins des physiciens ou astronomes n'a souvent été que la chiquenaude initiale, tout à fait hors de proportion avec les conséquences qu'elle a entraînées.

Le progrès des mathématiques est donc essentiellement d'origine interne. La résolution d'un problème est souvent obtenue tout d'abord par un artifice de calcul ou de raisonnement que l'auteur lui-même serait bien en peine d'expliquer ; un exemple typique est donné par les premières formules de résolution "par radicaux" des équations algébriques de degré 3 ou 4. Puis, après parfois une longue stagnation, vient une époque de réflexion, où l'on analyse les artifices qui ont réussi, et on cherche à en trouver les raisons profondes : pour les équations algébriques, il a fallu plus de 200 ans d'efforts infructueux tendant à étendre les formules de résolution aux équations de degré 5, avant que ne commence en 1770 une analyse de ces formules, qui devait conduire en 60 ans à la théorie de Galois. Cet exemple est typique à un autre égard, car ce qui a permis d'aboutir à la résolution complète du problème initial, c'est la mise en évidence des structures de groupe et de corps, sous-jacentes à la question et ignorées jusque là.

De même, durant tout le XIX$^{\text{ème}}$ siècle se sont accumulées de nombreuses idées concernant les "fonctions propres" solutions de problèmes de "vibration" régis par des équations différentielles linéaires, ou des équations aux dérivées partielles de type elliptique. Puis, tout à coup, en une quinzaine d'années, ces idées ont connu une brusque cristallisation avec la naissance de deux nouvelles structures, celle de l'espace topologique et celle d'espace normé, qui ont permis l'essor de la Théorie spectrale des opérateurs et de toutes ses retombées (y compris la Physique quantique). Un troisième exemple est fourni par la Géométrie différentielle, où, après 100 ans de travaux nourris des idées géniales de Gauss, Riemann, Sophus Lie et Elie Cartan, ont émergé les notions d'espace fibré et de connexion, devenues centrales dans cette théorie, et dont la création a été suivie à notre époque par celles de faisceau et feuilletage, dont on sait la fortune actuelle.

Il s'agit dans ces exemples de quelques-unes des grandes structures fondamentales des mathématiques d'aujourd'hui, qui en forment l'armature et se retrouvent partout. Car c'est une de leurs caractéristiques et leur principale vertu de se répandre hors des branches où elles ont pris naissance, abolissant les barrières artificielles entre les vieux compartiments périmés d'Algèbre, Géométrie, Arithmétique et Analyse, et réalisant l'unité essentielle de la mathématique.

L'évolution de la Géométrie algébrique est, de ce point de vue, particulièrement exemplaire : déjà hybride de Géométrie et d'Algèbre à sa naissance au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, elle a subi successivement l'influence de l'Analyse avec la théorie des intégrales abéliennes, de la Théorie des nombres algébriques avec le concept d'idéal, de la naissante Topologie algébrique avec ses cycles et ses nombres d'intersection, pour devenir aujourd'hui cet extraordinaire carrefour où viennent se mêler presque toutes les notions mathématiques. Et n'est-il pas étonnant que par contrecoup elle ait entièrement absorbé l'Algèbre comutative, et qu'on puisse considérer les entiers comme des fonctions sur un espace topologique, le spectre de l'anneau qu'ils forment ? De même, on aurait sans doute fort surpris les premiers mathématiciens qui se sont occupés de Topologie algébrique, cherchant à y dégager des invariants numériques par les décompositions simpliciales et leurs “nombres d’incidence”, si on leur avait dit que la théorie des groupes l’envahirait toute entière et que, en un autre revirement inattendu, elle engendrerait une partie d’Algèbre pure, l’Algèbre homologique. Et qui, il y a 100 ans, aurait pu prévoir que la théorie des séries de Fourier fusionnerait avec celle des caractères des groupes abéliens, et qu’il en naîtrait la forme moderne de la Théorie des nombres algébriques, basée sur l’étude du groupe des idèles ?

On pourrait multiplier ces exemples, mais il faut insister sur un aspect remarquable de ces migrations de structures : chacune entraîne avec elle le cortège d’“intuitions” dont elle était entourée dans la théorie d’où elle est sortie, d’où ce que j’ai appelé le transfert d’intuitions dans un article récent. Le plus surprenant peut-être est la généralisation de ce qu’il ne faut pas craindre d’appeler l’intuition géométrique, à presque tous les domaines des mathématiques ; si bien que les défenseurs attardés de la vieille “Géométrie élémentaire”, qui déplorent la disparition de l’esprit géométrique ne se rendent pas compte qu’au contraire jamais l’empire de la Géométrie n’a été aussi vaste et aussi universel.

Enfin, de même que les personnages des grands romans finissent, dit-on, par vivre d’une vie propre et s’imposer à leurs créateurs, les structures mathématiques, une fois créées, ont souvent une tendance à échapper à leur définition initiale et à acquérir des aspects protéiformes pour mieux s’insinuer dans des théories qui leur paraissaient tout à fait étrangères. Il y a longtemps, par exemple, qu’on ne s’étonne plus de voir que le Calcul différentiel a divorcé d’avec les idées de continuité et de limite, et s’est implanté en Algèbre pure, voire même lorsque le corps où l’on travaille n’est plus de caractéristique zéro. Si les structures algébriques “classiques” semblaient indissolublement liées à des ensembles où elles étaient définies, voici maintenant qu’on peut les définir sur des catégories à peu près quelconques, et parler par exemple de schéma en groupes ou de groupes formels alors qu’il n’y a plus d’éléments que l’on puisse “composer” par la loi du groupe ! Ou bien, autre avatar, dans ce qu’on appelle la théorie de Kan, on peut mimer en quelque sorte les groupes, l’homologie, les espaces fibrés, etc. ... sur des “objets simpliciaux”, eux aussi à peu près quelconques, puisqu’on peut en associer à toute catégorie et par exemple appliquer ainsi la K-théorie à une catégorie abélienne arbitraire. Et que dire des “topologies de Grothendieck” ou des “groupes virtuels” de Mackey, qui bien entendu ne sont plus des topologies ou des groupes au sens habituel ; et il n'est pas jusqu'à la notion de fonction intégrable elle-même qui ne change tout à fait de nature dans la récente théorie de l'intégration commutative de Connes.

En résumé, on peut donc dire que, depuis un siècle, les progrès essentiels des mathématiques sont jalonnés par les inventions de structures, doublées souvent par de non moins importantes inventions de foncteurs. Il reste bien entendu de vastes domaines des mathématiques où de nombreux résultats ne paraissent pas s'ordonner autour de structures bien nettes ; mais toute l'histoire récente (comme celle des extraordinaires "conjectures de Weil") donne à penser que cela est simplement dû à notre myopie qui nous empêche de les voir, et on peut espérer que nos successeurs seront plus perspicaces que nous.

Cette vue un peu schématique appelle quelques remarques complémentaires. En premier lieu, cette découverte des structures a été contemporaine de l'adoption progressive du langage ensembliste, qui a contribué de façon déterminante à la rendre possible. Si nous voulions aujourd'hui définir de façon générale un groupe, sans parler d'ensemble ni d'application, nous serions extrêmement gênés ; c'est exactement la situation où se trouvaient les mathématiciens avant 1870, et c'est là, à mon avis, qu'il faut chercher la cause principale de la lenteur avec laquelle ont émergé les structures mathématiques essentielles, phénomène auquel j'ai consacré un récent article. De nos jours, à ce cadre si commode que nous fournit la Théorie des ensembles, sont venus s'ajouter les concepts beaucoup plus récents de catégorie et de foncteur, dont on ne peut nier le rôle bénéfique, pourvu que l'on n'en abuse pas.

Une autre remarque est que la mise en évidence de structures sous-jacentes à une branche des mathématiques s'accompagne invariablement d'une recherche nouvelle de précision dans le langage et les déductions, qui tranche sur le laisser-aller antérieur. La "rigueur" weierstrassienne en est un exemple célèbre ; mais, à un niveau beaucoup moins subtil, il est bien rare de voir un mathématicien du XIX$^{\text{ème}}$ siècle dire ce qu'il entend exactement par les "fonctions" dont il va parler, ou si les nombres qu'il utilise sont réels ou complexes ! Ce n'est pas sans mal que l'on est à peu près parvenu à faire cesser ces négligences, et il a fallu souvent bien des tâtonnements avant que l'on arrive à des modes d'exposition entièrement satisfaisants ; j'y reviendrai plus loin.

En troisième lieu, pour comprendre les difficultés de nos prédécesseurs, il faut aussi se rendre compte que dans les objets mathématiques "naturels" qu'ils maniaient depuis des siècles, les structures étaient tellement imbriquées les unes dans les autres qu'il ne pouvait guère venir à l'idée de les dissocier. Pour un mathématicien du milieu du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, la droite réelle (ou "le continu" comme on disait encore alors) était conçue comme un monolithe, avec toutes ses propriétés à la fois ; il a fallu l'esprit puissamment original de Cantor pour nous apprendre à y voir la droite en tant qu'ensemble (caractérisée par son nombre cardinal), la droite en tant que groupe, la droite en tant que corps, la droite en tant qu'ensemble ordonné, la droite en tant qu'espace topologique et la droite en tant qu'espace mesuré. Je me souviens de ma propre surprise lorsqu'on m'a montré (il y a 45 ans de cela !) qu'il pouvait exister plusieurs topologies sur la droite et d'éminents mathématiciens ont longtemps refusé d'admettre qu'il y avait sur la droite d'autres mesures que celle de Lebesgue.

Ce n'est là qu'un exemple de tendances qui s'opposent aux progrès ou les retardent. On croirait que parmi les hommes qui font profession de science il n'y a pas de place pour la routine et que l'introduction d'une méthode ou d'une notion nouvelle, plus puissante ou plus féconde que celles qu'elle remplace, entraînerait une adhésion immédiate et unanime. C'est compter sans l'inertie et la pesanteur de l'esprit humain, qui s'étalent là comme ailleurs : changer de point de vue demande un fatigant effort, et il est tellement plus commode de s'en tenir à ce qu'on a appris jadis et qui est devenu une seconde nature ! Bien entendu, c'est dans l'enseignement que ce conservatisme borné fait le plus de ravages, mais les exemples ne manquent pas montrant que la routine se propage même parmi les créateurs, surtout lorsqu'ils vieillissent. L'exemple le plus extrême est la difficulté avec laquelle se sont imposées les notions géométriques intrinsèques de l'Algèbre linéaire et multilinéaire, malgré les vains efforts de Grassmann et de Peano pour éliminer la frénésie calculatoire des matrices et des déterminants ; et la même histoire s'est répétée quand il s'est agi d'en finir avec la débauche d'indices du Calcul tensoriel classique et de lui substituer des notions intrinsèques. Qu'on se rappelle aussi la répugnance prolongée des mathématiciens à adopter les nombres p-adiques de Hensel, le calcul différentiel extérieur de E. Cartan, plus près de nous les distributions de L. Schwartz. Et comment expliquer l'incroyable persistance de la prétendue "intégrale de Riemann", une notion bâtarde dont on sait depuis 80 ans qu'elle est inutilisable en Analyse ?

Une autre manifestation de cet état d'esprit se montre chez beaucoup de mathématiciens dans un attachement à des notions qui ont été jadis de grandes nouveautés et ont eu une importance historique indéniable, mais qui, comme on dit, ont "fait leur temps". Par exemple, on sait que les idées de Cantor sur l'infini ont paru révolutionnaires à leur époque et ont rencontré beaucoup de résistance avant de s'imposer ; mais aujourd'hui, toute la partie de son œuvre concernant l'arithmétique des cardinaux et des ordinaux est devenue un simple objet de curiosité, dont les applications en dehors de la Logique et de la Théorie des ensembles sont négligeables (comme on s'en assure sans peine en feuilletant Mathematical Reviews) ; cependant, nombreux sont encore les mathématiciens qui considèrent cette théorie comme fondamentale en mathématiques, et le respect dû à Cantor a souvent tendance à tourner à l'hagiographie pure et simple ! Un autre exemple assez frappant a été le comportement de F. Riesz à la fin de sa vie ; il fut un des grands créateurs de l'Analyse fonctionnelle moderne, et l'importance de son œuvre ne fut reconnue qu'assez tard. En 1913 il avait donné un exposé aussi lucide qu'élégant de la théorie spectrale de Hilbert, beaucoup plus clair et utilisable que celui de Hilbert lui-même ; mais en 1950, écrivant avec B.Sz. Nagy un ouvrage relativement élémentaire d'Analyse fonctionnelle, il s'est borné purement et simplement à reprendre son exposé de 1913, alors que dans l'intervalle, une méthode bien plus élégante et puissante avait été découverte par Gelfand à l'aide de sa théorie des algèbres de Banach ; si bien que ce livre, qui 30 ans auparavant aurait été un évènement, était en fait périmé dès sa parution. Il est à peine besoin de dire que l'ouvrage a eu un énorme succès !

*

*   *

J'ai dit plus haut les difficultés rencontrées pour dégager certaines notions nouvelles ; dans quelques cas, cette lente maturation s'est accompagnée de tâtonnements et d'incertitudes, qui ne correspondent guère à l'image d'Epinal d'une mathématique dispensatrice de vérités parfaites et immuables. Récemment, certains philosophes se sont portés à l'autre extrême et ont voulu voir dans ces tâtonnements la démarche constante de toute la mathématique ; c'est la thèse qui a notamment été soutenue par I. Lakatos, récemment disparu, dans un livre, “Proofs and refutations” qui a eu dans les milieux philosophiques s’occupant de sciences un succès qui paraît fort étrange à un mathématicien professionnel. L’auteur y prend un exemple assez singulier à tous égards, le théorème d’Euler sur la relation entre nombre de sommets, d’arêtes et de faces d’un polyèdre ; il s’étend avec complaisance, en plus de 100 pages, sur les nombreuses démonstrations fausses ou incomplètes qui ont été données pendant 100 ans de ce théorème, avant d’arriver à une preuve entièrement correcte et applicable à tous les cas. Ce qu’il ne dit pas, c’est qu’il s’agissait dans cette question d’une branche des mathématiques en formation, la Topologie algébrique, où l’intuition géométrique tient un rôle important de guide, assez sûr en général, mais qui peut jouer des tours pendables si elle n’est pas contrôlée ; c’est seulement au tournant du XX$^{\text{ème}}$ siècle que Poincaré a réussi à asseoir cette discipline sur des bases solides. On connaît aussi les erreurs commises par des hommes aussi célèbres que Cauchy et Riemann dans les questions touchant à la notion de limite, avant que Weierstrass n’ait introduit en Analyse une démarche parfaitement rigoureuse. Plus près de nous, la Géométrie algébrique italienne, malgré ses remarquables découvertes, a longtemps souffert du manque de précision dans les définitions et démonstrations, qui a suscité des controverses, même entre les meilleurs de ces géomètres ; là aussi, tout est rentré dans l’ordre une fois les bases solidement assises.

Mais vouloir faire de ces quelques exemples une règle générale est parfaitement ridicule. Lakatos n’avait qu’une connaissance sommaire des mathématiques du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, et ne semble jamais avoir connu celles qui ont été découvertes ultérieurement. Même dans les branches traditionnelles, la plus grande partie, comme la Théorie des nombres, l’Algèbre, la Géométrie différentielle et une part importante de l’Analyse, n’ont jamais connu les hésitations et tâtonnements que Lakatos voudrait faire passer pour la norme du développement des mathématiques ; dans tous ces domaines, mis à part les cas d’erreurs matérielles (tels qu’une faute de signe ou une confusion de lettres), un théorème une fois démontré n’a jamais donné lieu à contestation. Et cela, à un tout petit nombre d’exceptions près, est vrai des milliers de résultats obtenus dans tous les domaines des mathématiques depuis 1940, grâce aux exigences de précision dans la rédaction dont je parlais plus haut, et qui sont devenues universellements admises. Lakatos a tout bonnement voulu faire passer l’exception pour la règle, ce qui ne semble pas une méthode recommandable pour un historien des sciences ou un philosophe. Finalement, que faut-il penser de ce qu'on a appelé des "crises" dans l'histoire des mathématiques ? Si l'on veut dire par là une refonte complète de pensée, comme cela s'est produit par exemple en Physique avec la Relativité ou la Mécanique quantique, on peut affirmer qu'il n'y a jamais eu rien de pareil en mathématiques, sauf, peut-être, le tournant des mathématiques grecques qui a suivi la découverte des irrationnelles, sur lequel nous sommes malheureusement très mal renseignés. Depuis lors, ce qui s'est produit à deux ou trois reprises, c'est une mise en ordre de théories ou méthodes insuffisamment précises, comme le Calcul infinitésimal ou la Géométrie algébrique, dont j'ai parlé plus haut. Mais la "crise" dont aiment à parler certains, c'est ce qu'on a appelé la "crise des fondements", qui s'est déclenchée à partir de 1895 environ à propos des "antinomies" apparues dans la Théorie des ensembles "naïve" développée par Cantor. Je résumerai rapidement ce que je pense de cette question, à laquelle j'ai consacré un article récent. Les faits principaux que j'y ai développés sont les suivants (il s'agit, j'insiste, de faits immédiatement vérifiables et non d'opinions) :

1°) Les règles usuelles de maniement des ensembles et des applications (ce qu'on appelle aussi le "calcul booléen") ne sont que des constatations du bon sens le plus banal lorsqu'il s'agit d'ensembles ayant un petit nombre d'éléments. La théorie "naïve" des ensembles avait étendu ces règles à tous les ensembles infinis, comme s'il s'était agi d'objets dont nous aurions eu une connaissance "intuitive" aussi claire que celles des ensembles de 3 ou 4 éléments. Les "antinomies" montraient que cette assimilation était abusive et qu'il fallait, comme dans les autres prétendues "crises" rappelées plus haut, préciser non seulement les propriétés admises sur les ensembles, mais même le langage utilisé pour les énoncer, en raison des ambigüités du langage courant. Cela fut fait entre 1908 et 1920, dans ce qu'on a appelé la théorie axiomatique des ensembles, ou "système de Zermelo-Fraenkel" (ZF en abrégé).

2°) Les mathématiciens qui ont préconisé l'adoption de ce système sont souvent qualifiés de "formalistes". Mais en fait, la quasi-totalité des mathématiciens d'aujourd'hui, autres que les logiciens, ont totalement cessé de se soucier de ces questions ; ils raisonnent sur les ensembles comme leurs prédécesseurs du XIX$^{\text{ème}}$ siècle et on ne trouvera jamais dans leurs mémoires des professions de foi "formalistes".

Ils agissent ainsi en toute quiétude, car on s'est rapidement aperçu que les raisonnements dont avaient découlé les "antinomies" ne se rencontraient jamais dans la pratique des mathématiciens ; ceux-ci avaient toujours respecté les règles de ZF sans le savoir, comme M. Jourdain faisait de la prose !

3°) Depuis le début du siècle, les logiciens ont obtenu toute une série de résultats aussi extraordinaires qu'imprévus, dont on peut dire que la teneur générale a été de rappeler les mathématiciens à plus de modestie. Nous savons maintenant qu'espérer, comme Hilbert, démontrer la non-contradiction des mathématiques était une prétention exorbitante ; et nous avons cessé de croire que nous avons une idée claire de l'infini depuis que Gödel et P. Cohen nous ont montré qu'il y a une infinité de "Théories des ensembles", également possibles et deux à deux incompatibles. Mais si ce sont là des conquêtes majeures du point de vue philosophique, il faut aussi reconnaître que leurs répercussions sur la pratique journalière des mathématiciens ont été quasinulles ; mis à part quelques résultats de Topologie générale, très éloignés des applications à d'autres branches, dans les 24 rubriques (autres que la Logique mathématique et la Théorie des ensembles) que j'ai mentionnées au début de cette conférence, il est impossible d'en déceler la moindre trace. Tout ce qu'ont fait les logiciens depuis 1925 (théorie de la démonstration, logique du second ordre, logiques modales, logiques à plus de 2 valeurs, etc. ...) disparaîtrait demain que l'on ne s'en apercevrait même pas ; vis-à-vis des autres parties des mathématiques, la Logique et la Théorie des ensembles sont devenues des disciplines marginales.

4°) La position des "formalistes" au sujet des rapports des mathématiques et de la "réalité" consiste à ne pas en avoir : suivant la formule de Bourbaki, "libre à chacun de penser ce qu'il voudra sur la "nature" des êtres mathématiques ou la "vérité" des théorèmes qu'il utilise, pourvu que ses raisonnements puissent être transcrits dans le langage commun (c'est-à-dire le système ZF)". On sait qu'il y a un petit groupe de mathématiciens (intuitionnistes, constructivistes, etc. ...) qui n'adoptent pas ce point de vue et ont un système de valeurs qui leur fait accepter ou rejeter tel ou tel mode de raisonnement au nom d'un "sens" qu'il devrait avoir et qui varie d'ailleurs suivant les écoles. Une vérification aisée (par exemple en consultant Mathematical Reviews) montre que sur 1500 travaux recensés chaque mois, 2 ou 3 en moyenne sont dus à des mathématiciens de ces écoles.

5°) ces faits permettent de dire en toute objectivité qu'il n'y a aucune "crise des fondements" perceptible dans la littérature mathématique actuelle.

Mais on peut aller plus loin et soutenir qu'en réalité il n'y a jamais eu de "crise des fondements", même dans la période des controverses les plus vives, que l'on place généralement entre 1895 et 1930. Qu'à cette époque il y ait eu dans la communauté mathématique (contrairement à ce qui se passe aujourd'hui) un sentiment de malaise très répandu, ce n'est pas niable ; mais il concernait essentiellement les rapports des notions et raisonnements mathématiques avec les autres démarches de la pensée, et non les progrès des mathématiques proprement dites. Il suffit pour s'en convaincre de rappeler les grandes nouveautés de cette période, qui en font une des plus fertiles de l'histoire : corps de classes, représentations linéaires des groupes, théorie des groupes de Lie semi-simples, Topologie générale, Topologie algébrique, espaces vectoriels topologiques, Intégration, théorie spectrale des opérateurs ; parler de "crise" dans ces conditions est un défi au bon sens.

Ce serait encore plus ridicule à présent. Comme je l'ai déjà écrit, il y a eu en mathématiques plus de résultats nouveaux et de méthodes nouvelles depuis 1940 que de Thalès à 1940 ; aucun ralentissement n'est décelable à l'heure actuelle et rien ne nous interdit d'avoir confiance en l'avenir des mathématiques, tant que subsisteront les formes actuelles de civilisation.

L'avenir des mathématiques

André Weil [1]

«Il y a eu autrefois, dit Poincaré dans sa conférence de Rome sur l'avenir des mathématiques, des prophètes de malheur ; ils répétaient que tous les problèmes étaient résolus, qu'après eux il n'y aurait plus à glaner...» Mais, ajoute-t-il, «les pessimistes se sont toujours trouvés forcés de reculer... de sorte qu'à présent je crois bien qu'il n'y en a plus.»

Notre foi dans le progrès, notre croyance en l'avenir de notre civilisation, ne sont plus si fermes ; elles se sont vues ébranlées par des chocs trop brutaux. Il ne nous paraît plus du tout légitime, comme Poincaré n'hésitait pas à le faire, d' «extrapoler» du passé et du présent au futur.

Le mathématicien, interrogé sur l'avenir de sa science, se trouve en droit de poser la question préalable : quel est l'avenir que se prépare l'espèce humaine ? Les formes de pensée, fruits de l'effort soutenu des quatre ou cinq derniers millénaires, sont-elles autre chose qu'un éclair fugitif ? Que si, craignant de tomber dans la métaphysique, on préfère se tenir sur le terrain, presque aussi mouvant, de l'histoire, les mêmes questions réapparaissent, en d'autres termes seulement : assistons-nous au début d'une nouvelle éclipse de la civilisation ? Notre devoir, plutôt que de nous livrer aux joies égoïstes du travail créateur, n'est-il pas de regrouper, en vue d'un simple effort de conservation, les éléments essentiels de notre culture, afin qu'un jour nos descendants les retrouvent intacts à l'aube d'une nouvelle Renaissance ?

Ces questions ne sont pas de pure rhétorique ; de la réponse que chacun

1. 1947

leur donne, ou plutôt (car il n'est pas de réponses à de pareilles questions) de l'attitude que chacun prend en face d'elles dépend dans une large mesure la direction qu'il donnera à son effort intellectuel. Avant d'écrire sur l'avenir des mathématiques, il était nécessaire de les poser, comme le croyant se purifiait avant de consulter l'oracle. A nous maintenant d'interroger le destin.

La mathématique, telle que nous la connaissons, nous paraît l'une des formes nécessaires de notre pensée. L'archéologue, il est vrai, et l'historien nous révèlent des civilisations d'où elle fut absente. Sans les Grecs, il est douteux qu'elle eût jamais été plus qu'une technique, au service d'autres techniques ; et peut-être voyons-nous se former sous nos yeux un type de société humaine où elle ne sera pas autre chose. Mais à nous dont les épaules ploient sous l'héritage de la pensée grecque, à nous qui traînons encore nos pas dans les sillons tracés par les héros de la Renaissance, une civilisation sans mathématiques semble inconcevable. De même que le postulat des parallèles, le postulat de la survie des mathématiques s'est dépouillé à nos yeux de son «évidence» ; mais, tandis que celui-là ne nous est plus nécessaire, nous ne saurions nous passer de celui-ci.

Assurément, le clinicien des idées, qui, sans se hasarder à des prédictions à lointaine échéance, limite son pronostic à un avenir immédiat, aperçoit, lorsqu'il examine la mathématique contemporaine, plus d'un symptôme favorable. Tout d'abord, tandis que telle science aujourd'hui par la puissance presque illimitée que confère son usage arbitraire, est en passe de devenir monopole de caste, trésor jalousement gardé sous le sceau d'un secret nécessairement fatal à toute activité proprement scientifique, le mathématicien véritable semble peu exposé aux tentations du pouvoir et à la camisole de force du secret d'Etat. «La mathématique disait G. H. Hardy dans une célèbre leçon inaugurale, est une science inutile. J'entends par là qu'elle ne peut servir directement, ni à l'exploitation de nos semblables, ni à leur extermination.»

Il est certes peu d'hommes, à notre époque, aussi complètement libres dans le jeu de leur activité intellectuelle que le mathématicien. Si des idéologies d'Etat s'attaquent parfois à sa personne, jamais encore elles ne se sont mêlées de juger ses théorèmes ; chaque fois que de soi-disant mathématiciens, pour complaire aux puissants du jour, ont tenté de plier leurs confrères au joug d'une orthodoxie, ils n'ont récolté que le mépris pour fruit de leurs travaux. Qu'un autre hante les antichambres pour se faire accorder le coûteux appareillage sans lequel il n'est guère de prix Nobel : un crayon et du papier, c'est tout ce qu'il faut au mathématicien ; encore peut-il s'en passer à l'occasion. Il n'est même pas pour lui de prix Nobel dont la conquête désirée le détourne du travail longuement mûri vers le résultat brillant mais passager. Dans le monde entier, on enseigne, bien ou mal, les mathématiques ; le mathématicien exilé - et qui, de nos jours, peut se croire à l'abri de l'exil ? - trouve partout le gagne-pain modeste qui lui permet en quelque mesure de poursuivre ses travaux. Il n'est pas jusqu'en prison qu'on ne puisse faire de bonnes mathématiques, si le courage ne faut.

A ces «conditions objectives», ou plutôt, comme dirait notre médecin, à ces symptômes externes, viennent s'en ajouter d'autres que fournit un examen clinique plus approfondi. La mathématique vient de prouver sa vitalité en traversant l'une de ces crises de croissance auxquelles elle est accoutumée de longue date, et qu'on nomme d'un nom bizarre «crises des fondements» ; elle l'a traversée, non seulement sans dommage, mais avec grand profit. Chaque fois que de vastes territoires viennent d'être conquis au raisonnement mathématique, il est nécessaire de se demander quels sont les moyens techniques permis dans l'exploration du domaine nouveau. On désire que tels objets aient telles propriétés, on désire que tels modes de raisonnement soient légitimes, on se comporte comme s'ils l'étaient en effet ; le pionnier qui agit ainsi n'ignore pas qu'un jour la police viendra faire cesser le désordre et remettre tout sous l'empire de la loi commune. C'est ainsi que les Grecs, lorsqu'ils définirent les premiers le rapport des grandeurs avec assez de précision pour se poser le problème de l'existence de grandeurs incommensurables, semblent avoir cru et désiré que tous les rapports fussent rationnels, et avoir basé sur cette hypothèse provisoire la première ébauche de leurs raisonnements géométriques ; quelques-uns des plus grands progrès de la mathématique grecque sont liés à la découverte de leur erreur initiale sur ce point. De même, quand s'est ouverte l'ère de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal, on a voulu que toute expression analytique définisse une fonction, et qu'en même temps toute fonction soit dérivable ; nous savons aujourd'hui que ces exigences n'étaient pas compatibles. La dernière crise, née des modes de raisonnement sophistiques auxquels se prêtait à ses débuts la théorie «naïve» des ensembles, a eu pour nous un résultat non moins heureux, qu'on peut considérer comme définitivement acquis. Nous avons appris à faire remonter toute notre science à une source unique, composée seulement de quelques signes et de quelques règles d'emploi de ces signes, réduit sans doute inexpugnable, où nous ne saurions nous enfermer sans risque de famine, mais sur lequel il nous sera toujours loisible de nous replier en cas d'incertitude ou de danger extérieur. Que le mathématicien doive constamment tirer de son «intuition» de nouveaux éléments de raisonnement de nature alogique ou «pré-logique», c'est ce qui ne paraît plus soutenable qu'à quelques esprits attardés. Si certaines branches des mathématiques n'ont pas encore été axiomatisées, c'est-à-dire ramenées à un mode d'exposition où tous les termes sont définis et tous les axiomes explicités à partir des notions premières de la théorie des ensembles, c'est seulement parce qu'on n'a pas encore eu le temps de le faire. Il se peut sans doute qu'un jour nos successeurs désirent introduire en théorie des ensembles des modes de raisonnement que nous ne nous permettons pas ; il se peut même, bien que les travaux des logiciens modernes rendent cette éventualité bien peu probable, que l'expérience fasse découvrir un jour, dans les modes de raisonnement dont nous faisons usage, le germe d'une contradiction que nous n'apercevons pas aujourd'hui ; une révision générale deviendra alors nécessaire ; on peut être assuré dès maintenant que l'essentiel de notre science n'en sera pas affecté.

Mais, si la logique est l'hygiène du mathématicien, ce n'est pas elle qui lui fournit sa nourriture ; le pain quotidien dont il vit, ce sont les grands problèmes. «Une branche de la science est pleine de vie, disait Hilbert, tant qu'elle offre des problèmes en abondance ; le manque de problèmes est signe de mort.» Certes ils ne manquent pas à notre mathématique ; et le moment ne serait peut-être pas mal choisi à présent pour en dresser une liste, comme le faisait Hilbert dans la conférence fameuse que nous venons de citer. Parmi ceux mêmes de Hilbert, plusieurs subsistent comme des objectifs lointains, mais non inaccessibles, qui ne cesseront de provoquer des recherches, peut-être pendant plus d'une génération : le cinquième problème, sur les groupes de Lie, en est un exemple. L'hypothèse de Riemann, après qu'on eut perdu l'espoir de la démontrer par les méthodes de la théorie des fonctions, nous apparaît aujourd'hui sous un jour nouveau, qui la montre inséparable de la conjecture d'Artin sur les fonctions L, ces deux problèmes étant deux aspects d'une même question arithmético-algébrique, où l'étude simultanée de toutes les extensions cyclotomiques d'un corps de nombres donné jouera sans doute le rôle décisif. L'arithmétique gaussienne gravitait autour de la loi de réciprocité quadratique ; nous savons maintenant que celle-ci n'est qu'un premier exemple, ou pour mieux dire le paradigme, des lois dites «du corps de classes», qui gouvernent les extensions abéliennes des corps de nombres algébriques ; nous savons formuler ces lois de manière à leur donner l'aspect d'un ensemble cohérent ; mais, si plaisante à l'œil que soit cette façade, nous ne savons si elle ne masque pas des symétries plus cachées. Les automorphismes induits sur les groupes de classes par les automorphismes du corps, les propriétés des restes de normes dans les cas non cycliques, le passage à la limite (inductive ou projective) quand on remplace le corps de base par des extensions, par exemple cyclotomiques, de degré indéfiniment croissant, sont autant de questions sur lesquelles notre ignorance est à peu près complète, et dont l'étude contient peut-être la clef de l'hypothèse de Riemann ; étroitement liée à celles-ci est l'étude du conducteur d'Artin, et en particulier, dans le cas local, la recherche de la représentation dont la trace s'exprime au moyen des caractères simples avec des coefficients égaux aux exposants de leurs conducteurs. Ce sont là quelques-unes des directions qu'on peut et qu'on doit songer à suivre afin de pénétrer dans le mystère des extensions non abéliennes ; il n'est pas impossible que nous touchions là à des principes d'une fécondité extraordinaire, et que le premier pas décisif une fois fait dans cette voie doive nous ouvrir l'accès à de vastes domaines dont nous soupçonnons à peine l'existence ; car jusqu'ici, pour amples que soient nos généralisations des résultats de Gauss, on ne peut dire que nous les ayons vraiment dépassés.

Dans le cadre même des extensions abéliennes, nous n'avons non plus fait aucun progrès vers la généralisation des théorèmes du «rêve de jeunesse de Kronecker», l'engendrement des corps de classes dont l'existence nous est connue, par des valeurs de fonctions analytiques. Si l'on a pu, sans grande difficulté, compléter l'œuvre inachevée de Kronecker et achever de résoudre ce problème, au moyen de la multiplication complexe, dans le cas des corps quadratiques imaginaires, la clef du problème général que Hilbert regardait comme l'un des plus importants des mathématiques modernes, nous échappe encore, malgré les conjectures de Hilbert lui-même et les tentatives de ses disciples. Faut-il la chercher dans les nouvelles fonctions automorphes de Siegel, par exemple dans ses fonctions modulaires de plusieurs variables ? Ou bien la théorie, aujourd'hui assez avancée, des endomorphismes des variétés abéliennes peut-elle nous être ici de quelque secours ? Il est trop tôt pour hasarder là-dessus des conjectures plausibles ; mais, dût la réponse être négative, on ne peut manquer d'obtenir des résultats intéressants en examinant ces questions de plus près.

Ce qui précède met déjà en évidence, non seulement la vitalité de l'arithmétique moderne, mais aussi les liens étroits qui, aujourd'hui, comme au temps d'Euler et au temps de Jacobi, l'unissent aux parties les plus profondes de la théorie des groupes et de la théorie des fonctions. Cette unité essentielle, dont les manifestations sont si diverses et multiples, se retrouve sur bien d'autres points. L'introduction par Hermite des variables continues dans la théorie des nombres a abouti à l'étude systématique des groupes discontinus de nature arithmétique au moyen des groupes continus dans lesquels ils se laissent plonger, des espaces riemanniens symétriques associés à ces groupes, des propriétés différentielles et topologiques de leurs domaines fondamentaux (ou plutôt, dans le langage moderne, de leurs espaces quotients), et des fonctions automorphes qui y appartiennent. L'œuvre de Siegel, continuant la grande tradition de Dirichlet, d'Hermite, de Minkowski, nous a ouvert ici des voies toutes nouvelles. D'un côté, nous rejoignons par là Fermat, Lagrange et Gauss, la représentation des nombres par les formes, et les genres de formes quadratiques. En même temps commence à se préciser à nos yeux le principe si fécond d'après lequel l'aspect global d'un problème arithmétique peut, en certaines circonstances, se reconstituer à partir de ses aspects locaux. Par exemple, nous voyons à maintes reprises, chez Siegel, le nombre de solutions de tel problème arithmétique dans le corps des nombres rationnels exprimé au moyen des nombres définis par les problèmes locaux correspondants, densités de solutions dans le corps réel et dans les corps p-adiques pour toutes les valeurs du nombre premier p c'est là un principe, analogue au théorème des résidus sur la surface de Riemann d'une courbe algébrique, auquel il y a lieu de rattacher aussi les célèbres «séries singulières» qui apparaissent dans l'application de la méthode de Hardy-Littlewood aux problèmes de la théorie analytique des nombres. Est-il possible d'en donner un énoncé général, qui permette d'un seul coup d'obtenir tous les résultats de cette nature, de même que la découverte du théorème des résidus a permis de calculer par une méthode uniforme tant d'intégrales et de séries qu'on ne traitait auparavant que par des procédés disparates ? Ce n'est pas là encore, semble-t-il, un problème pour l'avenir immédiat ; il n'en est que plus important d'en préparer la solution par l'examen de cas particuliers bien choisis. C'est le même principe qui fournira peut-être un jour la raison profonde de l'existence des produits eulériens, dont les recherches de Hecke viennent seulement de nous révéler l'extrême importance en théorie des nombres et en théorie des fonctions ; ici, ce sont les classes mêmes des formes quadratiques, et non pas seulement comme avec Siegel leurs genres, que nous commençons à atteindre ; en même temps, nous nous trouvons au cœur de la théorie des fonctions modulaires, que ces travaux ont renouvelée entièrement, et de la théorie des fonctions *thêta*. Ce domaine est encore pour nous si mystérieux, les questions qui s'y posent sont si nombreuses et si fascinantes, que toute tentative pour les classer par ordre d'importance serait prématuré.

Mais en même temps, Siegel nous a appris, par voie arithmétique, à construire des groupes discontinus, et des fonctions automorphes ; c'est un domaine où la pure théorie des fonctions n'avait pas fait un pas depuis Poincaré ; et il est vraisemblable, en effet, que, tout comme il est arrivé pour les fonctions d'une variable, l'étude approfondie de fonctions spéciales de plusieurs variables complexes devra préparer le terrain à tout essai de théorie générale, Dans les recherches de Siegel, l'étude géométrique, locale et globale, des domaines fondamentaux, c'est-à-dire en réalité de variétés à structure analytique complexe, tend à prendre un rôle prépondérant. On rejoint par là l'œuvre immense de Cartan, et ses prolongements de toute sorte ; du même coup, on se trouve d'emblée au cœur de la topologie moderne, la théorie des espaces fibrés, et on voit apparaître les invariants de Stiefel-Whitney et leurs généralisations ; ce sont là deux domaines dont l'intime liaison était soupçonnée depuis quelque temps, mais entre lesquels la jonction vient d'être faite grâce aux découvertes d'un géomètre chinois, S. S. Chern, elles-mêmes provoquées en partie par des considérations de géométrie algébrique. Les variétés algébriques, en effet, ou du moins les variétés sans singularités sur le corps complexe, ne sont pas autre chose qu'une classe particulière, et particulièrement intéressante, de variétés à structure analytique complexe ; plus précisément, ce sont des variétés qu'on peut, du moins dans tous les cas connus, munir de l'une de ces métriques hermitiennes remarquables qu'a introduites Kähler à propos de fonctions de plusieurs variables complexes, et dont des résultats encore mal éclaircis de S. Bergmann fournissent aussi des exemples. C'est par l'emploi systématique, bien que non explicite, de ces métriques que Hodge, généralisant les classiques résultats de Riemann, a obtenu récemment les premiers théorèmes d'existence sur ce type de variétés ; si l'on n'ose espérer que de telles méthodes puissent un jour nous donner l'uniformisation des variétés algébriques (qui d'ailleurs, contrairement à ce qui se passe pour les courbes, ne peut se faire en général par des fonctions non ramifiées), leur extension aux intégrales de seconde et de troisième espèce est déjà chose faite et aplanira sans doute les voies vers des résultats généraux du type du théorème de Riemann-Roch. La généralisation analogue des méthodes de Hodge aux formes différentielles avec singularités dans le domaine réel pose des problèmes encore plus importants ; elle paraît liée, d'une part, à des propriétés locales des systèmes de type elliptique auxquels satisfont les formes harmoniques ; d'autre part, elle semble inséparable d'une extension de la théorie de de Rham qui permettrait d'obtenir la torsion homologique d'une variété par les formes différentielles avec singularités. Si en effet les résultats de de Rham ont éclairci définitivement un certain aspect de la relation entre groupes d'homologie et intégrales multiples, et jouent par là un rôle fondamental dans les travaux de Hodge et de Chern, ils ne rendent jusqu'à présent accessibles aux méthodes différentielles que les groupes d'homologie sur les nombres réels ; et d'ailleurs l'analogie si frappante et si féconde entre chaînes et formes différentielles, que ces résultats mettent en évidence, reste jusqu'ici un simple principe heuristique, en attendant qu'on réussisse à donner une base commune à ces deux notions ; c'est seulement dans quelques cas particuliers, et par exemple dans quelques-uns des beaux travaux par lesquels Ahlfors a renouvelé dans ces dernières années la théorie des fonctions analytiques, qu'on a réussi, en exprimant des formes différentielles comme sommes de chaînes (par des mesures de Radon dans l'espace des chaînes), à convertir ce principe en méthode de démonstration.

Mais, tandis que la géométrie algébrique reçoit ainsi une nouvelle impulsion des développements les plus récents de la topologie et de la géométrie différentielle, elle ne manque pas non plus de problèmes purement algébriques, au sujet desquels, grâce aux méthodes élémentaires de l'algèbre moderne, il ne nous est plus nécessaire de faire dériver nos connaissances des éclairs d'intuition de quelques mortels privilégiés. La théorie des surfaces, brillamment mais trop rapidement explorée par l'école italienne, doit faire place à présent à une théorie générale des variétés algébriques, affranchie d'hypothèses restrictives sur la nature du corps de base et sur l'absence de singularités. La structure des groupes de classes de diviseurs par rapport aux divers concepts connus d'équivalence (linéaire, continue, numérique), la recherche des extensions non ramifiées, abéliennes d'abord, puis non abéliennes, d'un corps de fonctions algébriques, constituent les premières questions à résoudre ; grâce aux résultats, acquis ou du moins plausibles, des géomètres italiens, nous savons à peu près deviner les réponses ; et leur solution, qui peut-être est déjà à notre portée, doit ouvrir la voie à d'importants progrès. D'autre part, l'étude de la géométrie algébrique sur tel ou tel corps de base particulier en est encore à ses premiers tâtonnements ; si la géométrie algébrique sur le corps complexe, à peu près exclusivement étudiée depuis près d'un siècle, a abouti, par les méthodes qui lui sont propres (méthodes topologiques et méthodes transcendantes), aux importants résultats que nous connaissons, il est vraisemblable que d'autres corps de base, corps finis, corps p-adiques, corps de nombres algébriques, méritent chacun d'être examiné à part, par des méthodes appropriées à leur objet. C'est ainsi que la géométrie sur un corps fini semble constituer une sorte de plaque tournante, à partir de laquelle on peut à volonté orienter les recherches, soit vers la géométrie algébrique proprement dite, avec les puissants instruments dont elle dispose déjà, soit vers la théorie des nombres ; c'est par là justement que nous commençons à mieux comprendre la nature de la fonction *zêta* et le vrai caractère de l'hypothèse de Riemann ; de même, avant d'aborder la détermination des extensions d'un corps de nombres algébriques par leurs propriétés locales, il conviendra peut-être de résoudre le problème analogue, déjà fort difficile, au sujet des fonctions algébriques d'une variable sur un corps de base fini, c'est-à-dire d'étendre à ces fonctions les théorèmes d'existence de Riemann. Pour ne citer qu'un cas particulier, le groupe modulaire, dont la structure détermine les corps de fonctions d'une variable complexe ramifiés en trois points seulement, joue-t-il le même rôle, tout au moins en ce qui concerne les extensions de degré premier à la caractéristique quand le corps de base est fini ? Il n'est pas impossible que toutes les questions de ce genre puissent se traiter par une méthode uniforme, qui permettrait, d'un résultat une fois établi (par exemple par voie topologique) pour la caractéristique 0, de déduire le résultat correspondant pour la caractéristique p ; la découverte d'un tel principe constituerait un progrès de la plus grande importance. Du même ordre, mais plus difficiles encore, sont les problèmes que posent les recherches modernes sur les groupes finis. La théorie des groupes finis simples est-elle l'analogue de la théorie des groupes de Lie simples ? Il semblerait prématuré d'aborder cette question de front dès maintenant ; c'est par des voies détournées, et en particulier par l'étude des p-groupes, qu'on a, dans ces dernières années, fait quelque progrès dans cette direction. Ici, comme en bien d'autres questions d'algébre et de théorie des nombres, un élément nouveau vient d'être introduit par la définition des groupes d'homologie d'un groupe abstrait ; on doit à Eilenberg et MacLane, à propos de recherches de H. Hopf de pure topologie combinatoire, la découverte de cette notion, qui généralise les notions déjà si fécondes de caractère et de système de facteurs ; elle devra être soumise pendant quelque temps à une étude systématique avant qu'on puisse en mesurer la portée et les possibilités d'application.

Si l'arithmétique, entendue au sens le plus large, est toujours pour ses adeptes la reine des mathématiques, et si pour cette raison nous nous sommes laissé aller à traiter avec prédilection de ce qui la concerne, ce n'est pas à dire que les autres branches des mathématiques présentent moins de problèmes dignes d'un effort soutenu. L'œuvre seule d'un Cartan contient de quoi occuper plusieurs générations de géomètres. La théorie générale des systèmes en involution n'a pas été menée jusqu'au bout par son auteur, qui n'a pu, semble-t-il, surmonter toutes les difficultés d'ordre algébrique qu'elle présente. Sur la théorie, si importante sans doute, mais pour nous si obscure, des «groupes de Lie infinis», nous ne savons rien que ce qui se trouve dans les mémoires de Cartan, première exploration à travers une jungle presque impénétrable ; mais celle-ci menace de se refermer sur les sentiers déjà tracés, si l'on ne procède bientôt à un indispensable travail de défrichement. La théorie moderne des groupes de Lie proprement dits, par des méthodes qui combinent celles de Cartan et celles de la topologie, est loin d'être achevée ;

dans la théorie même des groupes semi-simples, et dans celle des espaces riemanniens symétriques qui leur sont associés, nous ne savons atteindre à bien des résultats que par des vérifications a posteriori, en faisant usage de notre connaissance (due à Cartan, elle aussi) de tous les groupes simples. Mais surtout comme il a été indiqué plus haut, nous trouvons maintenant, dans la théorie topologique des espaces fibrés, dans les théorèmes de de Rham et dans la notion de groupe d'homotopie, les outils appropriés à l'étude globale des géométries généralisées de Cartan. Pour n'en donner qu'un exemple, la formule classique de Gauss-Bonnet, seul résultat jusqu'à ces derniers temps qui exprimât un invariant topologique par l'intégrale d'une forme différentielle de caractère invariant, ne nous apparaît plus maintenant que comme le premier terme de toute une série de formules que la méthode de Chern nous rend accessibles, et dont la recherche systématique vient à peine d'être entreprise.

Mais, si les systèmes en involution doivent, en principe, nous permettre d'atteindre tout ce qui, dans les équations aux dérivées partielles, peut se ramener au problème local de Cauchy-Kovalewski, ce n'est là qu'un aspect du problème d'existence des solutions de ces équations et cet aspect, à bien des égards, n'est même pas le plus intéressant. Sortis de là, nous nous trouvons en présence de résultats importants, dont certains ont été obtenus seulement à date récente, sur des équations de types très particuliers, principalement elliptique et hyperbolique ; mais bien que l'étude de ces types, à laquelle la physique mathématique a conduit nos prédécesseurs il y a plus d'un siècle, soit loin d'être achevée il ne convient pas de s'y arrêter indéfiniment. Le système auquel satisfait la partie réelle d'une fonction analytique de plusieurs variables complexes ne rentre dans aucun de ces types simples ; or, par les méthodes propres à la théorie des fonctions analytiques, nous avons appris par exemple que les singularités les plus générales qu'elles puissent présenter sont, en un certain sens qu'il est encore difficile de préciser, composées de singularités élémentaires qui sont des variétés caractéristiques : c'est ainsi du moins qu'on peut interpréter les théorèmes de Hartogs et de E. E. Levi sous cette forme, ils présentent une analogie évidente avec les résultats connus sur les équations hyperboliques, analogie qui suggère de chercher dans l'approfondissement des notions de variété caractéristique et de solution élémentaire, le germe d'une théorie générale. Par ailleurs, nous trouvons, dans les travaux de Delsarte, et dans ceux de S. Bergmann et de ses élèves, les premiers exemples de transformations d'équations aux dérivées partielles les unes dans les autres au moyen d'opérateurs intégraux ou intégro-différentiels ; il y a là, semble-t-il, le principe de développements entièrement nouveaux, et d'une classification des systèmes d'équations aux dérivées partielles qui sortirait complètement du cadre tracé par les méthodes classiques. En particulier, comme l'a montré Delsarte, les séries de fonctions orthogonales, auxquelles conduisent naturellement les problèmes elliptiques, se trouvent transformées ainsi en séries appartenant à des types beaucoup plus généraux, dont on retrouve quelques exemples isolés en analyse classique, mais dont l'étude générale pose des problèmes du plus grand intérêt. Ici, le mathématicien ne pourra plus se contenter de l'espace de Hilbert, outil qui lui est devenu aussi familier que la série de Taylor ou l'intégrale de Lebesgue ; est-ce dans la théorie des espaces de Banach qu'il faudra chercher l'instrument approprié, ou faudra-t-il recourir à des espaces plus généraux ? Il faut avouer que les espaces de Banach, pour intéressants et utiles qu'ils se soient déjà montrés, n'ont pas amené encore en analyse la révolution que certains en attendaient ; mais ce serait jeter le manche après la cognée que d'en abandonner déjà l'étude, avant d'en avoir mieux exploré les diverses possibilités d'application. Peut-être cependant sont-ils à la fois trop généraux pour se prêter à une théorie aussi précise que celle de l'espace de Hilbert, et trop particuliers pour l'étude des opérateurs les plus intéressants. Par exemple, ils ne comprennent pas l'espace des fonctions indéfiniment dérivables ; or, c'est seulement dans celui-ci qu'on peut définir les opérateurs de L. Schwartz, qui représentent formellement les dérivées de tout ordre de fonctions arbitraires ; il y a là peut être le principe d'un calcul nouveau, reposant en définitive sur le théorème de Stokes généralisé, et qui nous rendra accessibles les relations entre opérateurs différentiels et opérateurs intégraux. Déjà des idées de ce genre ont rendu de grands services dans des problèmes particuliers, par exemple sous le nom de lemme de Haar en calcul des variations ainsi que dans certains travaux de Friedrichs sur les opérateurs différentiels. De même, le théorème bien connu d'après lequel la moyenne d'une fonction harmonique sur un cercle est égal à sa valeur au centre exprime qu'un certain opérateur, défini par une distribution de masses dans le plan est, en un certain sens, combinaison linéaire des valeurs du laplacien dans le domaine fermé limité par le cercle. A ces questions se rattache aussi le problème, déjà cité, de la représentation des formes différentielles comme sommes de chaînes, que pose la théorie de de Rham. Dans ces recherches, on voit peut-être s'ébaucher un calcul opérationnel, destiné à devenir d'ici un siècle ou deux un instrument aussi puissant que l'a été pour nos prédécesseurs et pour nous-mêmes le calcul différentiel. Tout ceci ne concerne guère que l'étude locale ou semi-locale des équations aux dérivées partielles ; et en effet, en dehors des cas simples qu'on peut traiter par la théorie de l'espace de Hilbert ou par les méthodes directes du calcul des variations, l'étude globale des équations aux dérivées partielles, par exemple sur une variété analytique compacte, semble trop difficile pour qu'on puisse songer à l'aborder d'ici longtemps. Mais l'étude globale des équations différentielles ordinaires pose un grand nombre de problèmes intéressants, difficiles mais déjà à notre portée ; il suffira d'en donner pour exemple la belle démonstration toute récente par E. Hopf, du caractère ergodique des géodésiques sur toute variété riemannienne compacte à courbure partout négative. On peut rattacher aussi à ce sujet l'étude des équations de van der Pol et des oscillations dites de relaxation, l'une des très rares questions intéressantes qui aient été posées aux mathématiciens par la physique contemporaine ; car la nature, autrefois l'une des principales sources de grands problèmes mathématiques, semble, dans les dernières années, nous avoir emprunté beancoup plus qu'elle ne nous a rendu.

*

*   *

Mais l'énumération qui précède, tout incomplète qu'elle ne puisse manquer de paraître aux yeux de nos collègues, aura lassé sans doute l'attention de plus d'un lecteur ; encore n'avons-nous, faute de place et faute de la compétence nécessaire, parlé, ni de géométrie des nombres ni d'approximations diophantiennes, ni de calcul des variations, ni de calcul des probabilités, ni d'hydrodynamique ; nous n'avons d'autre part fait aucune mention de bien des problèmes aujourd'hui en sommeil qu'il suffirait d'une idée nouvelle pour éveiller et rendre à la vie mathématique. C'est qu'à vrai dire nous ne pouvions ni ne voulions jalonner la route au futur développement de notre science ; ce serait là une tâche vaine qu'on ne saurait même entreprendre sans ridicule, car le grand mathématicien de l'avenir, comme celui du passé, fuira les chemins battus c'est par des rapprochements imprévus, auxquels notre imagination n'aura pas su atteindre, qu'il résoudra, en les faisant changer de face, les grands problèmes que nous lui léguerons. Nous nous étions proposé en passant en revue quelques-unes des branches principales de notre mathématique, d'en mettre en évidence à la fois la robuste vitalité et l'unité foncière. Non seulement, nous croyons l'avoir montré, les problèmes se présentent en foule ; mais il en est peu de véritablement importants qui ne soient liés étroitement à d'autres en apparence fort éloignés. Lorsqu'une branche des mathématiques cesse d'intéresser tout autre que les spécialistes, c'est qu'elle est bien près de la mort, ou du moins de la paralysie d'où seul le bain vivifiant aux sources de la science pourra la tirer. «La mathématique, disait Hilbert dans la conclusion de sa conférence de 1900 (conclusion qui serait ici à citer tout entière), est un organisme dont la force vitale a pour condition l'indissoluble union de ses parties.»

Est-ce à dire que la mathématique soit en passe de devenir science d'érudition, qu'il ne doive plus être possible d'y faire œuvre créatrice que blanchi sous le harnois, usé par les longues années de veille en compagnie de tomes poussiéreux ? Ce serait aussi un signe de déclin ; car, force ou faiblesse, elle n'est guère science à se nourrir de détails minutieusement recueillis au cours d'une longue carrière, de lectures patientes, d'observations ou de fiches amassées une à une pour former le faisceau d'où sortira enfin l'idée. En mathématique plus peut-être qu'en toute autre branche du savoir, c'est tout armée que jaillit l'idée du cerveau du créateur ; aussi le talent mathématique a-t-il coutume de se révéler jeune ; et les chercheurs de second ordre y ont un rôle plus mince qu'ailleurs, le rôle d'une caisse de résonance pour un son qu'ils ne contribuent pas à former. Qu'en mathématique un vieillard puisse faire œuvre utile ou même géniale, il en est des exemples, mais rares, et qui chaque fois nous remplissent d'étonnement et d'admiration. Si donc la mathématique doit subsister telle qu'elle est apparue jusqu'ici à ses adeptes, il faut que les complications techniques dont plus d'un sujet s'y trouve hérissé ne soient qu'apparentes ou provisoires, il faut que, dans l'avenir comme par le passé, les grandes idées soient simplifcatrices, que le créateur soit toujours celui qui débrouille, pour lui-même et pour les autres, l'écheveau complexe de formules ou de notions. Déjà Hilbert se demandait : «Ne va-t-il pas devenir impossible au chercheur individuel d'embrasser toutes les branches de notre science ?» et justifiait sa réponse négative, non seulement par l'exemple, mais en observant que tout progrès important en mathématique est lié à la simplification des méthodes, à la dispariion d'anciens développements devenus inutiles, à l'unification de domaines jusque là étrangers. Il est probable que par exemple les contemporains d'Apollonius, ou ceux de Lagrange, ont connu cette même impression de complexité croissante qui aujourd'hui tend à nous accabler, Sans doute, un mathématicien moderne ne connaît plus si bien qu'Apollonius, ou qu'un candidat à l'agrégation, tels détails de la théorie des coniques ; nul ne croit pour cela que celle-ci doive former une science autonome. Peut-être le même sort est-il réservé à telles de nos théories dont nous sommes le plus fiers. L'unité des mathématiques n'en sera pas menacée.

Le danger est ailleurs. Pour être de nature plus contingente, il ne nous en paraît pas moins sérieux ; et nous ne pensons pas pouvoir conclure nos réflexions sur l'avenir des mathématiques sans en dire quelques mots. Nous l'avons dit, notre civilisation même nous semble attaquée de toutes parts ; mais c'était là parler en termes trop généraux. *Ne sutor ultra crepidam* ; c'est en mathématiciens qu'il nous faut jeter un regard sur le monde d'aujourd'hui. Notre tradition est saine ; sommes-nous assurés de la transmettre intacte ? En quelques pays d'Europe, et surtout en Allemagne jusqu'au début du régime hitlérien, on trouvait, il n'y a pas longtemps encore, un enseignement universitaire, appuyé sur un enseignement secondaire solide, qui assurait à l'apprenti mathématicien à la fois les connaissances spécifiques et la culture générale sans lesquels rien d'important ne peut être fait. Que voyons-nous aujourd'hui ? En France, aucune des branches essentielles des mathématiques modernes n'est enseignée, sinon par raccroc, dans nos universités ; c'est en vain qu'on chercherait dans celles-ci un cours qui mette l'étudiant avancé au contact d'un seul des grands problèmes que nous avons énumérés ; les éléments mêmes y sont trop souvent enseignés de telle manière que l'étudiant a tout à réapprendre s'il veut pousser plus loin ; l'extrême rigidité d'un mandarinat fondé sur de désuètes institutions académiques fait que toute tentative de renouvellement, si elle ne reste purement verbale, paraît vouée à l'échec. L'Italie, autrefois siège d'une école mathématique florissante, semble tombée dans un état de sclérose, analogue à celui dont la France se trouve menacée, mais qui a eu là des effets encore plus prompts et plus destructeurs. Quant à l'U.R.S.S. nous ne saurions (faute d'expérience personnelle) juger du point de vue qui nous intéresse ici, de son enseignement, secondaire et supérieur : on compte en ce pays nombre de mathématiciens de premier ordre ; mais il leur est rigoureusement interdit, semble-t-il, d'en franchir les frontières et il n'est guère possible qu'à la longue une telle pratique, si elle devait subsister, ait d'autre résultat que l'asphyxie lente de toute vie scientifique ; l'histoire de notre science, la plus lointaine comme la plus récente, montre suffisamment à quel point les contacts d'un pays à l'autre, non pas séances d'apparat où l'on boit des toasts entre deux avions, mais séjours prolongés d'étudiants et de maîtres auprès d'universités étrangères, sont une condition indispensable de tout progrès. Des conditions plus favorables, croyons-nous, se rencontrent en Angleterre, et dans quelques-unes de ces nations de l'Europe occidentale qui ne sont petites que dans les statistiques militaires. Quant à l'Allemagne, l'avenir seul peut montrer si elle retrouvera en elle-même les éléments nécessaires pour renouer avec la brillante tradition interrompue par quinze ans d'abêtissement collectif. Au delà de l'Atlantique, enfin, nous voyons un grand pays, qui compte les universités par centaines, les étudiants par centaines de mille, et où, suivant le mot de H. Morrison, le grand spécialiste américain des problèmes d'enseignement, «on a voulu l'éducation des masses, on a la production de masse en matière d'éducation». Thorstein Veblen, dans un petit livre trop peu lu, a tracé un jour le tableau de l'enseignement supérieur aux Etats-Unis, et l'a fait de main de maître ; indiquons seulement comment on forme le futur mathématicien, en ce pays qui produit plus de «mathématiciens» que peut-être tout le reste du monde. On y voit l'étudiant, dans les cas les plus favorables, disposer de trois ou quatre ans, vers la fin de son séjour à l'université, pour acquérir à la fois les connaissances, la méthode de travail, et l'élémentaire initiation intellectuelle, à quoi rien de ce qu'il a connu jusque là n'a pu en rien le préparer ; sa seule ressource est alors de se réfugier dans la spécialisation la plus étroite, grâce à quoi, s'il est intelligent et bien guidé, il pourra parfois faire œuvre utile ; encore risque-t-il fort, par la suite, de ne pas résister aux effets abrutissants de l'enseignement purement mécanique qu'il devra, pour gagner son pain, infliger à autrui après l'avoir lui-même trop longtemps subi. Qu'en d'autres domaines la production de masse, ainsi entendue, puisse avoir d'heureux résultats, c'est ce que nous ne sommes pas qualifié pour examiner ; les lignes qui précèdent font assez voir qu'il ne saurait en être ainsi en mathématiques. Par malheur, si, dans un pays dépourvu, il est vrai, de solides traditions intellectuelles, la plausible doctrine de l'éducation à la portée de tous a eu de pareilles conséquences, n'est-il pas à craindre que la contagion s'étende à une Europe affaiblie par une catastrophe sans précédent ? Mais si, comme Panurge, nous posons à l'oracle des questions trop indiscrètes, l'oracle nous répondra comme à Panurge : Trinck ! Conseil auquel le mathématicien obéit volontiers, satisfait qu'il est de croire étancher sa soif aux sources mêmes du savoir, satisfait qu'elles jaillissent toujours aussi pures et abondantes, alors que d'autres doivent recourir aux ruisseaux boueux d'une actualité sordide. Que si on lui fait reproche de la superbe de son attitude, si on le somme de s'engager, si on demande pourquoi il s'obstine en ces hauts glaciers où nul de ses congénères ne peut le suivre, il répond avec Jacobi : «Pour l'honneur de l'esprit humain.»

André Weil.

Entretien avec le professeur Claude Berge

Claude Berge est décédé le 30 juin 2002. Il est le père de la théorie moderne des graphes ; il s'intéressa également à la théorie des jeux. Il fut un des fondateurs de "l'Oulipo" et il aimait beaucoup la sculpture et en faisait lui-même.

Jacques Nimier (1929-2014) était un psychologue et professeur des universités français.

Jacques Nimier : Comment est-on "attiré" par les mathématiques ? Dans quelles circonstances, êtes-vous devenu mathématicien ?

Claude Berge : Je pense que j'ai toujours été attiré par les raisonnements logiques qui aboutissaient à des raccourcis, à des choses surprenantes ; mais je ne serais pas devenu mathématicien sans un professeur de taupe qui m'a vivement intéressé. Je pensais d'ailleurs surtout à la littérature à cette époque-là...

Jacques Nimier : Ah ! bon...

Claude Berge : Mais c'est... disons une des matières qui m'a paru extrêmement attrayante... J'ai fait une thèse donc en mathématiques classiques et orthodoxes et ensuite je me suis lancé dans un domaine qui n'était pas du tout intégré dans les mathématiques classiques et qui s'appelle maintenant la Combinatoire ou la Théorie des Graphes ; ce n'était pas du tout reconnu à cette époque-là en tous cas. Mon goût pour les Graphes et pour ce genre de raisonnement venait surtout d'un désir de rendre visuelles des choses très... complexes.

Jacques Nimier : Rendre visuel...

Claude Berge : C'est un peu vague, tout ça.

Ce texte est la transcription d'entretiens qu'on peut lire sur la toile http://pedagopsy.eu/page736.html et qui ont été menés par le professeur Jacques Nimier.

Jacques Nimier : Enfin, c'est à préciser, c'est donc un professeur de taupe surtout, qui aurait été à l'origine de votre goût des mathématiques...

Claude Berge : Oui, c'est lui qui m'a donné envie de faire des mathématiques pures, je pensais surtout que les mathématiques étaient un outil pour faire quelque chose et je ne pensais pas qu'on puisse avoir envie simplement d'améliorer un outil mais seulement d'en faire quelque chose. Je pense que beaucoup de personnes sont comme moi, je ne pense pas qu'on décide, dès le jeune âge, de devenir mathématicien.

Jacques Nimier : Oui, oui...

Claude Berge : On... est souvent guidé vers des domaines où on a plus de facilités... et où on trouve l'occasion de briller, si vous voulez.

Jacques Nimier : Et vous avez dit tout à l'heure que vous aviez toujours aimé ce domaine de la logique où on avait l'occasion de faire des raccourcis, vous avez toujours aimé ça ?

Claude Berge : Oui, il y a certainement un plaisir esthétique qui est primordial ; par exemple même maintenant je ne me lance pas dans des mathématiques qui en passionnent beaucoup d'autres et qui sont des mathématiques, disons, dures avec des formules compliquées, pour affiner des résultats connus ou donnant quelque chose d'un peu plus général que ce qu'il y avait avant ; ça, ça ne m'intéresse pas du tout, je m'intéresse uniquement aux idées nouvelles pour démontrer des choses qui paraissent obscures. D'ailleurs je crois qu'en effet on pourrait faire... enfin, j'anticipe un peu...

Jacques Nimier : Non, ça ne fait rien. Il y a plusieurs genres de mathématiciens.

Claude Berge : Mais l'aspect affectif dans les mathématiques est non seulement intéressant pour savoir si on va devenir mathématicien ou pas, mais quelles sortes de mathématiques vont vous attirer.

Jacques Nimier : Comment voyez-vous ça ?

Claude Berge : Bien... il y a au fond de nombreuses variétés de mathématiciens, on ne peut pas les comparer ; les gens qui se passionnent pour l'analyse et les géomètres et les théoriciens des nombres sont des gens qui sont certainement attirés par des choses différentes, fondamentalement...

Jacques Nimier : Oui, Oui. Les mathématiques liées à un aspect affectif de la personnalité.

Claude Berge : Je ne sais pas, on pourrait reprendre l'histoire de Descartes : pourquoi est-ce que Descartes a voulu tout d'un coup changer l'aspect des mathématiques qui... qui ne lui plaisait pas tellement, ou tout au moins faire le lien entre les nombres et les formes ? Enfin je crois que dans le cas de Descartes... on a beaucoup épilogué parce que ça s'est fait à la suite d'un rêve et on a psychanalysé ce rêve ; et je ne me rappelle d'ailleurs plus qui a fait l'étude, mais en tous cas j'avais été très frappé autrefois par ce rêve de Descartes qui avait précédé la découverte de la géométrie analytique : Descartes tombant de cheval sur le côté gauche et ne pouvant se mettre sur le côté droit, le symbolisme du gauche et du droit, il y avait quelque chose d'essentiellement affectif... Aussi, comme exemple qui est très impressionnant pour moi aussi, c'est Cantor. Cantor qui a considéré l'infini comme un nombre comme les autres, ramenant enfin ce qui était difficile à regarder à une chose tout à fait vulgaire ; eh bien ! Cantor est resté toute la fin de sa vie dans un asile. Donc, cela a touché un côté affectif, sa découverte était essentiellement liée à un aspect très affectif de sa personnalité.

Jacques Nimier : Chez lui, oui. II a touché à quelque chose de dangereux pour lui ?

Claude Berge : Sans doute, il a voulu rabattre l'infini, malgré les pressions religieuses de l'époque. Si ce n'est pas une révolte essentielle contre beaucoup de choses... Enfin, il l'a mal supporté apparemment... cela a mal fini pour lui. Mais alors ce sont des exemples historiques ; maintenant, dans les exemples de tous les jours, je pense qu'on peut aussi trouver... des cas où l'attrait pour un objet mathématique provient d'une raison affective assez profonde ; je pense que... les gens qui font de la théorie des nombres, par exemple, sont des gens pour qui l'aspect magique du nombre... l'espèce de relief qu'ils donnent à chaque nombre, comme le font les calculateurs prodiges... Il peut y avoir des aspects assez mystérieux qui les poussent dans ce domaine-là plutôt que dans un autre ; alors la plupart des gens qui font de la théorie des nombres ont en général une mémoire extraordinaire pour des nombres qui sont sans intérêt pour les autres êtres humains, même pour les autres mathématiciens.

Le “goût” du puzzle

Claude Berge : Enfin, moi je m'occupe peu des nombres, je m'occupe peu des fonctions, mais surtout des configurations, c'est-à-dire des façons d'arranger les objets suivant des contraintes...

Jacques Nimier : Oui.

Claude Berge : L'existence d'une configuration, ses propriétés, les réductions d'une configuration à une autre m'attirent par goût ; peut être que c'est un peu, si vous voulez, le goût du puzzle, ou bien enfin le goût de ranger des objets suivant des contraintes spéciales qui peut être tout à fait indépendant des mathématiques, et qui se répercute de cette façon sur le domaine des mathématiques.

Jacques Nimier : Oui... Du reste, dans le mot configuration, il y a le mot figure.

Claude Berge : Oui, le mot figure n'est pas fortuit, parce que les gens qui font de la combinatoire actuellement, sont à l'opposé des algébristes, ils utilisent l'algèbre aussi comme un outil mais, ils veulent voir l'objet... qu'ils doivent construire. Par exemple, quand on étudie la théorie des graphes, eh bien ! on pourrait très bien parler de graphes en termes de fonctions en 0 et 1, ou en termes d'applications, mais non, on le traite en forme de figures parce qu'on veut visualiser l'objet, mettre des points pour représenter des sommets ; les arêtes, ce sont des lignes continues qu'on dessine sur le plan et ce sont des propriétés d'un type graphique et visuel qu'on étudie, ce ne sont pas des propriétés qui se traduisent par des axiomes et des formules, ce sont des propriétés assez concrètes : la connexité d'un graphe ça parle, le centre d'un graphe ça se voit, ce sont des concepts extrêmement concrets qui donnent lieu d'ailleurs à des théorèmes difficiles parce que quelquefois il y a des théorèmes qui sont aussi ardus que les grands théorèmes d'algèbre et d'analyse, mais dont les concepts ardus de base sont essentiellement visuels.

Jacques Nimier : Ce que vous voulez surtout c'est voir le raccourci.

Claude Berge : ... voir le raccourci, c'est plutôt dans le type de démonstration. On peut essayer d'arriver à un théorème, à un énoncé, d'une façon qui ne passe pas par l'enchaînement logique des déductions qui semblait conduire à cet énoncé. C'est quelquefois des chemins tout à fait inattendus qui aboutissent à une démonstration correcte d'un théorème, ça c'est intéressant.

Jacques Nimier : Trouver un autre chemin...

Claude Berge : Oui, trouver un autre chemin, trouver une sorte de "court-circuit" une façon de voir qui ne s'impose pas quand on regarde simplement l'hypothèse et la conclusion. Rien de ce chemin ne peut apparaître là-dedans, et cependant c'est ce chemin qui y mènera. Il s'agit à ce moment-là d'un goût que je crois assez universel chez les mathématiciens. Ils aiment bien trouver des démonstrations élégantes et une démonstration élégante c'est une démonstration à laquelle on ne penserait pas normalement, comme un problème d'échec élégant : il faut que le premier coup soit paradoxal... Comment vient une idée nouvelle ?

Jacques Nimier : Vous vous souvenez des premières fois où vous avez travaillé sur des graphes ?

Claude Berge : J'ai été amené aux graphes d'une façon très curieuse. le concept de graphe était alors inconnu en France. A l'étranger, il existait dans des articles très épars des noms divers qu'il fallait un peu unifier. J'ai d'abord unifié pour moi-même tout ce que comportaient ces articles et ces travaux faits dans des langages différents et avec des préoccupations différentes, c'est ainsi que j'ai d'ailleurs publié le premier livre sur les graphes.

Jacques Nimier : C'est ça qui vous a poussé au départ...

Claude Berge : Et j'ai fait ce travail-là d'abord pour moi, uniquement pour pouvoir y voir clair dans ce genre de questions, mais j'avais été conduit aussi à ça par un problème de la théorie des jeux... A vrai dire, j'ai commencé par être topologue, je me suis occupé des espaces de Banach, j'ai étendu un théorème de topologie dans l'espace de Banach et ensuite je me suis occupé de jeux, de jeux sur des graphes, qu'on appelle maintenant les jeux de Nim où apparaît la théorie des graphes et puis le problème étant limité et vite épuisé, il a fallu passer à d'autres problèmes de graphes qui sont devenus très intéressants et très vivants et, chose curieuse, pour les mathématiques pures on a tout de suite trouvé des applications nombreuses et de nouvelles occasions d'utiliser l'outil.

Les mathématiques : unité et utilité

JACQUES NIMIER : Oui,... si on vous demandait : qu'est-ce que les mathématiques pour vous ?

CLAUDE BERGE : ... les mathématiques, c'est, je pense, pour moi la même chose que pour les autres, c'est une science exacte à vrai dire, je ne pense pas à la mathématique en soi-même, je pense plutôt...

JACQUES NIMIER : ... pour vous...

CLAUDE BERGE : ... je pense plutôt à une branche précise de mathématiques...

JACQUES NIMIER : Oui.

CLAUDE BERGE : Vous me parleriez de topologie, je dirais ce que c'est...

JACQUES NIMIER : Vous ne pensez pas à la mathématique, mais à une...

CLAUDE BERGE : La mathématique, c'est l'ensemble de tous ces domaines et le lien entre ces domaines c'est que ce sont tous des traitements pour aboutir à des propositions sur des concepts, mais des concepts qui sont tellement différents... Au fond, je ne suis pas abstrait... par goût...

JACQUES NIMIER : Oui.

CLAUDE BERGE : J'aime bien... parler d'une science mathématique comme la science d'un objet mathématique très précis.

Jacques Nimier : Ah ! oui, d'accord, oui...

Claude Berge : La théorie des fonctions étudie les fonctions, la théorie des nombres étudie les nombres, la théorie des graphes étudie les graphes, c'est naturellement pour éviter des erreurs logiques, qu'on a été obligé d'axiomatiser ; on est toujours obligé d'axiomatiser un peu, mais c'est pas l'essentiel.

Jacques Nimier : Oui, c'est un ensemble d'objets qui ont chacun leurs caractéristiques.

Claude Berge : Oui, c'est des objets ; alors on sait où on les rencontre, on sait où on a besoin de les inventer quand ils n'existent pas... Enfin si, quelquefois il y a des objets qui me semblent assez beaux et je ne vais pas les étudier parce que je sais que les démonstrations et les raisonnements et les théories m'entraîneraient trop loin, et je ne veux pas m'écarter trop d'un domaine où je me suis un peu cristallisé... je ne pense pas que... enfin les mathématiciens universels ça n'existe pas, on peut plus... on n'est plus au temps de Léonard De Vinci où on pouvait tout faire avec un seul homme ; donc, il faut de plus en plus se spécialiser et malheureusement cette spécialisation fait que les mathématiciens eux-mêmes entre eux ne se comprennent pas toujours, et c'est très gênant parce qu'on étudie souvent des choses presque pareilles sans se connaître.

Jacques Nimier : Ah ! oui, à ce point-là...

Claude Berge : C'est à peu près inévitable étant donné que beaucoup d'écoles de mathématiques ont une certaine collection de concepts qu'ils connaissent bien et que cette collection s'élargit de jour en jour. Elle peut rejoindre la collection du voisin qui a travaillé de son côté ; mais ceci c'est une démarche désastreuse, ce n'est pas comme ça que ça devrait se passer. Ca se passe comme ça en fait parce qu'on travaille malgré tout un peu par école : les logiciens polonais ne font pas la même chose que les gens qui font de l'analyse numérique en Russie, ou quelque chose comme ça...

Jacques Nimier : Vous me dites que ça ne devrait pas être comme ça, vous aimeriez mieux que ce soit autrement.

Claude Berge : ... oui, ça ne veut pas dire que... le mathématicien cherche en général à avoir une théorie bien faite et si l'on voulait mettre toutes les mathématiques dans un seul moule, un seul building, il faudrait que dans tous les différents départements, les connexions soient bien établies, ce serait absolument nécessaire ; alors si ça se développe d'une façon un peu anarchique, de toutes façons on ne peut pas y échapper...... et puis il se passe autre chose : c'est que certaines personnes veulent développer les mathématiques comme si c'était un bel édifice à regarder sous tous les angles, et d'autres veulent simplement un édifice dans lequel ils peuvent trouver un petit outil et l'attraper rapidement pour résoudre un problème bien précis... c'est un arsenal d'outils, c'est un... et ces deux concepts sont très différents, ces deux façons de voir s'opposent. Personnellement, je serais plutôt d'avis que les mathématiques doivent être un outil, doivent servir...... et que pour que l'outil soit maniable, on a besoin que d'un tout petit élément de l'édifice, il ne faut pas visiter tout l'édifice pour résoudre son problème.

JACQUES NIMIER : Oui, l'unité des mathématiques vous importe peu, c'est plutôt le côté utilité, quoi.

CLAUDE BERGE : Non, il est évident que tout serait plus satisfaisant si l'édifice était un et si on savait exactement à quelle porte frapper quand on veut résoudre un problème ; mais c'est un peu illusoire cette façon de voir, enfin beaucoup de gens s'acharnent à embellir l'édifice, c'est très bien mais c'est pas ça qui m'intéresse.

JACQUES NIMIER : Oui... Quel plaisir avez-vous à faire des mathématiques ?...... si plaisir il y a, d'abord.

Le plaisir en mathématique

CLAUDE BERGE : Ben, il y a du plaisir quand ça marche bien, il y a du déplaisir quand ça ne marche pas bien (*rires*), il y a des périodes où ça marche bien, des périodes où ça ne marche pas bien, naturellement.

JACQUES NIMIER : Vous pouvez parler un peu des deux ?

CLAUDE BERGE : Pour moi, quand on éprouve du plaisir, c'est surtout quand on est sur le point de découvrir quelque chose et qu'on polit un peu l'ouvrage et qu'on sort quelque chose de concret, un article bien entendu. Mais si quelquefois on reste plusieurs semaines, plusieurs mois, sans rien trouver d'intéressant c'est très, très décevant mais le plaisir de découvrir est à ce moment très grand, c'est même plus que... c'est même ça plutôt que le plaisir de parler de mathématiques ; j'aime pas tellement... j'aime pas professer par exemple...

Jacques Nimier : Ah ! bon...

Claude Berge : ... je le fais au minimum. Ce que j'aime bien, c'est être avec un papier et un crayon dans une salle très confortable avec un cigare, un très bel objet devant moi : statue ou tableau, quelque chose...

Jacques Nimier : une figure...

Claude Berge : C'est-à-dire, il faut... je ne fais pas de bonnes mathématiques du tout si je ressens une sorte de frustration ou d'inconfort ; quelquefois même quand il fait très beau, au bord de la mer, eh bien, ça ne marche pas, alors qu'au contraire, d'autres fois c'est seulement au bord de la mer que ça marche, parce qu'il y a beaucoup de frustrations, si on est enfermé dans une pièce par exemple, ce qui est souvent nécessaire, il ne faut pas être tiraillé pour aller dehors, il faut au contraire trouver que la pièce est une sorte de refuge nécessaire ; enfin, c'est... un petit détail quand même, ça s'accompagne donc d'un certain sentiment de confort, de tranquillité, il faut essayer de se concentrer... une gymnastique... C'est très difficile ce que vous me dites là au fond, j'ai jamais réfléchi à cet aspect de la question... On n'a du plaisir à faire des mathématiques que si on se sent... motivé mais motivé d'abord par l'objet qu'on veut atteindre bien entendu, mais aussi par une sorte d'atmosphère et d'envie de se recueillir et de s'abstraire... alors là, évidemment, il y a certainement beaucoup à dire au sujet du rapport de cet aspect de la question et de l'affectivité ?

Jacques Nimier : Oui, se recueillir, s'abstraire...

La “cristallisation” des pensées

CLAUDE BERGE : Ben, je ne sais pas d’ailleurs, on a peut-être souvent accusé des mathématiciens d’être schizophrènes ou tout au moins schizoïdes parce qu’ils s’occupent d’êtres qui ne sont pas en liaison constante avec la réalité concrète et affective. Il y a peut-être des mathématiciens qui sont poussés par un certain aspect schizoïde, c’est très possible, c’est pas mon cas, pas du tout...

JACQUES NIMIER : Se recueillir, qu’est-ce que ça veut dire pour vous ?

CLAUDE BERGE : ... se recueillir, c’est-à-dire se retrouver avec des pensées qu’on n’a pas pu réussir à cristalliser, et profiter du calme pour les concrétiser sur du papier. Mais je crois que c’est la même chose que pour jouer aux échecs ; pourquoi est-ce que deux joueurs d’échecs se battent pendant une heure ou deux heures ? C’est parce qu’ils aiment se concentrer sur un problème et ils aiment cette espèce de recueillement. C’est pas tellement parce qu’ils ont désiré gagner. On peut évidemment penser qu’il y en a d’autres qui sont poussés par une sorte d’ambition de réussir ou de gagner aux échecs, mais enfin c’est pas la motivation que je considère moi-même...

JACQUES NIMIER : Concrétiser sur... cristalliser, vous avez dit aussi cristalliser vos idées, vos pensées...

CLAUDE BERGE : C’est-à-dire elles ont une forme un peu nébuleuse, il faut arriver à leur donner une forme... une forme de cristal dur et... c’est une image, une sorte de... solution qui se cristallise, qui décante et puis le solide apparaît au fond ; il est évident qu’au début quand on entrevoit une théorie possible pour expliquer ou pour améliorer quelque chose, c’est extrêmement vague pour bien longtemps et puis même quand ça nous devient plus précis, la première forme qu’on obtient est une forme extrêmement laide et qui ne nous satisfait pas, il y a un grand travail de polissage d’une théorie avant de la présenter au public, si je puis dire...

JACQUES NIMIER : Oui, on revient au mot de figure. Vous dites : quelque chose de laid ou de pas laid, c’est des mots qu’on utilise pour une figure. Quelque chose de solide qu’on présente au public, qu’on peut présenter, comme s’il y avait fabrication de figure.

Les mathématiques dures et les mathématiques molles

Claude Berge : Ah ! oui, oui, c'est ça. On présente, enfin quand on trouve un théorème, il faut l'exposer en séminaire ou faire un article et le publier, il n'y a qu'une solution et c'est ça qui doit être... qui ne peut pas être fait d'une façon négligente ; à ce moment-là le théorème perd très vite de son intérêt, à moins qu'il soit repris beaucoup plus tard par quelqu'un d'autre qui le redécouvre sous une forme améliorée... Vous voyez, il est évident que la façon de présenter un théorème est essentielle et c'est assez difficile quelquefois parce qu'on peut avoir des théorèmes un peu forts mais beaucoup plus laids, extrêmement longs à énoncer avec des cas d'exceptions, ou on peut avoir au contraire un énoncé très court, mais un peu moins fort qui ne peut pas s'appliquer à certains cas pour lesquels l'autre type de théorème pourrait marcher... Personnellement, comme d'ailleurs je vous l'ai dit tout à l'heure, je suis parfaitement satisfait avec ce deuxième type de théorème ; il y a les mathématiques dures, les mathématiques molles...

Jacques Nimier : Oui, vous reprenez ces termes : dures et molles. Les mathématiques "jeu", une façon de jouir avec l'esprit.

Claude Berge : ... Il y a aussi plusieurs attitudes, il y a par exemple le mathématicien classique qui veut savoir systématiquement tout ce qui est nouveau, tout ce qui améliore quelque chose dont il avait déjà entendu parler, qui fait une sorte de classement et qui est obligé pour cela, de se tenir au courant de tas de directions qui vont dans tous les sens... ça c'est le mathématicien sérieux ; d'autres mathématiciens sont des mathématiciens non sérieux, comme moi par exemple, parce que je ne fais malgré tout que les mathématiques qui m'amusent... Enfin, il y a entre les deux, il y a plusieurs échelons intermédiaires mais... les mathématiques c'est quand même aussi un petit peu un jeu, il faut les considérer un peu comme un jeu.

Jacques Nimier : Qu'est-ce que c'est qu'un jeu pour vous ? un jeu mathématique ?

Claude Berge : Un jeu, c'est une façon de jouir avec l'esprit... je crois, c'est concentrer son activité sur ce qui vous donne le maximum de jubilation...

JACQUES NIMIER : Est-ce que vous avez des souvenirs concernant les mathématiques, des choses qui vous ont frappé.

CLAUDE BERGE : Vous voulez dire des aventures personnelles ?

JACQUES NIMIER : Oui, quelque chose qui en mathématiques, a joué un rôle important dans votre vie.

CLAUDE BERGE : Mais par exemple, j'ai rencontré autrefois, un joueur d'échecs, un ancien champion de France qui buvait énormément avant de donner des séances de simultané dans lesquelles il jouait contre une vingtaine de personnes et il se trouvait que quand il buvait un peu trop, eh bien ! il ne perdait pas davantage de parties mais il faisait énormément de nulles, des parties nulles, ce qui fait qu'il arrivait quand même à faire marcher ses fonctions de joueur, de champion, de maître d'échec...

JACQUES NIMIER : Oui,...

CLAUDE BERGE : ... tout marchait correctement, mais... malgré tout il y avait un changement notable car presque toutes ses parties devenaient nulles... Moi, par exemple, c'est pas l'alcool mais c'est fumer, par exemple. Il ne me viendrait pas à l'esprit de me mettre à réfléchir sur un problème sans un cigare ou une cigarette...

JACQUES NIMIER : Oui...

CLAUDE BERGE : C'est-à-dire à ce moment-là ça m'ennuierait. Le même travail peut me plaire ou me déplaire suivant des petits détails comme ça qui sont tout à fait extérieurs au problème.

JACQUES NIMIER : Ils ne sont pas si extérieurs que ça puisque...

CLAUDE BERGE : ... Oh ! oui... c'est peut-être simplement une raison, enfin une façon de... de contenir une impatience, c'est possible... Je ne sais pas, enfin, je n'ai pas réfléchi à la question, mais enfin puisqu'on parlait du plaisir à faire des mathématiques, c'est quand même assez bête mais je me dois de le signaler comme une confession...

Jacques Nimier : Et vous disiez alors que parler des mathématiques, non ça n'est pas du tout pareil.

Claude Berge : J'aime beaucoup mieux écrire quelque chose que de le dire.

Jacques Nimier : Oui.

Claude Berge : Je ne suis pas bavard par nature... plutôt que d'aller d'une façon continue de gauche à droite et, dans un cours, on doit procéder comme ça... Evidemment, les discussions sont nécessaires, on a besoin de connaître les points de vue des collègues et si naturellement... on croit trouver quelque chose et que quelqu'un vous dit qu'une façon de traiter le problème serait tout aussi bénéfique et qu'il a réussi, il vaut mieux le savoir le plus vite possible parce qu'on ne peut pas tout savoir, mais... au fond, je m'intéresse plus à mes problèmes qu'aux problèmes des autres (*rires*). Les combinatorialistes.

Jacques Nimier : ... Mais maintenant, vous avez l'impression que vous avez été conduit aux mathématiques absolument par hasard ou qu'il y a vraiment quelque chose...

Claude Berge : C'est peut-être un hasard si je suis devenu mathématicien, mais étant devenu mathématicien c'est peut-être pas un hasard si je me suis mis dans la combinatoire, disons.

Jacques Nimier : Ah ! bon, c'est ça qui est le plus important.

Claude Berge : ... Je ne pense pas qu'on puisse expliquer autrement que je vous l'ai dit que je sois devenu, enfin que je me sois... dans la recherche mathématique.

Jacques Nimier : Ah ! oui... comment définiriez-vous la combinatoire ?

Claude Berge : C'est une bonne question parce que c'est une question qu'on avait posée à un très grand mathématicien, Georges Polya, il n'y a pas longtemps et la seule définition que Polya avait trouvée : la combinatoire c'est ce que les combinatorialistes font.

Jacques Nimier : C'est ce que les ?

Claude Berge : C'est ce que les combinatoiralistes font, c'est ce que la théorie combinatoire étudie, il n'y a pas d'autre définition. En fait, pour moi c'est assez clair. C'est exactement l'étude des configurations, comme la théorie des nombres est l'étude des nombres ; le plus simple des problèmes combinatoires et le plus connu c'est le problème d'Euler par exemple : Euler se posait la question de savoir s'il était possible de traverser la ville de Konigsberg, c'est-à-dire qui s'appelle aujourd'hui Kaliningrad, de façon à utiliser chaque pont une fois et une fois seulement ; donc s'il existe, ce trajet est une configuration parce qu'il faut ranger les différents ponts sur lesquels on va passer. Bon, alors, quand le problème est très simple comme celui-ci, ce qu'il faut c'est avoir des théorèmes d'existence : existe-t-il un trajet satisfaisant à ce genre de contrainte ? ou existe-t-il une façon de faire, un tableau avec des symboles, de façon à ce que ces symboles subissent, obéissent à certaines lois ? Ca c'est les théorèmes d'existence qui, sont d'ailleurs les plus intéressants à mon avis ; puis, une fois que le théorème d'existence ne pose plus de problème, il y a des problèmes de dénombrement : combien de configurations existe-t-il ? Alors là c'est un domaine très spécial, qui est déjà connu des probabilistes depuis fort longtemps et qui est l'analyse combinatoire proprement dite ; mais la combinatoire c'est aussi autre chose, c'est aussi le problème : parmi les configurations que l'on veut obtenir, il y en a-t-il une qui est optimale dans un certain sens ? et puis surtout, quelles sont les propriétés de ces configurations, alors tout un type de problèmes très différents se posent et c'était des problèmes qui n'étaient pas étudiés en tant que tels par les mathématiques modernes autrefois, enfin il y a très peu de temps que c'est reconnu ; maintenant, c'est reconnu comme une branche autonome des mathématiques ; évidemment dans tous les théorèmes d'existence ou les théorèmes de structure, il y a beaucoup d'algèbre, il y a beaucoup de calculs sur ordinateur, il y a beaucoup de choses différentes qui interviennent ; ce n'est donc pas une branche sans rapports avec les autres, mais, enfin, l'objet que nous étudions, est un objet bien précis, c'est "les configurations" ; alors c'est un domaine qui a échappé complètement aux mathématiques grecques et européennes jusqu'à Euler, on se demande pourquoi parce que malgré tout, il y a eu des...

Jacques Nimier : Il est un peu à part...

Les configurations, le modelage et la rigueur des lois

Claude Berge : Il est un peu à part, il n'était pas inconnu des... chinois, il y a une vieille histoire qui date de plus de 2000 ans avant Jésus Christ, où... on voit sortir une tortue du Fleuve jaune et sur sa carapace se trouve un carré magique ; c'est une configuration de nombres qui n'est pas du tout facile à obtenir ; donc il fallait déjà qu'ils sachent comment se forme une configuration ; aux Indes, actuellement quand il y a un carré magique un peu différent des autres, on le voit immédiatement sur le mur d'un commerçant comme étant un symbole de perfection et c'est un symbole qui est supposé lui porter bonheur ; mais c'est pas du tout dans le courant des mathématiques classiques qui nous viennent des Grecs qui veulent étudier les nombres, les formes, etc. ni même les éléments de l'analyse combinatoire. Par exemple, le triangle de Pascal : il n'a pas été inventé par Pascal mais par des arabes, par des persans plus exactement, je crois au XI$^{\text{ème}}$ siècle. Mais ces arabes ou ces persans le faisaient sans faire de combinatoire, c'est-à-dire qu'ils rencontraient les nombres binomiaux, mais ils n'avaient pas fait le rapprochement avec le dénombrement d'un type de configuration...

Jacques Nimier : Qu'est-ce qui vous fascine là-dedans ?

Claude Berge : ...Ah ! et bien, une configuration, c'est une façon de placer des objets d'une façon qui s'impose par la rigueur de ses lois, comme un tableau très rigoureux, ...et puis ce qui m'a poussé davantage vers la Combinatoire c'est justement c'était que... c'était une science très très peu développée et qu'on se devait d'ériger en théorie...

Jacques Nimier : Modeler une figure qui a des lois rigoureuses.

Claude Berge : Quand la théorie n'est pas encore bien élaborée... on peut lui donner plusieurs formes, par exemple on peut faire tout découler d'un théorème dur ; on peut au contraire considérer un théorème tout à fait différent et retrouver les mêmes résultats beaucoup plus loin, c'est ça que j'appelle le modelage d'une théorie...

Jacques Nimier : Et vous, c'était pas le... ?

Claude Berge : Si, ça paraissait intéressant de modeler justement une théorie... une théorie n'est intéressante qu'à ses débuts, c'est au début d'une théorie qu'on peut lui donner un aspect un peu à votre convenance, suivant vos goûts.

L'accès aux mathématiques, au sens perdu

Claude Berge : La difficulté des mathématiques est en grande partie une difficulté d'accès. C'est pas une difficulté intrinsèque parce que c'est relativement simple, on s'en rend compte quand on a compris (*rires*). Mais justement ça, on pourrait comprendre même si ça demeurait complexe. Comprendre c'est pas nécessairement réduire à des éléments simples.

Très souvent, la difficulté se trouve dans une sorte de déchiffrage : il s'agit de comprendre ce qu'il y a au-delà d'une certaine écriture qui est purement algébrique alors qu'en fait le contenu est géométrique. Et le contenu géométrique est totalement absent lors du développement algébrique alors que dans la tête de l'auteur il était présent, ou encore il y a des développements heuristiques qui ne sont pas donnés, les méthodes heuristiques sont très très importantes...

Il y a des choses bizarres comme ça, il y a des résultats mathématiques qui ont un sens extrêmement simple et le sens est comme perdu.

Entretien avec André Joyal

André Joyal est un des plus grands mathématiciens du Québec.

Jacques Nimier (1929-2014) était un psychologue et professeur des universités français.

Comment devient-on mathématicien ?

Jacques Nimier : Est-ce que vous pourriez me dire comment vous êtes devenu mathématicien ?

André Joyal : Oui. Dès l'adolescence je me suis intéressé aux sciences en général, mais particulièrement à la physique et à l'astronomie, pas dans les livres scolaires, j'allais à la bibliothèque où je lisais des livres de vulgarisation scientifique, et je n'avais pas l'intention de faire des mathématiques à ce moment-là : j'avais plutôt l'intention de faire de la physique, pas de chimie, de la physique.

J'ai lu aussi un certain nombre de biographies et ça, je crois que ça a dû avoir une influence psychologique importante par identification... j'aurais peut-être du mal à vous dire exactement quels livres, mais c'étaient des livres qui décrivaient l'histoire de certains grands physiciens ou de certains grands mathématiciens. Cela donnait un contenu un peu réel à l'activité, parce que la science, en tant que contenu théorique, c'est intéressant pour un jeune, mais c'est aussi intéressant de comprendre la vie en général, de comprendre l'histoire aussi...

Il y a peut-être eu aussi une certaine identification qui s'est faite à ce moment-là, parce que dans ma famille il n'y a pas de scientifique. Mon père était cultivateur quand j'étais jeune, mais plus tard il est devenu marchand de matériaux de construction. C'est un individu très rationnel, il aime les choses... cherche à comprendre... il n'a pas beaucoup d'éducation, mais tout de même, il a, je crois, cinq ou six ans d'école primaire. Il a toujours eu une attitude scientifique devant les choses, ou rationnelle.

J'ai peut-être aussi été influencé par certains cousins. Je me souviens que tous les étés, certains cousins des Etats-Unis venaient nous visiter et il y en avait un en particulier qui aimait beaucoup les jeux de devinette : il posait des questions, il fallait réfléchir et ça m'amusait beaucoup ; j'avais de bons rapports avec lui, ça m'a peut-être influencé.

Seul et avec d'autres, présent et absent

André Joyal : Ensuite j'ai fait des études techniques dans un collège ; j'ai un diplôme de technicien d'électronique. Puis, j'ai voulu étudier la physique à l'université, mais en faisant des études d'électronique.

J'ai commencé à lire systématiquement certains livres d'algèbre et de calcul infinitésimal. Ces cours d'électronique étaient relativement rudimentaires, il n'y avait pas de calcul différentiel et intégral sauf un petit peu à la fin du cours et j'étais assez satisfait. Alors j'ai étudié par moi-même et je suis devenu une sorte d'autodidacte même si j'ai eu des cours à l'université... en fait, j'étais plutôt absent à ces cours...

Jacques Nimier : Vous étiez absent ?

André Joyal : Oui, je n'aillais pas au cours en général, sauf pour passer les examens... Cependant, j'étais présent à l'université, c'est-à-dire que je travaillais avec certains étudiants qui étaient comme moi très enthousiastes pour la mathématique et on travaillait ensemble, on se posait différentes questions, comme ça j'ai beaucoup appris aussi. Mais les cours c'était pour les examens, c'était plutôt quelque chose de formel, il fallait bien avoir des diplômes, il fallait bien... parce que les cours sont donnés sans perspective historique. C'est soit trop lent, soit trop rapide. On impose un rythme qui ne correspond pas du tout au rythme de l'étudiant ; or l'étudiant intéressé peut, en une semaine, apprendre ce que l'on peut faire en une année dans un cours si l'on n'est pas intéressé...

J'ai toujours suivi mon propre rythme mais en faisant quand même un peu attention pour passer les examens, donc avant les examens, je faisais un effort... mais sans ça, je me considère plutôt comme un autodidacte. J'avais certains rapports avec d'autres mathématiciens, à l'université il y a quand même quelques professeurs... mais j'ai toujours eu beaucoup d'indépendance par rapport aux exigences. Par exemple, j'ai voulu faire une maîtrise. J'ai fait un peu d'analyse pendant un certain temps et puis ensuite, je me suis intéressé à d'autres questions, et comme je m'intéressais à d'autres questions, je ne faisais plus d'analyse, alors j'ai changé de directeur.

Répondre à ses propres interrogations

André Joyal : J'ai toujours été très exigeant pour répondre à ce qui me semblait être mes interrogations, plutôt que les interrogations du prof...

Jacques Nimier : Vos interrogations ?

André Joyal : Oui... quelles sortes de questions on se pose ou que je me pose.

Jacques Nimier : Et qui vous motivaient pour avancer...

André Joyal : Oui, il y a un aspect local et global, c'est-à-dire qu'il y a d'abord des espèces de questions très, très générales auxquelles on aimerait répondre et qui ne sont presque pas formulées, c'est presque inconscient, c'est une motivation très générale.

Jacques Nimier : Exemple ?

André Joyal : Je me suis toujours émerveillé (*rires*) par ce qu'est l'univers physique par exemple. L'astronomie m'a beaucoup influencé. J'ai découvert que le monde est extrêmement vaste par rapport à la perspective qu'on peut avoir dans une petite ville (c'est une façon d'en sortir peut-être) et il y a des choses extrêmement mystérieuses auxquelles on veut répondre... souvent aussi par opposition à la religion peut-être. Dans la famille, nous étions catholiques, les réponses venaient de la religion effectivement, et je me suis opposé à ça assez tôt, j'étais un peu mouton noir dans ce sens-là ; je ne suis pas un agnostique au sens général du mot, à savoir qu'il y a des questions auxquelles on ne peut pas répondre, mais j'ai une espèce de confiance selon laquelle, en principe, on peut répondre à toutes les questions (*rires*).

Jacques Nimier : C'est-à-dire que vous voulez que toutes les questions et les réponses viennent de vous ?

André Joyal : Non, non, non. Parce que, oui, je suis autodidacte, mais ça c'est une question de circonstances ; j'aime bien collaborer avec les gens, j'ai collaboré avec beaucoup de gens dans ma carrière. Collaborations qui ont été fructueuses. Non, c'est plutôt par réaction à un certain système d'enseignement, c'est plutôt par rapport à une certaine culture, une façon de considérer la recherche ou l'étude de la science en général. C'est ça plutôt, dans ce sens-là. Ce n'est pas parce que je crois que les réponses doivent venir de moi, mais j'ai confiance que je peux y apporter quelque chose, je ne me sens pas différent, en ce sens, des autres non plus.

Les mathématiques

André Joyal : Je crois que les mathématiques c'est une activité humaine comme les autres, c'est pas une question de talent par exemple. Ce n'est pas une question de neurones ou de bon fonctionnement du cerveau. Bon, c'est évident qu'il faut être en santé, mais c'est plutôt une question de motivation, c'est une question émotionnelle.

Donc, si pour certaines motivations de nature, non pas irrationnelle, mais émotionnelle, on est intéressé à comprendre un certain nombre de choses en utilisant l'aspect mathématique, alors on développe les capacités de réfléchir mathématiquement et on a ce qu'on appelle un talent. Cette motivation peut apparaître très tôt et c'est difficile de comprendre pourquoi exactement...

Jacques Nimier : Est-ce que vous pouvez préciser un peu justement cet aspect émotionnel qui pour vous a motivé votre intérêt ?
André Joyal : C'est pas facile... mais quand j'avais cinq ans, mon père m'avait acheté une sorte de ce qu'on appelle en Amérique un mécano ; mais c'était en bois... on fabriquait et j'avais beaucoup aimé ça. Je ne sais pas si c'est suffisant pour former une motivation : le fait de découvrir qu'on peut faire quelque chose...

Jacques Nimier : Des éléments séparés...

André Joyal : Oui, des éléments séparés. C'était quelque chose de relativement simple : il y avait la figure et il fallait la répéter, évidemment on pouvait faire ensuite autre chose, mais je ne me souviens pas que j'ai fait beaucoup d'autres choses, je faisais simplement ce qu'il y avait, j'étais très jeune...

Jacques Nimier : Construire une figure...

André Joyal : Oui, construire une figure. Je me souviens que j'avais fait un petit avion, par exemple, avec une hélice qui tournait vraiment et j'étais très content peut-être que ça m'a donné une motivation... il y a peut-être aussi cette identification à la suite de lecture... une sorte d'ouverture sur le monde. Quand on vit dans une petite ville, c'est fermé et comme je le disais, nous étions très catholiques et j'avais des doutes sur la vérité de cette doctrine. Mais ça a été très difficile pour moi, quand j'avais treize, quatorze ans de m'en éloigner. Je crois que je m'en suis détaché par ma façon positive...

Jacques Nimier : C'était une sortie ?

André Joyal : Oui, c'était une sortie, oui, chercher la vérité d'une façon différente. Je ne vois pas la mathématique et la science comme une nouvelle religion, je vois plutôt la religion comme une pseudo science, un effort de comprendre des choses qui ne sont pas comprises. Et puis, on l'a érigée en doctrine et ça a donné une science qui n'en est pas une, mais une sorte d'effort de connaissance. C'est un effort qui n'est pas rationnel, parce qu'on n'en est pas à un degré de développement suffisant pour utiliser des méthodes rationnelles afin de répondre à ces questions. Et justement ça c'est la position : il n'y a pas de questions a priori, auxquelles on ne peut pas répondre, même si on ne peut pas répondre maintenant. Et, je crois que l'humanité c'est quelque chose de complètement ouvert et...

Individuel/collectif

Jacques Nimier : Vous utilisez beaucoup les mots “ouvert” et “fermé”...

André Joyal : Je ne sais pas... ah ! oui, je parlais d'une petite ville fermée... oui, oui, je ne crois pas que ce soit une influence de la topologie (*rires*)... Mais les mathématiques, c'est plus qu'une simple technique... Je sais que certains mathématiciens, surtout en statistique, voient les mathématiques comme un outil qui permet de calculer certains paramètres. Non en général, j'ai confiance dans la capacité de comprendre. Il y a évidemment énormément de problèmes sociaux que la méthode des scientifiques au sens des sciences exactes, ne peut résoudre. Ca je suis d'accord avec ça ; mais je crois que la science est une science véritable, je ne dis pas un empirisme. Je ne crois pas qu'on fabrique des lois simplement pour les accorder aux phénomènes et pour trouver une explication parce que tout est convention et des choses comme ça ; je crois qu'on a la possibilité de comprendre le monde en général, que c'est une capacité collective : cette recherche scientifique ça se fait toujours à plusieurs. Je n'ai jamais travaillé d'une façon isolée même si je suis un autodidacte, c'est toujours en rapport avec d'autres personnes. Il y a un questionnement qui se développe, on répond aussi à certaines questions individuelles ; c'est une construction individuelle au groupe de recherche. Mais souvent ce ne sont pas des groupes de recherche formalisés, institutionnalisés avec subventions et tout ça, c'est plutôt un individu dans un pays, un autre là, un autre ailleurs, on se rencontre quelquefois, on se téléphone, on s'écrit...

Découvrir/inventer

André Joyal : Alors si je reviens à cette question d'ouverture, de fermeture... j'avoue que j'ignore profondément ce que c'est que finalement les mathématiques, c'est-à-dire que je peux prendre des positions philosophiques par rapport à ça ; mais je ne suis pas d'accord avec les positions platoniciennes et je ne suis pas d'accord non plus avec des positions constructivistes dans lesquelles tout ça c'est des constructions de l'esprit humain ; je crois qu'il y a découverte, il n'y a pas seulement invention, il y a les deux à la fois : invention et découverte, et c'est ça aussi qui est fascinant en mathématiques : des découvertes parce que si on ne faisait qu'inventer... découvrir aussi c'est intéressant, c'est-à-dire qu'il y a une sorte d'inconnu et puis tout d'un coup il y a un petit coin de voile qui est soulevé et puis on voit, on comprend tout d'un coup ce qui se passe. A mon avis, c'est déjà là ; comment est-ce que c'est déjà là ? Je crois que c'est là exactement comme les lois physiques, on peut faire des variations sur une formulation, on peut inventer certaines formulations des lois physiques, on n'invente pas les lois physiques, on les découvre, il y a découverte de quelque chose qui est là et je crois que les structures mathématiques sont déjà là aussi.

Qu'est-ce que ça signifie du point de vue philosophique ? Je ne suis pas un théologien, (?, !) d'accord. Je ne suis pas capable de répondre à ces questions, mais pour moi c'est quand même important, parce qu'a priori il y a une sorte de confiance, à savoir je suis devant un problème très compliqué, je me dis : je dois trouver les rapports simples qui sont derrière ça et j'ai toujours l'idée qu'il y a derrière quelque chose de très simple qui permet de rendre compte de quelque chose qui semble incompréhensible ou presque, que c'est déjà là, que c'est pas quelque chose que je vais inventer là ; mais que je dois réfléchir suffisamment pour trouver les éléments simples ; alors j'ai confiance que ces éléments simples existent... donc il y a une espèce de vue platonicienne qui fournit une sorte de motivation ; il y a des éléments simples et je dois les trouver... et ça marche !

"On peut s'ouvrir pour s'enfermer dans autre chose"

André Joyal : Cependant, devant certains problèmes, j'ai l'impression quelquefois que ce ne sont pas des problèmes naturels mais des problèmes de langage ; que c'est plutôt parce que notre approche est tellement peu claire que c'est l'approche qui crée le problème.

Certains problèmes ne sont pas naturels et à ce moment-là j'ai tendance à ne pas chercher de solution, je sais qu'il n'y a pas de solution, qu'il y a seulement certaines méthodes qu'on peut développer... Mais si un problème me paraît naturel... (et il y a ce concept de naturel qui est un peu mystérieux et très intuitif, je ne sais pas le décrire complètement) à ce moment-là, j'ai davantage de motivations pour y travailler, je peux travailler durant des mois sur une question si j'ai des motivations.

Les motivations ne sont pas en général des motivations techniques, à savoir, je ne suis pas un mathématicien qui fait des mathématiques parce que je dois résoudre un problème d'ordre technique posé par une corporation, un gouvernement ou quelque chose comme ça ; ça c'est justement des problèmes qui ne sont pas naturels à mon avis ; surtout qu'il y a des usages... enfin politiquement, j'ai des positions qui sont plutôt radicales. Alors, je préfère faire une recherche théorique parce que je crois que c'est plus utile à l'humanité même si actuellement, ce n'est pas utile au gouvernement ou aux corporations, c'est peut-être pas maintenant que ça sera utilisé, ça sera plus tard. Je contribue peut-être, beaucoup de mathématiciens aussi, au développement d'une science dont l'usage en tout cas n'est pas orienté vers une forme d'exploitation directe ; je préfère faire des mathématiques théoriques dans ce sens-là, ce qui ne m'empêche pas de prendre position politiquement et je ne veux pas m'isoler dans une tour d'ivoire en me consacrant uniquement à des problèmes théoriques...

Jacques Nimier : Une tour d'ivoire...

André Joyal : Ah ! oui, oui, d'accord c'est ça, dans une tour d'ivoire de mathématiques, on peut s'ouvrir pour s'enfermer dans autre chose, mais il y a au moins deux choses que je voudrais rajouter.

Rigueur et plaisirs

Jacques Nimier : Concernant la question de créativité : je crois que s'il y a du plaisir dans l'activité, il y a créativité, que la créativité ce n'est pas une question d'intelligence : on peut être très intelligent et ne pas être créateur. Il faut exercer son activité là où on a du plaisir, là où on trouve des résonances suffisamment profondes... c'est plus ou moins conscient, les rapports sont plus ou moins directs, mais c'est quelque chose qu'on sent ; on ressent une certaine satisfaction... Je crois que si je faisais certains types de mathématiques, je serais beaucoup moins créateur. Si je devais résoudre des problèmes de minimisation, de maximisation, de profit pour des corporations, des choses comme ça, alors probablement je me contenterais d'appliquer bêtement la formule. A moins d'avoir des motivations d'argent, mais je n'ai pas tellement ces motivations-là...

Jacques Nimier : Finalement, comment se fait-il qu'avec des goûts pour l'astronomie, la physique, etc. vous avez fait plutôt des mathématiques ?

André Joyal : C'est un peu accidentel, je crois. J'ai fait des maths parce que j'étais autodidacte et aussi par réaction contre certains systèmes d'enseignement. Il est plus facile de faire des mathématiques en autodidacte que de la physique ; en physique, on a besoin d'un laboratoire... J'adore la physique, je m'intéresse toujours à la physique, il m'arrive de prendre un bouquin de physique et j'ai peut être dans la tête de faire un jour assez sérieusement de la physique théorique. Donc, la physique, c'est quelque chose qui est là, qui est très près, qui est présent. Si je fais des mathématiques, c'est un peu parce que j'ai dévié de la physique, je crois.

JACQUES NIMIER : Dévié ?

ANDRÉ JOYAL : Oui, c'est une sorte de déviation, parce qu'il est plus facile... J'ai beaucoup d'intérêt pour les mathématiques, mais je ne suis pas un logicien, même si j'ai fait beaucoup de logique... C'est-à-dire que la pensée humaine m'intéresse en tant que telle, mais je crois que le monde est plus intéressant que la pensée : la pensée quand elle se tourne vers elle-même, peut facilement tourner à vide, à long terme tout au moins, à court terme non. Et les mathématiques, c'est davantage une science de la pensée que la physique et particulièrement la logique mathématique.

Mais si j'ai fait de la logique mathématique, c'était pour éclaircir, pour mieux saisir les méthodes de pensée en mathématiques, déjà la pensée qui réfléchit sur le processus de pensée. Parce qu'on peut faire la métamathématique, la métamétamathématique, on finit par tomber dans quelque chose de relativement arbitraire où les choses sont vraies par convention : c'est trop fluide là, il n'y a plus de matière, il n'y a plus de contenu, c'est beaucoup moins intéressant, les choses sont vraies par définition. Or, les mathématiques c'est pas une question de définition. Malheureusement, dans les cours maintenant, on insiste beaucoup trop sur la rigueur, sur la déduction ; il y a les axiomes, les théorèmes, il y a tout ça.

Les mathématiques, ça ne se fait pas comme ça.

ANDRÉ JOYAL : Malheureusement, si c'est comme ça dans les cours, c'est parce que c'est comme ça dans les publications : on insiste beaucoup trop sur la rigueur.

La rigueur, c'est quelque chose d'essentiel, c'est important mais c'est le seul aspect de l'activité mathématique et on devrait pouvoir rendre compte de ce qui se passe aussi sur un mode non rigoureux et qui est très important pour guider la démonstration. Il n'y a pas beaucoup de textes la-dessus, ça n'appartient pas à la culture. Il faudrait des gens pour écrire des textes où on chercherait à donner le contenu intuitif et géométrique ; il faudrait qu'il y ait des équipes, des gens payés qui travaillent là-dessus... Mais on ne subventionne pas ce genre de choses, on subventionne la recherche uniquement, alors que ça permettrait de comprendre, ça faciliterait l'accès aux mathématiques.

Jacques Nimier : Ce qui vous intéresse c'est de retrouver cet aspect perdu, ce qui est caché derrière.

André Joyal : Oui, c'est-à-dire que c'est un aspect qui est perdu un peu à cause de la culture actuelle... C'est quand même une culture qui dure depuis assez longtemps... je ne sais pas comment, mais ça pourrait changer, ça pourrait être autrement... Les connaissances sont accessibles surtout aux spécialistes, il n'y a pas d'effort de synthèse, il n'y a pas d'effort de véritable vulgarisation. Il y a quelques efforts mais ils ne sont pas suffisants...

La motivation par la compétition

André Joyal : Il y a beaucoup de compétition chez les mathématiciens, pas chez tous et ils n'ont pas tous les mêmes motivations... Je pense à quelqu'un qui disait que sa façon de travailler c'était d'être en colère, d'être fâché (je vous donne un exemple extrême, ils ne sont pas tous comme ça heureusement) mais pour certains ce qui compte, c'est de vouloir détruire quelqu'un, un autre mathématicien, montrer à quel point ce type-là n'y connaît rien. Et ça va lui donner assez de motivations pour démontrer des théorèmes qui systématiquement seront meilleurs que les théorèmes de l'autre. Ce qui fait que l'autre, au bout d'un certain nombre d'années se retrouve à zéro. Or pour moi, c'est la culture qui produit ça, dans les écoles on cherche quelquefois des motivations dans la compétition, dans la notation.

En Amérique, on a beaucoup poussé ça et ça donne des résultats catastrophiques car je crois que certains jeunes vont puiser leurs motivations làdedans. Ils veulent ainsi démontrer leur supériorité, leur intelligence.

Entretien avec le Professeur Nicolaas Kuiper

Nicolaas Kuiper a été Directeur de l'Institut des Hautes Études Scientifiques de 1971 à 1985 ; c'était un mathématicien hollandais.

Nicolaas Kuiper a montré dans ses recherches un goût prononcé pour la géométrie sous diverses formes. Il a également œuvré pour que l'Institut reçoive des subventions d'agences étrangères (notamment au niveau européen et américain). Il était membre de l'Académie Royale Néerlandaise des Arts et des Sciences. Il est décédé en 1994, à l'âge de 74 ans.

Jacques Nimier (1929-2014) était un psychologue et professeur des universités français.

Des mathématiciens différents

Jacques Nimier : Et si l'on vous demandait : qu'est-ce que les mathématiques pour vous ?

Nicolaas Kuiper : ça serait peut-être : comprendre de la façon la plus efficace, la plus merveilleuse possible, des théorèmes... des théorèmes intéressants. Et évidemment on pourrait se demander : pourquoi sont-ils intéressants ?

Jacques Nimier : Oui, et pourquoi sont-ils intéressants pour vous ?

Nicolaas Kuiper : Oh ! pour moi... En général, il y a une différence entre les mathématiciens : il y en a qui ne s'intéressent à certains théorèmes que dans la mesure où ils les savent vrais. S'ils sont vrais, ils sont très contents, ils sont complètement satisfaits. Moi, j'ai plutôt le sentiment qu'un théorème n'est pas suffisamment vrai si on ne peut pas envelopper le théorème dans un ensemble de notions et de pensées... qui font que ce théorème est évident.

Jacques Nimier : Il faut que ça devienne évident pour vous ?

Nicolaas Kuiper : Oui, j'ai vraiment besoin de l'évidence des choses... mais mon besoin est peut-être plus géométrique qu'algébrique. Il y a des gens qui, s'ils voient telle page de formules et de calculs disent : ah ! je comprends bien ; c'est dans leur forme d'intuition, ils voient très vite ce que cela veut dire. Pour moi, je préfère pouvoir comprendre, avec le minimum de notions et d'organisation, que quelque chose d'intéressant est vrai.

Jacques Nimier : Vous aviez dit tout à l'heure qu'il vous arrive parfois de trouver que les mathématiques ont quelque chose de merveilleux...

Nicolaas Kuiper : Ah ! oui, merveilleux... et inattendu aussi... il arrive qu'on soit surpris que quelque chose soit d'une part simple et d'autre part vrai ! Mais cela peut être simple parce que c'est simple comme ça ou parce que cela appartient à un cadre. Par exemple ces dernières années on a trouvé des notions très utiles en de nombreuses circonstances et très efficaces, telles que les anciennes notions de groupes, de corps... Leur importance a dominé et simplifié la situation mathématique de sorte que les mathématiciens de disciplines les plus diverses peuvent utilement se rencontrer et profiter de leurs expériences même s'ils ne travaillent pas sur le même sujet.

Jacques Nimier : Oui, cela donne une certaine efficacité à la pensée.

Nicolaas Kuiper : Tout mathématicien doit avoir une certaine efficacité de la pensée, autrement il n'est rien ! ça ne fait pas forcément des gens efficaces dans la vie normale !

La guerre mathématique

Jacques Nimier : Quand vous faites des mathématiques, qu'est-ce que vous ressentez ?

Nicolaas Kuiper : ... c'est une sorte de guerre ! parce qu'on aboutit ou on n'aboutit pas... et ça continue tout le temps.

Jacques Nimier : Une sorte de guerre ?

Nicolaas Kuiper : Oui... il faut travailler beaucoup, on s'épuise ! (*rires*) Moi, je trouve que faire des mathématiques c'est très épuisant. On n'aboutit pas toujours à de grands résultats ; ce n'est pas possible, mais néanmoins, on peut être très fatigué... Quand j'étais professeur de lycée, j'avais observé que si je travaillais tard le soir, jusqu'à deux heures du matin, le lendemain les enfants n'étaient pas obéissants, parce que j'avais les yeux trop petits et que je ne pouvais pas les diriger assez... ! Et maintenant c'est un ennui de ma situation : il est nécessaire que je reste frais, que je puisse réagir ; je ne peux pas me permettre d'être trop fatigué et cela m'ennuie au moment où je veux vraiment faire des mathématiques...

Jacques Nimier : Et alors, vous sentez ça un peu comme un combat, comme une guerre ?

Nicolaas Kuiper : Le mot guerre n'est pas tellement bon... parce que je ne suis pas combatif vis-à-vis des autres gens, je ne suis pas ambitieux non plus. Parce que j'ai eu tout ce que je voulais à ce propos, je n'ai pas à avoir d'ambition ; ce n'est pas nécessaire. Il y a heureusement beaucoup de grands mathématiciens qui n'ont pas d'ambition non plus, mais par contre il y en a d'autres qui en ont, même si ce sont pourtant de grands mathématiciens mondialement reconnus. La force en mathématique et l'ambition d'être reconnu sont des propriétés indépendantes !

Le bonheur apporté par les mathématiques

Nicolaas Kuiper : Quand on fait des mathématiques, il y a des stades divers : je me souviens d'un problème auquel j'ai réfléchi pendant quelques années : j'en parlais avec des gens, ici et là... on avait une certaine idée : ça doit être ceci... non pas possible de démontrer ceci. Bon, on continue ; après six mois, on revient. On parle de nouveau avec les mêmes gens qui s'intéressent aussi à ce problème. Alors un certain jour j'ai dit : ah ! mais ce peut être ceci. J'étais avec un ami qui a immédiatement dit et trouvé que c'était faux. Il a hésité, mais il a dit une petite chose, découvert une petite chose très importante ; et j'ai trouvé ensuite la solution, pendant un mois de “congé”, source de grand bonheur.

A ce moment-là, une certaine proposition était vraie mais l'ensemble des arguments était encore laid. C'est un problème sur lequel nous avons passé quatre années ; puis nous avons fait une prépublication dans un compte rendu et ensuite, nous avons encore beaucoup travaillé pour présenter une publication bien cohérente et belle. Il faut continuer à travailler, parce que si on peut remplacer trois pages par trois lignes, cela améliore la situation et on est très heureux. Si trois pages deviennent trois lignes, c'est formidable, merveilleux et cela donne beaucoup de bonheur.

Entretien avec le Professeur André Lichnerowicz

André Lichnerowicz (1915-1998) était un mathématicien français. Il s'est particulièrement intéressé aux applications de la géométrie différentielle à la physique mathématique, notamment en relativité générale.

Jacques Nimier (1929-2014) était un psychologue et professeur des universités français.

Jacques Nimier : Est-ce que vous pourriez me dire comment vous vous êtes intéressé à l'enseignement mathématique ?

André Lichnerowicz : Bien, c'est une très vieille histoire... Vous savez peut-être comment Bourbaki a commencé, bien avant moi d'ailleurs. Bourbaki a commencé parce que de jeunes Maîtres de Conférence, nommés à l'Université de Strasbourg et ayant réfléchi sur leurs recherches et leurs travaux, n'arrivaient plus à enseigner... ils considéraient qu'ils n'arrivaient pas à enseigner d'une manière cohérente ce qu'ils savaient et c'est comme cela...

Jacques Nimier : Oui.

André Lichnerowicz : ... que l'entreprise Bourbaki a commencé. Il s'est passé un peu la même chose ensuite au niveau secondaire, pas du tout sous l'influence de Bourbaki, mais le fait que les mathématiques réfléchissent constamment sur elles-mêmes, a modifié l'enseignement universitaire. Bourbaki étant l'un des avatars de cette histoire,... nous constations que nos étudiants passés par la licence de mathématiques vers les années 50-55, ne pouvaient plus enseigner de la même façon que leurs ancêtres ; d'autre part l'enseignement secondaire en France et un peu partout dans le monde (en France, à cause de la rigidité des programmes) était resté pratiquement identique à lui-même, au moins dans son esprit, avec seulement de petits dépoussiérages, depuis 1902.

Cela nous a amenés à réfléchir, et avec le concours de l'Association des Professeurs de Mathématiques qui était très active, à organiser des séances de réflexion de travail, tout à fait libres ; ça a duré en gros de 55 à 65. Pendant dix ans, l'Association de Professeurs de Mathématiques a proposé des activités à Paris et aussi en province sur l'enseignement au niveau du secondaire.

D'autre part, je suis membre de l'Union Mathématique Internationale et celle-ci a une particularité : elle comporte une Commission Internationale sur l'Enseignement des Mathématiques qui recueille l'information et la fait circuler à travers tous les pays. Et j'ai été élu Président de cette Commission Internationale de 62 à 66 ; c'est une élection qui a lieu tous les quatre ans, au moment de chaque congrès. On en reste membre quatre années comme ex-Président. C'est ça la règle, ce qui fait que j'ai disposé pendant un certain nombre d'années d'une documentation ; avant d'ailleurs j'avais organisé, avec le concours de I'UNESCO, ce qui est devenu une collection et qui s'appelle "les Tendances" sur l'enseignement mathématique. Elle paraît en français, anglais, espagnol et diffuse à travers le monde les expériences et des choses de ce genre. Voilà, si vous voulez mes débuts.

"Quand j'étais jeune"

Jacques Nimier : Est-ce que vous avez toujours voulu être professeur de mathématiques, dès votre plus jeune âge, ou comment cela s'est-il passé ?

André Lichnerowicz : Quand j'étais jeune...

Jacques Nimier : Oui.

André Lichnerowicz : ... je voulais, entre guillemets, "faire des mathématiques". Seulement, faire des mathématiques comporte aussi leur enseignement, mais personne ne sait d'abord avant d'en avoir fait - avant d'avoir créé - s'il est capable d'en faire, d'en créer.

Jacques Nimier : Mais vous vouliez quand même faire des mathématiques avant tout ?

André Lichnerowicz : Avant tout... oui... oui...

Jacques Nimier : Dès quel âge ?

ANDRÉ LICHNEROWICZ : Oh...dès la seconde...

JACQUES NIMIER : Dès la seconde. Et vous étiez bon... ?

ANDRÉ LICHNEROWICZ : Les mathématiques déjà, c'était ma vocation mais aussi des mathématiques en rapport avec le réel. C'est ce qui m'a fait me retrouver professeur de physique mathématique...

JACQUES NIMIER : ... Oui.

ANDRÉ LICHNEROWICZ : ... de mathématiques pures, mais aussi dans leur contact avec le réel. J'étais bon en mathématiques, oui. J'ai, toute ma vie, eu le prix de mathématiques de la quatrième à la taupe.

La famille

JACQUES NIMIER : Autrement dit, le problème de votre orientation ne s'est pas posé, par exemple après le bac ?

ANDRÉ LICHNEROWICZ : Non, si vous voulez, j'ai vécu un temps privilégié qui s'appelait l'égalité scientifique, ce qui permettait, avec une lourde hérédité... un père agrégé de lettres et une mère agrégée de mathématiques, de pouvoir faire du latin et du grec et des mathématiques en même temps, ce qui n'était pas un cas rare. Dans ma promotion, à l'Ecole Normale, la moitié d'entre nous sortait de ce qu'on appelait la section A, qui était latin-grec et comportait les mêmes sciences que les autres.

JACQUES NIMIER : Votre père était professeur de lettres et votre mère professeur de maths... et vous discutiez souvent de mathématiques avec votre mère ?

ANDRÉ LICHNEROWICZ : Oui, oui, enfin... ma mère m'a donné... mais mon père aussi, mon père quoique agrégé de lettres, avait fait pour son plaisir le certificat de mathématiques générales au moment où il avait été créé. Si vous voulez, j'étais dans une famille qui considérait que la culture générale était vraiment générale et ne comportait pas seulement, aussi bien pour mon père, les Anciens mais aussi le Présent, les mathématiques et la physique également.

Jacques Nimier : Vous vous souvenez....

André Lichnerowicz : J'ai été très privilégié de ce point de vue...

Jacques Nimier : Vous vous souvenez de discussions avec votre mère au sujet de mathématiques ?

André Lichnerowicz : Je dirai avec mon père et ma mère, cela se passait à table.

Jacques Nimier : Oui.

André Lichnerowicz : On regardait ce qui se passait... (*silence*)

Qu'est-ce que les mathématiques ?

Jacques Nimier : Qu'est-ce que les mathématiques pour vous ?

André Lichnerowicz : ... c'est très compliqué. Les mathématiques... c'est une science hors de la science, c'est une science qui participe à l'art, donc qui peut donner des satisfactions aussi bien esthétiques qu'intellectuelles...

Jacques Nimier : esthétiques.

André Lichnerowicz : Il y a une esthétique des mathématiques. Je dis parfois que les mathématiques sont l'art le plus abstrait qui soit... on sait bien que les mathématiques emploient des termes, font de belles démonstrations, ont une forme d'élégance et ça correspond à la culture d'une certaine sensibilité intellectuelle qui n'est pas tellement différente de la sensibilité, mettons, musicale. Dans quelques familles, la famille Cartan par exemple, tous les enfants étaient à la fois musiciens et/ou mathématiciens... et mathématiciens et musiciens pour beaucoup.

Jacques Nimier : Vous, vous étiez musicien aussi ?

André Lichnerowicz : Non, très peu ; je m'intéresse beaucoup à la musique, mais je ne l'ai jamais pratiquée, car j'ai eu des difficultés... Bon... J'ai été un bon scolaire ; peut-être parce que ma santé faisait que je manquais l'école deux à trois mois chaque année. J'avais une très mauvaise santé... et ce qui était très agréable à certains points de vue.., m'a permis de prendre l'habitude de travailler et de réfléchir seul, avec l'entourage de mes parents bien entendu... L'une de ces maladies a été une scarlatine très sévère qui m'a rendu complètement sourd pendant quelques années, deux ou trois ans ; je suis resté complètement sourd d'une oreille, ce qui ne représente pas les meilleures conditions pour faire de la musique.

Le plaisir de se cogner

Jacques Nimier : Et vous voyez une relation entre les mathématiques et cette période de votre enfance, cette façon de travailler seul...

André Lichnerowicz : Peut-être... non ; la vérité c'est que les mathématiques m'ont toujours apporté une joie d'honnêteté intellectuelle. Lorsque vous avez une activité proprement littéraire, vous vous auto-évaluez très mal et ceci pour l'enfant est proprement déplaisant. Ce que je trouvais extrêmement agréable en mathématiques, c'était que je me cognais durement ; l'art de faire des mathématiques, aussi bien comme écolier que comme mathématicien, consiste souvent à "sécher" la moitié du temps. Quand on se cogne, on se cogne, mais quand on a vu une difficulté, triomphé d'elle, eh bien on est sûr d'y être arrivé. il y a une certaine objectivité.

Avec l'âge, j'ai appris que ce n'était pas seulement cette objectivité qui était importante, il y a à l'intérieur des mathématiques... un jugement de valeur qui vous dit si certaines mathématiques sont belles et fécondes, ont une valeur... mais, de toutes façons, elles sont ou elles ne sont pas ?... Ce qui est beaucoup plus difficile pour d'autres activités intellectuelles.

Jacques Nimier : Il y avait un certain plaisir, autrement dit, à se cogner contre quelque chose.

André Lichnerowicz : C'était un très grand plaisir de se cogner.

La sécurité apportée par les mathématiques

Jacques Nimier : Pourquoi ?

André Lichnerowicz : Pourquoi... parce que vous ne vous battez pas avec des fantômes... Vous vous battez avec votre esprit fonctionnant dans les réalités et quand les choses ne vont pas, vous vous en apercevez durement. Ce qui est un motif de sécurité et non pas d'insécurité.

Jacques Nimier : Se battre avec son esprit, autrement dit.

André Lichnerowicz : Se battre avec son esprit, dans la mesure où votre esprit est l'esprit de tout le monde. Le fait que votre esprit ait vocation universelle est probablement très sécurisant.

Jacques Nimier : Pourquoi ?

André Lichnerowicz : Pourquoi ?... (*silence*)... Parce que vous n'êtes pas victime de mythes ou de fantasmes... que vous savez mal apprécier. Ce sont les mathématiques qui ont d'ailleurs donné à l'humanité la notion même de probité intellectuelle.

Les mathématiques, un discours contraignant

Jacques Nimier : Qu'est-ce que vous mettez sous ces mots de probité intellectuelle ? Ils paraissent important pour vous.

André Lichnerowicz : Ne jamais être dupe de soi-même ou des autres... (*silence*)... Les mathématiques, si on les reprend à leur origine sont nées en même temps que la philosophie, s'en sont différenciées, car elles ont cherché à établir... un type de discours cohérent, contraignant pour l'autre et sans bruit de fond, sans quiproquos ni malentendus.

Ce type de discours, nous avons appris laborieusement qu'il ne peut porter que sur un certain nombre de choses et en particulier qu'il met entre parenthèses l'être des choses qui reste toujours (à un dictionnaire parfait près) mais il représente joint au discours naturel, un des deux pôles, le pôle dans lequel nous pouvons toujours nous entendre...

Je ne veux pas du tout dire que le discours naturel qui est l'autre pôle et qui en fait est le discours poétique, n'a pas de valeur, au contraire.

JACQUES NIMIER : Vous dites, contraignant pour l'autre, comment ?

ANDRÉ LICHNEROWICZ : Parce qu'il est capable, par sa forme, d'interdire le refus de son contenu. Vous pouvez refuser de vous intéresser à ces choses, mais à partir du moment où vous vous y intéressez, vous ne pouvez pas refuser ce type de discours. Ce n'est pas un discours de vérité absolue, du tout, c'est un discours dans lequel il y a essentiellement une cohérence propre et à partir du moment où vous avez admis les prémices, nous serons toujours d'accord.

Le côté sérieux et le côté jeu des mathématiques

JACQUES NIMIER : Est-ce que vous vous êtes déjà demandé d'où venait votre intérêt pour les maths ?

ANDRÉ LICHNEROWICZ : Probablement parce qu'elles portent témoignage sur l'un des modes de fonctionnement de notre esprit... un témoignage extraordinaire...

JACQUES NIMIER : Et dès que vous étiez jeune, vous avez eu l'impression que c'était ça...

ANDRÉ LICHNEROWICZ : Ca et leur côté ludique, leur activité de jeu.

JACQUES NIMIER : Du...

ANDRÉ LICHNEROWICZ : Ce mélange assez étonnant que font, dans les mathématiques, le sérieux et le jeu...

JACQUES NIMIER : Oui, vous pourriez développer un peu ?

André Lichnerowicz : Bon, le sérieux, nous l'avons développé. Les mathématiques quand on les pratique, même comme enfant, à propos de problèmes ouverts et de situations ouvertes, représentent un jeu dont les combinaisons et l'aspect imaginaire sont probablement beaucoup plus riches que les échecs, par exemple. Et ça, on sait que les enfants sont très tôt sensibles, pour certains d'entre eux, aux échecs ; ils peuvent l'être au même sens, aux mathématiques, au jeu mathématique.

Jacques Nimier : Oui.

André Lichnerowicz : Deuxièmement, il y a une manière de passer les connaissances qu'on vous donne, au crible des mathématiques, au crible d'un esprit formé par les mathématiques et de savoir ainsi quel degré de sérieux on peut leur donner ou quel degré d'image elles ont, pour savoir si ce qu'on vous donne est une analogie ou la cohérence d'un modèle mathématique... (*silence*)...

Imaginaire, fantasmes, mythes, analogie et cohérence, modèle, faits, réalité.

André Lichnerowicz : De temps en temps, c'est assez utile...

Jacques Nimier : De ne pas en rester aux analogies ?

André Lichnerowicz : Oui... si on considère tous les discours économiques qu'on entend... tout mathématicien vous dira... qu'il y a les faits économiques, d'une part, encore qu'il faille les analyser, et d'autre part, le discours qui est tenu autour, qui est un discours plus ou moins théorique à des niveaux variés.

Jacques Nimier : Vous opposez beaucoup ce qui serait de l'ordre de l'analogie ou ce qui est de l'ordre du fantasme, à ce qui est de l'ordre du modèle.

André Lichnerowicz : Non, je veux savoir... Si...

Jacques Nimier : Si c'est l'un ou l'autre.

André Lichnerowicz : Ce qui est. Nous avons tous besoin pour l'imagination et même pour la création mathématique, de fonctionner en fantasmes, d'utiliser cela, nous en avons tous besoin.

Jacques Nimier : Même en mathématiques.

André Lichnerowicz : Même en mathématiques. L'activité mathématique si je la décrivais, serait très différente, mais je vais peut-être la décrire tout à l'heure, serait différente de celle qui est communément décrite. Nous en avons tous besoin ; mais ne pas confondre modèle et réalité, encore moins fantasme et modèle - et fantasme et réalité. Savoir l'ordre des choses de ce point de vue, cela, c'est fort important... ce n'est pas toujours facile.

Jacques Nimier : Oui, vous disiez...

André Lichnerowicz : Bien souvent ce qu'on nomme les idées reçues sont des idées mythiques.

L'activité mathématique

Jacques Nimier : Oui, vous disiez, l'activité mathématique, pour vous ?

André Lichnerowicz : L'activité mathématique pour moi, enfin, pour n'importe quel chercheur mathématique est d'une espèce assez différente : vous vous posez une question, vous vous préoccupez d'un problème... Vous commencez par travailler un peu de manière apparente à une table avec un bout de papier, pas très longtemps - bon... le but en fait, le plus souvent le problème, est un prétexte - le but est de faire à ce propos une méthode ou de créer des êtres mathématiques... qui, dans le réseau de la connaissance mathématique, irradient. Pendant très longtemps ensuite, apparemment vous ne travaillez pas, mais vous travaillez tout le temps. C'est-à-dire, vous finissez laborieusement par arriver à une espèce d'état de transe qui dure trois semaines, un mois, où vous pensez pratiquement tout le temps à la même question et votre manière de penser n'est pas du tout la manière logique... qui ne viendra qu'après.

Vous avez acquis une espèce de domaine, un univers mathématique, une espèce d'appréhension directe et vous jouez avec cela, indéfiniment... en marchant, là, sur la plate-forme d'un autobus, etc. la plate-forme d'autobus est présente chez Poincaré, chez Hadamard, etc. et c'est ça la partie qui dure le plus longtemps. Et puis, à un moment donné quelque chose s'enclenche, vous avez l'impression avant toute démonstration, d'avoir fait un progrès essentiel et à ce moment-là vous retournez à votre table de travail, vous vérifiez et finalement, vous exposez les choses en les soumettant à l'ascèse logique. Mais ce n'est pas du tout l'essentiel du travail - l'essentiel du travail en temps et en qualité s'est passé entre les deux et généralement même sans écrire.

Jacques Nimier : Vous avez comparé ça à un état de transe.

André Lichnerowicz : Oui, vous arrivez à un état d'obsession laborieuse... vous avez le plus grand mal à vous défaire de ce sujet. Vous ne vous en défaites que par la fatigue et au bout d'un mois de travail, quatorze heures par jour... Mais vous voyez que ce genre de travail est assez différent de celui qu'on imagine.

Jacques Nimier : Qu'est-ce qui se passe dans cette période ?

André Lichnerowicz : ... un filtre... un essai d'abord de beaucoup de combinaisons possibles. Très rapidement, grâce à une certaine sensibilité mathématique cultivée, une élimination, quelquefois à tort d'ailleurs, de certaines choses... Mais essentiellement, c'est étudier très rapidement, apparemment, superficiellement, du point de vue mathématique, mais en fait assez profondément, une multitude de combinaisons d'idées aux êtres...

L'aspect fantasmatique dans les mathématiques

Jacques Nimier : Vous disiez tout à l'heure, qu'à cette période-là il peut y avoir un aspect fantasmatique...

André Lichnerowicz : Il y a toujours un aspect fantasmatique.

Jacques Nimier : Comment voyez-vous cela ? Vous avez des choses qui permettent de le dire...

André Lichnerowicz : Bon. Tout dépend de ce qu'on appelle fantasme. Le fantasme du mathématicien n'est pas forcément un fantasme extrêmement charnel. II peut se présenter à différents niveaux. Mais c'est un aspect franchement fantasmatique, en ce sens que vous n'êtes assuré de rien, vous ne vérifiez rien... A cette époque, vous ne vous cognez pas vraiment. Vous avez localisé, au point de départ, un certain nombre de difficultés fondamentales et puis c'est tout. Et après, vous essayez, au contraire, d'enlever le plus possible de censures.

Jacques Nimier : Vous reliez l'absence de censures, le fait qu'on n'est sûr de rien.

André Lichnerowicz : Ou d'essayer de rêver de mathématiques.

Jacques Nimier : De rêver de mathématiques...

André Lichnerowicz : De rêver de mathématiques, mais ce sont des mathématiques rêvées, c'est-à-dire, ce ne sont pas des mathématiques.

Jacques Nimier : Oui.

André Lichnerowicz : C'est une activité fondamentale dans l'activité mathématique elle-même.

Jacques Nimier : Et peut-être dans l'activité de découverte ?

André Lichnerowicz : Dans toute activité de découverte.

Jacques Nimier : Vous avez des souvenirs de ces périodes-là ?

André Lichnerowicz : Oui... si... on en a... quand on travaille, on en a une ou deux chaque année, au moins.

Jacques Nimier : Vous pouvez en raconter une ?

André Lichnerowicz : Ce ne sera pas très concret... (*silence*)... Non, je crois que c'est difficile à raconter autrement qu'extérieurement... Si vous voulez l'expérience, qui consiste à faire des poèmes est probablement du même type ; il est difficile de la raconter autrement qu'en la pratiquant, ce n'est pas du domaine du réussi.

Jacques Nimier : Vous dites que tout part d'une question qu'on se pose.

André Lichnerowicz : Oui. Souvent, je fais la liste, à un moment donné, des trois ou quatre questions... (pour ne pas oublier les questions importantes... on peut oublier les questions importantes parce que comme on est parti dans une toute autre voie... je retrouve des listes, un an ou deux ans après, des listes courtes de quatre ou cinq questions)... qui vous ont semblé importantes dans un certain contexte intellectuel et le mouvement même, en travaillant une autre question, vous entraîne loin de là. Je ne sais pas si c'est très clair ce que je vous raconte ?

La création mathématique

Jacques Nimier : Ces questions que l'on se pose, comment est-ce qu'elles viennent ; pourquoi est-ce qu'elles viennent à vous plutôt qu'à quelqu'un d'autre ?

André Lichnerowicz : Bon. Il y a des questions qui viennent simultanément à un certain nombre de membres de la communauté mathématique, qui sont des questions naturelles et importantes ; d'autre part, vous avez des questions qui vous viennent, parce que, justement, vous avez créé récemment, des choses qui marchent bien, mais qui vous laissent insatisfait sur un point.

Et c'est cette insatisfaction même, dûe à votre travail, qui vous entraîne plus loin. En ce moment, je travaille particulièrement à des processus de déformation de lois algébriques qui sont liées à la géométrie, mais qui donnent un nouveau mode d'interprétation, d'approche, disons, de la mécanique quantique.

Il y a à peu près cinq ans que, seul, ou avec des collègues nous travaillons sur ce problème ; il y a des choses... nous avons fait de gros progrès ces dernières années... C'est un petit groupe de dix personnes dans lequel nous avons un ami belge, deux amis russes, trois amis américains et quatre amis français qui se posent des questions. Il y a des constantes de temps et ça intéresse un certain nombre de gens. Mais dans une communauté plus large, ces mêmes questions les gens se les poseraient avec un certain décalage de temps.

JACQUES NIMIER : Est-ce que vous avez un souvenir qui vous a marqué en mathématiques, un bon souvenir...

ANDRÉ LICHNEROWICZ : Comme vous savez, les meilleurs souvenirs...

JACQUES NIMIER : Oui, les meilleurs...

ANDRÉ LICHNEROWICZ : Les meilleurs souvenirs que j'ai, il y en trois ou quatre...

JACQUES NIMIER : En mathématiques.

ANDRÉ LICHNEROWICZ : En mathématiques. Ce sont des choses qu'on a cherchées très longtemps, pour lesquelles on s'est découragé et qui brusquement, viennent mais viennent quelquefois cinq ou six ans après - quand vous avez eu à l'arrière plan de votre cerveau des questions pendant six ans, sept ans et que finalement, vous avez une réponse totalement satisfaisante souvent instantanément...

JACQUES NIMIER : Souvent instantanément...

ANDRÉ LICHNEROWICZ : Oui, il faut la vérifier ; mais enfin vous vous dites, brusquement, c'est comme cela que ça va marcher, pour deux ou trois des choses auxquelles je pense, c'est probablement les meilleurs souvenirs.

Un souvenir de création

ANDRÉ LICHNEROWICZ : L'une d'entre elles était une question sur laquelle j'ai commencé à réfléchir très jeune, c'était en 39... avec l'occupation allemande, on a eu peu de communications scientifiques ; je me suis aperçu que si l'on voulait que la relativité fonctionne bien, il y avait une question fondamentale qui se posait ; or en 44, pendant l'occupation, Einstein qui était à Princeton et Pauli qui était auprès de lui, avaient publié un papier sur la même question... donnant des résultats - différents du mien - ce n'était même pas comparable - c'était sous deux hypothèses différentes, la même conclusion et ça ne nous satisfaisait pas... J'ai correspondu avec Pauli et Einstein à ce moment-là. Ni ce que j'avais fait avant, ni ce qu'ils avaient fait ne nous satisfaisaient tous les trois.

Et, en 45, par un hiver assez froid, avec peu de moyens de chauffage (j'étais professeur à Strasbourg à ce moment-là) brusquement, un dimanche, je me suis dit : "Bien, cela va marcher comme cela". Et j'ai vérifié. Et en deux heures, un problème qui m'avait préoccupé et qui avait préoccupé de beaucoup plus grands esprits que moi depuis 39 a été résolu, et ça c'était une complète satisfaction...

Voilà, si vous voulez, mon premier-bon-grand souvenir.

La "joie en mathématique"

Jacques Nimier : Qu'est-ce qu'on ressent à ce moment-là ?

André Lichnerowicz : Ah bien... Un sentiment... Nous sommes des gens un peu masochistes, un sentiment de grande joie et de grande exaltation pendant 48 heures, alors qu'on a travaillé sept ans pour cela. Au bout de quarante-huit heures, on se dit : je ne suis pas là pour cultiver des trucs - bon - ça c'est réglé ; faisons autre chose.

Jacques Nimier : La joie est courte alors.

André Lichnerowicz : Très courte - intense et courte - car le mathématicien que je suis n'est pas là pour la contemplation de bonnes vérités acquises, mais pour essayer d'obtenir... C'est ça la joie des choses nouvelles. Je pense qu'il doit en être de même pour un joueur d'échecs, car une fois conçue, une combinaison est une chose extraordinaire... eh bien, il aura une joie courte et intense.

Jacques Nimier : II faut toujours chercher autre chose... (*silence*) .

Découverte ou création en mathématique

Jacques Nimier : Et vous pensez que le plaisir mathématique c'est le même plaisir que partout ailleurs ; ou est-ce qu'il a quelque chose qui lui est propre ?

André Lichnerowicz : Oui, non, il n'est pas du tout identique, mais ce plaisir tient à ce que, en apparence, tout au moins, toute création mathématique semble être une découverte ; tout mathématicien se défend, mais a tendance à être platonicien, en ce sens qu'il a tendance à croire qu'il a découvert quelque chose de préexistant à lui ; or, je ne veux pas rentrer dans cette discussion philosophique, mais c'est une découverte, alors que bien souvent c'est une création, mais il a le sentiment d'une découverte.

Jacques Nimier : Il y a plus de plaisir à une découverte qu'à une création ?

André Lichnerowicz : Oui, de nouveau, on a l'impression qu'on a exploré quelque chose de plus objectif, de plus extérieur à soi. Si vous voulez, quand on fait du travail mathématique, on a quelquefois les deux impressions ; mais quelquefois on a l'impression - bon - d'avoir créé de bons instruments et que c'est bien comme cela ; d'autres fois, au contraire, lorsque relativement, apparemment, miraculeusement on a des hypothèses simples, on a des conclusions simples et souvent une démonstration horriblement difficile, on se dit qu'on a vraiment découvert quelque chose. Nous utilisons quelquefois cette expression : “Dieu est dans son ciel”. Ca, c'est une forme imagée pour traduire un platonisme expérimental.

Jacques Nimier : Et ce n'est pas satisfaisant entièrement à ce moment-là ?

André Lichnerowicz : Si, c'est une autre forme de satisfaction.

Jacques Nimier : Une autre forme de satisfaction ?

André Lichnerowicz : C'est pas la même... Personnellement, je la préfère, moi.

Jacques Nimier : Vous la préférez ?

ANDRÉ LICHNEROWICZ : Je préfère avoir l'impression d'avoir trouvé quelque chose qui était préexistant et extérieur, que d'avoir bien joué un jeu absurde.

Ne pas être dans "l'illusion" mais en contact avec "l'extérieur"

JACQUES NIMIER : Oui, on a l'impression que c'est important pour vous, ce fait d'objectivité, comme vous avez dit. De vous cogner, de... que ça compte beaucoup pour vous.

ANDRÉ LICHNEROWICZ : Oui, parce que vous ne pouvez vous faire aucune illusion sur vous-même ; quand vous vous cognez, vous vous cognez durement, y a pas de moyen rhétorique de s'en sortir. Je trouve que c'est beaucoup plus sain, je m'intéresse beaucoup à la philosophie, mais j'aurais été très malheureux d'être philosophe.

JACQUES NIMIER : Pourquoi ?

ANDRÉ LICHNEROWICZ : Parce que justement... on ne se cogne pas, ou la manière dont on se cogne est beaucoup plus douce...

JACQUES NIMIER : Vous préférez vous cogner durement ?

ANDRÉ LICHNEROWICZ : Bien sûr... (*silence*)...

JACQUES NIMIER : Ca rejoint le masochisme dont vous parliez tout à l'heure ?

ANDRÉ LICHNEROWICZ : Oui,... je préfère me cogner durement ; le philosophe se cogne, c'est comme une société... simplement son auto-évaluation est beaucoup plus difficile...

JACQUES NIMIER : Ce qui est important...

ANDRÉ LICHNEROWICZ : C'est de ne pas vous faire illusion sur vous-même et sur les autres. Il est difficile... il est difficile d'être un très bon mathématicien et d'être paranoïaque en même temps... (*long silence*)...
Je pense à quelque chose qui vous amusera peut-être : je n'ai jamais rencon-

tré que deux catégories de personnes qui, pour des textes administratifs ou autres essaient de les lire et de les comprendre... et de voir en profondeur ce qu'ils veulent dire, c'est des juristes et des mathématiciens. Le mathématicien est, finalement, un homme habitué à déchiffrer un texte... de par sa formation... (*silence*)...

Jacques Nimier : Ne pas se laisser abuser par les mots.

André Lichnerowicz : Oui...... (*long silence*)... mais si j'avais... si j'avais dix autres vies, j'en reprendrais trois ou quatre pour être mathématicien... car c'est vraiment... une vie, au total, très riche... le musicien compositeur, l'écrivain, etc. ne se rendent pas compte qu'un certain nombre d'expériences sont très proches des leurs... peut-être une de nos joies est de nous rendre mieux compte de certaines formes de l'unité de l'activité intellectuelle.

Jacques Nimier : Est-ce que vous rapprochez ça de l'idée de cohérence dont vous parliez tout à l'heure ?

André Lichnerowicz : Oui... certainement cohérence de la pensée dans ses fonctionnements.

Jacques Nimier : Et ça, ça vous paraît fondamental.

L'impérialisme des disciplines

André Lichnerowicz : Oui... si vous voulez, à un moment donné, toutes les disciplines se font un peu impérialistes...

C'est pas malsain pour les autres disciplines, c'est généralement malsain pour la discipline elle-même qui se fait impérialiste ; nous avons vu la physique, nous avons vu la sociologie (nous voyons la biologie en ce moment) se faire totalement impérialistes. Les mathématiques l'ont été... le sont toujours un peu, de manière peut-être plus subtile... Il n'est pas du tout absurde de dire qu'au début est l'activité de l'esprit, ou qu'au début est la société ou qu'au début est la vie, etc. ce n'est pas du tout absurde... mais c'est une manière intéressante de voir que chaque champ de phénomènes donne un coup de phare sur les autres, mais... tout ça, ce sont des jeux assez vagues vis-à-vis de l'unité de la Science... Imaginons le dialogue symbolique entre un mathématicien et un biologiste : le biologiste dirait : "vous êtes d'abord un être vivant" et le mathématicien répondrait à peu près automatiquement "qu'entendez-vous au juste par un être vivant" ? Et à ce moment-là, il essaiera de le faire rentrer dans son discours contraignant etc.

Et c'est vrai que ce n'est pas évident ; à la limite, nous sommes actuellement incapables de définir la limite de ce qu'on appellera un être vivant et un être non vivant, ce qui est très grave pour un mathématicien...

Bon, d'autre part, certains types de discours de la psychologie et de la sociologie, nous savons qu'ils ne peuvent pas, par leur forme, être cohérents et contraignants pour l'autre... (*silence*)...

Les mathématiques sont, à travers la Science, une espèce de... grille horizontale, indépendante des champs de phénomènes et qui prêtent leur mode d'interprétation théorique à tous les champs de phénomènes... très souvent, les mêmes mathématiques jouent dans des champs de phénomènes profondément différents : c'est pour ça que je dis quelquefois que c'est une science hors la Science.

Jacques Nimier : Par sa cohérence et sa contrainte ? Les deux choses vont ensemble ?

André Lichnerowicz : Les deux choses vont ensemble. L'auto-contrainte, c'est une espèce d'ascèse, l'esprit apprend à prendre une certaine forme ascétique, au moins à certains moments, pour acquérir un certain niveau.

Jacques Nimier : Et vous rapprochez ça de l'ascèse ?

André Lichnerowicz : Oui, je rapproche ça de l'ascèse... une forme d'ascèse intellectuelle... c'est à ça qu'on joue... (*silence*)...

Entretien avec le Professeur Bernard MALGRANGE, Membre de l'Académie des Sciences

Bernard Malgrange a été professeur aux universités de Strasbourg, Orsay et Grenoble.
Son théorème de préparation, démontré à la demande de René Thom, est un résultat essentiel pour le théorème classifiant les catastrophes élémentaires de Thom.

Jacques Nimier (1929-2014) était un psychologue et professeur des universités français.

Le départ

Jacques Nimier : Pouvez-vous me dire comment vous êtes devenu professeur de mathématiques ?

Bernard Malgrange : Quand j'étais au lycée, j'étais ce qu'on appelle un bon élève et en particulier en mathématiques.

Jacques Nimier : Dès le plus jeune âge ?

Bernard Malgrange : Non, non,..., non,... durant l'école primaire j'étais bon en calcul, ça m'amusait, puis j'ai eu un trou vers la sixième, cinquième, et c'est reparti à partir du moment où on a commencé vraiment à faire des mathématiques, des démonstrations, etc. c'est-à-dire à partir du moment où il y a eu une règle du jeu.

Jacques Nimier : En quatrième ?

Bernard Malgrange : C'est ça, en quatrième, c'est ça, à partir du moment où...

Jacques Nimier : ... il y a une règle du jeu...

Bernard Malgrange : ... où il y a eu un peu cette règle du jeu, déjà à la fin de la cinquième, parce que c'était une époque où on commençait déjà un petit peu, si, je me rappelle bien, oui, c'est essentiellement en quatrième..., je sais pas très bien pourquoi... A ce moment-là, c'était pendant la guerre, dans un petit collège de province et on était très peu d'élèves. Par rapport à la classe, j'étais pas terriblement brillant et il y avait une fille dans ma classe qui était très forte en compétition.

Le choix entre les mathématiques et la physique

Bernard Malgrange : Puis, mon père a été prisonnier ; on est revenu, on est rentré à Paris et, en arrivant dans un grand lycée parisien, avec stupéfaction, je me suis trouvé de loin premier de la classe,... (*rires*) ; puis, bon, j'ai trouvé que j'étais l'élève qui marchait bien et qui était très... très brillant en maths : nettement, sans aucun problème, au dessus du reste de la classe.

Bon, alors je ne savais pas trop quoi faire, après la math élem, j'ai fait une math sup, oh ! comme ça parce que ça marchait bien, en me disant que je ne savais pas trop ce que je voulais faire. Mon père m'a dit : "bon, fais donc l'X, tu verras bien si ça marche". Puis mon professeur d'hypotaupe m'a dit : "vous, vous devriez faire Normale" ; parce que j'ai constaté à ce moment-là que mon avance par rapport à mes camarades s'était encore accentuée, et cela, au fur et à mesure où ce n'était plus vraiment des mathématiques, ça marchait de mieux en mieux, si vous voulez.

Bon, j'ai eu de la chance de ce point de vue-là, et ça s'est fait comme ça, par rétrécissement successif du choix, sans que j'ai fait vraiment de... choix.

Puis, une fois à Normale, j'ai hésité toute la première année entre les maths et la physique ; a priori, j'avais plutôt envie de faire de la physique parce que c'est plus concret. Toujours la même chose, c'est ce qu'on m'a dit et il y a quand même une part de vrai. J'ai été très, très maladroit, je m'en souviens, je cassais le matériel en manip. Alors, j'aurais pu faire de la physique théorique, mais, à l'époque, il faut dire que les professeurs de maths étaient très supérieurs à ceux qu'on avait en physique et qu'il n'y avait pratiquement pas de physique théorique à l'époque, et on était dans une très grande époque des mathématiques en France. C'était vraiment la période où la France dominait complètement les mathématiques, c'était vers le... début des années 50.

Alors, inutile de vous dire que naturellement une fois entré à l'École Normale, les choses se sont passées autrement, je me suis trouvé avec des gens qui étaient à mon niveau et même certains nettement meilleurs, ce n'était plus la situation du lycée... Bon, ça s'est trouvé comme ça. Ensuite j'ai été au C.N.R.S., j'ai fait ma thèse et puis j'ai eu un poste de maître de conférences. Donc, ce n'était pas une vocation au départ.

Les cas d'égalité des triangles

JACQUES NIMIER : Vous m'avez dit tout à l'heure que, votre réussite, vous la datiez du moment où il y a une règle du jeu.

BERNARD MALGRANGE : D'une certaine manière oui. Je me rappelle très bien ; vous vous rappelez ce vieil enseignement de la géométrie où on commençait par faire les cas d'égalité des triangles avec des calques, et puis ensuite on s'en servait comme axiomes... J'ai un souvenir très précis. Je n'ai pas toujours des souvenirs très précis mais, là, j'ai un souvenir très précis : c'était la fin de la cinquième. A l'époque, on commençait assez tôt, enfin c'était juste un petit débrouillage ; et alors on nous avait donc fait ça avec les vieux bouquins que vous trouverez de cette époque-là, les cas d'égalité des triangles avec calque, etc. Et puis on nous avait donné après un problème, alors moi j'ai fait le problème par la même méthode, c'est-à-dire : je prends un calque, je fais ci, je fais ça, je vois bien ce qu'exactement j'ai fait, j'ai répété le discours qu'on avait fait pour les cas d'égalité des triangles et mon prof m'a expliqué que c'est pas du tout ça qu'il fallait faire, que maintenant on avait les cas d'égalité des triangles et il fallait les appliquer et... démontrer..., bon, je ne sais pas pourquoi.

Cette règle du jeu était absurde en réalité, mais je l'ai acceptée, ça m'a amusé ; comme pour n'importe quel jeu, comme j'aurais joué aux échecs, n'est-ce pas, et puis, bon, ça marchait bien. Je comprends d'ailleurs que pour la plupart des élèves c'était complètement absurde, mais moi je ne sais pas pourquoi ça m'avait amusé et alors cette faute au premier problème ça m'avait suffisamment frappé pour que la règle soit tout de suite acquise.

Jacques Nimier : C'était la faute qui vous avait permis d'acquérir la règle.

Bernard Malgrange : Ah oui ! absolument... absolument... ça il n'y a pas de doute, enfin j'en suis absolument convaincu. C'est une faute excusable, n'est-ce pas, je n'avais fait que répéter le discours qu'on m'avait fait avant, je n'avais pas compris qu'il fallait passer à autre chos

Les mathématiques, un refuge, une distraction ou un travail sérieux ?

Jacques Nimier : Qu'est-ce que les mathématiques pour vous ?

Bernard Malgrange : Ah ! qu'est-ce que c'est ? Ah ! alors... c'est assez difficile de demander à un chercheur qui passe toute sa journée à en faire, si c'est une petite activité au milieu d'autres. C'est facile de vous dire c'est une distraction, c'est un refuge, c'est ceci, c'est cela ; mais quand finalement c'est l'activité principale, alors c'est beaucoup de choses très contradictoires forcément, il y a des moments où c'est une distraction, par rapport à d'autres travaux. Dans l'Université, il y a souvent beaucoup de tâches administratives un peu embêtantes, etc. , alors, à ce moment-là, les mathématiques cela apparaît comme une récréation, cela apparaît comme une mise en vacances et, c'est assez étrange, j'ai toujours trouvé étrange que j'ai le sentiment de me mettre en vacances à partir du moment où je faisais le travail, qui était mon travail essentiel, et une chose qui me frappe aussi chez certains collègues, des collègues qui n'hésitent jamais à venir me déranger pour un petit travail administratif, ils n'osent pas venir poser une question de mathématiques alors que moi je leur dis toujours qu'ils me dérangent s'ils viennent me parler d'administration et qu'ils ne me dérangent pas quand ils viennent me parler de maths ; mais c'est vrai qu'il y a quelque chose d'un peu bizarre quelquefois comme ça.

Alors, de ce point de vue-là, cela apparaît comme un refuge, quand on ne se sent pas très bien dans sa peau, quand on a des problèmes difficiles, cela a un aspect de jeu évidemment aussi, mais j'ai aussi la conviction que c'est un travail, que c'est une activité scientifique sérieuse, ce qui n'est pas la conviction de tout le monde, mais, moi, j'ai parfaitement cette conviction que, même si ça ne fonctionne pas directement comme les sciences expérimentales sur un terrain concret, ça le fait quand même de façon indirecte par l'intermédiaire d'un certain nombre d'autres sciences physiques ou bien d'autres, et que par conséquent c'est une activité parfaitement sérieuse, alors c'est peut-être simplement une manière de se donner bonne conscience, mais je ne le crois pas, je crois que cela l'est effectivement. Alors bon, c'est peut-être un peu tout cela à la fois.

Jacques Nimier : Et l'enseignement ?

Bernard Malgrange : L'enseignement j'aime bien... j'aime bien faire des cours,... encore que, les cours,... le contact... ? Il faut dire que dans l'enseignement supérieur, un professeur n'a pas beaucoup de contacts avec les élèves, donc c'est un petit peu un jeu d'expression, un jeu d'activité d'acteur, je dois faire un numéro devant un amphi de deux cents, trois cents, quatre cents et voir jusqu'à combien on élimine le bruit de fond.

Avant 68, moi, j'éliminais jusqu'à trois cents, mais pas quatre cents (*rires*). Il y a peu de contacts personnels... c'est une chose qui est un peu désagréable ; on n'en a que dans les cours supérieurs et puis un autre aspect qui est un peu désagréable, c'est que c'est quand même des choses très élémentaires que l'on fait dans ces cours, donc c'est un amusement un peu intéressant par moments, mais il y a des moments où on a envie de s'accrocher à des choses plus difficiles. Et, si vous voulez, je ne parle pas de l'enseignement, mais je parle de tous les à côtés, bon, les corrections d'examens, les réunions, les commissions,... les discussions,... pour choisir un nouveau collègue, pour organiser des nouveaux enseignements, tout ça, toute cette machine qui est un peu pesante et qu'il faut faire, qui prend au fond l'allure de l'aspect sérieux du travail et, alors quand on peut s'en débarrasser, on se sent un petit peu coupable et on se sent en même temps en récréation de faire des mathématiques.

Jacques Nimier : Vous avez dit tout à l'heure aussi que les mathématiques peuvent être un refuge, dans quel sens ?

Bernard Malgrange : Oh ! bien, comme n'importe quelle activité, quand on a des problèmes par ailleurs, pour éviter d'y penser, pour se donner une activité, ça je pense que c'est le cas pour toutes sortes d'activités.

Jacques Nimier : Une occupation d'esprit, quoi ?

Bernard Malgrange : Une occupation d'esprit, c'est d'autant meilleur de ce point de vue, je pense, qu'elle demande une très, très forte concentration, donc, quand on est accroché à une recherche, si elle avance un petit peu, il est évident qu'on arrive à effacer complètement ;... enfin, je ne sais pas si tout le monde est comme ça, moi, je ne peux pas travailler très longtemps, ni beaucoup, mais j'ai besoin d'une très, très forte concentration, mais quand j'y arrive, je fonctionne très vite et alors en effaçant complètement le reste, ce qui fait que c'est un très bon refuge de ce point de vue.

Jacques Nimier : Effacer le reste, vous voulez dire ?

Bernard Malgrange : Ben, être complètement pris par cette activité, ne pas lever la tête toutes les cinq minutes en repensant à autre chose.

Jacques Nimier : Vous dites que vous fonctionnez très rapidement.

Bernard Malgrange : J'ai beaucoup de mal à me concentrer, il me faut très longtemps, mais quand je suis concentré, ça va très vite, je vais très très vite, mais j'ai besoin d'une très très forte concentration pour une activité de recherche, et en même temps c'est très fatigant, par exemple je constate que j'ai beaucoup plus de mal qu'à trente ans, à avoir cette concentration.

Jacques Nimier : Qu'est-ce que vous appelez cette concentration ?

Bernard Malgrange : Je ne sais pas, je suis capable de rester sur le problème qu'on recherche sans être absolument distrait par quelque autre préoccupation extérieure, par les bruits extérieurs, par d'autres préoccupations qu'on peut avoir, etc.

Comparaison des mathématique et de la physique

Jacques Nimier : Et, quand vous avez commencé vos recherches, vous avez choisi un sujet ? Comment s'est fait le choix de ce sujet ?

Bernard Malgrange : J'avais commencé par faire de la théorie des nombres, de l'algèbre,...

Jacques Nimier : Historiquement ?

Bernard Malgrange : Oui, en deuxième année à l'Ecole Normale, j'avais commencé par faire de la théorie des nombres, de l'algèbre, il se trouve que j'avais eu des cours très très intéressants sur ce sujet, très attractifs. Alors, du coup, j'avais continué à apprendre ces choses-là et l'année suivante j'ai passé l'agrégation et cette année-là, j'ai préparé l'agrégation, j'ai un petit peu diminué mes activités de recherche, je me suis beaucoup lancé dans des activités politiques à ce moment-là ; et l'année suivante, j'ai commencé au contraire à suivre, à commencer à travailler, à faire ma thèse, et puis j'ai eu envie de changer ; il y avait les travaux de Schwartz sur la distribution qui venaient de sortir, c'était très à la mode, et puis je me suis dit : l'analyse c'est plus proche de la physique, ça sert plus, c'est plus utile, c'est plus intéressant de ce point de vue, il vaut mieux se lancer là-dedans ; alors, il y avait donc des motivations assez extérieures qui m'ont fait changer d'orientation...

Jacques Nimier : Vous avez une sorte de regret de la physique ?

Bernard Malgrange : Ah oui ! oui, constamment. J'ai toujours continué à avoir beaucoup de contacts avec les physiciens, théoriciens, à leur expliquer un certain nombre de choses en mathématiques, j'en connais beaucoup ; regret ? regret ou non, je ne sais pas...

Jacques Nimier : Nostalgie ?

Bernard Malgrange : ... parce que finalement c'est très très proche...

Jacques Nimier : Que représente pour vous la physique ?

Bernard Malgrange : Quelque chose qui est beaucoup plus directement concret, qui est beaucoup plus en prise directement sur le... Je ne sais pas quoi dire, la réalité cela n'a pas beaucoup de sens de dire ça, comme ça, mais disons en gros : concret... et puis alors quelque chose qui demande beaucoup plus d'imagination que les mathématiques, quelque chose qui demande de laisser aller son imagination beaucoup plus, quelque chose qui est plus difficile que les mathématiques.

Jacques Nimier : Ah bon ?

Bernard Malgrange : Ah oui ! à mon avis.

Jacques Nimier : En mathématiques, on est brimé ?

Bernard Malgrange : Pas brimé..., le physicien, il se permet de sauter sur la rigueur entre guillemets, de deviner. Le mathématicien ne se le permet que d'une manière beaucoup plus partielle, si vous voulez, et c'est assez impressionnant ; quelquefois cela tombe tout à fait à côté et puis quelquefois ils devancent les mathématiciens d'une façon extraordinaire ; alors il y a probablement aussi l'aspect opposé ; bien des choses ne sont qu'ébauchées par les physiciens, les mathématiciens les reprennent bien, mais il y a cet aspect que quand même on laisse courir son imagination beaucoup plus qu'en mathématiques, mais, malheureusement, il faut dire que l'enseignement, l'enseignement élémentaire de la physique ne fait pas du tout apparaître cet aspect des choses...

Jacques Nimier : Je ne sais pas, je rapprocherais cela de ce que vous disiez au début sur la règle du jeu dont vous parliez et qui à la fois vous a attiré et qui maintenant a l'air d'avoir un autre aspect aussi, celui de contrainte.

Bernard Malgrange : Oui, certainement... certainement.

Jacques Nimier : Qui a été à l'origine...

Bernard Malgrange : La nature, elle, impose d'autres règles du jeu, mais qui sont aussi des contraintes. Mais elles sont quand même de nature très différente, et, la physique théorique, elle est entre les deux, elle navigue entre les deux. En quelque sorte, elle s'appuie sur les deux ; enfin, je ne veux pas l'idéaliser non plus, ce serait faux, les gens que je connais, par rapport aux mathématiciens, les bons physiciens sont des gens à peu près de même qualité, mais qui, d'une certaine manière, laissent plus facilement courir leur imagination.

Jacques Nimier : Cela permet plus de liberté ?

Bernard Malgrange : Oui, quitte, d'ailleurs, quelquefois, à ce qu'elle déraille...

Jacques Nimier : Ah oui.

Bernard Malgrange : Alors, pour ce qui est des autres sciences, d'autres activités scientifiques, je ne les connais pas suffisamment pour en parler, des activités vraiment expérimentales.

Jacques Nimier : Mais, à propos de cette nostalgie de la physique, qu'est-ce qui à votre avis vous a empêché d'en faire ?

Bernard Malgrange : Mais, il n'y avait personne qui soit capable de nous faire des cours intéressants à l'époque, il aurait fallu que je parte en Angleterre ou aux Etats-Unis, vous comprenez...

Jacques Nimier : Il n'y a pas eu...

Bernard Malgrange : Même en France... même en France, il y avait très peu de chose à l'époque, très très peu.

Jacques Nimier : II n'y a pas eu quelqu'un qui vous a ouvert la voie ?

Bernard Malgrange : Et puis, il faut dire qu'à l'époque, j'ai essayé aussi de suivre des cours mais il y avait un aspect extrêmement confus, une distance avec les mathématiques et les mathématiciens, ce que je voudrais appeler, avec beaucoup de guillemets, la règle du jeu des mathématiciens. Cette distance était quand même beaucoup trop grande, c'était une confusion extraordinaire dans les cours que j'ai eus.

Après ma thèse encore, j'ai essayé de suivre des cours pour me cultiver. J'ai été à l'école d'été, aux Houches, de physique théorique, où j'ai eu des cours de grands physiciens de l'époque. Mais c'était une confusion totale à mon avis. Pas tous, il y en avait un qui était un cours remarquable, mais qui posait des problèmes d'une difficulté incroyable... c'était très remarquable, c'étaient des problèmes qui étaient ignorés des mathématiciens à l'époque et qui, maintenant, commencent à être des problèmes classiques ; mais c'était il y a vingt ans, et c'était trop difficile. Et les autres c'était une confusion totale.

Je me suis aperçu longtemps après que les autres élèves ne comprenaient pas plus que moi, mais, ils étaient physiciens, donc ils faisaient semblant de comprendre (*rires*) et, moi, je me suis laissé bluffer (*rires*). Alors, si vous voulez faire de la physique dans ces conditions, cela ne m'aurait peut-être pas convenu non plus, mais depuis, c'est devenu plus proche, plus accessible.

Jacques Nimier : Un problème de distance aussi alors ?

Bernard Malgrange : Il y avait une grande distance, oui. L'imagination courait, mais elle courait tellement qu'on ne savait plus du tout où elle allait. Je me rappelle que les cours de X par exemple, c'était un grand physicien mais c'était incompréhensible, de la plus haute fantaisie, il avait certainement des idées profondes, mais pour rétablir ce qu'il pouvait y avoir dedans, c'était tout à fait impossible pour quelqu'un qui avait une formation de mathématicien un peu stricte... la distance entre les deux discours était... était presque... pas complètement, mais presque infranchissable.

Jacques Nimier : Vous avez employé tout à l'heure le mot dérailler, comme si c'était un discours qui risquait de dérailler dans tous les sens...

Bernard Malgrange : Dérailler, j'ai dit dérailler ?... Quand on essaie de deviner, on devine juste ou on devine faux, ou bien ça peut être complètement faux, ou ça peut être très proche de la vérité : il peut y avoir tous les intermédiaires. L'inconvénient et l'un des avantages de la physique il me semble, c'est que l'on a le contrôle expérimental, mais on n'a pas le contrôle du mathématicien sur la cohérence logique qui donne, d'une certaine manière, plus de sécurité.

Jacques Nimier : C'est une condition importante pour vous, cette cohérence ?

Bernard Malgrange : Cela fait partie du sujet, on n'y peut rien... cela fait partie du sujet, les objets mathématiques on peut difficilement les... on risque... oui... oui, je ne sais pas, je ne sais pas quoi dire là... il y a l'aspect de contrainte surtout. On est bien obligé de regarder les choses à fond, dans tous les détails, pour être sûr que c'est vrai ; c'est pas... pour moi, si vous voulez, c'est pas une règle en soi, c'est pas une chose en soi à la rigueur, c'est simplement la manière dont les mathématiques fonctionnent, on n'affirme une chose que quand on en est complètement sûr (*rires*)... la rigueur au fond pour moi c'est presque avoir éliminé toutes les objections... possibles.

Jacques Nimier : Ah oui

Bernard Malgrange : Mais il peut se passer ceci quand on cherche : on se dit, cela va se passer comme ça, on a son plan de démonstration, mais attention ! il peut se passer ça, ou il peut se passer ça et il peut se passer ça encore, et ça comment est-ce que je vais en être sûr ? Et, alors on arrive à faire son discours.

Jacques Nimier : Ah oui ! c'est éliminer tous les cas possibles ?

Bernard Malgrange : Pas toujours, mais d'une certaine manière... d'une certaine manière ; je crois d'ailleurs que, pour ne pas parler d'une façon subjective, même dans l'histoire c'est un peu comme ça que les choses sont arrivées, on a vu que des raisonnements incomplets suffisaient jusqu'à un certain moment, puis ont amené des échecs à un autre et on est obligé de reprendre les choses pour les éliminer, donc d'une certaine manière, ce n'est pas seulement une réaction subjective, mais cela se présente quelquefois comme ça : je fais un plan de démonstration mais, là, il y a un trou parce qu'il pourrait se passer ça, donc il y a ce point qu'il faut que je vérifie.

La notoriété

Jacques Nimier : II y a quand même bien eu, à un moment, un sujet qui vous a intéressé, plus que le reste ?

Bernard Malgrange : Oui, ça c'est difficile à dire, il faudrait rentrer dans les détails techniques. J'ai commencé ma thèse avec Laurent Schwartz. J'avais un camarade qui a commencé en même temps que moi, je ne sais plus, je crois que c'est Y qui est maintenant au Collège de France. On avait commencé sur des sujets assez proches, alors il y avait un gros problème qui était posé dans le livre de Schwartz et il m'a dit : "tiens, tu devrais regarder ce problème", et alors je suis allé voir Schwartz et Schwartz m'a dit : "Ah oui, c'est une très bonne idée, regarde donc ça". Et puis, bon, en cherchant je n'ai pas trouvé, mais j'ai trouvé autre chose à côté, Schwartz posait le problème, trouver une solution élémentaire d'une équation aux dérivées partielles par un autre problème, division des distributions. Alors, j'avais commencé à regarder division des distributions, je me suis aperçu que je pouvais trouver la solution en le court-circuitant. Alors, vous savez comment on démarre, c'est difficile, on cherche une chose, on vous dit ou bien on se dit soi-même tu devrais regarder ça, et puis on regarde et puis on trouve quelque chose, ça ou autre chose ; et puis alors à ce moment-là j'ai continué... j'ai continué à travailler là-dessus ; je ne connaissais rien au sujet des équations aux dérivés partielles et puis après, en ayant fait ma thèse, je me suis aperçu que j'étais un spécialiste connu du sujet, alors je me suis mis à l'apprendre (*rires*).

Jacques Nimier : Je me suis aperçu ? (*rires*)

Bernard Malgrange : (*rires*) mais je ne plaisante pas, c'est vraiment comme ça que cela s'est passé. Je me suis même dit : ah !... quand j'ai vu dans des conférences internationales un tas de spécialistes, qui parlaient avec moi, etc., je me suis dit : bon, il faut que j'apprenne maintenant (*rires*)...

Si vous voulez, je n'ai pas le sentiment qu'il y a jamais eu aucun vantardise là-dedans, et quand il y en a eu, cela n'a jamais marché à vrai dire, il y a des sujets sur lesquels je me suis accroché volontairement, mais je me suis aperçu après que ce n'étaient pas des bons sujets, tout ce qui est vraiment venu, c'est venu d'une façon très spontanée... tout ce qui valait quelque chose est venu d'une façon relativement spontanée, je ne dis pas sans effort, ce n'est pas vrai mais comme ça, et la valeur que cela pouvait avoir éventuellement, d'abord ce n'était pas à moi de la juger, et puis je ne m'en suis rendu compte qu'après.

Par contre, là où au départ je me disais : cela il faut que je le fasse, cela c'est important le truc que je voulais construire et cela n'a jamais rien donné...

Jacques Nimier : Comme si, je ne sais pas si c'est exact,...

Bernard Malgrange : Mais, tout le monde n'a pas cette attitude... je pense qu'il y a des gens qui ont une attitude très volontariste... il y a quelque cas où... cela marche bien. Pour moi, pour la plupart des cas... c'étaient des choses qui m'avaient été données de l'extérieur, qui m'avaient été données par des collègues.

Jacques Nimier : Ah bo !

Bernard Malgrange : ... qui m'avaient semblé amusantes, dont je n'avais pas vu a priori tout l'intérêt ou toute l'importance ; il y a des gens qui sont très forts pour poser des problèmes, moi je n'ai jamais su tellement, alors cela s'est trouvé comme ça, un certain nombre de gens m'ont passé des problèmes qui se sont révélés être des bons problèmes, et sur lesquels au début je me suis amusé sans plus, sans y attacher tellement d'importance et puis j'étais un peu étonné même après de l'importance que les gens leur attachaient (*rires*) et, par contre, justement des problèmes, que moi, je me posais profondément, que je voulais arriver à... c'était... c'était pas toujours les bon.

La solitude du mathématicien

Jacques Nimier : Quand vous êtes devant un de ces problèmes-là qui vous intéressent, quels sentiments avez-vous ?

Bernard Malgrange : Oh ! très proches de ce que vous trouveriez en cherchant un problème d'échecs.

Jacques Nimier : Oui, vous faites un rapprochement avec le jeu...

Bernard Malgrange : Le jeu, oui, l'aspect de jeu... avec en même temps la bonne conscience que c'est un jeu sérieux, tandis que quand on est devant un problème d'échecs on sait bien que ce n'est pas un jeu sérieux.

Jacques Nimier : Oui, mais ce mot de jeu, c'est un mot assez socialisé, enfin assez général, pour vous. Comment vous le vivez ce jeu ?

Bernard Malgrange : ... je ne sais pas comment répondre... je ne sais pas quoi vous répondre... je vous dis le même type de jeu que devant un problème d'échecs, pas du tout le même que dans une partie de bridge où on a des rapports avec d'autres personnes.

Jacques Nimier : Ah ! Bon.

Bernard Malgrange : ... et où on a à tenir compte des réactions des... autres, d'un certain nombre d'inconnues, d'un certain nombre... du hasard dans la distribution etc., là c'est quelque chose où on a en fait toutes les données en mains, donc c'est pour ça que je dis : comme un problème d'échecs.

Jacques Nimier : Ah oui ! il n'y a pas d'intervention extérieure, il n'y a pas d'intervention du hasard...

Bernard Malgrange : Il n'y a pas d'intervention du hasard, il n'y a pas d'intervention de personne étrangère, sauf dans les discussions bien entendu, où on avance quelquefois à plusieurs quand on travaille en collaboration, mais cela m'est assez peu arrivé, je dois dire.

Jacques Nimier : C'est le fait d'avoir toutes les données en mains.

Bernard Malgrange : C'est ça, c'est un jeu... c'est un jeu où on a toutes les données en mains, mais... si on le prend uniquement sous l'aspect jeu, bien entendu il y en a d'autres, c'est un jeu où la solution dépend... du temps qu'on y passe, de l'effort qu'on y met, de l'imagination qu'on y met et puis de la chance qu'on a à un moment donné ; alors évidemment, cela limite aussi, de ce point de vue.

D'autres personnes qui reviennent de faire de la montagne vous le compareront peut-être à une escalade ; il faut trouver son chemin, il faut trouver les bonnes prises, etc. , moi je ne sais pas j'en ai jamais fait, mais là aussi c'est un jeu où on est tout seul en face de... en face du jeu.

Jacques Nimier : C'est d'être tout seul en face du jeu ?

Bernard Malgrange : ... oui, si vous voyez des gens qui ont vraiment l'habitude de travailler en collaboration, ils auront probablement une réaction très différente.

Jacques Nimier : Oui, mais enfin c'est...

Bernard Malgrange : Mais moi oui certainement, certainement,...

Jacques Nimier : Quel est ce plaisir d'être tout seul ?

Bernard Malgrange : Il faut bien être tout seul de temps en temps (*rires*) ; je n'ai pas le sentiment d'être asocial, pas du tout, mais bon... Cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas aussi du plaisir à en parler, à l'expliquer...

Jacques Nimier : C'est autre chose...

Bernard Malgrange : C'est autre chose... Le besoin de se prouver quelque chose.

Jacques Nimier : L'exposer ?

Bernard Malgrange : L'exposer ?... Je ne sais pas si c'est pour moi, si c'est important, je sais que beaucoup de gens, peut-être pour moi aussi... j'ai le sentiment très aigu d'avoir besoin de se prouver qu'on est capable de faire quelque chose qui... avec en même temps l'aspect du jeu, c'est de s'amuser.

Jacques Nimier : Vous reliez les deux, oui.

Bernard Malgrange : Je ne sais pas, je ne sais pas ; je crois que c'est quand on ne trouve pas, quand on sèche, quand on se dit : il faudra que je sois capable, je suis bon à rien, je suis vieux, je suis plus bon à rien ; et puis, je me suis toujours dit cela même à trente ans, et puis... peut-être pas trente ans mais trente-cinq disons, et puis... quand ça commence à marcher, alors... alors là c'est le jeu qui prend le dessus... c'est le plaisir de trouver, de mettre les choses... que les choses... que les choses se mettent en place, qu'elles s'organisent.

Jacques Nimier : Vous employez les mots : se mettre en place, s'organiser...

Bernard Malgrange : Eh bien, elles se mettent en place quoi ! Ou bien elles se mettent à vivre, ou les deux à la fois.

Jacques Nimier : Elles se mettent à vivre, oui.

Bernard Malgrange : Oui, c'est figé, c'est mort quand on sèche, puis, à un moment, tout à coup, je ne sais pas pourquoi, ça se met... ça se met à vivre, ça se met à marcher et puis alors cet aspect vivant, il disparaît à partir de la rédaction, il réapparaît dans l'exposition mais sous une forme différente.

Vivant, je veux dire que ça bouge simplement, ça ne veut pas dire vivant comme de la matière vivante, mais ça bouge... Un blocage.

Jacques Nimier : Est-ce que vous avez des souvenirs qui ont trait aux mathématiques ?

Bernard Malgrange : ... des souvenirs...

Jacques Nimier : qui ont trait aux mathématiques enfin,... qui vous viennent à l'esprit.

Bernard Malgrange : ... J'ai un souvenir récent d'un blocage, d'un travail important qui a été fait il y a cinq ou six ans, par une équipe, je crois que c'était une équipe de japonais, et où vraiment j'ai eu l'impression d'un travail très important dans mon domaine, où j'ai eu l'impression qu'au fond ils avaient fait ce que j'avais toujours plus ou moins cherché et moi j'avais fait des petits bouts, des bricoles, mais toujours dans cette direction, et j'ai eu l'impression au fond qu'ils avaient fait ce que j'aurais dû faire vraiment.

Pourquoi n'ai-je pas fait ça et ça ?... La réaction, c 'est que j'ai refusé de lire leur truc pendant un certain temps, je n'ai pas pu le lire pendant un certain temps, pas pour des difficultés techniques... il n'était pas très bien rédigé, pas très facile à lire, mais enfin il était parfaitement accessible pour moi, et j'ai mis... j'ai mis des années à arriver à le lire et à l'assimiler, parce que je n'y suis vraiment arrivé que lorsque j'ai surmonté au fond cette... cette espèce de restriction...

Alors je pensais à cela à propos de certains types de blocage dont vous parliez hier, (*dans une conférence en sa présence*) qui étaient différents mais...

Jacques Nimier : qui vous le rappelaient...

Bernard Malgrange : ... qui me le rappelaient, je ne me rappelle plus à propos de quel exemple exactement, mais c'était un de vos exemples qui était probablement assez loin de celui-là, mais qui m'avait fait penser à cela.

C'est essentiellement la première fois que cela m'arrivait. Autrement, je n'ai pas de souvenir sauf quelquefois quand on cherche quelque chose et puis que quelqu'un d'autre le trouve un petit peu avant, alors il y a une petite réaction désagréable de jalousie, mais... mais rien de sérieux ; c'est la première fois que j'ai eu vraiment... le sentiment d'une réaction... d'une réaction passionnelle de fond devant un travail, c'est la première fois que j'ai eu vraiment cette impression...

Jacques Nimier : Là, vous avez senti que cela vous touchait de près ?

Bernard Malgrange : C'est ça, j'ai eu l'impression d'être touché, alors que je n'avais jamais eu cette impression avant. Je n'avais jamais eu cette impression que ça me touchait vraiment, que c'est un sujet sur lequel je travaillais depuis au fond une vingtaine d'années tout autour de ce genre de choses, vous comprenez, alors.

Jacques Nimier : On pourrait dire...

Bernard Malgrange : Et ça mettait en jeu beaucoup plus qu'un truc qu'on cherche par hasard pendant six mois, et puis quelqu'un d'autre qui le trouve huit jours avant.

Jacques Nimier : Oui, on peut dire que ce domaine vous appartenait un peu ?

Bernard Malgrange : Oui et non, oui et non,... de toutes façons, on sait bien qu'en sciences ça n'appartient pas. C'est vrai que je n'ai pas des réactions très possessives, mais que je suis toujours étonné par les réactions extrêmement possessives qu'un certain nombre de... de chercheurs, de collègues,...

On peut peut-être s'arrêter là.

Jacques Nimier : Si vous voulez.

Bernard Malgrange : Je vous remercie.

Entretien avec le mathématicien Charles Pisot

Charles Pisot (1910-1984) est un mathématicien français, spécialiste de la théorie des nombres (nombres de Pisot-Vijayaraghavan).

Jacques Nimier (1929-2014) était un psychologue et professeur des universités français.

Les souvenirs d'enfance sur les maths

Jacques Nimier : Est-ce que vous pourriez me dire comment vous êtes devenu professeur de mathématiques ?

Charles Pisot : J'ai de tout temps été attiré par les mathématiques. Je n'en ai pas de souvenirs très précis, mais d'après ce que racontaient mes parents, c'est déjà vers l'âge de deux à trois ans que je m'intéressais particulièrement aux chiffres, je m'amusais par exemple à faire des calendriers... j'en ai encore un qui date d'avant la guerre de 1914 et qui allait jusqu'en 1952...

Jacques Nimier : ... des calendriers...

Charles Pisot : Oui, et je savais par cœur les correspondances entre les jours du mois et si c'était un lundi, un dimanche, etc. pour deux ou trois ans, aux environs des années 12, 13, 14,... Mon père qui était lui même professeur de collège, n'aimait pas tellement me voir faire cela.

Donc, j'ai su écrire les chiffres avant de savoir écrire les lettres et lui qui était plutôt tenté par l'histoire, m'a mis dans les sections littéraires. Je n'étais pas tellement enchanté de cela mais j'avais obtenu la promesse que si je réussissais le bac de première A, il me permettrait de passer en Math-Elem. En première, j'ai eu la chance d'avoir un professeur extrêmement intéressé par les mathématiques. Je m'étais posé des questions à propos de l'extraction des racines carrées de 2, car après tout pourquoi cette méthode compliquée ? Si on cherchait dans une table de carrés, on pouvait regarder s'il n'y avait pas un carré dont le double serait aussi presque un carré ; ainsi 52 = 25, deux fois 25 c'est 50 ; or il y a un carré voisin 49. Ainsi 7/5 est déjà une bonne approximation de racine de 2 et en regardant systématiquement dans la table, j'avais découvert une loi de récurrence entre les différentes solutions de l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$. Je suis donc allé trouver mon professeur pour lui demander s'il pouvait me donner quelques indications là-dessus. Il m'a dit : je crois que cela me rappelle quelque chose, cela doit être en relation avec ce qu'on appelle les fractions continues ; il m'a expliqué finalement tout ce qu'étaient les fractions continues et je dirai que tout mon travail ultérieur a tourné autour de cette question et tout ce que j'ai fait a pour origine cette théorie des fractions continues que j'avais essayé de généraliser... les problèmes de théorie des nombres m'ont toujours passionné.

Jacques Nimier : Oui...

Charles Pisot : A l'Ecole Normale, après la sortie, le Directeur m'a demandé ce que je voulais faire, je lui ai dit : "je veux faire de la théorie des nombres". Il a levé les bras au ciel, en me disant : "mais comment ? vous savez bien qu'il n'y a personne en France qui en fait ! Faites donc des fonctions de variables complexes". Je lui ai répondu : "Je ne ferai jamais des fonctions de variables complexes et si je ne réussis pas cela... j'aimerais autant faire de l'enseignement secondaire !". Evidemment, j'ai fait beaucoup de fonctions de variables complexes, parce qu'on ne peut guère faire de théorie des nombres sans faire de variables complexes.

Jacques Nimier : Est-ce que vous voyez une relation entre les calendriers et la théorie des nombres ?

Charles Pisot : Eh ! Oui ! Parce que ce sont des chiffres, c'est le plaisir d'écrire des chiffres ou d'avoir des relations entre les chiffres... toutes les sept fois, il se trouvait un dimanche que j'écrivais en rouge, les autres étaient en noir, cela m'amusait d'écrire des chiffres et de trouver des relation

Le désir d'absence de trou

Charles Pisot : C'est un de mes cousins qui raconte cela, mais cela paraît quand même un peu extravagant : il prétend que quand j'avais un an, ou deux ans probablement puisque je parlais, je l'ai amené devant une image où il y avait quatre trèfles à quatre feuilles. Je lui ai dit. regarde René comme c'est curieux : là il y a quatre feuilles, là il y a quatre feuilles, là il y a quatre feuilles, là il y a quatre feuilles et cela fait seize feuilles, et si on prend ici quatre et quatre et là quatre et quatre, cela fait deux fois quatre, cela fait huit ici et encore une fois, deux fois huit cela fait seize. Je lui aurais dit des choses de ce genre, je pense qu'il a dû romancer un peu mais en tout cas, c'était une des questions qui m'intéressaient. De même, prendre un ruban de deux mètres et compter les différents nombres ou compter les numéros sur les poteaux télégraphiques, j'allais repérer ces poteaux les uns après les autres et il ne fallait pas que j'en manque un. Il y avait le plaisir de collectionner, de classer les choses, je pense qu'il devait y avoir cela. Je me suis amusé à collectionner des timbres, des papillons, toutes sortes de choses, je pense que c'est un petit peu en liaison avec le fait d'aimer les classifications et le fait qu'il n'y ait pas de trou dans les séries...

Jacques Nimier : Mais quand vous trouviez un trou qu'est-ce qui se passait ?

Charles Pisot : Je n'étais pas heureux, j'essayais de le combler d'une façon ou d'une autre ; il me fallait une construction bien achevée, sans intermédiaire : je n'aime pas les choses où il fallait admettre. Ainsi, dans l'enseignement secondaire : quand on faisait de la géométrie, je ne savais pas ce qu'on admettait, ce qu'était une droite et l'image du fil tendu cela ne m'a jamais satisfait ; j'ai trouvé qu'il y avait un cercle vicieux, qu'il y avait quelque chose qui n'allait pas et à l'époque, je n'ai pas pu obtenir d'explication de la part de mon professeur parce que lui-même n'était pas non plus très sûr sur cette affaire-là ; c'est bien plus tard avec l'axiomatique que j'ai vu comment on pouvait sortir de ces difficultés...

Jacques Nimier : Oui, il manquait quelque chose à ce moment-là ?

Charles Pisot : Oui, je ne savais plus si on faisait de la physique ou si on faisait des mathématiques... Je n'aime pas les calculs compliqués. Evidemment, il y a des démonstrations qui nécessitent quelquefois des calculs horribles, mais je me demandais toujours : est-ce qu'il n'y a pas quand même un chemin plus direct, qui éviterait un certain nombre de calculs ?

A ce sujet, je me souviens de la première composition en hypotaupe : je sortais d'un collège et je ne savais rien du tout ; or le professeur nous avait donné une équation du second degré dont le discriminant s'étalait sur deux lignes au moins. Alors j'ai fait la discussion correspondante et je n'en étais pas satisfait. J'ai donc cherché dans tous les sens... et puis, j'ai eu l'idée de faire un changement d'axes et les affaires se sont arrangées admirablement malgré la complication du discriminant ; je tenais toute la discussion. Mais je me suis fait attraper par mon prof de taupe qui m'a dit : vous faites comme le cheval qui doit sauter par-dessus un obstacle et qui, au lieu de sauter par-dessus, tourne autour, j'avais voulu voir si vous saviez calculer et vous, vous évitez tous les calculs... J'ai été vexé !

Jacques Nimier : Vous étiez vexé...

Charles Pisot : Eh oui ! Parce que j'avais fait tout le reste, j'avais fait le grand calcul avant, et c'est parce qu'il était trop encombrant que ça ne m'avait pas satisfait, alors voir que mon effort n'était pas apprécié (*rires*).

La beauté des maths

Charles Pisot : Le mathématicien, je crois, est sensible à une certaine beauté d'une construction ; on parle de belles théories, mais, en général, on ne dira pas qu'une théorie compliquée est une belle théorie mais plutôt lorsqu'elle contient de l'inattendu, des rapprochements inattendus entre des parties des mathématiques... Je ne sais pas ce que vous en pensez mais probablement si vous êtes devenu mathémacien, c'est parce que ça vous a attiré et que vous trouviez que c'était joli. On ne décide pas de devenir mathématicien, c'est parce qu'on aime les raisonnements, les devinettes, les problèmes, des choses comme cela, les mots croisés, les jeux de réflexion, les jeux d'échecs, je pense que tout cela, ce sont des indices.

Les maths : une affaire personnelle

Charles Pisot : Quand il y a quelqu'un qui vient me dire : je voudrais faire une thèse, donnez-moi un sujet : eh bien ! non, le sujet c'est vous qui devez le trouver, vous devez m'apporter une centaine de questions que vous vous posez et ensuite, sur ces cent questions, nous pourrons élaguer ; je vous dirai : ceci c'est fait, ceci parait peut-être trop difficile, mais là, il y a peut-être quelque chose à chercher, etc. parce qu'au fond une thèse de mathématiques, c'est avoir soi-même une idée et non celle du professeur ; c'est tout à fait différent d'une thèse de sciences expérimentales où vous avez un appareil et avec lequel il faut faire des expériences. En mathématiques, il faut avoir soi-même une idée si on veut progresser.

Jacques Nimier : Ca me rappelle ce que vous disiez tout à l'heure : vous aviez votre idée et votre intérêt pour les nombres, alors que votre père s'intéressait davantage à l'histoire...

Charles Pisot : A l'histoire... oui...

Jacques Nimier : ... l'important c'était votre idée.

Charles Pisot : Eh ! oui, et heureusement que j'ai tenu ferme parce que je crois que je n'aurais jamais rien fait en lettres, rien de sérieux... Mon premier élève à être allé au-delà de l'agrégation est M. David, il a fait une thèse sur la théorie des nombres, qui est très jolie, et qui reste encore un petit monument. On ne l'a pas encore très bien comprise mais elle mériterait d'être continuée... c'est autour des fractions continues...

Deux "sources" au maths

Charles Pisot : Un certain nombre de mathématiciens ont créé Bourbaki pour essayer d'introduire des structures dans les mathématiques et on m'avait demandé d'y participer : j'avais la mission d'essayer de trouver des structures pour la théorie des nombres ; mais cela ne marchait pas, il n'y a pas de structures là-dedans et finalement Bourbaki a renoncé à faire quelque chose en théorie des nombres. Maintenant, je commence à peu près à savoir pourquoi : je pense que les mathématiques dans leur ensemble procèdent de deux sources et la première source évidemment à laquelle tout le monde pense, c'est l'expérience, et la physique ou la chimie... Ces domaines posent certains problèmes qui font progresser les mathématiques, mais il y en a une autre qui me semble tout aussi importante c'est la théorie des nombres. Les problèmes posés par les nombres entiers nécessitent de tels travaux et de telles réflexions que finalement c'est de là que sortent à peu près la moitié des théories mathématiques. Je ne donnerai qu'un exemple, enfin l'exemple le plus connu : c'est la théorie des groupes. C'est pour résoudre certaines équations que Galois et Abel avaient créé la théorie des groupes. Mais il y en a d'autres auxquels on pense moins : les espaces vectoriels.

Tout le monde parle des espaces vectoriels et tout le monde croit que c'est dû à la mécanique, ce n'est pas vrai, les espaces vectoriels proviennent de l'étude algébrique de l'extension des corps.

Jacques Nimier : Pourquoi vous êtes-vous intéressé plutôt à ce type de mathématiques abstraites, plutôt qu'à l'autre type de mathématiques ?

Charles Pisot : Mais j'aime aussi énormément les mathématiques appliquées ; par exemple, j'ai toujours aimé faire des calculs et vérifier ensuite expérimentalement pour voir si cela colle bien et si cela donne des résultats. Je me suis construit des petits appareils et même, à un moment donné, je me suis demandé si je n'étais pas plutôt fait pour être physicien, vous voyez j'ai créé le certificat de T.M.P., je continue à enseigner les mathématiques en physique parce que l'utilisation des mathématiques dans la physique m'intéresse.

Les deux pôles de la vie

Jacques Nimier : Est-ce que vous avez eu l'impression d'une évolution ?

Charles Pisot : Non, j'ai toujours eu ce goût pour les deux à la fois. Mais malgré tout, je crois que j'étais mathématicien et que mathématicien malheureusement...

Jacques Nimier : Pourquoi malheureusement ?

Charles Pisot : Parce qu'il y a quand même deux pôles dans la vie, il y a d'une part la raison : les mathématiques cela en est la forme la plus évoluée, mais il y a aussi la sensation, le sentiment avec tous ses développements, avec les arts et toutes ces choses-là ; cela c'est au moins aussi important, sinon plus, que le raisonnement pur et dans cette deuxième partie je n'aurais pas aussi bien réussi qu'en mathématiques ; donc je dis que je suis un petit peu trop orienté vers les mathématiques ; je connais des gens qui sont beaucoup plus équilibrés.

Jacques Nimier : Vous en souffrez ou vous avez l'impression que c'est normal ?

Charles Pisot : On ne peut pas dire que j'en souffre, mais je préférerais avoir un peu plus de choses. Je m'intéresse quand même un petit peu à certaines choses... je m'intéresse en particulier à la musique mais pas de façon aussi intense que je m'intéresse aux mathématiques.

Etre à la "source", à "l'origine"

Charles Pisot : Finalement, j'ai toujours été attiré par les mathématiques et par des choses plus physiques comme l'astronomie par exemple. Cela m'a passionné, quand j'étais gosse je dévorais des livres d'astronomie plus que les romans. Les romans m'intéressaient moins que les livres d'astronomie quand je pouvais en avoir... la physique m'intéressait, la biologie aussi. Voir le monde, cette immensité m'impressionne encore toujours. A l'agrégation, par exemple, j'aurais aimé avoir à faire une leçon de cosmographie de façon à pouvoir expliquer comment, avec des observations, sans instruments, on pouvait avoir une idée de l'ordre de grandeur, je ne dis pas une mesure précise, mais de l'ordre de grandeur des événements célestes... J'aimais bien montrer qu'on pouvait par le raisonnement, obtenir des choses qu'il suffisait de vérifier ensuite par une mesure... je me suis amusé par exemple à mesurer la hauteur du beffroi de ma ville. J'avais construit un petit appareil qui me permettait de mesurer un certain angle, puis je mesurais une distance et je faisais le calcul de la hauteur. Ensuite, je suis allé vérifier, je suis monté en haut, j'ai laissé pendre une ficelle et ça collait bien... j'étais très content...

Il y a encore des tas de questions qui se posent. Tous les problèmes de théorie des nombres s'énoncent simplement : tout nombre pair est-il la somme de deux nombres premiers ?... Vous savez, ce n'est toujours pas démontré !... C'est irritant parce qu'on n'y arrive pas, on a inventé de belles méthodes qui, finalement, ont envahi toutes les mathématiques. C'est pour cela que je pense que les mathématiques doivent énormément à la théorie des nombres, c'est une discipline un peu à part mais qui est à l'origine...

Jacques Nimier : Qui est la source ?

Charles Pisot : Il y a beaucoup de mathématiciens à la suite de Bourbaki qui pensent que c'est la théorie des ensembles qu'il faut mettre au départ ; eh bien ! je ne le pense pas, je pense que c'est la théorie des nombres, des nombres entiers, je préfère partir des axiomes de Peano, ou des choses comme cela pour définir les entiers la théorie des ensembles s'est construite après coup...

Jacques Nimier : Vous semblez accorder beaucoup d'importance à l'idée d'origine...

Charles Pisot : Oui, certainement, il faut avoir une origine nette et claire. L'axiomatique, par exemple, a permis d'y voir beaucoup plus clair qu'autrefois où on mélangeait des tas de choses. Pourquoi est-ce que les gens n'ont jamais compris la relativité ? C'est parce qu'ils ont mélangé l'espace physique avec l'espace euclidien : ils ont cru que c'était deux choses identiques et il y a encore des esprits qui n'arrivent pas à se défaire de l'idée que l'espace qui nous entoure n'a pas de géométrie : c'est nous qui mettons une géométrie dans l'espace qui nous entoure.

Les mathématiques comme objet "projeté", différent de la "réalité"

Jacques Nimier : On peut presque dire qu'on projette quelque chose dans l'espace.

Charles Pisot : Oui, et il se trouve que cela colle bien... c'est un miracle... Alors les gens ont bien mélangé cela, mais ils n'ont absolument rien compris à ce qu'était la théorie de la relativité... c'est une autre géométrie qu'on projette sur l'espace et qui colle un peu mieux que l'euclidienne, voilà tout... rien ne prouve qu'on ne pourra pas encore en trouver une autre meilleure, etc.

Jacques Nimier : L'important c'est de bien séparer la réalité de ce qu'on projette dessus.

Charles Pisot : Oui, et je crois que dans l'enseignement c'est une chose qu'il faudrait qu'on mette bien en évidence quand on parle à des gosses ; il faut dès le début arriver à faire comprendre qu'il y a deux démarches différentes et il y a beaucoup trop de gens qui font encore de la géométrie en ne distinguant pas l'aspect mathématique de l'aspect physique. Et moi, je pense que c'est très mauvais du point de vue pédagogique.

Jacques Nimier : Oui, c'est fondamental de séparer...

Charles Pisot : Je crois que l'homme a mis assez longtemps pour arriver à cela, il faut quand même bien qu'on en profite.

Jacques Nimier : Sinon quel est le risque ?

Charles Pisot : Mais c'est de ne pas pouvoir faire de progrès parce qu'on reste trop accroché à cela.

Jacques Nimier : On est trop accroché à la réalité.

Charles Pisot : Oui et cette réalité, on pense que c'est la construction mathématique... Le raisonnement c'est abstraction pure, évidemment, suscitée par la réalité et encore ?... Quand vous prenez les nombres p-adiques, alors là, pour l'instant on ne voit encore aucune motivation due à la réalité ; mais d'ici quelque temps on trouvera dans la réalité des choses pour lesquelles les nombres p-adiques formeront un bon modèle. On ne l'a pas encore jusqu'à présent, cela reste encore entièrement dans l'esprit ; or, il y a des tas de théories construites sur les nombres p-adiques, il y a des fonctions de variables p-adiques, il y a des bouquins... C'est assez curieux : vous avez par exemple des propriétés du genre suivant : pour tout disque, on peut prendre comme centre n'importe lequel de ses points, même un point qui serait situé sur la circonférence, donc deux disques ou bien ils sont concentriques ou bien ils sont disjoints, vous n'avez que ces deux possibilités ; alors cela fait des tas de problèmes... bizarres ! Par exemple, la fonction égale à 1 sur un disque et à 0 ailleurs est partout continue, il n'y a pas de discontinuité sur la circonférence comme on pourrait le croire, parce que deux points qui seraient de part et d'autre de la circonférence sont à une grande distance l'un de l'autre, ils ne peuvent jamais être voisins.

Jacques Nimier : Au fond, cela donne beaucoup plus de possibilités...

Charles Pisot : Je dis que j'ai bien compris ce qu'était un réel seulement après avoir compris les p-adiques.

Jacques Nimier : Oui, et si on reste trop près de la réalité, il n'y a pas d'autres possibilités.

Charles Pisot : Oui, mais oui, il faut s'abstraire de la réalité si on veut faire des progrès. Donc, quand on veut enseigner les mathématiques, il faut savoir cela, même si on ne le dit pas encore explicitement aux gosses.

La naissance "d'enfants"

Charles Pisot : Donc ces nombres ont fait des petits, des enfants partout, alors j'ai pu faire une thèse... mais j'ai été nommé à Bordeaux pour enseigner les probabilités, la statistique que je n'avais jamais faites : cela m'a appris beaucoup de choses. Là, j'ai essayé aussi d'avoir des élèves : je n'en ai eu qu'un, c'était David et un collègue que j'ai réussi finalement à intéresser à la question ; nous avons travaillé, puis finalement quand on m'a proposé d'aller à Paris, j'ai beaucoup hésité parce que je me trouvais bien à Bordeaux, mais je suis allé à Paris parce que c'était là que je pouvais trouver des élèves dans les écoles et lentement, j'ai commencé par un, deux élèves et finalement cela s'est développé et maintenant, il y a à peu près deux cents théoriciens des nombres en France et cela marche très bien.

Jacques Nimier : Vous avez beaucoup de descendants...

Charles Pisot : Pour ma thèse, c'était même assez compliqué parce qu'il n'y avait personne qui pouvait en faire un rapport, il a fallu l'envoyer à l'étranger pour avoir un rapport de quelqu'un de compétent, alors que maintenant, il y a des théoriciens des nombres, je crois, dans toutes les Universités. En même temps, j'ai essayé aussi de rentrer à Polytechnique parce que je pensais qu'il n'y avait que par l'intérieur qu'on pouvait atteindre les polytechniciens et je dirai que presque la moitié des gens qui font de la théorie des nombres sont des polytechniciens.

Jacques Nimier : C'est important pour vous d'avoir des élèves...

Charles Pisot : C'est le rôle du professeur (*rires*), un professeur sans élève !... et, qu'est-ce que vous voulez, quand vous avez trouvé une jolie chose, il faut quand même avoir un public auquel le raconter... et si vous n'avez pas d'élèves, vous ne pouvez raconter à personne !

Le "déclic" de la découverte

JACQUES NIMIER : Quand vous travaillez les mathématiques, comment ça se passe ? Vous êtes dans votre bureau ?

CHARLES PISOT : Oh ! ici ou chez moi, n'importe où... on travaille par exemple à autre chose et brusquement on pense à telle chose... on sent d'ailleurs quand cela représente réellement un pas nouveau, il y a une espèce de déclic et même sans faire aucun calcul on sent déjà que cela marche. Alors on va à la maison et on va essayer de voir si cela colle.

Il y a quelquefois des déceptions d'ailleurs. Ma femme me le disait très souvent "Oh ! toi, je te connais, tu m'as dit que tu as trouvé quelque chose et demain, tu viendras me dire que c'est faux...". On peut avoir une idée avant de s'endormir ou quand on a une insomnie. On pense à certain problème qui vous a passionné et très souvent la solution se présente à ce moment-là. Le fait d'écrire n'est pas absolument indispensable. Par contre, on ne peut pas faire une démonstration sérieuse sans écrire, mais l'idée est en dehors de toute écriture. Comment se présente-t-elle ? Il faut s'accrocher, il faut tourner, retourner la question qui vous préoccupe sous tous ses aspects, il faut y penser tout le temps, et à certain moment il y a quelque chose qui se déclenche et il y a quelquefois des choses très simples auxquelles on n'avait pas pensé, et on y pense que lorsqu'on a tourné et retourné la question...

...Vous connaissez bien le vieux problème des logarithmes des nombres négatifs : du temps de Bernouilli les gens se disputaient : est-ce que cela avait un sens logarithme de (-1) ou pas ? les uns disaient oui, les autres disaient non et c'est Euler qui a clarifié la question par l'introduction de ex, où le logarithme de (-1) était imaginaire, c'était i. Il a donc mis de l'ordre dans la question. Eh bien ! dans les p-adiques nous avons exactement le même problème : actuellement les gens disent : est-ce que le logarithme p-adique de p a un sens ou est-ce qu'il n'en a pas ? Les uns disent oui, on pourrait lui donner tel sens, les autres pas. Eh bien ! il n'y a pas encore eu d'Euler jusqu'à présent pour savoir comment il faudrait faire... Nous avons la chance d'en être encore là, au stade où étaient les mathématiciens du temps d'Euler ; donc vous avez tout un grand champ vaste qui ne demande qu'à être exploré, et comme cela a commencé en 60, c'est-à-dire il n'y a pas même vingt ans, pensez qu'il y a encore du travail à faire...

Invention ou découverte ?

Charles Pisot : Oui, est-ce que les mathématiques sont préexistantes ou pas ? Parce qu'on a un peu l'impression qu'on se promène dans un terrain à explorer... et pour lequel il s'agit de trouver des chemins, des voies d'accès ; ensuite viennent les topographes qui dressent les cartes d'Etat-Major, c'est ce qu'on appelle Bourbaki, ils dressent la carte d'Etat-Major du terrain conquis. Les topographes, eux, ne conquièrent pas beaucoup de terrain, et ils sont toujours obligés de modifier les cartes après les découvertes nouvelles...

Jacques Nimier : Oui, vous avez l'impression qu'on explore un terrain...

Charles Pisot : Comme si cela existait déjà.

Jacques Nimier : Comme si ça existait et qu'il faille le découvrir.

Charles Pisot : ... et je pense que tous les mathématiciens ont cette sensation, même s'ils ne le disent pas, ou qu'ils disent le contraire. C'est un peu le même plaisir que celui de l'explorateur.

Jacques Nimier : Oui, vous vous sentez explorateur.

Charles Pisot : C'est ça, oui, oui. Il suffit de trouver un chemin, même compliqué ; ensuite on arrive à trouver des chemins plus simples, mais très souvent les démonstrations d'un nouveau théorème sont d'abord très compliquées mais ensuite tout s'arrange...

Jacques Nimier : Qu'est-ce que c'est que ce terrain à explorer ?

Charles Pisot : On aimerait bien le savoir !

Jacques Nimier : Oui, vous n'y avez jamais pensé ?... quelque chose qu'on explore...

Charles Pisot : Oui, les mathématiques c'est tout à fait ça, et elles semblent s'étendre à l'infini.

Jacques Nimier : Oui.

Charles Pisot : Plus on va et plus elles s'ouvrent dans toutes les directions.

Jacques Nimier : Oui, quelque chose d'infini, à votre avis.

Charles Pisot : J'en ai l'impression, on a cette sensation, je ne sais pas si cela correspond à quelque chose.

Jacques Nimier : Ce qu'il y a d'intéressant, c'est cette sensation qu'ont les mathématiciens.

Charles Pisot : Il y a des gens qui disent : que peut-on encore trouver en mathématiques ? Vous entendez souvent ce genre de question.

Jacques Nimier : Oui.

Charles Pisot : Là, il n'y a pas de problème.

Jacques Nimier : Oui, il y a toujours quelque chose.

Charles Pisot : Et même des choses très jolies, très simples.

Jacques Nimier : A quoi, ça vous fait penser... une sorte de terrain, comme ça, à l'infini...

Charles Pisot : ... Le développement se fait comme un arbre qui croît, qui croît... ça s'arrêtera peut-être un jour, mais je ne sais pas trop... pas aussi longtemps qu'il y aura des hommes. C'est curieux cette espèce de tissu qui s'est développé là, dans l'humanité et où tous les mathématiciens se comprennent entre eux ; c'est ça aussi le plus remarquable ; c'est la seule chose humaine où vous pouvez dire à quelqu'un : voilà, vous vous êtes trompé à cet endroit, ça c'est faux, et il est obligé de le reconnaître. Voyez-vous ailleurs où on puisse dire à quelqu'un : vous vous êtes trompé, c'est faux ?

JACQUES NIMIER : C'est vrai, oui.

CHARLES PISOT : Cela enseigne l'humilité et on n'est jamais très sûr, mais...

Erreurs, règles...

JACQUES NIMIER : Oui, on a besoin des autres.

CHARLES PISOT : Oui, oui ; enfin on en a besoin plus ou moins, mais en tout cas, les autres peuvent vous montrer votre erreur et quand on vous a montré votre erreur, il n'y a rien à faire, il n'y a plus qu'à s'incliner, c'est faux ; effectivement, là on n'avait pas fait le bon raisonnement...

JACQUES NIMIER : Oui, c'est vrai, il n'y a qu'en mathématiques...

CHARLES PISOT : Oui, c'est pour cela que souvent les mathématiciens sont des hommes très rigides, parce qu'ils n'admettent pas les erreurs, vous ne trouvez pas ? Et ils se construisent aussi, souvent, une image du monde très stricte...

JACQUES NIMIER : C'est-à-dire qu'ils n'acceptent pas les lacunes, comme vous le disiez au début.

CHARLES PISOT : Eh oui...

JACQUES NIMIER : Et pourquoi cela ?

CHARLES PISOT : Eh bien ! Il faut que tout marche par des règles, c'est la règle qui semble la chose essentielle au mathématicien.

JACQUES NIMIER : La règle...

CHARLES PISOT : Qu'est-ce qu'un axiome ? C'est une règle. La règle du jeu : on a le droit de faire ceci ou cela. C'est comme pour les échecs, pour chaque pièce on a le droit à telle et telle règle, et il n'y a pas d'exceptions, on n'accepte pas une exception à la règle, tout est codifié à l'avance... c'est sans doute pour cela que je n'aime pas l'art sans règles.

Jacques Nimier : Ah ! oui... dans les calendriers, il y avait aussi des règles.

Charles Pisot : Eh ! oui, il y avait des tas de règles et c'est cela qui me passionnait : tant de jours par mois... et tous les sept jours il y a un dimanche...

Jacques Nimier : D'où venait cet amour des règles que vous aviez déjà à cet âge-là ?

Charles Pisot : Il faut bien penser quand même que c'est dans la nature humaine d'avoir des règles, puisqu'on doit vivre en société et vivre en société n'est possible qu'avec des règles, sinon je ne vois pas...

Donc, il faut bien que cela soit inné, sinon chaque homme vivrait de façon individuelle.

Jacques Nimier : C'est ce qui permet de vivre avec les autres ?

Charles Pisot : De vivre avec les autres...

Jacques Nimier : D'être uni aux autres...

Charles Pisot : Aussi, et que cela fasse une société cohérente... mais les règles sont dans un certain sens assez arbitraires. On peut imaginer des tas de systèmes de règles différentes et d'ailleurs dans les mathématiques, il y en a aussi.

Jacques Nimier : Oui, l'important est qu'elles existent.

Charles Pisot : Oui... il faut les avoir posées... ça me donne un sentiment de malaise, l'absence de règles.

Jacques Nimier : De malaise ?

Charles Pisot : Je ne sais pas, je ne me sens pas en sécurité... on s'embarque dans de la philosophie en ce moment.

Jacques Nimier : Non dans notre vécu... dans ce que vous représentez...

Retour aux enfants, petits enfants ! (une nouvelle généalogie)

Charles Pisot : Eh ! bien, je dirai que c'est une aventure passionnante et surtout par le fait qu'on a des élèves qui continuent dans des directions qu'on a commencées et qu'on n'a pas pu continuer ; c'est eux qui développent, certains trouvent des choses tout à fait nouvelles... je suis très content de ce qui s'est passé.

Jacques Nimier : C'est une sorte de paternité par les mathématiques...

Charles Pisot : Oui, on parle d'enfants, petits-enfants, etc. J'ai déjà un arrière petit-fils qui est mon collègue à Paris, et qui a maintenant de nouveaux élèves qu'il est en train de former : cela fera la cinquième génération. Cela fait quand même plaisir,... et surtout que pour cette discipline, qui n'existait plus en France, maintenant la France est de nouveau dans le peloton de tête.

Jacques Nimier : Ah ! Bon...

Charles Pisot : Oui, maintenant nous pouvons nous considérer comme les égaux des Russes, des Américains, et l'école française est bien appréciée : alors ça fait tout de même plaisir... maintenant, j'ai l'impression que je peux partir à la retraite avec la sensation que ça continuera, que je n'ai plus besoin de les soutenir : ils volent de leurs propres ailes, ils vont faire autre chose que ce que j'ai fait, alors ça va très bien... La culpabilité de faire certaines mathématiques

Jacques Nimier : Il fallait recréer un mouvement ?

Charles Pisot : Oui, la difficulté, c'était d'avoir des élèves au départ parce qu'il y avait une espèce d'état d'esprit parmi les jeunes mathématiciens qui pensaient que la théorie des nombres était une occupation secondaire, que ce n'était pas aussi noble que de faire par exemple de la géométrie algébrique ou d'autres théories de ce genre, moi-même j'étais dans ce mouvement aussi. Heureusement que j'ai pu passer une année aux Etats-Unis, où il y avait tout un groupe de théoriciens des nombres qui m'avaient invité.

J'ai vu alors, de là-bas, l'image des mathématiques françaises vue des Etats-Unis. Eh bien, cela m'a regonflé, cela m'a redonné du courage et cela a vraiment bien démarré à mon retour des Etats-Unis parce que je me sentais l'équivalent des autres mathématiciens, puisqu'avant j'étais toujours le petit garçon... qui avait fait quelque chose d'un peu défendu !

Jacques Nimier : Vous vous sentiez coupable ?

Charles Pisot : Oui, de faire de la théorie des nombres ; je me disais : je fais quelque chose qui m'amuse mais qui n'est peut-être pas ce qu'il faudrait que je fasse. Mais mon séjour aux Etats-Unis m'a donné confiance en moi... c'est important quand on veut créer quelque chose. Alors, j'ai vu que la théorie des nombres était considérée comme une bonne discipline.

Jacques Nimier : Etait admise ?

Charles Pisot : Oui, était admise.

Jacques Nimier : Et pourquoi vous sentiez-vous coupable ?

Charles Pisot : Mais de faire des mathématiques qui m'amusaient et non pas des mathématiques que j'aurais dû faire, des mathématiques nobles... or, finalement, il faut faire dans les mathématiques ce qui vous plaît, c'est la première des règles.

Entretien avec le Professeur Jacques Riguet

Jacques Riguet (1921-2013) était un mathématicien français connu pour ses contributions à la logique algébrique et à la théorie des catégories.

Jacques Nimier (1929-2014) était un psychologue et professeur des universités français.

Comment un "cancre" peut-il devenir mathématicien ?

Jacques Nimier : Avez-vous commencé par être professeur de mathématiques ?

Jacques Riguet : J'ai été professeur de mathématiques pendant quelques mois seulement, à vrai dire, dans des circonstances un peu particulières, puisque j'ai été professeur de mathématiques, du mois de février au mois de juillet en 1945, dans le lycée même où j'avais fait mes études, c'est-à-dire au lycée de Compiègne qui, à l'époque, était encore un collège ; en ce qui concerne mes études dans ce collège, j'ai été un assez mauvais élève. Enfin, j'étais, pour résumer ça d'un mot qui était employé par mes professeurs de l'époque, un amateur, c'est à-dire que je ne m'intéressais, je ne travaillais et je ne donnais de bons résultats que dans les matières qui présentaient de l'intérêt pour moi.

J'ai été un cancre absolu en histoire et géographie, par exemple, et je crois que j'ai été un cancre absolu aussi en mathématiques jusqu'à la classe de quatrième, car je crois que ce n'est qu'à ce niveau là qu'on commençait l'étude de la géométrie... Dès la classe de quatrième, j'ai commencé à m'intéresser à la géométrie et mon attrait pour la mathématique, si vous voulez, a débuté avec la géométrie puis l'algèbre puisqu'on commençait sans doute l'algèbre en troisième. Ce qui m'a ravi à l'époque, c'est la liaison entre l'algèbre et la géométrie...

Jacques Nimier : Vous vous souvenez donc bien de cette époque de la quatrième, lorsque la géométrie vous a fait démarrer en mathématiques...

Jacques Riguet : Oui, oui, mes premiers souvenirs sont des souvenirs de géométrie plane... de constructions géométriques, c'est-à-dire que je me souviens avoir cherché à systématiser un peu les petites constructions qu'on faisait.

De l'influence d'un Grand-Père

Jacques Riguet : Je crois que, dès cette époque, j'avais inventé à mon usage personnel un signe, que je peux vous dessiner du reste et qui était le signe de l'implication. C'était un C si vous voulez, un C avec une barre en haut, il y avait aussi le signe réfléchi OC qui était en somme la condition nécessaire et suffisante. Mais enfin, quand je dis que c'était mon invention personnelle, c'est beaucoup dire. J'avais eu cette chance, mon grand-père étant libraire, de pouvoir disposer de vieux livres de géométrie, de physique et autres, et j'allais fouiller là-dedans et j'étais tombé sur un petit livre de... Simon, je crois "Comment résoudre les problèmes de géométrie".

Je crois que ce petit livre était précédé d'une introduction expliquant ce que c'était qu'une condition nécessaire et suffisante en quelque sorte, et je crois que c'est à partir de là que j'avais essayé de mettre déjà un petit peu en formules ce qui était dit dans cette introduction...

Jacques Nimier : Vous avez eu cette chance d'avoir un grand-père qui vous offrait ces possibilités...

Jacques Riguet : Oui, ça a été le premier stade et puis le deuxième stade : la chance d'avoir eu dans le rayon de mon grand-père des livres de constructions géométriques. Maintenant, je crois que ma mémoire défaille un petit peu, là ; je crois que ce livre à vrai dire, je ne l'ai eu que plus tard ; quand je dis que j'étais en quatrième à ce moment-là, je ne le pense pas, j'ai dû ne le découvrir que plus tard, j'ai dû ne le découvrir peut-être qu'en classe de seconde au moment où on faisait de la géométrie dans l'espace et je me suis dit : c'est vraiment dommage que je n'ai pas eu ce livre-là au moment où nous étudions la géométrie plane ; je ne sais plus très bien, il faudrait que je replonge dans mes souvenirs...

Jacques Nimier : Oui et...

Jacques Riguet : Eh bien, alors vraiment à ce moment-là, oui, je dois vous dire que, si je me souviens bien, je n'ai quand même pas été un excellent élève en mathématiques... parce que je n'ai commencé à y prêter véritablement attention qu'à partir d'un certain moment, peut-être après deux ans ; je pense que c'était vers la classe de seconde que je m'y suis mis... je me suis pris vraiment au jeu...

Le lien et l'harmonie

Jacques Riguet : Mais, il y a eu aussi l'influence de la physique. Je me souviens très bien par exemple de cette formule $1/p + 1/p' = 1/f$, où il y avait des questions de signe : on ne savait jamais de quel signe p et p' étaient et ça m'avait tellement agacé de ne pas savoir exactement. Le professeur donnait de vagues idées là-dessus, mais ce n'était pas net dans mon esprit et un beau jour j'étais tellement agacé par ça que je me suis dit : il faut que je m'y mette. Je m'y suis mis et alors bon : le "segment" ON avec une barre dessus c'était - NO , n'est-ce pas, enfin la loi de Chasles, et un petit peu les vecteurs si vous voulez, mais les vecteurs dans un espace vectoriel de dimension "un". Et alors, ça aussi, ça a été un aiguillon dans cette liaison entre algèbre et géométrie. Ca m'avait beaucoup excité à l'époque.

Bon, mais j'aimais beaucoup la chimie (j'aime encore beaucoup la chimie) et c'était l'époque où je lisais les livres de Marcel Boll "Qu'est-ce que l'électricité ?", "Qu'est-ce que la chimie ?", etc. C'est à-dire que pour moi il y avait une espèce d'harmonie... Il n'y avait pas mathématiques pures et mathématiques appliquées, il y avait une espèce d'harmonie de systèmes logiques qui donnait la clé de l'explication d'une partie du monde...

L'intérêt apparaît avec les difficultés

Jacques Riguet : Alors situer tout ça à partir de quelle classe ?... c'est difficile, mais, si vous voulez, disons que quand j'étais en classe de seconde, j'avais vraiment la passion de la chimie d'abord, de la physique et des mathématiques, mais les mathématiques... je crois qu'à cette époque-là, elles n'étaient qu'en troisième position. Elles ne sont venues à la première position qu'au moment où on m'a donné vraiment des problèmes, par exemple de géométrie dans l'espace, des problèmes vraiment plus difficiles à résoudre ; alors là, n'est-ce pas, la présence d'une difficulté plus grande à surmonter m'a sans doute conduit à m'intéresser davantage aux mathématiques. C'est à ce moment-là que j'ai été un bon élève en mathématiques...

Jacques Nimier : Parce qu'il y avait des difficultés plus grandes...

Jacques Riguet : Parce qu'il y avait des difficultés plus grandes, mais il y a eu aussi... il faut l'avouer en toute humilité, il y a eu aussi l'aiguillon des petits camarades : se sentir plus fort que les autres, voir que les autres pataugent et que vous, vous êtes capable ; vous commencez à sentir que vous êtes plus doué qu' eux et... ça joue, ça

Médecine ou Mathématiques ?

Jacques Nimier : Oui... et votre orientation, comment s'est-elle faite par la suite...

Jacques Riguet : J'ai quand même été toujours attiré par la médecine aussi ; bien que l'enseignement que l'on donnait à cette époque-là en sciences naturelles ne donnait qu'une vague idée de ce que pouvait être la médecine, mais... à ce moment-là j'ai vraiment hésité. Enfin, au moment de prendre une décision pour le choix d'une profession, je crois que j'ai dû dire à mes parents : je veux être médecin, et mes parents n'ont pas appuyé cette suggestion pour des raisons essentiellement économiques, je crois : les études de médecine coûtaient fort cher. Et puis, peut-être, est-ce que j'ai eu à ce moment-là quand même le sentiment que si je m'embarquais dans la médecine, je ne pourrais pas continuer à faire des mathématiques, alors que faisant des mathématiques, j'avais très peu de chance de faire de la médecine ; c'est ça qui me faisait hésiter... enfin toujours est-il que... je me suis décidé à faire "Mathématiques Spéciales", ce qui a été plutôt pour moi une catastrophe... D'abord j'ai été très mal conseillé. Je me souviens par exemple, qu'on m'avait dit : ce passage de Math-Elem à Math-Spé, c'est un passage difficile. Alors, je me suis dit : eh bien ! je vais m'y préparer pendant les vacances, je vais demander conseil à diverses personnes et on m'a très mal conseillé... et je me suis trouvé tout à fait désorienté au moment où je suis entré en Mathématiques Spéciales. Désorienté et déçu, parce que j'avais comme je vous l'ai déjà dit, inventé pour moi un petit système logico-mathématique de formalisation... et les mathématiques spéciales ne répondaient pas du tout à cette attente, au contraire, ça me replongeait plutôt dans cet univers détesté qui avait été celui des classes de quatrième : ces mathématiques de la règle de trois que je haïssais profondément...

Donc, ça a été une grosse déception et un échec à la fois... un échec à la fois sur le plan scolaire et sur le plan psychologique aussi...

Si bien que j'ai décidé, au grand désespoir de mes parents de lâcher les mathématiques spéciales et de commencer une licence à la fac ; alors là, j'ai retrouvé les mathématiques que je désirais. Enfin, pas exactement. Bourbaki n'existait pas encore, malheureusement, à l'époque... Enfin, si, il existait, mais il aurait fallu, là aussi, un coup de hasard qui n'a pas eu lieu pour que je tombe sur Bourbaki. Et puis, ça n'aurait pas été très bon, non plus, pour mes études universitaires de l'époque, n'est-ce pas ? Enfin, heureusement, je n'ai pas trop insisté du côté Mathématiques Spéciales.

La liberté apportée par les maths

Jacques Nimier : Mais à votre avis, qu'est-ce qui vous a fait pencher du côté mathématiques plutôt que du côté médecine, au moment où vous en aviez justement le choix ?

Jacques Riguet : Je crois, qu'il y a eu à l'époque quelque chose d'assez profond. C'est vraiment presque sur le plan psychanalytique. Je crois que j'ai... enfin, c'est comme ça que je le vois maintenant, je crois qu'inconsciemment à cette époque-là, j'ai eu peur, étant médecin, d'être enfermé dans un certain mode de vie, de ne plus pouvoir m'en dégager, alors que les mathématiques, (bien qu'évidemment sur le plan matériel, elles ne m'apportaient peut-être pas autant de confort) me permettaient une vie beaucoup plus libre...

Jacques Nimier : Un mode de vie...

Jacques Riguet : Oui, parce qu'il faut dire que ma famille a toujours été pour moi, c'est comme ça que je l'ai vue...

Jacques Nimier : Oui,...

Jacques Riguet : ... très oppressante et si j'étais devenu médecin, je crois que l'emprise de ma famille aurait continué, alors que mathématicien, je pouvais m'en éloigner davantage. Oui, parce qu'il ne faut jamais oublier que, dans ces questions, il y a aussi d'autres aspects... je pense que vous avez déjà passé en revue un certain nombre d'aspects psychologiques chez les mathématiciens et il est bien clair que par exemple la fixation à la mère joue un rôle, chez le mathématicien, sans doute, plus que dans une autre profession.

"Mathématiques et sexualité"

Jacques Nimier : Mais comment voyez-vous ça pour vous-même ?

Jacques Riguet : ...Enfin, je dis fixation à la mère...... je pense que ça n'a pas été tellement mon cas, mais je le vois surtout chez mes collègues, si vous voulez... enfin, ça me paraît être une chose assez fréquente chez les scientifiques en général et chez les mathématiciens en particulier... moi ?... il y aurait peut-être un livre à écrire et qui serait "Mathématiques et sexualité" (*rires*)...

Jacques Nimier : Qu'est-ce qui vous fait penser à ça ?

Jacques Riguet : (*rires*)... oui, du reste... à un certain moment, je me suis demandé s'il n'y avait pas quelque chose en mathématiques de privilégié, à savoir que : un problème, c'est résolu ou c'est pas résolu, n'est-ce pas ; il y a une sorte de guillotine, une espèce de couperet, une espèce d'instant où, d'un seul coup tout se dénoue, n'est-ce pas ? Je ne dirais plus ça maintenant, c'est pas tellement vrai, mais enfin on a quand même l'illusion... on a quand même l'impression de ça, que finalement c'est un petit peu comme... faire l'amour, si vous voulez, finalement ; vous parvenez à accomplir l'acte sexuel ou vous n'y parvenez pas, n'est-ce pas ? Il y a vraiment un instant où... on pourrait essayer d'établir une espèce de parallélisme entre l'accomplissement de l'acte sexuel et la résolution d'un problème. En fait, bien sûr, je crois que c'est quand même assez superficiel ça, parce que d'abord on résout jamais d'un seul coup un problème, il a fallu beaucoup de tentatives, beaucoup d'échecs pour y parvenir et puis quand on regarde d'un petit peu plus près l'acte sexuel, là aussi il y a beaucoup à dire et il y a quand même tellement de facteurs qui interviennent dans son accomplissement que...Est-ce que cet instant guillotine existe ou non ? Là aussi quand on y regarde d'un petit peu plus près... cette discontinuité qui semble être parallèle entre la discontinuité du non résolu et du résolu ou bien de l'acte sexuel non accompli et accompli, quand on y regarde d'un petit peu plus près, cette discontinuité est beaucoup moins brutale qu'il ne semble. Néanmoins, il y a quand même là quelque chose et quelque chose qui est plus marqué en mathématiques qu'ailleurs...

Jacques Nimier : La guillotine, le couperet... Qu'est-ce que c'est que cette guillotine, ce couperet... ?

Jacques Riguet : ... oui, enfin, je crois que mes comparaisons sont très mauvaises... guillotine ou couperet, non,... il faudrait, je ne sais pas, il faudrait trouver d'autres termes parce qu'au contraire, c'est quelque chose qui n'est pas sinistre comme une guillotine mais au contraire très réjouissant... c'est plutôt une pièce dans l'obscurité puis une fenêtre que l'on ouvre d'un seul coup et les rayons du soleil qui viennent inonder la pièce ; c'est plutôt ça, n'est-ce pas ? Non, enfin quelque chose de très discontinu, de très soudain... et il y a quand même du point de vue physiologique une certaine analogie entre l'extrême tension que vous avez quand vous êtes à la recherche d'un problème et, une fois la solution trouvée... ce relâchement. C'est tout à fait parallèle à ce qui se passe dans l'acte sexuel... avec, peut-être aussi ce léger sentiment de tristesse qui l'accompagne de savoir que maintenant que le problème est résolu, il y a quelque chose de perdu aussi...

Je crois que... il y a une très jolie formule que je peux vous citer... je pense que vous la connaissez : c'est celle de Simon Stevin qui étudiait un équilibre qui était obtenu par un triangle dont l'hypoténuse reposait sur le plan, et un collier de boules. Ce collier était posé sur le triangle. C'était à l'époque où on faisait des recherches sur le mouvement perpétuel.

Il y avait des gens qui cherchaient encore à construire des machines produisant le mouvement perpétuel et une de ces machines était justement ceci : un triangle rectangle, donc un côté plus incliné que l'autre et le collier devait tourner indéfiniment parce que la pente était plus raide d'un côté que de l'autre et Stevin en faisait le calcul pour voir quelles étaient les forces qui s'exerçaient à droite et à gauche. Mais lorsqu'il eût résolu le problème, il éprouva une certaine tristesse car il se disait : la merveille n'est plus la merveille... il avait détruit une certaine illusion...

Voilà, et alors je crois que, dans l'acte sexuel, il y a un petit peu de ça aussi, une certaine tristesse parce que, je ne sais pas, inconsciemment on se dit peut-être, finalement est-ce que je vais parvenir à avoir autant de plaisir, autant de jouissance en recommençant une nouvelle expérience, c'est ça.

Il y a quand même un certain parallélisme, mais tout ce que je vous dis là, ce n'est pas dégrossi du tout, c'est un petit peu comme ça me vient, mais il y aurait quelque chose à tirer de là, je crois. Et je crois quand même que les mathématiques ont une position privilégiée, parce que dans les autres sciences, c'est quand même moins net, c'est-à-dire que la solution vient par morceaux, si vous voulez, elle ne vient pas comme ça d'un seul coup...

La nécessité du refus du monde extérieur : les maths-refuge

Jacques Riguet : On pourrait dire que les mathématiques sont plus masculines et que les autres sciences sont plus féminines, si vous voulez, si... toutefois on peut comparer la jouissance masculine et la jouissance féminine, mais il semble bien quand même que...

Jacques Nimier : Et pourtant tout à l'heure, vous avez parlé de fixation à la mère... ça a l'air un peu contradictoire...

Jacques Riguet : ... oui... c'est parce que je crois qu'à moins de circonstances particulières... bon, il y a les fils qui sont fils de mathématiciens et qui vivent dans cette ambiance, etc. mais pour quelqu'un dont les parents n'ont absolument exercé aucune pression sur leur fille ou sur leur fils pour qu'il fasse des mathématiques ou des études scientifiques, il faut... (oh ! c'est pas commode !)... mais je crois que c'est quand même ça, il faut le refus d'une grande partie du monde extérieur, il faut que le monde qui vous est offert en tant qu'enfant ou qu'adolescent ne présente pas tellement d'attrait pour vous, parce que c'est dur quand même le début des mathématiques, n'est-ce pas, et alors si vous êtes trop attiré par le monde extérieur vous n'y parvenez pas...

Jacques Nimier : Ca vous rappelle des souvenirs ?

Jacques Riguet : Oui, bien sûr, ça me rappelle, oui,... il est bien clair que pour moi, vers la classe de troisième, les études scientifiques ont été pour moi un moyen d'échapper à ma famille. A cette époque-là, devenant adolescent, je commençais à haïr ce mode de vie et ça c'était pour moi un refuge...

Je ne crois pas qu'il soit très bon d'avoir une enfance, une adolescence plutôt heureuse, parce que vous êtes trop attiré par le monde extérieur. Enfin, une chose qui m'a gêné, si vous voulez, c'est que finalement à cette époque-là aussi, j'ai été assez attiré par la littérature et la philosophie... parce que ça aussi c'est un moyen de sortie de la vie familiale, et qui me donnait même des moyens plus puissants pour y résister, puisque bon : Valéry, Gide, Proust, etc. c'était des écrivains libérateurs, oui, mais sans que jamais j'y aie attaché plus d'importance, si vous voulez, qu'à cette libération que constituait l'étude scientifique parce que j'ai l'impression qu'il y avait là comme une mystification.

Jacques Nimier : la littérature... ?

Jacques Riguet : Oui, mystification, enfin phénomène de classe, si vous voulez... (*silence*)

Jacques Nimier : En quoi les maths sont-elles libératrices ?

Jacques Riguet : Ah ! attention, libératrices, ça dépend dans quel sens, ça dépend par rapport à qui !

Jacques Nimier : Dans le sens où vous l'avez vécu.

Jacques Riguet : Je crois qu'elles sont libératrices... eh bien ! écoutez, ne serait-ce que parce que si vous êtes enfermé dans quelque chose, les mathématiques c'est un moyen d'évasion. Pensez à Poncelet, par exemple, qui était prisonnier dans les prisons russes lorsqu'il a écrit son traité de Géométrie projective. Il était captif, et je crois que les exemples ne manquent pas d'œuvres mathématiques qui ont été écrites justement au moment où vous ne pouvez pas faire autre chose et que vous devez nécessairement avoir une certaine activité. Car les mathématiques ont ce privilège aussi qu'elles ne nécessitent vraiment qu'un crayon et un bout de papier... et une corbeille à papiers (*rires*)...

Cet objet perdu, retrouvé et toujours disponible

JACQUES RIGUET : Oui, du reste vous savez bien que nous sommes très jalousés par nos collègues physiciens ou chimistes : le mathématicien, il peut prendre le train, sa voiture et puis il peut aller travailler n'importe où. Il lui suffit, au besoin, d'un ou deux livres. Il peut même très bien s'en passer à la rigueur et les exemples ne manquent pas de gens qui avaient besoin d'un livre ; le livre a été détruit ou perdu, pendant la guerre par exemple, eh bien ! vous refaites les démonstrations. Evidemment ça exige un effort considérable, mais cet effort porte toujours ses fruits.

On peut dire que si quelque chose est perdu, ce n'est jamais perdu complètement parce qu'on va pouvoir par l'effort, le retrouver et le retrouver d'une autre manière : ça ne sera jamais la même chose et ça sera meilleur.

On connaît dans l'histoire des mathématiques, l'histoire des manuscrits perdus et refaits et retrouvés et mieux retrouvés que si on les avait retrouvés réellement. Alors, si vous voulez, c'est libératoire, en ce sens que vous sentez, quoi qu'il puisse vous arriver... à moins bien sûr que je perde la vue, les trois jambes (sic !)... les deux jambes les... bon, mais si je reste dans mon intégrité physique et mentale, eh bien ! il peut m'arriver des tas de choses épouvantables, malgré tout, j'aurai toujours à ma disposition l'univers des mathématiques.

Donc, c'est déjà libératoire en ce sens que c'est déjà une espèce de certitude sur laquelle vous pouvez vous appuyer, une espèce de force en vous qui vous permet justement de vous détacher, de peu souffrir de conditions de détention, de captivité dures pour vous. C'est arrivé à tout le monde d'être hospitalisé, n'est-ce pas, eh bien ! je me souviens que, lorsque j'étais dans une clinique, le médecin m'avait fait la remarque : vous, intellectuel, vous supportez bien mieux que tout le monde le fait d'être alité, parce que vous continuez à travailler... alors, c'est libératoire en ce sens.

Et puis, je vous ai parlé de ma famille : j'étais un petit peu prisonnier en tant qu'adolescent, là aussi, c'est une chose qui m'a libéré de ma famille...

Maintenant, on pourrait dire aussi que c'est aliénant puisque c'est quelque chose qui me permet de m'accommoder d'une certaine situation, alors que ça m'éloigne du chemin de la révolte, bien sûr... bien sûr...

L'univers mathématique

Jacques Nimier : Vous avez parlé tout à l'heure de ce monde mathématique, vous avez utilisé ce terme...

Jacques Riguet : Oui, oui...

Jacques Nimier : Qu'est-ce que c'est pour vous ce monde mathématique ?

Jacques Riguet : Oui, l'univers des mathématiques... c'est presque une chose à laquelle on pourrait donner une apparence matérielle. C'est même une chose que j'avais essayé de faire à un certain moment. On m'avait demandé, pour l'exposition d'Osaka au Japon un petit film sur les mathématiques modernes... malheureusement c'était un scénario qui au départ durait vingt minutes et puis ça s'est réduit à cinq minutes, c'est-à-dire que je ne pouvais plus rien faire quoi ! Enfin dans le scénario de vingt minutes, j'avais essayé de matérialiser ça en faisant un très bref historique du développement des mathématiques, c'est-à-dire qu'au début, l'univers des mathématiques se présentait comme une sphère, avec deux ou trois vagues continents qui étaient : la géométrie, l'arithmétique et la logique et puis peu à peu tout ça nimbait dans le brouillard, tout ça se dégageait petit à petit et on arrivait au Moyen Age et au XVIIème siècle avec Descartes. Alors, il y avait des ponts qui se formaient entre ces continents, par exemple, il y avait Descartes qui jetait un pont entre l'algèbre et la géométrie. II y avait de nouveaux promontoires qui se formaient, par exemple le développement par Pascal et Bernouilli du calcul des probabilités : une espèce de prolongement de l'analyse. Et puis, on suivait ça avec la caméra et au XIXème siècle, il y avait un fourmillement de nouvelles excroissances et ça s'embrouillait, ça devenait une espèce de monstre. Alors finalement Bourbaki arrivait et rendait ce monde plus architecturé, beaucoup plus cristallin ; ainsi ces continents-là qui étaient tout à fait informes au départ devenaient des espèces de temples avec des parois belles et rigides et les communications entre ces divers secteurs étaient elles aussi très architecturées. Alors, c'est un petit peu ça l'univers des mathématiques que j'essayais de figurer dans ce film et, au fond, je crois que c'est ça cette espèce de palais immense, on se promène là-dedans et...

Jacques Nimier : Un monstre qui s'est transformé en palais...

Jacques Riguet : Oui, oui... une espèce de monstre. Voyez c'était au XIX^ème^ siècle, c'était çà : une espèce de monstre. Il y a des films d'anticipation qui montrent des mutants avec d'énormes têtes et dont le cerveau n'est même plus enveloppé dans une enveloppe osseuse... le cinéaste qui m'avait réalisé ça, avait réussi assez bien à la matérialiser avec du plastique.

La recherche en mathématique

Jacques Riguet : Mais pratiquement quand on fait de la recherche, c'est pas tout à fait comme ça que ça se présente. Bon, si vous voulez, c'est une comparaison que j'emploie souvent avec mes étudiants : les mathématiques, celles de la recherche, c'est une espèce de forêt vierge ; pas tellement à explorer, mais où il faut percer : vous avez un certain point à atteindre, vous savez que c'est à peu près par là, et il faut percer. Et si vous percez comme ça tout droit... il y a des gens qui font ça ; ça permet même de diversifier un petit peu les races de mathématiciens : c'est qu'il y a des gens qui ont une force extraordinaire. Ils y vont au coupe-coupe, ils scient tous les arbres qui sont devant eux, ils y vont au bulldozer ; et ils ont une telle force qu'ils arrivent à faire des choses intéressantes. Mais je crois que ce n'est pas ça qu'il faut faire.

Ce qu'il faut faire, c'est un petit peu tâter le terrain... puis alors, là, il y a évidemment le flair. Se dire : bon ! si je vais tout droit, c'est très broussailleux par-là, il vaut peut-être mieux un peu obliquer et là, ça à l'air plus clair, etc. et puis alors, à chaque fois que vous avez devant vous un gros obstacle, une montagne, un roc... il ne faut jamais aller devant, il faut toujours essayer de tourner... et je crois qu'il y aurait aussi toute une analyse de l'histoire des mathématiques à faire, ce sera l'histoire du détour.

Finalement, on n'a jamais résolu de vraiment gros problèmes en les attaquant de front. Il y aurait peut-être quelques exceptions mais, en général, on contourne toujours l'obstacle et, en mathématiques, il y a beaucoup de démonstrations qui sont plus intéressantes par elles-mêmes que par ce qu'elles démontrent.

Je crois qu'il y a un mot de Valéry là-dessus qui dit à peu près que ce qu'on trouve, ce n'est pas toujours ce qu'on a cherché et finalement ce qu'on a trouvé est plus intéressant que ce qu'on a cherché.

Alors finalement, je crois que l'important, ce n'est pas tellement d'avoir trouvé un chemin qui, partant du point A, aille vers le point B qui constituait le but, mais c'est de trouver des chemins, j'allais presque dire des chemins royaux...

Je crois que c'est Ptolémée qui disait qu'il n'y avait pas de voie royale en mathématiques, c'est vrai et ce n'est pas vrai ; c'est-à-dire que dans cette forêt vierge des mathématiques, il y a quand même des chemins : les "Mutter-Structur" de Bourbaki. Ces structures-mères se sont dégagées peu à peu et ce sont les chemins royaux. Ce sont même de grandes autoroutes à travers la forêt vierge ! Donc, il y a quand même des chemins privilégiés et c'est une forêt vierge qui n'est pas homogènement embroussaillée. Mais, il y a aussi des points forts, des points de résistance, des points faibles et tout le travail du mathématicien consiste à éprouver la résistance de ces murailles qui sont devant lui et à flairer quels vont être les points plus faibles que les autres, les points de passage...

Jacques Nimier : Et dans quel but ?

Jacques Riguet : Bien sûr, le but c'est toujours de résoudre un certain nombre de problèmes, mais encore une fois ce qu'on trouve en cherchant un certain problème est plus intéressant, plus fructueux aussi que la solution du problème lui-même... Il y aurait une classification des problèmes mathématiques à faire. Il est bien clair, par exemple, que les problèmes d'arithmétique, beaucoup de problèmes d'arithmétique sont des problèmes qui, une fois résolus, ne vont rien apporter ; car les résultats seront des choses tellement particulières que ça ne va rien vous apporter. Mais, par contre, il y a des problèmes qui vont vous apporter une floraison de théorèmes nouveaux et la structuration de tout un domaine.

Le rêve de condenser, relier pour combler une insatisfaction qui remonte à très loin

Jacques Nimier : Qu'est-ce qui fait que, finalement, vous ayez choisi telle partie, tel domaine ?

Jacques Riguet : J'ai toujours été, au départ, très préoccupé par les aspects logico-mathématiques et l'objet de ma thèse a été d'essayer de dégager cette partie de la théorie des relations qui avait été surtout travaillée par les logiciens, d'en faire une étude mathématique purement algébrique pour la dégager de cette espèce de gangue philosophico-logique qui avait été l'enveloppe à peu près obligée de toutes les études qui avaient été faites sur ce sujet-là...

Et à cette époque, j'ai cherché quelque chose qui a été trouvé depuis et qui est la théorie des catégories ; c'est-à-dire, que j'ai commis une erreur à cette époque-là, c'est de croire que ce qu'on fait maintenant avec la théorie des catégories, ça pouvait être fait d'une manière intrinsèque sur des ensembles doués de structures. Or, je me suis rendu compte depuis qu'on ne peut jamais tirer grand-chose de l'étude d'un objet mathématique. Pour comprendre ce qu'est un certain objet mathématique, il faut le comparer avec d'autres objets plus ou moins semblables. Et c'est justement ça que fait la théorie des catégories ; une catégorie, après tout, c'est une collection d'objets mathématiques et ces objets sont reliés entre eux par des morphismes, c'est-à-dire qu'il y a certaines liaisons entre ces objets-là. Et mon erreur a été de croire que la théorie des relations allait être suffisante pour étudier les structures mathématiques.

On ne peut étudier une structure en soi, enfin on peut, mais ce n'est pas comme ça qu'il faut faire : étudier une structure, c'est la comparer avec d'autres structures et c'est la raison pour laquelle maintenant j'étudie la théorie des catégories... (*rires*).

Jacques Nimier : Est-ce que vous avez l'impression qu'il y a quelque chose qui vous a poussé à étudier ça plutôt qu'autre chose en mathématiques ?

Jacques Riguet : Ah oui !... parce que si vous voulez, ça résultait d'une certaine insatisfaction, d'une insatisfaction qui remonte très loin.

Jacques Nimier : Vous pourriez m'expliquer un peu ça ?

Jacques Riguet : ... je crois que, n'est-ce pas, je vous avais dit que, très tôt, j'avais été attiré et émerveillé à l'école secondaire par le parallélisme entre algèbre et géométrie. Mais les méthodes qu'on employait à ce moment-là me satisfaisaient très peu parce qu'on ne faisait pas d'algèbre sur les objets géométriques eux-mêmes, on introduisait un système de coordonnées, on introduisait des choses tout à fait extérieures aux objets mathématiques et quand j'ai été à la Faculté, c'est avec ravissement que j'ai appris les méthodes vectorielles, comme on disait à l'époque ; mais aussi tout ce qu'il y a derrière, c'est-à-dire le calcul des formes extérieures, enfin tout ce qui est géométrie différentielle extérieure intrinsèque.

Jacques Nimier : Votre insatisfaction résultait du fait qu'on n'arrivait pas à rester dans la géométrie, indépendamment du reste...

Jacques Riguet : Oui, oui, c'est ça... c'est ça, on n'arrivait pas à calculer directement sur les objets géométriques, oui, et, au fond si vous voulez, la théorie des relations, c'est quelque chose qui permettait de calculer directement sur des objets qui n'étaient pas nécessairement géométriques, et qui pouvaient être un peu n'importe quelle structure. Mon idée, c'était ça, n'est-ce pas, au fond c'était ça... trouver une géométrie intrinsèque. Et alors, mon idée c'était de faire ça, non plus seulement pour des structures géométriques, mais pour des structures plus ou moins arbitraires... et c'est à ce moment-là que j'ai découvert Bourbaki, et surtout le fascicule "Théorie des ensembles" de Bourbaki.

Je me suis basé beaucoup sur ce fascicule pour ma thèse. Ensuite, il y a eu la liaison avec la théorie des graphes, avec beaucoup de recherches anglo-saxonnes, la combinatoire aussi... mais dans tout ça, voyez-vous, je voulais retrouver une espèce d'unité à partir de la théorie des relations.

Jacques Nimier : C'est important pour vous, ce problème de l'unité ?

Jacques Riguet : Ah ! oui, oui, parce que c'est toujours cette espèce de rêve que j'ai en moi de condenser, d'avoir un instrument qui me permette de condenser au maximum, qui me permette d'avoir prise sur un immense empire, si vous voulez, au moyen de tout petits germes, de tout petits embryons... n'est-ce pas.

Oui, parce que quand on parlait, par exemple, de Bourbaki et de toute cette mise en ordre des mathématiques, il faut bien se rendre compte qu'il y a eu un énorme progrès du point de vue condensation. Je ne sais pas si vous vous rendez compte, le nombre de volumes imprimés qu'on peut résumer d'un seul coup à l'aide d'un simple tome de Bourbaki... un énorme travail de condensation.

Entretien avec le Professeur René Thom

René Thom (1923-2002) était un mathématicien et épistémologue français, fondateur de la théorie des catastrophes. Il a reçu la médaille Fields en 1958.

Jacques Nimier (1929-2014) était un psychologue et professeur des universités français.

La nostalgie de l'époque des triangles

Jacques Nimier : ... vous souvenez-vous de vos premières tentatives de recherches ?

René Thom : Oui, j'ai transposé tous les théorèmes connus de la géométrie de R^3 dans la géométrie de R^4 ça a été, si j'ose dire, ma première tentative de faire quelque chose d'un peu original ; mais c'était pour moi une façon d'arriver à comprendre comment était fait, disons un système de deux plans dans R^4 etc. et je crois que j'étais arrivé à une très bonne intuition à cette époque, et je voyais déjà dans l'espace à quatre dimensions à l'âge de dix, onze ans.

Jacques Nimier : Et vous avez d'autres souvenirs de cette période ?

René Thom : C'est, je crois, à peu près la seule chose qui m'ait laissé un souvenir. Et puis aussi, le souvenir de l'espèce de scandale intellectuel que j'ai ressenti quand mon professeur de cinquième a dit qu'on pouvait calculer le nombre π. L'idée qu'on pouvait calculer π par des méthodes théoriques, c'est quelque chose qui, à l'époque m'a paru extrêmement mystérieux et fascinant.

Jacques Nimier : Oui, pourquoi ?

René Thom : On s'était habitué à mesurer π avec des ficelles autour de boites cylindriques, n'est-ce pas, et l'idée qu'il y avait des procédés théoriques permettant ce calcul était quelque chose pour moi, de radicalement neuf. Ca vous paraît tout banal, mais pour moi, à l'époque, ça ne l'était pas...

Ensuite, je crois que c'était en troisième, on faisait de la géométrie élémentaire ; mon professeur n'était pas un homme particulièrement brillant, mais il avait réussi à susciter mon intérêt et j'ai vraiment beaucoup aimé ça, je faisais des problèmes très compliqués de construction de triangles, etc. et c'est un peu, au fond, par nostalgie de cette époque que je défends la géométrie élémentaire contre les modernistes. Je pense, quant à moi, que si l'on persiste dans la voie actuelle, on va se priver d'une méthode de sélection qui était vraiment excellente et je ne serais pas étonné qu'on constate très certainement dans les années qui viennent, une certaine baisse de niveau des mathématiques en France à la suite de l'abandon de la géométrie euclidienne ; ça n'aurait rien d'étonnant.

Jacques Nimier : Vous avez parlé de nostalgie de cette période, qu'est-ce que représentait pour vous cette période ?

René Thom : ... Disons que c'était une certaine fraîcheur initiale, une espèce de volonté d'aller jusqu'au bout des possibilités de son esprit... l'idée qu'il n'y avait pas de problème que je ne puisse faire... après évidemment on a mis de l'eau dans son vin !... mais c'était ça : l'idée qu'il n'y avait pas de problème dont je ne pouvais venir à bout dans le domaine de la géométrie.

Jacques Nimier : Ca n'était pas la même chose dans les autres domaines ?

René Thom : Non, vous savez l'algèbre ne m'a jamais beaucoup intéressé.

Jacques Nimier : Et déjà vous sentez qu'à cette époque-là, il y avait une différence entre les deux ?

René Thom : Oh ! oui, bien sûr, la géométrie analytique, à partir du moment où on en a fait, m'a paru être une bonne technique, mais ça n'a rien de particulièrement inspirant, tandis que le problème de géométrie c'est vraiment quelque chose de tout à fait... spécial, beaucoup plus énigmatique.

Jacques Nimier : Enigmatique ?

René Thom : Ah ! oui, c'est quelque chose d'énigmatique, un problème de géométrie. Autrement dit, en géométrie, il n'y a pas d'heuristique, n'est-ce pas, il faut tout reprendre à zéro en fonction du problème, contrairement à ce qui se passe en algèbre.

La vocation de mathématicien

René Thom : ... Voilà à peu près ce que je peux dire sur ma vocation de mathématicien, voyez que ce n'est pas très fourni ! Quant au premier théorème que j'ai démontré par mes propres moyens, si j'ose dire, je crois que c'était l'équivalence de la définition bifocale et de la définition par focale et directrice des coniques, par une méthode de géométrie élémentaire ; je l'avais montré à mon professeur qui pensait qu'elle était déjà connue, ce qui était très vraisemblable. Parce que la méthode traditionnelle était un peu lourde, elle ne me plaisait pas. Le passage de la définition unifocale à la définition bifocale est quelque chose d'assez mystérieux et j'étais arrivé par une construction dont je me souviens encore très bien actuellement...

Jacques Nimier : Vous souvenez-vous de l'époque où vous vous êtes dit : "je veux faire des mathématiques" ?

René Thom : Bien... la chose paradoxale c'est que, au fond, jamais je n'ai voulu faire des mathématiques. Quand je suis arrivé à l'Ecole Normale, j'ai expliqué au sous-directeur de l'époque qui était Georges Bruhat, qu'évidemment j'étais entré comme mathématicien mais que ce qui m'intéressait c'était de faire de la philosophie des Sciences, comme en faisait à l'époque Cavaillès et tous ces gens-là... Alors, il a levé les bras au ciel et il a dit : "ne faites surtout pas ça, passez-moi votre agrégation tout de suite et ne vous occupez pas de philosophie des sciences !" et je pense que dans un certain sens, il avait raison ; on ne doit faire de la philosophie que quand on a assuré son existence par des méthodes plus standard et plus routinières. Alors, j'ai fait des mathématiques. A l'Ecole Normale, j'ai essentiellement suivi le séminaire de Cartan qui nous enseignait beaucoup de choses et... en 1946, j'ai pu obtenir un poste au C.N.R.S. et j'ai suivi Cartan à Strasbourg pour une année ou deux. Cartan est revenu à Paris, mais moi je suis resté à Strasbourg parce que je m'y plaisais. C'est surtout au séminaire d'Ehresmann que j'ai réellement appris la nouvelle topologie, la topologie telle qu'elle se créait à l'époque. Les années de 45 à 50 ont été des années extraordinaires pour la topologie algébrique parce qu'on a découvert une quantité énorme d'êtres nouveaux, de techniques nouvelles, etc. la cohomologie, les fibrés, l'homotopie. Et c'est dans ce flot que j'ai fait ma thèse qui m'a d'ailleurs pris un certain nombre d'années puisque je ne l'ai finie qu'en 1951. Je serais tenté de dire... (peut-être qu'on se fait des illusions sur soi-même, n'est-ce pas) mais je serais tenté de dire que je ne me considère pas réellement comme ce qu'on appelle un grand mathématicien, en ce sens que je n'ai pas le goût de la structure mathématique en tant que telle. Quand je vois mes collègues, je ne veux pas citer de noms mais les exemples fourmillent tout autour de moi, ils ont le goût de la belle structure, la structure riche, raffinée, dans laquelle on peut faire des tas de choses, élucider les relations entre ceci, cela : moi, personnellement, ça ne me tente pas beaucoup ce genre de choses... je ne suit pas non plus le généraliste à outrance comme l'était mon collègue Grothendieck...

Les deux types de mathématiciens

René Thom : Un collègue américain, dont je tairai le nom ici, dit qu'il y a deux types de mathématiciens : le mathématicien qui fore des puits très profonds pour y trouver la gemme, la pierre précieuse qu'il étudiera à loisir et dont il explicitera toutes les beautés, et puis le bulldozer qui balaie toute la surface. Eh bien, si on accepte cette vision des mathématiciens, je ne suis d'aucun des deux, alors peut-être que je ne suis pas mathématicien du tout de ce point de vue...

Jacques Nimier : Vous vous sentez comment alors ?

René Thom : Ah ! je ne sais pas, disons que ce qui m'a intéressé en mathématiques ce sont surtout des propriétés assez générales, plus que l'étude de structures spécifiques... mais quand même pas avec l'esprit systématique de Grothendieck par exemple.

Jacques Nimier : Ni bulldozer, ni creuseur de trou...

René Thom : Ni bulldozer, ni creuseur de trous (*rires*)... non, je pense que mon succès mathématique doit beaucoup aux circonstances historiques : j'ai fait ma thèse à une époque où effectivement il y avait tout un matériel neuf, une époque de floraison assez extraordinaire. J'ai profité du mouvement, puis par la suite, j'ai fait des choses plus tournées vers l'analyse, la théorie des applications, les ensembles stratifiés, mais à mon sens c'est plus technique et je suis sûr que pour la plupart des mathématiciens, c'est moins intéressant bien que, en un certain sens, ce soit plus important je pense...

La théorie des catastrophes

Jacques Nimier : C'est vous qui avez donné le nom de théorie des catastrophes à vos travaux ?

René Thom : Pas exactement en ce sens que dans mon livre, j'ai introduit la notion de point régulier opposé à point de catastrophe.

Jacques Nimier : C'est quand même vous qui avez introduit le mot de catastrophe...

René Thom : J'ai introduit le mot de catastrophe dans un sens un peu spécial, oui.

Jacques Nimier : Comment vous est venue l'idée de ce mot ?

René Thom : Tout simplement parce que je voulais exprimer l'idée d'une distinction fondamentale, la distinction des topologues entre ouvert et fermé. Un ouvert ça représente, si vous voulez, quelque chose comme un état, un état régulier, une sorte d'équilibre local des dynamiques qui s'y trouvent, tandis que le fermé au contraire, exprime un lieu de points où il se produit quelque chose, une discontinuité. Alors, je suis parti de cette idée que les fermés les plus généraux ne sont pas très intéressants, mais qu'il y a des fermés plus réguliers en quelque sorte qui apparaissent de manière quasi inévitable... Si on fait des hypothèses sur ce que l'on pourrait appeler la dynamique ambiante, c'est un peu une sorte de généralisation de l'idée de défaut en physique. Dans un milieu ordonné comme un cristal, il y a une structure régulière mais qui s'arrête parfois sur certaines sous-variétés qu'on appelle les défauts ; c'est un peu la même idée.

Alors je voulais exprimer cette idée qu'il y avait des sous ensembles exceptionnels qui étaient associés à des irrégularités de la dynamique et c'est pour cela que j'ai appelé ça des catastrophes ; j'aurais pu en effet prendre une terminologie beaucoup plus neutre, ça m'aurait évité bien des ennuis...

Jacques Nimier : Mais vous avez choisi ce mot-là.

René Thom : Je l'ai choisi en ce sens que j'ai parlé de points de catastrophe opposés à points réguliers ; l'opposé naturel de points réguliers, c'est points singuliers évidemment, mais le point de catastrophe c'est encore différent, c'est en principe différent d'un point singulier...

Jacques Nimier : Qu'est-ce qu'une catastrophe pour vous ?

René Thom : Supposons que j'aie un espace dans lequel il se passe des choses. Je regarde ce qui se passe et je divise les points en deux catégories : les points réguliers où il ne se passe rien à première vue, c'est-à-dire que tous les observables sont continus en ce point ou au contraire, il s'y passe quelque chose : alors il y a au moins un observable qui est discontinu. Il y a discontinuité observable en ce point-là, alors dans ce cas-là je dis que c'est un point de catastrophe, c'est tout... Alors pourquoi ce mot ? J'aurais pu évidemment parler simplement de discontinuité (c'est ce qu'on m'a reproché par la suite) mais je voulais donner l'idée d'une dynamique sous-jacente, d'une dynamique ambiante qui engendre le sous-ensemble de catastrophes et c'est pour ça que j'ai introduit ce mot qui d'ailleurs, avait été déjà utilisé par les physiciens dans une acception pas tout à fait semblable, mais aussi neutre en tout cas ; les physiciens parlaient déjà, en théorie quantique des champs, de la catastrophe infrarouge, de la catastrophe ultra-violette. C'étaient des catastrophes qui n'avaient jamais tué personne, comme je l'ai écrit !

Jacques Nimier : Quelque chose de sous-jacent qui surgit...

René Thom : C'est ça, oui, enfin, le type même de la catastrophe, si vous voulez ; c'est disons, une feuille de papier que vous pliez et qui, à un moment donné, attrape un angle, n'est-ce pas ; qui reste régulière et puis tout à coup il s'y forme un pli, un pli caractérisé par une discontinuité. C'est ce type de phénomène que j'ai voulu systématiser.

Qu'est-ce que les mathématiques ?

Jacques Nimier : Qu'est-ce que représentent pour vous les mathématiques ?

René Thom : Ah ! Ca représente essentiellement le langage théorique universel. C'est-à-dire qu'à mon avis, les seules possibilités rigoureuses d'accéder à une pensée ayant validité universelle se font par les mathématiques ou par des lois mathématiques ; autrement dit, je ne pense pas qu'on puisse, dans les sciences, avoir une théorisation à validité réellement universelle fondée uniquement sur des concepts exprimés par des mots du langage ordinaire, si ces concepts ne sont pas capables de s'exprimer mathématiquement en terme d'entités fondamentales comme l'espace et le temps ; ce qui est le cas en physique, n'est-ce pas ?

En physique, les concepts peuvent s'exprimer mathématiquement à partir de données de l'espace et du temps, de données spatio-temporelles. Des concepts qui ne permettent pas ce genre de réduction seront toujours suspects et l'espoir de la théorie des catastrophes précisément, c'est qu'il existe dans les univers conceptuels des espèces de germes d'analyticité locale autour desquels on puisse faire une sorte de théorisation mathématique. C'est l'espoir qu'il puisse y avoir quelque chose comme une structure analytique universelle dans laquelle on travaille, ce qui est le cas en physique.

En physique on a une structure analytique universelle, parce qu'on a le groupe d'invariances de la physique : groupe de Lorentz, groupe de Galilée, etc. et ces groupes permettent en quelque sorte de trivialiser tout le monde, tout l'univers parce qu'ils agissent transitivement et de cette manière, il y a une sorte de platitude universelle avec laquelle on peut opérer, on peut faire des mathématiques quantitatives ; je ne pense pas que cette situation-là puisse être généralisée dans d'autres disciplines, mais on peut espérer qu'il y ait localement, dans les univers sémantiques en quelque sorte dans lesquels travaillent certains concepts, des situations à caractère localement analytique qui permettent d'énoncer des situations intéressantes et à caractère universel ; c'est si vous voulez, la philosophie sous-jacente à la théorie des catastrophes.

Jacques Nimier : Autrement dit, c'est surtout ce caractère universel qui vous intéresse.

René Thom : Oui, oui, bien sûr.

La réalité est mathématique

Jacques Nimier : Je rapprocherai ça de ce que vous me disiez tout à l'heure : lorsque vous étiez en classe, vous pensiez déjà qu'il y avait possibilité de résoudre tous les problèmes.

René Thom : Oui, oui, c'est certain, je l'ai d'ailleurs écrit : il n'y a de théorisation que mathématique. De ce point de vue-là, je suis un impérialiste mathématique, c'est ce qu'on me reproche dans les autres disciplines... Vous avez sans doute entendu parler des controverses actuelles sur la théorie des catastrophes ? Je pense que les gens n'ont pas réalisé le côté subversif de cette théorie. Le jour où ils l'auront réalisé, on pourra s'attendre à ce qu'il y ait des résistances encore beaucoup plus fortes parce que, au fond, les mathématiques, vis-à-vis des autres disciplines, ont accepté un rôle purement routinier.

Vous avez des mathématiciens dans les laboratoires de biologie ou même dans les laboratoires de sciences sociales, on leur demande de faire de la statistique, un point c'est tout. Mais c'est le spécialiste local qui, évidemment dirige toutes les opérations ; la mathématique est vue uniquement dans un rôle ancillaire dans les autres sciences : les sciences dites expérimentales ou humaines.

Jacques Nimier : Un instrument...

René Thom : Oui, comme un instrument et moi, personnellement, je pense que c'est une situation anormale et que les mathématiques proprement comprises peuvent servir de guide théorique dans un grand nombre de disciplines. C'est en ce sens que je crois que les mathématiques ont un très grand avenir dans la mathématisation des sciences, mathématisation qui ne se fera peut-être pas selon le modèle de la physique, avec des résultats peut-être plus flous et plus mous que ceux de la physique, mais qui n'en ont pas moins un certain intérêt...

Jacques Nimier : Est-ce que les mathématiques sont encore autre chose pour vous ?

René Thom : Dans la mesure où c'est une pensée universelle c'est aussi une voie d'accès à la réalité ; autrement dit, pour moi, l'ontologie est (dans la mesure où j'ai une métaphysique, ce qui reste à voir évidemment) assez platonicienne ou pythagoricienne ; et en ce sens, je pense que le fond des choses dans le monde est mathématique même là où apparemment il n'y en a pas.

Jacques Nimier : La réalité est mathématique ?

René Thom : Je pense qu'on peut dire que la réalité est mathématique, oui. Mais ce n'est peut-être pas la mathématique que nous connaissons, il faudra évidemment se livrer à des extensions assez considérables par rapport aux mathématiques connues pour édifier des mathématiques pertinentes pour la biologie, la psychologie ou des sciences de ce genre...

Les périodes de possession

Jacques Nimier : Quand vous êtes dans votre bureau, chez vous, en train de faire des mathématiques, quel sentiment avez-vous ?

René Thom : Eh bien ! je vous avoue que, depuis pas mal d'années, je ne fais plus de mathématiques en ce sens-là. Il m'arrive encore de m'intéresser parfois à des problèmes de mathématiques, mais ça devient de plus en plus rare. Je me suis intéressé beaucoup à des disciplines périphériques, comme la biologie, la linguistique et maintenant la géologie. Je consacre plutôt mon activité volontaire à ces disciplines expérimentales plutôt que de m'occuper de mathématiques proprement dites. Alors les mathématiques s'il m'arrive d'en faire, c'est plutôt par nécessité professionnelle qu'autre chose ; mais ça évidemment, c'est une évolution assez récente, des dix dernières années.

De toutes manières, il est bien connu qu'après 35 ans, un mathématicien ne peut plus rien faire de bon, et la coutume, la croyance traditionnelle est, je crois, assez largement fondée ; alors dans ces conditions autant faire autre chose que des mathématiques !

Jacques Nimier : Mais est-ce que vous vous souvenez de ce que vous viviez à ce moment-là ?

René Thom : Ah ! oui, bien sûr ; j'ai connu aussi ces périodes de possession par un problème, bien sûr j'en ai connues. J'ai connu quelques périodes comme ça dans ma vie, mais finalement pas très nombreuses.

Jacques Nimier : Des périodes de possession ?

René Thom : Oui, des périodes où un problème vous accapare tellement qu'on devient presque incapable de penser à quoi que ce soit d'autre... Mais comme je vous le disais c'est devenu très, très rare dans mon cas...

Une période de crise

Jacques Nimier : Ce n'est plus possible...

René Thom : Peut-être que ce n'est plus possible oui ; je n'ai plus assez d'intérêt pour les problèmes proprement mathématiques pour me laisser accaparer par eux. Je pense que la plupart des mathématiciens connaissent dans leur existence un moment de crise où ils sont pris de doute sur la valeur de ce qu'ils ont fait. Surtout en face de la stérilité montante qui arrive avec l'âge, il est très difficile d'éviter ce genre de crise... Moi, j'ai réagi en m'intéressant à autre chose que les mathématiques ; je pense que ce n'est pas une mauvaise méthode.

Jacques Nimier : C'est une crise vraiment ?

René Thom : Oui, ça se présente un peu comme une crise, je crois. Enfin, je ne sais pas si on peut en tirer des lois générales, mais ça se présente un peu comme une crise, oui. Chez moi, cette crise s'est présentée vers les années 58-60. Au fond, je crois qu'il en est en mathématiques comme dans les autres disciplines et c'est la même situation que celle que décrivait Einstein à Valéry. Einstein était allé rendre visite à Valéry, ou Valéry l'avait invité et là, évidemment, toujours très curieux de comprendre les mécanismes de la relativité, Valéry a posé des tas de questions à Einstein et, en particulier, il lui a demandé ; mais enfin, maître, est-ce que vous vous relevez la nuit pour noter vos idées sur un petit carnet ? Et Einstein a laissé tomber : “oh ! vous savez des idées, on en a deux ou trois dans sa vie !"

Bien ! c'est un peu mon impression aussi, pour mon ceuvre mathématique. Je crois que j'ai eu deux ou trois idées en mathématiques et le reste ce n'est jamais que de l'élaboration technique... et encore, parmi ces idées, il y en a quelques unes qui étaient presqu'évidentes...

La répulsion d'entrer dans certaines parties des mathématiques

JACQUES NIMIER : Vous n'avez pas une certaine fierté ?

RENÉ THOM : Oui, bien sûr, certains travaux peuvent vous donner un sentiment de fierté, ça c'est possible. Je suppose que MM. Feit et Thomson, quand ils ont démontré que tout groupe d'ordre impair est résoluble en ont tiré une légitime fierté...

Mais pour en revenir aux aspects affectifs en mathématiques, je crois que ce qui compte, c'est la réaction quasi-affective du mathématicien vis-à-vis de certaines théories. Il y a des théories mathématiques dans lesquelles je n'ai jamais pu entrer parce que j'ai eu quelque chose comme une espèce de répulsion au départ et je n'ai jamais pu la surmonter par la suite, je pense par exemple à la théorie des groupes de Lie ; l'essentiel de l'analyse fonctionnelle aussi, c'est une branche des mathématiques qui me répugne profondément. Qu'est-ce que je pourrais encore vous citer comme théories ? L'algèbre, très très abstraite, type algèbre non-commutative, ça non plus ça ne me dit pas grand chose.

JACQUES NIMIER : Qu'est-ce que vous ressentez à ce moment-là ?

RENÉ THOM : J'ai l'impression que pour entrer là-dedans, il faudrait d'abord que je travaille, je suis paresseux, ensuite, il faudrait que je comprenne mieux la motivation, n'est-ce pas ? En général, beaucoup de ces théories ne m'apparaissent pas comme suffisamment motivées : je pense que c'est là le fond du problème, peut-être que c'est une question de pédagogie. Si l'on avait pu me trouver une bonne pédagogie pour ces théories avec une motivation convenable, j'y serais peut-être entré...

Les théories trop courtisées

Jacques Nimier : C'est tout de même un mot très fort. répulsion.

René Thom : Oui, c'est un mot fort mais, vous savez, c'est presque un mécanisme quasi sociologique ; je pense à la théorie des groupes de Lie : Bourbaki, à l'époque, ne parlait que de ça, dans les années 1955 et tous les gens étaient très excités au fond, moi, j'ai toujours eu un peu cet espèce de sentiment que, quand une théorie est trop adulée, je préfère ne pas m'en occuper ; c'est comme quand une femme est trop belle, elle a trop de soupirants, eh bien, en général, ça m'apparait comme un obstacle insurmontable. Il y a des théories qui ont été trop courtisées et quand une théorie était trop courtisée, je m'en écartais...

Jacques Nimier : Pourquoi ?

René Thom : Ah ! je ne sais pas ; peut-être parce que justement j'avais le sentiment de n'être pas à la hauteur de la compétition, d'une part, et puis peut-être aussi le sentiment qu'on pouvait faire aussi bien ailleurs dans des zones qui étaient moins connues.

Jacques Nimier : Vous comparez les mathématiques à une femme...

René Thom : Oui, ce n'est peut-être pas absolument dépourvu de fondement... il y a des théories anguleuses et des théories rondes. Enfin la chose n'est peut-être pas correcte, je dirais plutôt qu'il y a des théories propres et des théories sales, et moi j'ai toujours plus de sympathie pour une théorie sale. Les théories propres sont les théories où les choses se présentent bien, où les concepts sont clairement définis, les problèmes plus ou moins bien définis également. Tandis que les théories sales sont les théories où on ne sait pas très bien où l'on va, on ne sait pas comment organiser les choses et où sont les principales directions etc. De ce point de vue là, en effet, je n'ai jamais été Bourbakiste, parce que Bourbaki aime les choses propres ; moi, je pense qu'il faut se salir les mains et même davantage parfois en mathématiques.

Jacques Nimier : Davantage ?

René Thom : Oui, enfin, je veux dire plus que les mains (*rires*).

Etre à la frontière

JACQUES NIMIER : Et les catastrophes là-dedans ?

RENÉ THOM : Ah ! Eh bien, les catastrophes ne font pas partie des mathématiques. Pour moi, la théorie des catastrophes n'est pas une théorie de la mathématique. Si la théorie des catastrophes se développe, ce qui est évidemment un postulat, elle donnera naissance à des théories de la mathématique qui seront des outils pour précisément organiser les modèles que la théorie des catastrophes se propose d'édifier.

C'est comme ça que je vois les choses, la théorie des catastrophes, c'est un générateur de modèles pour, en principe, les sciences les plus diverses. A priori, je ne vois pas de restrictions au choix des sciences qui peuvent admettre des modèles de style catastrophique ; mais bien entendu, ces modèles ont un caractère assez vague et approximatif au départ et on pourra essayer de les raffiner et dans l'élaboration des modèles on aura sans doute besoin de nouveaux outils mathématiques ; ces nouveaux outils mathématiques introduiront probablement de nouveaux problèmes.

C'est en ce sens que je vois la théorie des catastrophes comme quelque chose à la frontière des mathématiques, la frontière entre les mathématiques et les disciplines expérimentales, les disciplines d'application.

JACQUES NIMIER : Au fond, c'est votre place d'être à la frontière ?

RENÉ THOM : Peut-être oui, ce n'est pas pour rien que j'ai fait mon travail mathématique essentiel sur la notion de bord (*rires*), le bordisme, oui ; j'écris en ce moment un papier qui s'appelle “aux frontières du pouvoir humain, le jeu”.

Bord, frontière, limite, singularité

JACQUES NIMIER : D'où vient cet intérêt pour les bords, les frontières, les milieux ?

René Thom : Mais c'est tout à fait naturel : quand vous êtes dans un convexe, vous savez parfaitement que votre convexe est engendré par les points extrémaux. Donc dans beaucoup de situations, si vous connaissez les situations des points extrémaux, vous êtes capable de reconstituer le reste. C'est vrai non seulement en mathématiques, mais même dans des situations tout à fait générales.

Par exemple, dans un milieu socio-culturel, si vous regardez ce dont parlent les journaux, ce sont toujours des situations extrémales : le plus beau crime, la plus grande catastrophe, etc. la fascination de l'extrémal est quelque chose de tout à fait fondamental dans l'esprit humain.

Jacques Nimier : Mais pourquoi est-ce que ça fascine ?

René Thom : Mais (*rires*)... Pour atteindre les limites du possible, il faut rêver l'impossible, et c'est réellement l'interface entre le possible et l'impossible qui est important parce que si nous le connaissons, nous connaissons exactement les limites de notre pouvoir.

Dans un système dynamique régi par un potentiel, comme par exemple, les variétés de niveau, les lignes de pente d'un paysage, ce qui est important c'est la frontière du bassin : connaître comment se répartit l'espace dans les différents bassins entre ses différents attracteurs. Toute la dynamique qualitative est un problème de frontière.

Pour cela, il faut caractériser les points, les régimes asymptotiques qui sont les attracteurs et puis caractériser les frontières qui séparent les bassins des différents attracteurs.

Je pense que ces deux types de problématique comme diraient nos collègues littéraires, on les retrouve un peu dans toutes les situations, dans toutes les disciplines ; il y a les régimes stables asymptotiques qu'il faut caractériser et ensuite étudier l'approche des régimes instables, ce qui est un problème de frontière. C'est le problème du déterminisme finalement. Une situation est déterministe si la frontière qui sépare les bassins des différentes issues est assez régulière pour pouvoir être décrite ; et si on peut localiser la donnée initiale par rapport à cette frontière ; alors là, le problème est résolu. Mais si la frontière est fluctuante, floue, etc. alors là, on est réduit à des méthodes statistiques et c'est beaucoup plus pénible. Il n'y a pas besoin de parler beaucoup pour justifier les problèmes de frontières...

Jacques Nimier : Ce n'est pas tellement le problème de justifier, c'est le fait de voir l'intérêt que vous portez spécialement à ce même problème un peu partout...

René Thom : Oui, oui, c'est exact...

Jacques Nimier : Il y avait donc quelque chose en vous qui motivait cet intérêt...

René Thom : Oui, les frontières évidemment, c'est important en soi... Mais c'est un cas particulier de singularité, n'est-ce pas ? Je parlais tout à l'heure des défauts, il est clair que les défauts ne sont pas des frontières, mais c'est néanmoins très intéressant.

Jacques Nimier : Quelle différence faites-vous entre défaut et singularité ?

René Thom : Défaut, c'est un mot qui vient essentiellement de la cristallographie et de la métallurgie ? Vous avez un milieu qui est parfaitement cristallin, mais qui, à certains endroits présente des décrochements ou des fractures ou des parois, toutes ces irrégularités locales, ça s'appelle des défauts ? La théorie des défauts est une théorie qui est mathématiquement très intéressante et, en fait, on peut presque même prétendre que la théorie de la cohomologie y a pris naissance... en un certain sens.

Jacques Nimier : Avez-vous l'impression que vous vous êtes toujours intéressé au même genre de problèmes : défauts, limites, bords, frontières ?

René Thom : J'avoue que ça m'est un peu difficile de remonter, disons, vingt-cinq ans en arrière. je crois qu'à l'époque, j'étais réellement plus strictement mathématicien, c'est vrai ; j'avais dû apprendre les mathématiques et mon premier travail scientifique, pour ma première publication portait sur la théorie de Morse. Et c'était aussi, un peu, une correspondance entre défauts et singularités... et la décomposition cellulaire d'un espace. Il y avait là presque en germe aussi cette idée que l'étude des singularités donne un moyen d'accès pour comprendre un espace ; chaque singularité, en somme, se déploie dans un espace qui lui est propre et qu'elle traîne avec lui, en quelque sorte. Alors dans le cas d'un minimum, d'un attracteur, vous avez tout un ouvert de trajectoires qui tend vers cet attracteur. Mais pour les singularités différentes, par exemple pour une singularité de type col, il y a les séparatrices, etc. Il y a toujours une sorte de configuration satellite associée à une singularité...

Jacques Nimier : ... qui caractérise presque...

René Thom : ... qui caractérise la singularité, oui. Et à ce moment-là, l'espace total devient la réunion de toutes les configurations satellites de ces singularités.

Un univers dans lequel il y aurait l'éternel retour

Jacques Nimier : Et au cours de votre scolarité est-ce que c'était, sous une forme ou sous une autre, des problèmes qui vous intéressaient ?

René Thom : Oh ! à ce moment-là, j'étais beaucoup plus scolaire, je pense. Je ne me souviens pas d'avoir pensé des choses sous cette forme.

Mais je me souviens que vers dix-sept ans, j'ai commencé à m'intéresser à la dynamique. Je ne me souviens plus à quelle occasion j'avais remis un papier à mon professeur de math-élem, où je parlais de l'éternel retour vu d'un point de vue dynamique, les théories de l'éternel retour...

C'était l'idée qu'on pouvait avoir un espace-temps, un univers dans lequel il y aurait l'éternel retour, c'est-à-dire où la dynamique serait périodique, mais je crois que c'est à peu près la première fois que j'ai réellement pensé les choses en terme de dynamique...

Sous-titres anglais d'une interview de

François Jacob

par Web of Stories (2008)

2008 ?

I was born in Nancy, Meurthe-et-Moselle. My father was a businessman. He came to Paris, well, we all came to Paris when I was three and a half. And that's it. I grew up in Paris. I went to the Lycée Carnot, from the 9e to the Math-Elem included. After which I went to university, to the PCB, to the Medical Faculty where I did the first two years. The second year was during the first year of the war. I hadn't been mobilised yeSo during that first year of the war, I did medicine examinations. And in 1940 I left.

It was something that I found very restricting. There was always the threat of being tested, of being sent to the blackboard. There were tests almost once a week. There was a sort of competition between the students which I didn't really find pleasant. It wasn't bad at these competitions, but I didn't particularly enjoy them.

And did you have specific teachers that stood out, science or literature or philosophy teachers, that struck you by their teachings, by their classes ?

Not specifically. I had some very good teachers. Many were complete eccentrics. The majority were interesting. A few were very very boring. So there were the characters that you always find in cases like these : the guy who's deaf, who doesn't listen, who... but really nothing very specific.

Whereas on the other hand in medicine, you are talking about a person from elsewhere whom I discovered, Mr. Hovelacque. You say it was your first scientist...

He wasn't really a scientist, he was an anatomist. He was an exceptional character. For a start he was physically extraordinary. He looked like an El Greco. He was very tall, very thin, with a beard. He absolutely looked like an El Greco cardinal, without the hat. And so, he was absolutely astonishing. He was a remarkable teacher. Anatomy, it isn't exactly fun, but he had a way... He was able to draw anything with his two hands on the board, any bone of the skeleton. One day, he said to me : "Jacob, don't ever get married, no wife or you are done for !"

But it was a form of science, a little traditional science...

It was a form of science, yes, but it was a completely descriptive science. He would take a bone, throw it in the air- one of the little wrist bones- and say : right or left ? during the anatomy exam, which was nonetheless quite delicate.

And he is the one that has most impressed in your medical studies among the other teachers you had during those two years, none of which had impressed you so strongly. ?

He was the most outstanding individual, he was the most extravagant if you will, and the purest. During the War he had been a Zouave captain... the First World War. After four years he came back, having not taken any leaves, but before going to see Mrs Hovelacque, he went to the laboratory. Which is quite an astonishing achievement.

My maternal grandfather : The General. He came from a very modest family. He went to the Ecole Polytechnique, and at that time there weren't many opportunities for Polytechnique graduates. He stayed in the army where he became a four star general. And he was quite a character. He's the one that gave me the majority of my education.

Even philosophical, I think, even...

Yes, general.

So much so that you wanted to do Polytechnic...

He's the one who decided that I would go to Polytechnique. And I decided that I had absolutely no desire to endure mathematics for I don't know how many years, that it didn't particularly appeal to me.

And so, I had an uncle who was a doctor. I went to see him and said to him : I want to study medicine, I would like to become a surgeon. He said to me : surgery, that's really stupid, you need to be a doctor. And besides, you be able won't to handle surgery, you'll start vomiting at the first glimpse of a scalpel. So, he sent me to see one of his friends to attend an operation. I found it incredible, and decided that I would be a surgeon, in spite of the uncle.

In fact you describe the impression you had during the first operation, this atmosphere of serious work.

Well yes, I found it... he had sent me precisely to see one of his surgeon friends. I found it incredible. There wasn't a single gesture out of place, it was really astonishing.

She had Hodgkin's disease that had started the previous summer. And during all of autumn and winter she was ill. And she died on the 2nd of June, just before the collapse of the regime. Which means that in my mind, my mother's death and the collapse of the regime coincided completely. It was one unique event.

And my departure for England. All of that was one big thing in my mind. A break between childhood and the future.

Do you think that you would have gone so easily if your mother's death had not occured...

It's very difficult to answer that question. I think so. Because I thought it was insane not to take up arms in June 1940. I found accepting the defeat and the German occupation unbelievable. It seemed monstrous to me.

I think that most people could see it, but didn't want to. Because it was hard not to see it. Everything gave prominence to it. Every German move, everything showed what they were about to do. It was more or less obvious. But people didn't accept it. There was a very defeatist atmosphere, people didn't care about anything, they especially didn't want to fight and really weren't interested in any of it.

A pacifism that you sort of point at because it was often a left-wing pacifism, a pacifism of good intentions : war is a bad thing, therefore we shouldn't be going to war.

Well the two added up. The pacifism on the one side, left-wing pacifism and the right-wing non-war. It all added up to give... there was an awful atmosphere during that first year of war.

And also an atmosphere of latent violence between- in society, of confrontations in a way- precisely between communists and right-wingers close to fascism ? Could we already get a feeling for what the atmosphere was to become ?

A little. But people weren't really interested in all that. They were concerned with themselves, and not really with matters of the State and general matters. The atmosphere was very bad during that year of war.

I decided to leave. I was in Paris, I was in my second year of medicine. I took a few exams. I left on the 14th, it was the 14th of June, the Germans came in by the north and I left through the south. I left in a car with two or three friends. And we ended up... well there had been long discussions, because two of us had quickly made the decision to leave for North Africa or England, to join a war that we hadn't seen and that we considered to be necessary. And the others wouldn't have any of it. In the end, we ended up in Bordeaux. We tried to embark in Bordeaux, but the British boats had just left. We went to Bayonne, more or less the same thing. Then to Saint-Jean-de-Luz. And in Saint-Jean-De-Luz we met a guy as we were walking through the streets looking for a way to leave. And we met a guy in uniform who was a Cavalry-Lieutenant. Yes, I think that in Bayonne there was a sign at the British Consulate : For military questions concerning French people, enquire in Saint-Jean-de-Luz on this road at that number. So we stared wide-eyed. We went to that road that number. There was nothing there. We looked everywhere. We met a French officer in uniform who stared at us and saysWhat are you doing here ? So we said- We're looking for our Aunt so and so. He said- Do you want to leave ? So we said- Yes, if possible. And he said- Listen. There were Polish civilians and the remainder of two Polish divisions, who had fought with us, on the western front and who were boarding Polish boats. And the guy said : Get out of here, don't hang around, disappear until 5-6 this evening, and then you will probably be able to board. So we went for a walk. When we first set off there were four of us, but now there were only two of us left. The others had gone. When we arrived a cordon of policemen had positioned themselves. We started to leave. And right in front of me was a really short guy, who I later found out was a jockey. He looked like a jockey actually, the 'titi parisien' jockey. And the enormous policeman in front of him said- Where do you think you're going ? Because at that time leaving was prohibited for the French.

It was official ?

It had only been official for a short time, for a couple of hours. Since 4pm it had been official. So the policeman asked - 'Where do you think you're going ?' He turned around and said 'Swastika !' Which was the only word ending in ski or ska, ie polish-sounding, which came to him. The policeman was so shocked that he let him through, and we slipped in behind him.

You said that you didn't even where the boat was headed when you got onboard. You knew it was leaving France, but you didn't know if it was headed for England or Africa.

We wanted one or the other. We didn't know, but we soon found out it was for England. That boat was pretty surprising. There were a lot of young people on board, high school or university students, like me, who wanted to go to England. There were also a few officers who were leaving. I met one guy who asked me - Where are you going ? I said- I don't know, I'm going to try to fight. What about you ? He said- It's a unique opportunity to get away from my wife and my mother-in-law. Unexpected but as so !

As opposed to the incredible confusion and mess in France. Which was unbelievable : the defeat, the guys on the roads, it was incredible at that time, you can't imagine it... On the contrary, in England, everything was very organised. The guys took care of us. We were put in camps for 8 days, we were screened because they were scared that Germans would sneak in etc. And so we ended up in a camp. But it really was a nation which was fighting, which was completely preparing itself for war. And that's when the real bombings on London started. I didn't stay very long after that. I was in a camp in the south-west of London where most of the Free French were. So at the beginning there were only two of us. At the beginning we thought- we'll join the English. Then we found out that there was a guy called de Gaulle who was doing something. So one of de Gaulle's guys paid us a visit and explained the operation. And so, we joined that new formation which was to become The Free French.

You said that for once, it was a military formation, but without that humiliating aspect of military formation. That you were ac-

tually trained in what was useful...

But it was constituted solely of volunteers. And that changes everything. Between the guys who were recruited by... well not by force but who were recruited and enrolled to do their 'service militaire' and a troop solely made up of volunteers who are there to fight, it's definitely very very different.

And there were people from a variety of backgrounds and with different political opinions ?

There was a mix of everything in there, absolutely everything. You had communists, royalists, absolutely everything. The majority was the usual, radical-socialist, socialist. But there was... I remember a conversation between two communists who were saying- Honestly, that general isn't being very reasonable. In the end, they enrolled like everyone else. And there were also far-right guys. It was a mix of everything.

There weren't any confrontations between these very differently opinionated people ?

No. What really dominated at the time was occupied France. Especially as it was very recent, it had only just happened. And it was probably the biggest catastrophe in the history of France.

And when was the first time you saw General de Gaulle ? When did you see him for the first time ?

Well, General de Gaulle, I saw him once in the camp where he came to make a vague speech. And then I saw him again on the boat. Because I left fairly quickly, at the end of August, I boarded a boat in Liverpool on the 29th or 30th of August. On a boat that was leaving- top secret but everyone knew we were going to Dakar, because the French are very talkative. And I saw him for the first time on the boat. I was leaning on the rail and I was looking at the horizon. You could vaguely see land. And I hear a voice behind me that says : What is that land ? so I said : I don't know, it must be Ireland. And I turn around, it was General de Gaulle. It was my first meeting with the general.

What impression did he make to you ?

Well he was very imposing. He was- For a start he was huge. That occasion was a little special because he wore a colonial helmet, and it gave him a particular touch. But he was very imposing. Very.

You talk about the Gothic cathedral in your book ?

Yes, that's right. Gaulle- Because since I was a kid, I had the habit of playing with words like that, to ramble on : de Gaulle, Gaulle, Golgotha, Gothic, Gothic Cathedral, actually I think that it suited him rather well.

...admire never idolate...

That's absolutely right. Especially during the war. Afterwards, I wasn't as keen on the political aspects of the post-war. But during the war, he had been THE guy who... fulfilled an indispensable function. And he fulfilled it remarkably well.

And in your opinion, no one else, among all the politicians at the time, could have done that. You can't think of any other one ?

There weren't any politicians in England at the time. There just weren't any.

There was Pierre Mendès-France...

No, he came later on...

He came much later. Mendès-France was in prison at the time. He was sent to prison in North Africa. He escaped later on and became an Air-Force captain. There just wasn't anyone.

Well, Africa... When you take a young Parisian student who has never left Paris, who's studying at the Medical Faculty, and that you take him and send him to black Africa, and in particular, that you leave him alone in a region as big as half of France to be that area's doctor, it's quite a change, it's rather surprising. It really was something very surprising. Because during that time I sometimes feltWell, at first I went to black Africa, I left with the Dakar expedition, where we were very badly welcomed, so we left again. Afterwards I went to Cameroon, then in the north, in Chad. And I was the doctor of a region which was more or less as big as half of France, with my two years of studying medicine. In other words, you couldn't ask me much. And it really was an extraordinary life- It was something completely new. And there, I learned a lot.

And did you have any problems with the Africans ? Or did you not encounter any in the end ? You were the doctor. Did you have very natural relationships ? What I mean is that at the time you didn't feel any opposition ?

No, not at all. There was a village and I was the doctor for both the battalion infantry, which had set up camp just north of Chad lake, and at the same time I was also the doctor for the region, meaning a village. Every morning I went to the village to do my visits. It was very picturesque. That was also something, coming from the "Hôpitaux de Paris", from the latest surgery techniques of the Saint-Antoine hospital, and landing there, where I was expected to run a small dispensary, where women came to show me their troubles, where I had to spot the cases of syphilis, because it was important for the troops. It was a very different job.

And for example did you have everything you needed in terms of medicine in order to help at least a little ?

Mostly. I remember here was a captain doctor with an incredible accent from the South of France, whom I replaced. He was very happy to see me arrive because he'd been there for six months, and he was fed up. He said to me : "Can you imagine, that here, there are no white women !" So he was very happy to arrive and to leave. He explained to me what I should and shouldn't do : "in the morning, you treat the soldiers. Afterwards in the afternoon, you go to the dispensary, and you treat the civilians". And on that note, he left, too happy !

You really learned medicine on the job.

I really didn't learn much about medicine. You know, soldier medicine isn't real medicine. "What's wrong with you ? - My head hurts Lieutenant. - Take an aspirin tablet." That was essentially it, medicine. When there was something more serious, we would send it to the hospital. But there, miles away from anything in Chad, you needed two days to get to the hospital in Fort Lamy.

There was one operation... they brought in two soldiers who'd stolen some cows, and had been captured by other soldiers who'd beaten them with rifles. One died when he arrived and the other one had his skull bashed in. So, I told myself : while we are here, why not try trepanning. His skull was visibly bashed in. So I had something to make holes, a sort of saw. And I took out a small piece of his skull. He was bleeding, I made a ligature, and it went so well that two days later, he escaped from the hospital. That was typical. There was another one that fell out of a tree. I don't remember what he was doing, he broke a leg. So on the first day I administered the medicine that we were practising in the hospital, I don't remember which one, in Paris. So I made him a cast. No! I made him a bandage, the kind that stretched. Well the next morning, I came back and he'd cut it. So I made him a cast, the next day I came back, and he had cut the cast. So I made him a huge cast. The next day when I came back the guy had gone. His family had taken him. You see, that was the sort of medicine that I practised.

Well I didn't participate in many battles. The one that I most participated in... What was it called? I've forgotten the name. I'll remember it later. It was a battle in the south of... it was called Ksar Ghilane. Ksar Ghilane is a well in the south of Tunisia. So we went up. I was in Brazzaville. Afterwards I was appointed in Chad. Leclerc was in charge of all of that. And Leclerc undertook more and more deep and complex raids in the south of Italian Libya. And at the beginning, I didn't take part in the first one, in Kufra in particular, which was rather incredible, and where Leclerc, with 200 guys and 20 trucks, jailed I don't know how many thousands of Italians who surrendered with satisfaction at the first canon shot. So we resumed, but after the Italians, we ran into the Germans and then it became a completely different story. So that is what constituted my war... coming up from Fort Lamy, or perhaps a little higher, through the desert, to attack the Italian camps at Seba, Mourzouck and so on. And so the real achievement then, was to bring a set number of soldiers and canons in trucks, thousands of kilometres away from Brazzaville and Fort Lamy. All that in the Sahara, in the middle of the desert. That was an extraordinary achievement. More than the military aspect. As for the soldiers, as long as we were dealing with the Italians, there wasn't any trouble. The day we ran into the Germans, that's when it became a little more difficult. And that was at the famous Ksar Ghilane where this time the battle lasted all day. In the morning, we were in holes buried in the sand. And on the one side there was, what is called the big erg, which is an huge desert of sand where it is impossible to walk or drive. And on the other side is the Matmata mountain. And one morning the Germans charged down on us and started shooting. They attacked us a first time around 7-8 in the morning. We beat them back. They started again around two in the afternoon. We beat them back. They started again around 5 or 6, and were breaking through when the Royal Air Force arrived and destroyed everything. Fortunately, because at that point, General Leclerc's Free French Forces were completely disappearing. We were lucky then. It was luck and the Royal Air Force.

You have a great admiration, it seems to me, for the Royal Air Force.

Well yes, of course and with good reason !

And also for the efficiency of the British army.

Yes, yes of course ! They were great. So what was very surprising, was that in the morning, the Germans arrived and bombed us first. They then left. At that point the Royal Air Force arrived and started firing at them. And it went on like that all day, first one and then the other. Until 5 in the evening when they arrived at the same time. And then, we witnessed an exceptional performance. There were approximately 30 planes or 40 planes on each side that were firing at each other from every direction. And in the end, the Germans left. I don't know how many planes were taken down. It was really beautiful. It was a magnificent show.

I had been sent, I don't remember why. Ah yes ! I was part of a battalion and it had sent, for some reason that I have forgotten, had sent a company, or at least a set amount of men quite ahead, close to the German lines. And at one point the Colonel thought : "but what if we have wounded men, they don't have anyone, I need to send somebody over there." So he sent me with two black male nurses. So we headed in that direction. The two black men vanished very quickly. I ended up on my own, making my way in the night, which wasn't very pleasant, in the direction of the German line. And I ran into a captain, and I asked him : "Where are the guys over there ?" He told me : "Over there, you walk for 30 minutes, you turn slightly right and there they are." So everything was pitch black, and I can't see very well at night. Some people can see well in the dark, but not me. So my two guys vanish straight away, and I find myself at the back of beyond trying to reach the guys who were ahead. So then what's surprising is that, I ran into this guy who was just standing there, leaning on a rock, his submachine gun under his arm, and who was just staring at me. He followed me. I don't know why he didn't shoot me. I was alone, he was alone. There I was walking around with a box of bandages, him with his gun. He followed me like that. I pretended not to see him. I carried on. I guess he didn't want to attract attention because there was a lot of people around, and so in the end it wasn't necessary to shoot, he would have been spotted.

You don't think that there's also the fact of not wanting to shoot someone who is basically so close, that can be seen ?

We will never know that. But the fact is that he didn't shoot. So I arrived. And so what's funny, is that I got very scared when there was no reason to be scared. At one point, I ended up lying face down streaming from sweat and from fear. Even though there was nothing there. And when there were things like this, nothing. It's incomprehensible, but that's the way it is.

Algiers- I didn't really like it. It wasn't very pleasant. It was extremely crowded. The first FFF, it was something very pure. They were guys who were all... The people who were in London, there were very few, I don't remember how many, 4-5000 or 6000. They were guys who really wanted to do something and fight. From the moment, we came across the North African people again, who for the majority had no desire to fight, or who did terrible things. I had gone with one of my friends with whom I'd been to school. We left together. And when we were in Africa, he was more or less, he was Second Lieutenant. He headed a black platoon, and one day, one village stole another village's cows. So terrible drama, they started fighting and my friend was sent over with his platoon to separate them. One guy hid behind a baobab and stabbed him in the heart with an assegai, dead. He had a brother who was also killed, on the day of the American landing in Algiers, by a member of Algiers 5th Regiment Chasseurs, who shot him in the back. The two brothers, not bad! Why am I talking about this?

Because you found their parents...

So, yes, afterwards I found their parents. Yes, they lived in Algiers where I stayed for two weeks. The thing is that I had had a choice to make. Following the campaigns, we didn't get any leaves for years, two or three years. So we were entitled to one leave and there was the option of going either to Algiers or to Lebanon. And I thought, for some reason or another, that we would probably be going to Lebanon later on, and come back through the South of France. So I thought : Lebanon, I'll see it later on, let's go to Algiers. Which was a miscalculation. I should have gone to Lebanon not Algiers.

I got back on a boat... on a LST, the landing boats where the tanks were placed. It must have been in March 1944.

And did you know it was D-day?

Yes.

How was it for you psychologically?

It was the end. As soon as we knew- until 1942-43, it wasn't clear at all. It really wasn't obvious that we would ever see France again. But from Stalingrad, it had been over.

That was... but from Stalingrad, it had been over. In your opinion, was Stalingrad the turning point of the war?

Yes Stalingrad really was the turning point. There was Stalingrad, and the North African war.

El Alamein?

Yes that's right. That was the turning point.

And then you knew that the landing meant that the end of the war

was near ?

Yes.

We weren't at D-day, we were elsewhere. D-day took place on the 6th of June. And we arrived in France on the 1st of August. And I was injured on the 8th of August. It happened very quickly. So it was, so we were... We reached the south of England in June, near Southampton. That's where we boarded the landing boats. It was also very picturesque. My company was on one of those small boats, and there was an absolutely exceptional commander. Who had a British sailor's face and a ginger beard. And we board the boat, it was dark, we leave, we hear the sound of two-three impacts, and the engine stops. We stopped moving. That was really a little worrying because it was the English Channel. So we wait. The next morning, we looked... It was a sort of boulevard that went form England to Normandy, there were boats going in one direction... Not a soul around, and eventually, the commander came out, this tall red-headed man. He took one of those cans of soups, those that you just heat on the fire and eat. And on that note he looked into the horizon and said- Over there, and he walked off. We were on our own in the Channel, which was very unpleasant, because there were lots of other people and planes around. But it all went well in the end.

It's when we were going south to bypass Avranches and cut off the Germans, they made a north south counter-attack, and I was injured in a plane bombing that accompanied that counter-attack. And I was knocked out, I was struck by 50 or 60 grenade fragments.

Can you remind us of the circumstances that accompanied that injury ?

Well, we were heading for the south, precisely to try and bypass the Germans who were there, and then go back up with Patton. There had been a German offensive trying to cut us off, and in particular a plane bombing. The planes arrived a first time, and I had a friend, a very good friend who was seriously injured. So I went to take care of him. That's when the planes came back. Everybody hid in holes, and he was unfit to be moved. So the planes arrived. He said to me "don't leave me". I didn't leave him and he was killed there and then, as for me, I was seriously injured. I didn't leave him. Yes, he died next to me in the hospital.

And then starts a year-long period where you will be...

Oh yes, dreadful, dreadful. With constant operations, patches, this and that. A really dreadful time. Even once I came out of the hospital, I was operated again I don't know how many times, because I had shrapnel wounds that were weeping here and there. It took me a long time. My elbow had burst out. My thigh was broken, the entire right side was filled with fragments. And it took me a long time to recover. It was very long and painful.

So I came back to Paris. And the atmosphere that I found there wasn't very pleasant. All my friends who had stayed in Paris, who had gone on with the extern exam, the intern exam, who were all more or less doctors, came to see me with heartless looks, saying "Ah yes, here comes the glorious soldier, very good, continue!" It was very very unpleasant.

With nonetheless a certain admiration wouldn't you say?

I'm not really sure. No, I had friends who, were my competitors if you like, during the first years of medicine, for the exams which, I didn't take anyway because my first exam had been cancelled. They had already become very important players in the world medicine. Which annoyed me tremendously. But they were full of commiseration, but that's all.

You say that you tried to get accelerated exams, or at least have the right to present yourself earlier to the exams, which you were denied.

Yes. That's something which... because I wasn't an extern student at a teaching hospital. And you know that in the French system, you need to be an extern to become an intern, etc. So, I was 4 or 5 years behind these guys, I went to the office of the "Assitance Publique". And I asked them for the right to present myself, to be an intern without being an extern. And that my tests get marked and that's it. They almost fell to the ground. To present yourself to be an intern without being and extern, that was unthinkable. And that completely disgusted me, I decided not to continue in that direction and do something else.

That you would never practice medicine- As a doctor- You did it to get the diploma, yesThat I would never PRACTICE medicine.

I still got a doctorate in Medicine, but without practical medicine, yes.

That was also very special. I had a little cousin who was very pretty. And so, I arrived in Paris. I was evacuated to Paris afterwards. When I was first injured, I was sent to the American hospital, 101st Field Hospital. Then, from there, I was sent to Cherbourg where I stayed for quite a while. And when Paris was freed, I was sent to Paris. And then I travelled by train for three days, with peanut butter sandwiches as food. It was very distressing. So I got there. And as I was saying, I had a very pretty little cousin, who had arrived. She lived in Lyon but had sought refuge in Paris. So she was looking for me, and didn't find me, but I quickly found out from the others who told me- there's a girl, she says she's your cousin, but it's probably not true, she's too pretty for that ! And eventually, that's how I was reunited with my family.

De Gaulle had created a medal for the war battles. At first, in particular he didn't want to give a "Légion d'honneur", from when we were still in England, until he took over the entire government. He didn't want to give "Légions d'honneurs". He created a medal for the people of Free France, which was called the "croix de la libération". There were 1020 or 1030, I think. I think that there were 1030. Now there are 120, the rest are gone.

Is that what constituted the order of the "compagnons de la libération" ?

Yes, that's right.

And is it something that was very important for you ?

It was THE decoration of Free France. There was another one afterwards that was called the "médaille de la résistance', but which wasn't really as chic.

And was this the start of four difficult years until your admission

at the Pasteur Institute ?

Yes, very difficult. Very difficult. I really didn't know what to do. I tried a variety of little things. I had no idea what to do. Because surgery was what I really wanted to do. But with my arm, surgery was out of the question. And so I really did some things... a little of everything. I did all sorts of things.

There was in particular, the work that you did to try and produce penicillin, or equivalents of penicillin in France. That was at the end.

That was at the end. Yes, penicillin wasn't produced in France. There was this guy, a division captain who I knew, who had been demobilised and who decided to produce penicillin. And the only way he had found to make some, was to retrieve it from the urine of the patients being treated at the hospital. Which wasn't exactly brilliant. But there was another antibiotic called tyrothricinum, which had been invented by Dubos, and which was a localised antibiotic, which couldn't be used in injections but could in localised treatments. And I wrote my thesis on that. I stayed for a while, but then I left because it wasn't working very well.

L'antibiotique marchait pas mal, non ?

The antibiotic itself was working pretty well. But external antibiotics are very limited. We can't do much about it.

And why wasn't it working better, this French Penicillin Centre, as it was sometimes called, the Cabanel Centre ?

The Cabanel Centre... because it was something unusual. It was the gunpowder engineers, Polytechniciens, who had decided at the end of the war to convert the powder factories into antibiotic factories. Just because there were vats, big vats where you could make powder or whatever chemical treatment, they decided that, because penicillin was made in vatsbut the vats needed to be sterile and no-one was able to make these vats sterile. So it was impossible to manufacture an ounce of penicillin in those vats. For a while I was even, there was a powder factory in Morcenx - Morcenx in the south-west of France. And I was appointed manager of the Morcenx factory. And I went once a week, I would take the train in the evening, arrive the next morning in Morcenx, and I would leave in the evening and return to Paris. It was pointless. It was impossible to do anything in Morcenx.

Well, it so happened that I really didn't have a clue what to do. When the war was over, I tried a series of things.

I think that your cousin by marriage, Herbert Markovich, played an important role.

Yes. He was in the same sort of situation as me. He hadn't been in the war for as long, but he had still seen some war. He had tried to do some research and he had ended up at Ephrussi's laboratory where he was doing some interesting things. As for me, for a while I really tried a few things. I almost presented myself... following a friend called Pauphilet, who was the son of the Normale's Principal, whom I'd met during the war, who told me - you know, there's a new school of administration that's just been created. There's special examination for those who were in the war. I'm going to take it you should come as well. So all right, good idea. I bought a law book, it fell from my hands, and after two days, I said... I'm over and done with, with the administration school. So I did a series of things like that. And then eventually... so yes there was Markovich with whom I had dinner. His wife was my wife's cousin, so we had dinner together once in a while. He told me that he had gone to see Boris. He had done more or less about the same thing as me. He didn't know what to do more than I did, he was at the same stage of incompetence. He was working for Boris Ephrussi, where he was doing some things that really interested him. So I tried to get some tips. There were two guys who were Normale graduates, one was Lwoff's student, the other, who I knew, was Ephrussi's student. I went to interview them. Because of the things I had read I had nonetheless, by reading small things here and there, I had reached the conclusion, that between bacterium, nucleic acid and genetics, something was more than likely to happen. So it was in that direction that we needed to look. It's the only thing that came to my me at the time. And so, I talked with those two guys, through which it appeared that there were two laboratories that could take care of these sorts of things, which were Ephrussi and Lwoff. And, the two guys added, Lwoff's laboratory is much more interesting than Ephrussi's laboratory.

So there were two laboratories in Paris where one could hope to do that sort of thing. So there was Boris Ephrussi... And Boris Ephrussi was a rather difficult guy. For example, there was a guy that I knew, that I knew pretty well, who was very nice. And one day, he was doing an experiment, on a Saturday afternoon. Boris Ephrussi gets there and asks him “What are you doing ? - I’m doing an experiment”. And Ephrussi says “But you didn’t tell me about this experiment ? - No Sir, but I thought it would be interesting to.”... Ephrussi takes the test tubes and empties them down the sink. So it wasn’t very encouraging ! On the other hand, everything that I was hearing from the Lwoff-Monod group was very tempting. And that’s when I ended up at Lwoff’s laboratory and, innocently, I told him “I’m not good, I haven’t done anything, but I would really like to work for you”. He told me “You seem very nice, I really like you, but I don’t have any openings”. And for nine or 10 months, I came back every month, until May or June, asking if there were any openings. And the last month he told me “You know, we’ve found the phages induction”. So I put as much admiration as I could in my answer and said “no, really ? I didn’t know what it meant”. I left and went into the first available bookshop, to try to find out in a dictionary what induction and phage meant.

I’m guessing that there wasn’t anything there ?

There was something on induction but not on phage. And so eventually, I started to understand what it was all about. And so on the 1st of September 1950 or 51, I joined Lwoff’s team. And I was very lucky then. Because he was incredibly kind. He sort of treated me like a son. He didn’t have a son. He was extremely kind to me.

When you defended your thesis, he basically didn’t even think that he needed to show that he was your supervisor.

He was in America. He had gone for a year with his wife to learn the culture of cells with Dulbecco. He wasn’t going to come back for that, and I wasn’t going to wait for him to come back. So he wasn’t there.

Many supervisors would have wanted you to wait for their return.

He wasn’t like that, he really wasn’t. He was amazingly generous. Because he always pushed me, and even when I started making progress and moving forward, he continued to push me without second thoughts. That's astonishing!

André Lwoff was particularly generous, at least with me. André Lwoff really was a headstrong guy. Meaning that he had his friends and his enemies. If you were his enemy, you needed to be very careful because he would make nasty remarks which cost him a lot in his life. He said to some very important people... At one point, he wanted to be a lecturer at the College de France, and there was this guy called Courier, who was both lecturer at the College de France, secretary whatever at the Academy and I don't know what else. He was everything. And Lwoff didn't like him. And not only did he not like him, but he let him know that he didn't. And people don't really like to be told that. Which means that with his straightforward manner of telling people "you're all idiots", people don't really like that, and he ended up a little stuck. He never became lecturer at the College specifically because of that. Which means that when they came to get me, to go to the College, I thought "I have to go see André and see what he thinks". And he was really generous then. I said, "Well, sir, I know that you have had problems" - he had applied twice and been rejected twice, even though he was a much superior man to the one they took. "I know that you have had some small problems with the College. I have been offered a chair at the College. I won't go if you don't approve". He said "Of course, go ahead etc." But it wasn't easy.

And you say that with you he has shown great generosity?

Very, very generous. Really. He always pushed me and always helped me. Incredible.

And that you were sort of a son to him?

A little, I think.

We get the impression that it was someone that didn't accept bad quality, whether it was of thought or of behaviour? Or of speech.

He was very attached to language. Or of speech. He was very attached to language. Yes, that's right. But he could be unbearable. Because he really did tell quite a few people what he thought of them. And in particular, a guy whose name I won't say, because there really is no need to mention it, but who is an appalling idiot. And he said to him “It’s an absolutely incredible story”. They were in a CNRS commission, and the guy in question... they are examining his lab so he leaves. André Lwoff says what he thinks of it. And on that note the guy comes back in. And straight away, his neighbour tells him what was said. And he says to Lwoff “Sir, I ought to slap you. - Very well, Sir, you will have my witnesses in the morning”. And the guy disappeared.

Everything happened in the corridor. Meaning that every single thing... every time a guy had an idea, he came out with it in the corridor, it would be taken apart, discussed once again etc. And it was at a time when with phage and bacteria, we would have an idea in the morning, at two o’clock we would do the experiment, the next morning we had the results, therefore we could discuss the results once again etc. It was exceptional. All day long we would talk in the corridor, with Monod, Wollman, the Americans- because there were very few French students. Lwoff and Monod weren’t famous. It was before Monod started at the Faculty. People didn’t know who they were. And I was the youngest student there and I was already over 30.

And this atmosphere mainly came from André Lwoff, from his personality ?

From everyone. Monod was also very close to these guys, and would talk to everyone. It really was a very exceptional atmosphere. Yes, mainly because of Lwoff.

And the fact that there were so many Americans that were coming, was it linked to André Lwoff’s prestige, to his international recognition ?

Yes, it’s the fact that they were... In 1946, Lwoff and Monod went to Cold Spring Harbor. And there, they met all the guys that were more or less working on the same thing. And they started inviting people. And from that point onwards, there was a continuous flow of Americans who came to work with us.

Which means that you felt part of that international community.

Yes, exactly. What was extraordinary, was that there weren’t any French students. Even though those were worldwide recognised laboratories. Monod became a biochemistry lecturer at the faculty. He replaced, what was his name ? the old lecturer from here who was both pastor and... I've forgotten his name, it doesn't matter. So when Monod became lecturer at the chemistry faculty, he started getting students. And Lwoff got a microbiology chair. Because until very late, there was no microbiology chair in France. That was unbelievable. Even at the Faculty of Medicine it happened very late. There was a microbiology chair that Lwoff got, I don't remember what year, but very late.

If we could slightly get back to the works that could have influenced you, precisely before or just after you started at the Pasteur Institute. You mentioned Erwin Schrödinger, *"What is life ?"*

Yes. It was an important book because it was a completely different way of viewing the world, from the way of the little medicine student that I was until then. It really was.. he was a physicist and it was completely different. For me it was a completely different world from the one I had imagined. So there was him and there was Brachet, because Brachet... that was nucleic acids. And nucleic acids were beginning to play an important part. And there was a third one, you say it was Huxley ? Yes.

On Darwinism, the theory of evolution.

Yes.

And among the influences that directed you towards biology, there was the Lysenko affair.

Yes, because the Lysenko affair, that was incredible. It was utterly unbelievable. The guy who... The guy who dismissed all of biology, on the basis that it was incompatible with Marxism-Leninism, it was quite astonishing. That annoyed me so much that I think it was one of the factors that lead me towards biology. Towards genetics in particular, yes. Because for Lysenko, genetics didn't exist. That was extraordinary.

And that really struck you. It really mattered at the time ?

Yes. It mattered quite a lot. There were fervent discussions in the papers. There were guys like Prenant. Prenant was a very good biologist. He was a lecturer at the Faculty of Science. But at the same time he was a member of the Communist party. So he was torn. There was him, and there was also a woman called... who was a pharmacology lecturer at the Medical Faculty, who was also a member of the Communist party. And they were all bringing genetics down, and Lysenko was all they talked about.

And what about Aragon, with whom you are a little harsh ?

Well, Aragon was also exasperating. Aragon was a guy with incredible talent, but who also came up with unbelievable things. Unbelievable ! He was a doctor, so he had a hazy idea of things.

Lwoff had worked on the baci megaterium. And so he thoughthis whole idea of lysogeny, was based on megaterium. And in particular, he had done a series of very delicate experiences where he would take a bacterium, measure it out it drops, and once in a while, a bacterium would disappear and phages would appear. And there were no phages until the bacteria had disappeared. So, he had concluded, only through micro-manipulations, that for bacterium to give- because in a culture, you find approximately one particle of phage per lysogenic bacteria. So there were various hypotheses. Either during each division the bacterium excreted a particle of phage. Or either once in a while, just like after an infection, the bacterium would think- let's release a hundred particles. What he showed through this, was that the second hypothesis was the right one. So he was working on that, and when I arrived, he said "We need to check if that's the way it is, not only in megaterium but also in another organism". He told me "why not try in pyocyanic". I went to the Pasteur Institute's microbe bank, and I picked up 35 pyocyanic strains. And so, I religiously put a drop of each on each other's plate to see if there were phages, if it was lysogenic. There were some. I took out lysogenic lines, and I tried to reproduce with pyocyanic, what he had done with megaterium. That's when Elie Wollman came back from the United States where he had spent two years with Delbrück. And he came back from the United States with Escherichia Coli K12, which Lederberg had shown him could recombine itself, and which Esther Lederberg had shown was lysogenic for a phage called lambda. So we decided that was what we were going to work on, because it was a very favourable material. And we started working together on lambda and K12.

And because genetics could be done. Tools were available to do a genetic approach.

We could research the genetics of bacteria, the genetics of lysogeny and the genetics of the phage.

Gunther Stent had invited him to go back to the United States for another year. Elie and I did a lot of things at the time. In particular, we did all of the... when studying lysogeny and its genetics with K12, we mainly did the K12 system, the study of... we dissected the mechanism and the injection etc. That's right. Where we were able to map out with time, etc. With that, he returned to Stent's laboratory and nonetheless we had equipment... That K12, with its injection system, was nevertheless exceptional to analyse cellular functions. So, with Monod we decided "we're going to look at how lactose works". There was a specific lactose region, we could take receiving bacteria with the deletion of the lactose region, inject lactose, see how the Z(+) gene, the three genes and I(+) manifest themselves. So we started dissecting all of that system. And then... Elie had vanished. And we did the majority of our work in his absence, he never got over it. Never. He got the impression that he'd missed the right moment. Yes. All the more so since that's what we got the Nobel Prize for and he didn't really like that.

And you had kept fond memories of your collaboration with Elie Wollman ?

We kept them until the day he left. And when he came back... At that point I started working with Monod, we did a lot of things. When Wollman came back, I invited him to come back and work with us. Never ! That was typical. It was something we had started without him, he wasn't going to jump back onto the wagon.

What really got us excited for a while, which is quite funny now, was to know whether it was inserted into the chromosome, or attached to it. And attached to the chromosome... when you think about it, there is no attachment system on the chromosome. I don't know how we could attach it on tyrosine. There is no tyrosine in the chromosome. It isn't obvious how we can... so, eventually, as soon as the structure of the DNA became clear, which was more or less around the same time, it became obvious that it needed to be inserted. All that really troubled us.

Basically, it's in fact at that time, we didn't have much data on the chromosome. So an attachment model really wasn't unreasonable.

And we didn't have any DNA, well very little that is.

Yes, we favoured the attachment, but very quickly, it slipped through our fingers.

Yes, but it isn't much in relation to the results that you obtained.

Yes, but it was very important to see how... because the thing that... what really troubled us at the time, was that there were pieces of chromosome that we could add or cut off. And when we would say that, Ephrussi would say, throwing his arms up saying "A chromosome cannot be manipulated". And in fact, that was the first thing we started to play with. Up until Campbell showed that it was circular, and that the two circles... that we inserted one circle into another one in a linear way. In a very simple way.

And that aspect, precisely the idea that genetical material couldn't be manipulated, that the chromosome couldn't be manipulated, that it was something that was beyond... it's something that you permanently fought against, because with Monod... you also had to convince him a little. At first, Monod, didn't like it at all. That's true. He was very quickly...

He quickly got into it, but at the beginning he didn't really warm up to the idea of adding to and taking from the chromosome. But he quickly got into it. As soon as he understood it, he was very quick.

On lysogeny, wasn't it also maybe a model for understanding phenomena like cancer ?

Yes, a little. Yes, it was also mainly presented by Lwoff and a little by me as a way of understanding cancer. Actually, it didn't really teach us much. The cancer virus probably doesn't work like that. They insert themselves next to a gene that they either activate or inactivate, more than anything else.

Nevertheless, at one point you had made the hypothesis that precisely, this sort of activation phenomenon and gene inhibition through the insertion of the phage could be linked to what was happening in cancer.

Yes, but it was quite easy, until the moment.

Yes, it was one way of seeing it.

Well, we really liked it because like the cancer model, it brought a lot of interest to this little phenomenon of lysogeny.

And isn't it in those years that André Lwoff is going to slightly abandon his work on lysogeny ?

Yes, he decided that he'd had enough of bacteria, he wanted to start working on real viruses. He and his wife went to the United States for one year, and they went to a series of laboratories that were working on mammal cells and on mammal viruses. He went to see Dulbecco, and three-four other guys like that, where he learned and came back with the techniques. And so he started cell cultures and things with viruses, real viruses.

But it's an important moment where we were sort about to understand what lysogeny was, what it consisted of. So, eventually he now considered this to be your work ?

Yes, afterwards. He took the viruses and left us the...
It was an incredible model. The key was to know to what extent lysogeny was or wasn't a real model.
Eventually, it was a rather good model, but unfortunately it wasn't as simple as lysogeny.

While studying lysogeny, what we wanted to know, was the nature of what we call prophage. We considered that the lysogenic bacteria kept, in their chromosomes, the phage's genetic information in the form of what is called prophage. And the question was : How is this prophage settled in the chromosome ? And it appeared that it was inserted in a linear way. Why am I talking about this now ?

Precisely because conjugation played a key role in positioning it on the chromosome.

Yes, that's right. On conjugation, we tried to...So, we wanted to see if the prophage acted like a piece of bacterial chromosome, or like a group of bacterial genes. So we crossed them. When we crossed the two lysogenics together, which differed through markers on prophages, everything went well. After combination, the male chromosome ended up in the female, it went very well. But when we crossed a lysogenic male with a non lysogenic female, it wasn't working at all. And we noticed that when the prophage entered a non lysogenic cytoplasm, it started up and began developing. And that was the first argument to say that, in the cytoplasm of lysogenic bacteria there existed something which was probably negative and that prevented the development of the prophage, and that we called repressor. We were working on two things at a time. We were working on lysogeny and prophage on the one hand, and on the other, on Monod's lactose system. And eventually, little by little, it appeared that the two systems looked strangely alike, and that in both cases, independently there were structural genes that determined the formation of specific protein molecules, cellactose molecules or phage proteins. That it was the same mechanism in both. In the cytoplasm there was a substance that blocked gene expression, of either phage, or lactose.

But the work on conjugation, was to clarify both prophage and its localisation

but it was reciprocal, meaning that the two worked together. In fact, we set off to try to understand prophage, but very quickly, it enabled us to study the exact mechanism of genetic recombination, of conjugation and of recombination.

And can you tell us about the principle of the experiments you did at the time, about uninterrupted conjugation ?

Yes, so that was... What we noticed was that... Let me just remember how it happened...

I know that William Hayes had found strains, it was quite important, wasn't it ?

Yes, that's right. In the Colon Bacillus system, there were males and females, there were donors and receivers. The majority were low frequency donors, meaning that there were recombination with ratios of 10^{-6}, but there were particular donor strains that had been isolated, on the one side, The Italian who worked on ?

Cavalli Sforza ?

Cavalli Sforza, and on the other side by Hayes, who injected markers at much higher frequencies. So we tried to analyse it and Elie had the idea of of separating the happy couples during conjugation by placing them in a waring blender. It was an experiment that Hershey and Chase had done with phage. By marking proteins with S35, or nucleic acid with phosphor, they tried to see what did and what didn't go in the phage particle. And they showed that it was the nucleic acid that went in and that the protein came out. So, we tried to do that with conjugation, and we noticed that... let me see...

From an outside perspective, I imagine that you saw that specific markers were going in at different times.

Yes, that's right. The aim was to separate them to see when the chromosome went in. We would mark it either with sulphur or with phosphor, and the idea was that conjugation should occur. And at some point, the male chromosome is going to end up in the female. And when we had done that, and we had separated them at different times, as it happens we separated some at 10 minutes and others at 30 minutes, and the results were different. And we noticed that if we separated them in a abrupt manner at different times, we would see that the chromosome went in through one end. It was the so-called spaghetti experiment, which infuriated Wollman.

The chromosome being a long spaghetti that enters the bacterium.And afterwards, you found that depending on the bacterial strains, the same yet slightly shifted order could be found.

That's right. It has a name. To permutate, yes. In other words, the only way of explaining it, is to put it all in a circle that would be open at different ends, the opening being the front and the back.

Which at the time was revolutionary, wasn't it ?

Yes, the circle was revolutionary. I remember the first time I told Elie that the chromosome was circular, he was beside himself. I don't know why but he was furious. Then he accepted it. The idea of a circle wasn't obvious. It was already clear for the phage. We knew that phage chromosomes were circles. But, it was quite a nice explanation, a circle that you open at different points and that goes in, it wasn't bad. It held out.

In Lwoff's laboratory, there was an important person, and that was Monod. Lwoff was working on lysogenic bacteria, and Monod was working on the system of the use of lactose by Escherichia Coli. At the beginning, in the fifties, everything was set up on the other side in the attic of the old building. There was a long corridor, with at one end Lwoff and his group, and at the other end Monod and his group. Lwoff worked on lysogeny, on lysogenic bacteria and Monod on the system of use of lactose by bacteria. It was a comfortable place to talk. But it really wasn't a comfortable place to work. Meaning that they were old labs. There were too many of us, but that was really good because everyone would meet in the corridor to talk. As soon as we had an idea, we would rush to the corridor to talk with the others, who would quickly try to destroy it. It was extremely lively, active and particularly stimulating.

Meals were eaten together, weren't they ?

Meals were eaten together. For a long time they were in my lab. You weren't there then, you were too young. I had a lab at the end of the corridor with a very large table. And because of that table, everyone had their lunch there which infuriated me, because I liked to start my experiments very early after lunch, and the others hung around over coffee, and it was very difficult to get them out. But we all ate together and talked a lot. I have a very pleasant recollection of that time and of that group, in particular because of Lwoff and probably also because of Monod. In general, we talked things over in the morning. At best, we had an idea that we would carry through in an experiment that afternoon. And when all went well, we had the result the next morning, and we would start all over again.

Those were also the advantages of genetics.

It was above all the advantages of bacteria which go very quickly, and of genetics in particular. But the system went very quickly. In the morning, we would discuss the results we had obtained the day before. We prepared the experiment which was carried out at two o'clock, at 9 o'clock the next day the results were in. At 10, we would discuss it again and put the next experiment together. It was an absolutely unbelievable race.

And was André Lwoff open to discussion ?

He was very open to discussion. He, himself, didn't speak much, but yes he was very open to discussion.

Could you go ask for his assistance when you were faced with a problem ?

Yes. He was very generous. He was very nice and very generous. In fact, he was a guy who... He had people he supported and people he was against. If you got on with him he would do anything for you. If you didn't get on with him, you were sure to get torn to pieces and to have the worst problems. He was an enthusiast, he was very warm.

He wasn't even ironic if you ever came up with a bad idea ?

No, no. He was a little like everybody else, but no more so. Monod was much more ironic. Monod was harsher.

And after that, did the tradition of common discussions continue even when Monod went downstairs, yes.

Until then everything happened in the attic of the old building. When Monod was appointed chief of the biochemistry department, he got the large department downstairs, on the ground floor. And then, the lunchtime discussions changed and moved to the ground floor. But the system more or less continued. The two groups saw a lot of each other. I practically worked in the lift. I was doing the experiment with Monod, but my lab was on the second floor so I spent my time going up and down. Yes, people talked a lot.

And about everything ? Science, politics ?

Absolutely everything. Yes, about science, politics. On the whole, people more or less agreed. They were slightly left-wing, not too much, definitely left-wing even and there were no political battles. There were discussions like there are discussions between people of pleasant company, but without fights. But they were still firm discussions. We also talked a lot about the personalities of the scientific world. And then we were harshing.

Well the Americans were there for a year. They brought in fresh ideas. They also brought the links with the American laboratories. At the time we often went to the United States. As a matter of fact, I think that after the war Lwoff and Monod were the first ones... the first ones to rush to the United States. I think they had both received Rockefeller grants. So there were links. They also got money for the lab from Rockefeller. I also got some straight away, as soon as I started to emerge and write papers. So it worked out very well.

And thankfully, because you weren't getting much help in France ?

Not much, the Pasteur Institute didn't get any, and from the extra-Pasteur Institute, from the ministries we got very little. So, we had a little American money which was valuable. Which was especially valuable because we bought a lot of things in the United States. There was an extraordinary person, you knew her, Sarah. Sarah Rapkine who was the widow of a researcher called Rapkine, who was a friend of Lwoff and Monod. She was the one in charge of buying things in the United States. So we talked to her about the things we needed to buy, about money problems.

Yes, the biggest joke was to use the same word to qualify things that we considered to be completely different. And it was only little by little that, by analysing each of the systems, we noticed that there were strange similarities between the two systems, and that eventually, it lead to a shared experimental model. And that model, was the so-called Operon model, namely that there were structural genes that ruled the synthesis of one or several proteins, and that there were regulator genes that made... we haven't already described this ?...

No, no

...which made a product. It took us a long time to understand what it did. That it made a cytoplasmic product, that acted to regulate the other's activity. And we hesitated. At first we thought that it was a nucleic acid, because at the time, no one had talked about the protein affinity yet, that there were proteins that had affinities with nucleic acids. Then very quickly, we were lead to believe that it was a protein, because there were regulator mutants, thus of the regulatory system, which were sensitive to... What are they called again ? That replace the... Suppressor, exactly. Suppressor genes, which we knew were replacing an amino acid by another, or which placed an amino acid where there was a hole.

And the first experiment that you did together with Monod,and which was sort of at the origin of the Operon, was that famous experiment called PA JA MO- PA JA MA - PY-JA-MA ?

Yes that's right, with Arthur Pardee. Arthur Pardee was doing an internship, well a post-doc, not post-doc, on sabbatical that's it.

He came over on sabbatical to Monod's laboratory for a year. With Monod we had reached... after having worked together for several months, we had reached the conclusion that we needed to use the conjugation system where we... Have we talked about conjugation yet ? Well we need to talk about it.

Well you talked a little about conjugation but not really why it might have been a tool.

Conjugation had an astonishing virtue, being that there was the injection of the donor chromosome inside the receiver, and we could, by separating the happy couples... We would cut the chromosome and were able to find-Wollman and we noticed that the chromosome went in through one end and progressed linearly at more or less constant speed. So, on the one hand, we could make a genetic map, not only through cross breeding and through genetic distance, but also through the injection time of certain markers with a specific pair of bacteria. So, the lactose of which Monod had located the genes, there were several genes... There was an enzyme that split lactose into glucose and galactose, which is called galactosidase. And there was a permease. There was another protein whose use no one knew which was called acetylase. All of it was determined by three adjacent genes on the chromosome and regulation was practised by a close but distinct gene, called I for Inductible. And so the question was... with Wild-type Coli, the synthesis of these proteins, galactosidase and so on, only happens in the presence of lactose or galactoside. They are said to be inductors. But there are mutants, which make these proteins, even in the absence of inductors, and that are said to be constituents. So the first thing was to know... the first idea was... until then Monod's idea had been that the constituents were making an internal inductor. We studied the question and by cross-breeding, we noticed that what was dominating, wasn't the constituent called I-, but the inductible called I+. With the transitory diploid I+/I-, the system was repressed. Which meant that the dominant was I+ and that the gene was making what we called a repressor.

Who had the idea for this experiment, to use conjugation to... ?

With Monod, we decided it as soon as we saw thatthe analysis of the conjugation was done with Wollman. But it became clear when we analysed the conjugation, that we could show that there was a chromosome that went in at constant speed starting at one end, and that markers could be located according to the time of entry, it became an exceptional system for the analysis of cellular functions. We placed the lactose-galactosidase system in the conjugation mechanism and we tried to analyse it like that.

And did Monod accept the idea of the repressor quickly ?

He hesitated a little, but he was curious. He still didn't like to abandon his ideas to adopt those of others, he really didn't like that. But at the same time, once he had accepted that it was necessary, he became an ardent believer in the new model. Meaning that at the beginning, he wasn't very interested, but very quickly he became very much in favour of it.

For a month we thought that it had to be a nucleic acid because, foolishly, we thought that chromosome paring was a very good system. But it quickly became clear that there was a protein, because there were protein suppressors.

And the very idea that the repressor acted directly on the DNA, you said that it was when you were preparing a conference.

That was one of my set ideas. It's while preparing a conference I had to give at Harvey.

I was very proud of it and searched everywhere for someone to discuss it with. Monod was on holiday, Lwoff was on holiday, Wollman was in America. My wife was the only one there. I explained it to my wife who said "Well, I thought everyone knew that"... Which I found incredibly exasperating. Then I get back from holiday, everybody gets back from holiday and I tell my idea to Monod who, at first, was very much against it, very very much against it. And for reasons that I have now completely forgotten. But there were at least 5 very strong arguments against it. And little by little, one by one, we took down the arguments.

And do you know why it was while you were preparing that conference that you got that intuition ? Was it because you were basically forced to make a synthesis of your works ?

Yes, it's mainly due to that. It was while preparing that conference. And then I reached the conclusion that the reasoning was the followingfirst of all, the two systems were similar, the phage, prophage and lysogeny system and the lactose system. In both cases, there were structural proteins that were made and a regulatory system that did something. So very rapidly, it appeared that this something could hardly be what we call positive. Meaning that the I gene produced an inductor, but that didn't last very long. So, it made a repressor. Once again, what was very surprising, was that the two systems were different, they didn't allow the same type of experiment, but the substance was basically the same. And that we could do certain experiments with one of the systems, for instance phage genetic is a lot easier to do than enzyme genetics. But on the other hand, to measure enzyme synthesis and protein synthesis, when for instance we release the repression, it's much easier to do in the lactose. So it was complementary and we could go from one to the other. It was very useful.

And is that when, for two or three years, a sort of ping-pong game between the two systems started ?

Yes, that's right.

When you made the hypothesis, you were eventually going to look for the mutants in one of the systems.

Yes. And when we found a mutant in one system, we could predict that the same one would appear transposed in the language of the other system, and we would find it. For instance, the constituents were the same. I once found in phage a mutant that wasn't inducible. Phage induction, of prophage, meaning in lysogenic bacteria, there are phage genes that are inserted in the bacterial chromosome, there was a cluster of 20 or 30 genes. And those genes are not active. And there is a repressor, which is synthesised by one of the phage genes which blocks the synthesis of all the other ones. So the two systems are very close. But the reasoning had been that for all phage genes, meaning the 25 or 30 structural genes, to be repressed by that very repressor gene, there needs to be a system... there needs to be a joint regulation system somewhere, of the 20 genes. So it can either be on the messenger or on the DNA. And for reasons I can no longer remember, there were many more arguments for it being on the DNA than on the messenger. I really liked that because for quite a while, I was convinced that the repressors worked on the level of the DNA. At that point, I had long discussions with Monod, because he didn't like it. He didn't like it because he had received a traditional genetic education. And traditional geneticists didn't like things to settle in a chromosome, or activate or deactivate it.

Yes, working with Monod really was incredible. Because we saw each other everyday, at least two hours a day in front of the blackboard, talking nonstop. And we discussed things at full speed, because we were used to all the little details of genes, of mutants, etc., it was very difficult for someone else to keep up. I remember Georges Cohen for instance, who wasn't very far and was interested in all that. Once in a while he would come over, and he would have great difficulty keeping up because we spoke too fast and without spelling things out.

Nevertheless, it was the tryptophan system which was still bringing forward arguments in favour of the same model ?

Yes. There were three arguments in favour : phage, lactose and tryptophan.

Et le tryptophane étudié par George Cohen.

And myself. Because I was the one who had the idea of telling Georges Cohen "you need to look for the regulatory gene and see how it works".

We had planned two types of mutations, or more precisely, we had two types of mutations that affected the three genes. There were zero-mutations and also constitutive mutations. And we believed that the zero-mutations were also in the operator. Which wasn't really true. In the end, it was a little more complicated than that because there was a... what is it called ? An effect of polarity, exactly, and that the mutations, at the beginning of the gene, on the N-terminal side, could in certain cases lead to a standstill of the synthesis in the entire system. What we had thought were I zero/0, inducers zero/0, actually were not. They were polarity mutants. There was the I- and the IS. The IS were extraordinarily... The IS were the super-repressed. And the IS have been extraordinarily useful because it was a gene, it was a dominant mutant. And it isn't easy to explain what dominant mutants are, unless you have polymers and you make a MES of the final structure. And everything with the IS was very interesting.

Specifically to show that it was a protein with many sub-units, the repressor and an allosteric protein.

It was the only way to explain it. And in fact, it happened to be once again exactly the same thing in phage. Because there are non inducible phages which are the exact same thing. Meaning that the inducible phage, is a phage whereas the repressor is crushed by induction, by more or less complicated things. And there were non inducible mutants who made a repressor, but the repressor wasn't affected by the inducer. It was a polymeric structure that no longer functioned normally.

With Monod we had reached, this is what I was mentioning earlier, the idea that in phage the repression happened on 30 genes. So it either happened on the messengers... It needed to happen on a structure where the genes were combined and joined. It was either the messenger, or the DNA.

But the messenger itself hadn't been seen by anyone. At the time there were ideas that were.

Yes, that's true, I shouldn't be talking about the messenger at this point. It was either an intermediate... actually it was either an intermediate where all of the group's genes were represented, or it was the DNA itself.

Following that, Sydney and I started working together.

How did it happen ?

If I remember correctly, it's because you remembered Volkin and Astrachan's results showing that there were short-lived RNA molecules.

Yes, well I had completely forgotten Volkin and Astrachan, and so had Sydney. So we... I don't quite remember how it happened. But during a discussion at Sydney's, he had a room in his College. He was like any Englishman, they all have something in a College. He was in a very posh College, I don't remember which one. So he had a room there. And one day, we were having a discussion with Francis, who had arrived, where precisely I told them about the experiments on in-conductance, that we had done in Paris, which lead to the idea that there necessarily needed to be an intermediate between the gene and the protein, on which everything was represented. And it's following that... So we talked about it all and that's when they both leapt up, saying "It's Volkin and Astrachan.". I had completely forgotten about Volkin and Astrachan. I knew they existed but I had completely forgotten about them. They were the ones who had made the link. And so from then on, Sydney and I decided to go to Pasadena to do that experiment.

And it almost didn't work ?

We had exactly 30 days. Because he had engagements. Max Delbrück had invited him, No, in fact, Max Delbrück had invited me and Meselson had invited him, that's it. And so we found ourselves over there. We decided that was what we were going to do, and we had exactly one month. We had to leave on a specific day. And for 20 days, it absolutely didn't work. Meaning that... the principle consisted in marking old proteins with sulphur and the new RNA with phosphor. And what we needed to show was that the new phosphor joined the old ribosome proteins. It absolutely didn't work for two or three weeks, until one day when we were hanging around on the beach, Sydney suddenly leapt up and said "It's the magnesium, we didn't put enough magnesium !". Because what we were looking at was inside cesium radians. And so obviously, the cesium was completed with the magnesium's divalent things, so much more magnesium was needed. We ran back to the lab, poured in tons of magnesium, and it worked.

And it was an experiment that showed that the ribosomes could basically join any messenger RNA.

That's right.

And at the same time, François Gros of the Jim Watson lab was showing the existence of the short-lived RNA.

Well, he went about it in a different way. He showed that... Volkin and Astrachan were working with phage. And they were trying to find, and they found, I think François was the one who found this, that when you briefly marked the RNA with growing bacteria, there was a sort of RNA that was very quickly marked, and that had the same composition as a basic DNA and which wasn't the same thing as ribosome. So it's through two different ways that we reached the same conclusion.

It was incredible. I know that, in Pasadena... I got there, I did three seminars. I did a seminar at Gunther Stent's who was at Berkeley. Afterwards I did a seminar at... I don't remember where, and then one at Max Delbrück's. And when I told Max Delbrück's about the hypothesis of a thing that at the time we called x, he threw his arms in the air, and left, that's how he was, he couldn't handle that much !

And what couldn't he handle ? An idea that didn't fall within the scope ?

Yes. An idea that seemed completely silly to him, that came from nowhere, that seemed completely useless. He really couldn't tolerate it. He was awful in seminars, he was unbelievable, sometimes he read his paper.

Which isn't really encouraging. But once the experiment was done, it's also that year that you are going to publish the big article in the "Journal of Molecular Biology". Everything worked together.

Yes. It was very quick. For two weeks people threw their hands up, but in the end everyone accepted it. Not only did everyone accept it but everyone was saying, which is typical, everyone was saying "I've already done it !".

In particular, the Brachet group in Brussels who said "The messenger RNA, we described it a long time ago !".

Them among others, yes.

We present the entire model. And then we did a series of things. Yes, there were two articles. Because I wrote my article on that. I don't remember what Sydney wrote. And Monod wrote a general thing, which were the teleonomic conclusions, as he called them.

Can you tell us what teleonomy is because it's... What was it ?

Well I think that it meant, it was to say, oriented towards an end, but without using the traditional word. Yes, that's it. So as not to speak of theology, he would speak of teleonomy. That's exactly it. That's the word that... yes, that's right.

We were the stars at Cold Spring Harbor.

Yes. At Cold Spring Harbor, we really were the stars, because we arrived with something fresh and we came out with that... Wait a minute, let me see... we weren't really the stars because Jim was also there with DNA. It was in 1958. This one was in 1961.

This one was in 1961. So when was Jim there ?

I really didn't understand his article, well I didn't really read very carefully, his *"Nature"* articles. But I attended a Cold Spring Harbor where Jim was explaining his model. I don't know if you remember Jim with his shirt hanging out...

I saw him when he was older, I didn't see him at that time.

There are photos of him with his shirt hanging out, his finger in the air to showwith his inimitable way of speaking... and at that point, his model was very clear.

But that must have been in 1953, don't you think ?

You're right, it was in 1953.

There are many things that are potential Nobel prize winners. So it needs to get noticed a little more than the others. And actually, it really caused a stir. The whole world got excited about this model, and way too much. Meaning that they... people from almost everywhere, from every discipline, be it the guys who studied protein synthesis in rat liver, or anything, the model was applied to everything and anything. So after four or five years people couldn't stand to talk about it, and the model was rejected by everyone.

Something of a pendulum effect ?

Exactly.

There's a negative period. Yes, there was a period when people didn't believe in it at all.

There was a negative period. There's a negative period. Yes, there was a period when people didn't believe in it anymore. And eventually, it came back. And then there were these two guys, I don't remember their names, who were also working on regulation... and who were making models.

Britton and Davidson.

That's it. Britton and Davidson, who were making completely eccentric models, and who were very succesful, but who were completely eccentric, who didn't have any experimental basis. But very successful.

So that wasn't doing you any good.

Not really, because we found it so crazy that it didn't really bother us ! Have you read them ?

I've seen them. I had discussions with Americans, it's strange, these models have kept a certain aura.

And I wonder why because they don't have any links with any experimental data. It's very strange.

I think that Davidson had a very strong position.

Yes, that's it. And he also talked a lot, he attended every conference, he flooded conferences with his theory.

But there's absolutely none of it left.

In my opinion, there was nothing there to start with.

And when did the Operon model basically make a comeback- was once again recognised ? Was it from the genes development ?

I'm not exactly sure. There was an eclipse that lasted a few years and then it came back. But what happened was that there had been an excess, an excess in one way which lead to an excess in the other. And it became normal again after a couple of years. But for a very long time, the regulation models and the ones of negative things, the people that were working in the regulation of superior organisms in particular, were never referring to our stuff. It was completely...

Yes, and in particular embryologists like...I don't know, Conrad Waddington or even Boris Ephrussi were...

No, Waddington came over... he came over to Paris especially to see what we were doing. He was an odd guy, did you ever meet Waddington ? Very intelligent and a little strange. He sort of looked like Churchill, he was the type of guy...but he came over to- I think he was giving conferences, of which I've forgotten the name, at Columbia, there was a series of quite famous conferences... and he was supposed to do that, so he came over to see if what we were doing could be applied to his regulation in the superiors.

And I think he applied it a little at the start.

Yes.

And afterwards, he became...

He became against it. But that was a little too easy. I think that there was an excess of people who were in favour of it, which lead to an excess of people who were against it. And it took a long time to put the record straight. But very often, even now, when people do the history of it all they don't refer to it, they don't talk about it.

No. And even the development genes, they sometimes have names, we speak of master gene, when we could very well be speaking of regulator genes. But it's a new nomenclature. Nowadays, in post-genomics people do refer to themselves very often to your model. It has became a sort of icon of post-genomics, in some ways. Which is interesting. But in France, it's your model that basically helped to discover molecular biology. Yes. It played a key role..

Yes.But that, that's French stupidity. Yes, exactly. Genetics, that's incredible. The first genetics chair was Ephrussi's. There was no genetic chair for years, not in Medicine or at the Science Faculty. And the first genetics chair was Ephrussi's. And the first microbiology was André Lwoff's but even later.

As for biochemistry, apart from Fromageot, it was still quite traditional. Well there were some.

Well there were some. There was Gabriel Bertrand who was Monod's precursor. Did you ever meet Gabriel Bertrand ? A very old man with a goatee, who took very small steps and who had the office... Monod was given the... Trefouel had given his department to Monod, but not the office, which was... So Monod was waiting for him to get sick to get the office...

It is Gabriel Bertrand who, in enzymes, told that that was the metal who was important and not the protein...

Yes.

It's quite an unbelievable discovery. For the evolution of biochemistry.

It's quite an unbelievable discovery. And for student's education, it's was not bad.

We were told by a Swedish journalist, the week before the Nobel prize, which I think took place on the 15th of October or something like that. The previous Saturday, a Swedish journalist had called Monod and had come to see him. And Monod rang me so I could be there as well. She said "It seems that you have won the Nobel prize ?" We said "we'll see". And that's it. And so we asked her "are there two or three of them ?" She said "I don't know". Apparently, she didn't know if there was a third one or not. But that quickly became clear.

And when you got the Nobel prize, what did it represent ?

It represents an avalanche. We weren't famous at all, no one knew who we were. There weren't any French students. There were American, German, Turkish, Chinese students but no French ones. And practically no one knew this laboratory. At the time, Monod had been a lecturer at the Faculty for a while, but very few students had known about it. And so, it was a sort of avalanche. Suddenly, at noon that day, the day the prizes were announced, we saw journalists turning up from all over the world, we were completely knocked out. Well it was... it was terrible.

And afterwards, in the years that followed, it still allowed the development of molecular biology.

Yes, it was its main virtue. Yes, it enabled us to get money, it allowed us to do... what was it called... the DGRST. There was a molecular biology concerted action which enabled the construction of various buildings, including this one, and four or five molecular biology buildings. Yes, it definitely sort of unblocked the system.

And to have students who must have then been hurrying over.

Yes, the students rushed over. Obviously. That's a very French thing to do.

Going for the winning team in a way.

Yes, but mainly the total absence of anything current. Because, actually it started in the fifties. We can say that, molecular biology started with Watson-Crick. The physicists had it on their mind when they said "the molecules really do need to do something and therefore biology must be molecular". That was Delbrück, Crick and those people. But the real demonstration was Watson-Crick. It showed that a molecule could account for absolutely incredible properties in biology. But between 1953 and approximately 1960, not much happened here.

There were, I don't know, maybe a maximum of 20 guys. And so there were meetings here and there. I remember several meetings. I think that the Rockefeller foundation had given a group constituted of Ephrussi, OleMaale, did you ever meet Ole Maalu ? He was a Dane, a very charming guy, very friendly. And then, there was Ephrussi, Maale who were the first geneticists... and probably Cavalli the Italian... had given some money to these guys do to a series of conferences. There was one in Denmark, there was one in Pallanza in Italy and then there was another one I don't remember where. And there were 15 or 20 guys, always the same ones. It was a very small... Roughly there were Delbrück's guys... there was the Delbrück-Luria group, Jim who came from it because he was Luria's student. In England there was Crick and Sydney. And there was us here. And that's it.

Quite a change compared to nowadays.

And everything happened by post or phone.

We knew roughly six months ahead of publication what was being written, what everyone was doing. It was rather exceptional for a while.

You spoke of golden age when referring to that time.

Yes, that's more or less it. But I mean there was... I particularly remember that story... I told you that there was a meeting at Sydney's with Francis. And it took place in Sydney's room in his college - Kings, or something like that. And they asked me to summarise what we were doing in Paris. And the conclusion was "there needs to be something, an intermediary x". And that's when they leapt up and said... Well. But about three weeks or a month earlier, I had made the exact same speech, exactly the same one, in Denmark, in Copenhagen, with the same guys, and not one of them bat an eyelid. That's how it was!

Crick was the brightest of all the molecular biologists who ever existed in the world. He was astonishing. He was so astonishing that he would even explain to everyone what they were doing. So that people understood the importance of their own work he would explain it to them. Which people didn't always appreciate. There are some who don't like things to be done that way. But he was extraordinarily bright. He made a speech, it must have been in 1960, on the synthesis of proteins...

I think that it was in 1957, the conference where he spoke, in particular, about the code, wasn't it? The idea of code?

That's right, the idea of code, the idea of; what are those things called,

that... adaptors, yes.

He had a very surprising opinion on that. In comparison to the confusion, the mess that was the synthesis of proteins, Crick's speech was extraordinarily simplifying, he brought things into perspective, he showed where we needed to look for something and where we shouldn't be looking for anything. And he was very surprising. Very surprising.

And you say that nevertheless, at the start, when you saw the Watson-Crick model, you knew Watson, and everyone was saying

he was the author.

Yes. I thought Crick was one of Watson's appendages. Until he got here. He came over for a seminar. And then, it was clear that he wasn't a by-product.

And afterwards, towards the end of his life, Francis Crick turned towards the development of the nervous system, and all that. Did you follow what he did later on ?

First he did... I think he did a little development.

Yes, he had worked with Peter Lawrence.

That's right. And he also worked with Sydney. Because Sydney and Francis were together, in a room in Cambridge, and they were hard at work there because they were both very very bright. Sydney is an extraordinarily bright guy, full of ideas, never stops talking. I think he must have gone on for 20 hours without stopping. He's extraordinary in his own way.

Seymour Benzer is also a really extraordinary person. Seymour came over for a year, quite early on, soon after I arrived at the Pasteur Institute. We were in the same lab. And for more or less a year, he arrived in the morning, said "hi !" and we didn't hear from him all day. And in the evening, he would say "bye !". That's all we would hear from him all day. But he was surprising. Because he's a guy who, you talk to him, you ask him a question, no answer, he doesn't say anything. And then, four days later he comes back and he's got to the bottom of the problem. He's also really outstanding in his own way.

Jean Weigle, he's in a class of his own. Weigle was a physics lecturer in Geneva. He decided, when he was 40, that at 50 he would stop. That it was inconceivable for a physics lecturer to be older than 50 years old. So, he was stopping. And when he stopped he started travelling the world. He had money so he travelled. He ended up in Pasadena at Delbrück's laboratory. He was fascinated by phage, and so he came back to Geneva with Lambda, K12 and everything else, all the gear. And he was very very friendly, he was a very warm guy, very nice. He died very early, soon after he started working on phage.

Leo Szilard, he's just like a bumblebee who goes from one flower to the next and fertilises just about anything. Szilard is also extraordinary, an incredible, surprising man. He had 10 ideas a minute. He had ideas about everything. I must have forgotten now, but he had, I have somewhat forgotten his ideas, but there were things to make money, to do experiments, to...

I know that he was very active in anti nuclear weapon movements, wasn't he ?

Yes, he was very active. He was one of the guys who... He went to see Einstein, he took him by the arm, and took him to see... Who was it then ?

Roosevelt.

He's the one that set the whole thing off, yes. But he was very surprising.

Aaron Novick was one of Szilard's physics students. And when Szilard had had enough of atomic bombs and physics, he got into biology, they both got into biology. Their first work was something Monod had been doing on his side, which was a continuous growth device, you know, bactogene. They called it bastostat and Monod called it bactogene but it was the same thing. And they did it independently. Szilard was incredible. He came in, sat you down, and sat opposite you with his notebook, he started asking questions, he wrote down all your answers. And a year later, he would say "that day at that time, you said this, is it still true ?"

Jim Watson, he's... Well you know Jim Watson ?

I know him. But I know him as Head of...

He's an extraordinary person. Actually, he's probably the one that did the most molecular biology of all the system. He's the one who dragged Crick into it. And he's the one who... as well as the human genome. He's incredible. But at the same time, he's completely crazy. When you see him, he's very surprising.

And you also said that he was the one who read his paper during, him as well since...

Yes. That was during a conference, the Copenhagen conference that I was talking about earlier. Every time someone was making a speech he would open his paper. Which means that when he went up to do his speech, everyone took a paper out.

I was absolutely convinced that... which is odd... Luria and Delbrück, that was something classic, it was an incredible experiment. Do Luria and Delbrück mean anything to you ?That really was an incredible experiment, from a conceptual point of view as well the way in which it was done and everything. And so, they were very famous. In the lab, we talked about Luria and Delbrück all the time. And I don't know why, but I imagined Delbrück to be the short fat one and Luria the tall dark Italian. But it's the exact opposite. Luria wasn't fat but he was short and dark, whereas Delbrück was a tall blond. It's always surprising to find out that people aren't like you imagined them to be.

And, in your opinion, those were things that were so established that you already imagined the people...

Yes, well in the lab, that's all we talked about. Luria and Delbrück... until the day we saw them.

And you worked with Salvador Luria at Pasteur ?

Yes, he came over to Monod's lab a few times for a few months. So he was a short Italian, very dark, with a bad temper, screaming, very politically committed. Whereas Delbrück was a cold and calm guy.

Gunther Stent was one of Delbrück's students, like most of those guys. And Elie Wollman had gone to the United States for two years at Delbrück's lab. And Elie and Gunther Stent became very good friends, they worked together on something completely uninteresting, which was the role of tryptophan in the absorption of T4 phage. Apparently, T4 phage doesn't get absorbed if there isn't any tryptophan. So they worked on that for two years. It didn't make much of an impact. And so Elie and Gunther were very good friends and Gunther often came over. And in fact, Gunther invited Elie to Berkeley for a year. And it's during the year that Elie spent in Berkeley that we really did things with Monod. And so when he came back, we told him "come work with us". And he said no. It wasn't worthy of him.

And afterwards, Gunther Stent is sort of going to be opposed to the Operon ?

Yes, he did the Operon, but he didn't do it at the DNA level, but at the level ofbut he was always against it. We can almost say that he was regularly opposed to every theory that came out, and we can say that we could pretty much bet that the truth was more or less the opposite of what he was saying. Almost every time. It wasn't "that reliable", but almost.

And in fact afterwards, in the years that follow, I know that in development biology, he's also going to be opposed to gene development.

Yes, he always ventured off the beaten tracks. But he was very very nice. He talked quite a lot. He's a philosopher now, it suits him well, he had a philosophical mind. He's a philosophy lecturer. He gives philosophy lectures at Berkeley.

And when you speak of that time, you often insisted on the pairs of scientists.

It was a time, when people often worked in pairs. Yes, I think that until the war, they worked alone. Now you need 20 or 25 people to work on the genome. But at that time, at the birth of molecular biology, there were couples, there were pairs. There was Watson and Crick, there was Luria-Delbrück, there was Jacob-Monod, etc. There was Meselson and Stahl. It's funny, but that's how it was, there were pairs. But I believe that working alone is boring, it's much more fun to work with someone, it's more cheerful, it goes much quicker.

In the end, It wasn't the Pasteurian laboratory who isolated the repressor ?

No.

Did you regret it ?

Yes, I didn't really appreciate it. I thought that the geneticists had worked much harder than the chemists. And that the chemists, whose job it was to isolate the repressor hadn't isolated it. Actually, the people that isolated the repressor used one or two tricks, such as obtaining mutants that did much more than the normal strain, the wild-type, because obviously, the quantity of repressor per cell is very small. And we could expect that it would be very small. So they had better isolate the mutants that were doing too much. And they found some, which simplified the isolation of the repressor.

But in the end, the isolation ?

Well, it wasn't us. Yes, it was even indispensable. But that's why it would have been good if it had been us.

On the other hand, you go, very quickly after working on the Operon, develop the Replicon model with Sydney Brenner.

With Sydney, yes. Yes, because we... it happened on a beach... Me, I had already knit with this story for some time because I found that during the recombination systems, that it is by conjugation or transfer by phage, when a piece of DNA was transferred, a piece of DNA say, was transferred by any of these mechanisms in a recipient cell, this piece of DNA did not replicate. It only replicated under certain conditions and when it had a certain segment of the phage chromosome for example or any other ... So the conclusion of this story is that there had to be a site that allowed replication or not, and compared to the operator's system, I built this thing with the replicator and this difference was supposed to be positive. I had arguments to say "there must be a gene that makes a protein, a product, that acts on a site, that allows the replication of DNA, for example, or any ...", that's it.

So that positive regulation in fact, for you, that was not a problem.

No.

The idea that there could be positive regulations alongside negative regulations, which annoyed Jacques Monod.

But Jacques Monod had a spirit, he was made in such a way that nature must be rational but have the same rationality as him. Which was not absolutely obvious. That's why, for example, he wanted all regulations to be negative. Since we had found 3 systems one after the other, phage, lactose, and tryptophan were all negative regulations, so nature was o-negative regulator. Which was not absolutely obvious a priori.

You believe much more, you, basically, to the diversity and inventiveness of nature.

I have always believed in Do It Yourself (DIY). DIY, that is to say, to use the stuff as they are and take an old thing to make a new one.

This is an idea that you will develop in the 70s.

Later, yes. Because evolution is a bit like that. Evolution takes a structure, and it uses it, not just in the way it was used in the beginning but to do other things at once. And that, it looks like DIY.

And it's a concept that has been very successful, everyone is talking about DIY today.

Yes, but I think it was a very reasonable idea. It annoyed a lot, because the idea that we were the product of DIY, people did not like that much. But in fact, it's still a very useful notion because that's how it works.

What I mainly wanted was to change material. I wanted to have something... instead of bacteria, I wanted an organism that had eyes, that looked at you and that had a soul. And bacteria don't really have souls. And so there were a lot of discussions. Because the question was "if we want to go on to superior organisms, which one ?". So two of my friends, Seymour Benzer and Sydney, had already taken to plunge. Seymour was working on... drosophila

and its behaviour in particular.

Yes, that's right. And Sydney had chosen the small warm. So I asked Sydney if I could borrow his small worm, which he did with disgust. He lent it to me, but he wasn't very happy that I was working with it. But I didn't really enjoy working with the small worm. Which means that I didn't work with it for very long. And I thought drosophila was the perfect system, a tremendous system because of genetics, because of the possibility of, of really... But I thought that importing drosophila to Pasteur, with a sufficiently big enough group so as to be able to do something, wasn't very reasonable. Whereas the mouse, which is an organism on which bacteria, viruses and everything is tested... it was perfectly reasonable to do a little mouse genetics and do it with a mouse. Hence the mouse. Which, obviously, didn't allow me to do as much as with drosophila. But nevertheless, I thought it was much more reasonable to work with mice at Pasteur than with drosophila.

And for the eyes and the soul. The mouse is better !

Yes, of course. It's even better than roundworms Roundworms have souls like everybody else !

It seemed obvious to me, in the same way that we had been able to do things with bacteria, which was because we had brought together people from completely different horizons and education to work on one organism, which was Escherichia Coli K12 and its phage, that if we wanted to start working on superior organisms, the same thing needed to be done. So we could then start talking about which superior organism to pick, but eventually, for a variety of reasons, the mouse was the best one. Hence the idea of the mouse facilites at the Institute. People then thought I was crazy or... because why choose mice rather than drosophila, rather than man, rather than anything else. And they also thought "he wants to have an institute, which he would manage". If there was something in which I had no interest, it was to manage an institute. And eventually, it failed because of that. People didn't follow, which is silly because if we had done it, we would have been ten years ahead of everyone else.

Nevertheless, in the molecular biology department in which you have settled, the mouse had quite an important place.

Well yes, because eventually I bent the system. But then I had a long talk with Monod, because it wasn't easy at the start. Especially... what was his name, Oudin who found it completely stupid, and who thought the only normal organism was the rabbit. Because serum is made from rabbits, and that having 5000 mice in a corner of the Pasteur Institute was completely unreasonable. So I had absolutely Homeric talks with him, especially in the large lecture theatre at Pasteur, where I tried to prove that we needed to do genetics, which in his opinion really wasn't obvious, and if we wanted to do genetics, it wasn't rabbit genetics but mouse genetics that was needed. And eventually, Monod agreed with me and Oudin wasn't very happy. And we transformed practically all Pasteur's animal houses into mice houses.

I don't remember who hired him [*], who found him, yes, I think it was Fauve. He was Fauve's friend. Did you know Fauve ? Who was in Garches and then came here. He was the only one who was used to working with mouse-type organisms ; he had been working on them for years. He knew what it was like to inject a mouse, whereas we were completely inapt. He recruited Jean-Louis who was an incredible recruit. He immediately understood the importance of the project, and he got down to work, with a lot of difficulty, because of Oudin. Oudin wanted Fauve to give him rabbits. And Fauve didn't want to.

But nevertheless, you had a mice animal house which was at the time one of the best in France.

I had mouse house because I stole it from Oudin. It was the animal house which was initially supposed to be a rabbit one. So I went to talk to him for three hours with Monod who totally understood, and who said "all right, we'll work on the mouse". To Oudin's great displeasure. Did you know Oudin ?

Yes, but I had trouble understanding the concepts he used.

I had a fantastic discussion with him, I don't know if you remember it, in the middle if the big lecture theatre. Because we were talking about the way we worked. I told him "we can't work if we don't start with a theory". He said "sir, I don't form theories, I do experiments".

It was very difficult at the time. It was obvious that drosophila and even roundworms were much simpler. But mainly drosophila, because there were 50, 60, 70 years of genetics, mutants absolutely everywhere, rearrangements, translocations, this and that, it was fantastic. And effectively it was with

∗. Jean-Louis ?

drosophila that the most important things were done. But it wasn't easy to import drosophila over here. Whereas the mouse, was sort of the support for everything that was to be done...

Basically, you had anticipated the mouse, but the tools only arrived 10 or 15 years after you took that decision.

Yes. But well, it was reasonable.

My idea was that if we went from bacteria to more complicated organisms, the two systems were needed. Meaning having the organism and cell culture. There weren't that many because the famous small worm, we can't put his cells in cultures. And in my opinion, that was almost a necessity. Hence the reason for the mouse. Because on mice cells we really could do a lot of things. And teratoma in particular. The day I discovered teratoma, I jumped for joy. Boris Ephrussi is the one who made me discover it. He was the one working on it, he didn't do much with it by the way. But nonetheless, he extracted two or three strains which were used worldwide. I've forgotten their name, but Boris' strains were very famous.

F9s ?

Among others, yes. That's right.

PCC3s, PCC4s ?

No, we were the ones who extracted those. The PCC was us. It was Paris and I don't remember what. P was for Paris. Edwige was the one who extracted those strains.

And was it a delight to work on Teratocarcinoma cells, to see inactivation in the box.

It was incredible. If you put that in a box, there are cells that look like nothing. All of a sudden, a few cells aggregate, differentiate themselves and start beating, it's incredible to see a beating with a rhythm which is the cardiac rhythm of fifty cells, which are aggregated in the middle of the box, it's extraordinary. It makes you feel like God.

And in the end, the ES cells that we speak so much of today, they are practically identical, to those cells. So, what people are doing today is what you were already doing 30 years ago. Domesticate them in a way.

Absolutely. But I don't think that they realise it. Because they are doing it on human cells, and obviously it much more dignified to do that on human cells.

It's difficult, It's difficult, yes.

But a lot of the things that are done with it nowadays, we were doing them with mice cells.

Even the compounds used like retinoïc acid, were compounds that you were already using at the time to master inactivation.

Absolutely.

And from your work with the mouse, what will you remember ? What were your biggest contributions and your biggest regrets ?

First of all, I'll remember that it's a lot more difficult than bacteria. It's incredible how much more difficult than bacteria. But that nevertheless, with cells, you can do an enormous amount of things in vitro. And what is necessary, at least that's what I believe to have understood, was to work with both, meaning the cells and the entire mouse, go from one to the other and back. I think that in the end it was a good thing. And eventually, all it did was confirm that the idea of mouse facilites was the most reasonable thing to do.

Do you think that France would be in advance on the ES cells nowadays, if you had received more support at the time ?

Probably, yes. I think so, yes. ES cells have become a philosophico-religious problem. So it's difficult to talk about it.

We might talk about it later when we focus on ethical problems.

Maybe.

And is there anything that you regret, an experiment that you may not have done or that you could have done at the time but didn't, or that others have done with the mouse.

More than likely, but I have forgotten.

I was thinking of what Beatrice Menz did when she managed to reconstitute

Yes, Yes. That was one of the things we wanted to do early on, and Beatrice Menz did it. There was another guy that was very good. What was his name ? He was Beatrice Menz's rival. I've forgotten his name. He was the first one to do it, Beatrice Menz did it afterwards.
Extracting cells and re-injecting them in morula or in blastocyst, and making it appear in the mouse, that was indeed a magnificent experiment. We sort of failed to do that.

At the beginning of the eighties, genetic engineering brought the tools that allow the characterisation of genes, which until then had been difficult since it had been almost impossible to isolate the gene until the beginning of the eighties. At the time, how did you feel about the arrival of genetic engineering ?

Bad, because it happened in a slightly complicated context.
At the time there were constant arguments. I don't know if you remember. I didn't really like that. Which means that at the beginning, I didn't really get into genetic engineering. I waited for it to calm down a little. Well there were four or five guys that were very good here. There was one whose name I've completely forgotten, who was very bright. Alain Rambach, yes. What happened to him ?

I think that he manages a biotechnology company.

He was very clever and quite unbearable. There were many like that, unbearable and clever. The time really called for it. There were... what was the other one called, the Canadian that came and went, who was really impressive in his own way. He was very clever and unbearable.

I don't remember the Canadian. I remember Pierre Tiollais who wasn't unbearable at all.

No Pierre Tiollais wasn't unbearable, not at all. No, no, it was another one whose name I forget. It doesn't matter. Yes, that's right.

I don't know and who is one of the first to push the techniques on genetic engineering.

Yes.

But in the end, it's in the middle of the eighties that, for the mouse, it's really going to produce tools for isolating genes.

What mainly came as a shock, was to discover they were the same ones everywhere. That was something staggering. Since then, we have completely accustomed ourselves to the idea. But at the time, realising that the genes that constitute a man are the same as those that constitute a drosophila, that wasn't obvious. That whole thing really surprised me.

The bricolage concept sort of enables its explanation.

Yes, absolutely. But what's important to know is, once you've accepted it, it's all right. But at first, it's still very surprising.

Until then, it was believed that the development of the mouse or of the drosophila were going to be different genes. Identical principles maybe, but completely different genes ?

I started off... When I started doing biology, which was in the mid fifties, the idea was that the molecules that composed drosophila, weren't the same molecules as the ones that composed a cow. And it was because a cow was made of cow molecules that it was a cow. And that's how it was for quite a while. And it's only little by little, that we noticed that certain molecules, for instance haemoglobin, were the same everywhere, and little by little, this idea grew and spread, and eventually we noticed that all organisms were made with the same molecules. That was the height of bricolage, yes.

And specifically with the paxis genes, which control the formation of the eye.

For instance, yes. The formation of all eyes, everywhere.

That's also something truly extraordinary and unexpected, unpredictable.

Totally unpredictable but astonishing. Confirming the wonderful concept that is bricolage.

The idea of making sequences wasn't something I particularly enjoyed. I thought it needed to be done, that we would do it, but that we had time, that there was no rush. And that it wasn't worth rushing to make sequences. It was obvious we would be making sequences and that we would end up making the human sequence. Since making the human sequence we haven't done much. We will be making some, but it takes time. And it was the idea I had at the beginning. Meaning that it needed to be done but that I'd rather the others did it.

And post-genomics, which is largely talked about these days, how do you, that is to say the new technologies that would allow the observation of the organism in a global manner, protein networks.
This, I consider that it will be for future generations, but not mine.

In regards to the transcriptome, people rediscover your intuitions, because they look at the coregulated genes as a whole, and in the end, they fall back on what you imagined in the sixties.

Yes. It was predictable. It's a good representation of the idea, yes.

And you make a few very striking distinctions, for example, day science and night science, which is an idea that you really developed. There are basically two forms of science. There's night science which is...

There's the science that gets published and the science that is dreamt or appears in nightmares. That's the idea. Meaning that I think that the majority of ideas come to you at night. When waking up with a jump, sweating, etc. And while dreaming and having nightmares, that's what night science is. But all those ideas don't go on to be written, they don't appear in articles. In articles, everything is simple, clear and straightforward...

And is it normal to distinguish the two so much ?

I don't know if it's normal or not. That's just how I see things. But I think it must be very different. That's how I worked. Meaning that very often at night, I would wake up thinking of experiments we had done, or that we were going to do. And generally, what we think of at night has nothing to do with the reality of the real. It's simply... but eventually it's quite useful because it still allows a few ideas that would not come up on their own to emerge in a rather pure logical reflection.

It's an idea and diversity generator ?

Yes, if you want, that's it, yes. Afterwards, what exceeds need to be trimmed and brought backand the day science, is the one that can be seen appearing in decent articles, meaning what is allowed to be thought, to be shown.

There's also, you also distinguish between warm and cold science. Cold science being the one we read in books. And warm science being the one we do.

It's sort of the same thing.

But at the same time, there's the psychological aspect because the one that really interests you is warm science.

Yes, but all that is obviously psychological. We can hardly get rid of our psychology. Yes, yes that's right. But I think that it's true that you wake up at night with ideas that, most of the time, are wrong. Personally, I had reached the point of having a pen and paper next to my bed, mainly so as not to miss anything, because by morning you don't remember any of it. And actually, most of these ideas that occur at night, are fit for the dustbin, but once in a while, there are one or two that emerge. So I had the paper and pen by my side, in order to quickly write things down on paper. Actually, I didn't write much, but I still believe that at night, we're not in a similar intellectual and psychological state as the one we are in during the day. Well, at least that's how I am.

As if unexpected connections were made.

If you like, that's right.

Actually, we always say that people are equal when faced with illness. But it isn't true. They are different when faced with illness. They aren't equal in front of therapy, if you will. But identity and equality aren't the same thing at all. Identity is biology and equality is culture. And it's because people are different that the notion of equality is necessary.

But I think that it's a very dominant confusion, for example with cloning.

I agree, but I find it silly. Everyone's talking about it. Equality when faced with this and that. It's not an equality, it's a difference.

And the problems with stem cells which was also largely talked about, what do you think about it ?

I think that it's still a fantastic tool and that it needs to be handled with precaution.

But I don't think we can go without stem cells. What we need is simply to set barriers on the exercises which we can carry out with stem cells. But it is still an incredible tool.

Towards the end of the 1960s, I was a little fed up with doing genetics of bacteria, so I wanted to start changing, I wanted to have time to think, and I asked myself the question "why is what do we do ?". So that led to the story of biology, but what I tried was not to read the stories of biology that others had done, but to make my own story by looking at what people had do, exactly.

The original works, the works.

Yes that's it. Well, that was the idea.

And that, today, you would do it the same way, or you had...

Today, I will not do it *(laughs)*.

But have your ideas changed ? Has the history of biology changed ?

No, no, my ideas have not changed, my ardor, if you like, my eagerness to read people and to write, has changed, that's all. In other words, I have aged. I spent a lot of time at that. Finally, it was not useless, because we learn a lot. It's not easy, how the stuff came, who did what, etc., that's very interesting. And for that, it is necessary to avoid reading the ready-made stories of the biology, which in general are quite badly done.

Which were very traditional, right ? Which was a story of discoveries that accumulated ... But yet when your book came out, it was said that you were deep in the new epistemological history of science, for example, your book was similar to those of Foucault, saying that we found the same breath at the time.

Yes, but it's not entirely wrong. I liked Foucault well. I thought Foucault was a very smart guy. He had lots of ideas. It is not false.

Except that Foucault has sometimes been reproached for not always referring to the original works.

Ah, it's very simple, I saw how it worked, it rushed on the preface and the first 10 pages of the preface. And there, he was decortifying the preface in an extraordinary way and he came out that. It was absolutely amazing and extremely effective.

Okay, but the rest, however, escaped his attention a little.

The rest, he did not care.

And it is a book that has remained, because today still, it remains a reference for the history of the discipline.

Well, I think they sell a lot of them. I think there are some courses where we recommend reading this, which always amazes me a bit because it's still quite old now, in 1970, it's been 30 years, 40 years.

There has been no work with a similar ambition since then.

It is possible.

Except maybe Ernst Mayr, who has oriented him more towards the history of genetics. And in the book *The game of the possibilities*, it is there that you have divulged a little this notion of do-it-yourself.

So *The game of possibilities*, that's very simple, it was ... I was invited to lecture on the west coast, I do not remember where, so I wrote the texts of these three conferences, which are become *The game of possibilities*. It was the time when I was doing DIY, and I put it in there, yes, it was one of the chapters of the book.

And then there was your autobiography *The Statue Within*.

It was something else.

And *The mouse, the fly and the man...*
No, there I took lectures that I was doing, yes, it was not a real book. It was reuse of leftovers.

Yes, but there was something new about the development of biology since the Nobel Prize.

A little. It was less a book than the others. *The game of possibilities*, I like, I think it's a little book, it's not too long, it's not too boring, it's pretty well removed. It was the best of the series, I think. The first is a little heavy, you can learn things but it's a bit hard to read. It's dense, very dense!

I didn't know Georges Canguilhem, I met him then. And the first time I saw him, he told me something extraordinary. He said "if I'd met you earlier I would have written less rubbish". It was very surprising. Because he wrote a lot of rubbish about genetics, among other things. I don't know if you...

Yes, Yes I read it. At one point he even came very close to Lysenkoism.

Yes, he didn't understand any of it, absolutely nothing. And I found it touching that he would say that to me. Because, nonetheless, he is a very successful man, who educated generations of philosophers, and who is a very likeable and good guy. He was a member of the Résistance. He was a very good guy. Absolutely in his favour, but it amazed me, if you like. It surprised me that a guy of his stature and calibre would say that to me.

When I got there, I had found it difficult to settle somewhere. Because I had met Terouanne once. Terouanne was the director or assistant director of the CNRS. He was quite an astonishing guy in his own way. So there was the CNRS, Terouanne. There was the INSERM, which wasn't called INSERM at the time, it was the National Hygiene Institute. And the guy that ran it, what was his name? I don't remember. And so when I arrived, I went to see him. And I said to him "right", because my little speech went as follows "Right, I haven't done anything, I fought in the war, I have problems with it, I would like to do biology, can I work here?". So most guys threw me out straight away, Terouanne in particular. He... no, I would tell them "I wanted to do genetics". And he says to me "personally, I'm not interested in genetics". Fine. And then eventually, Trefouel to whom I had made the same speech, said yes and took me on, all because of my friendly face and I don't even know why. Because I hadn't done anything with biology, I didn't have any ideas apart from the fact that we probably needed to do bacterial genetics, which horrified most people, by saying "there are no genes, no DNA, etc.". And that's it. But in the end, he was very nice, he gave me a grant. The only problem with the grant was that I needed to find a place in the institute. My mind was already made up, I wanted to work with Lwoff and nowhere else. And I went to see Lwoff who said "I don't have any room for you". The following month I went to Lwoff, and he said "I don't have any room for you”. It went on like that until May or June. And in June, I needed to find something for the next year and I was really struggling to find someone who could take me on. And eventually, in June, he said to me “you know, we have found the induction of the prophage. Would you be interested ?”. I told him “I’m dying for it !”. And in the end, he took me on. I came out of there, I went straight to a bookshop to see what induction and prophage were. I found something incomprehensible on induction, but prophage didn’t exist.

We haven’t really talked about the Pasteur Institute where your scientific career was made.

Completely.

So firstly there’s the discovery of the Pasteur Institute that you write about in *The Statue Within* a placed filled with traditions and history ?

All you need to see is the crypt. It’s extraordinary, have you been to see it. Yes. You have to admit that it’s astonishing.

It’s surprising, yes. A blend of scientism and religiosity.

Absolutely. Amazing. And what is surprising, I don’t know if it still takes place and if you’ve done it, but it’s the annual visit on the anniversary of what I think is Pasteur’s death, where the whole of the institutes parades in front of the tomb, one by one. That is also incredible, particularly in such a place.

But really, those were traditions which were both rich, but at the same time could be a little unproductive sometimes.

Yes, of course. But at the start there were incredible guys.

For example ?

There was a guy who came... When I got there, one of my first discoveries at the Pasteur Institute, was to find a guy who got there at noon, cooked his steak on the Bunsen burner and left at quarter past one. That was his day at the Pasteur Institute. No problem. Nobody paid attention to it. That's what was good. Absolutely. The good side of the place. It's changed a lot. It was something, it was so calm, you could do whatever you wanted. And also do nothing, we could do as we wanted at that time in the Pasteur Institute.

There weren't any laboratory controls, audits, nothing like that ?

Right at the beginning, when I arrived, right at the beginning, no. It really changed afterwards. But at the beginning, there was hardly any control. The whole institute was suspicious of the Lwoff-Monod group. They were completely separated, taking refuge in a... the proof that they were suspicious of Lwoff, is that he was given the attic up there. And that he was confined in his attic. That was also quite surprising. And a lot was needed for him to..., it took a Nobel prize for it to change. It's quite astonishing. In the fifties and sixties.

And who was behind the change ?

Well, there were three guys who brought about the revolution. There was Wollman, there was Virat, which probably doesn't mean anything to you, he was a veterinary surgeon, and there was a third one, Panthier, Jean-Jacques'father. Those were the three guys who plotted and brought about the revolution at Pasteur. Meaning that they... It was boiling. The director was Trefouel, who was very nice, but who was still really extraordinary. Trefouel was a member of the Academy, there weren't many, nobody from our group, neither Lwoff nor Monod had anything to do with the Academy. But since we wanted our notes at the Academy, we needed an academician to present the note. So, we would go to see Trefouel. We would bring a note on bacteriophage to Trefouel. He would say "it's absolutely fantastic, it's exactly like the chemistry of I don't know what".

You couldn't really see the link.

No. We would say "Yes, yes, you're right". And he would take our note and bring it to the Academy.

But nevertheless, in 1960, Mr Trefouel continued to run the Pasteur Institute, but in a slightly lax way. I mean that a serious

readjustment was needed.

Yes, because he had absolutely no idea about modern biology. He was more interested in biochemistry. He did some very good things. He focussed on sulfonamides and things like that, which was very good. But biology isn't limited to sulfonamides. As I was telling you earlier, when we went to see him, and we brought him a note, he would say "It's like sulfonamides!". Elie and I both struggled to keep a straight face. We would get there with our note, we did them together, and he'd say "it's fantastic, it's like sulfonamides". And then, we couldn't look at each other! No to laugh, absolutely.

And how did these three people go about with the revolution?

So the revolution was... I don't remember the details, but...

Was there a big personality change at the institute? We know that Monod is going to arrive in 1971.

Yes, but that's later on. Well, there mainly were those three guys. I don't remember the details. The three who wanted to change the institute. And I had been assigned the task of going to see Lwoff to ask him if he would be director. So I went to see Lwoff, I didn't have to say a single thing, he was director, he considered himself to be director. And that was also a problem. And in the end, he didn't become director, so he left, he went to the Curie Institute. Yes, he didn't like it. Because he had he was an absolutely wonderful person, but he had his friends and his enemies. He would do anything for his friends, and everything against his enemies. And so, he didn't hesitate to go around the institute saying "those guys need to thrown out!" when he was about to become director. So people didn't really appreciate it.

When I started at Lwoff's laboratory, there was an incredible team of technicians. I've forgotten their names, which is a real shame. But there were two guys and three women in the service, who were extraordinary, extraordinarily devoted, efficient and kind. And it lasted that way for a while. Nowadays, it's too big, there are too many people.

But it still lasted for, because at the beginning of the molecular biology building, it was still the same people.

Yes, the same ones, who died one by one. I've forgotten their names. There were two guys who were absolutely tremendous.

I don't remember the guys. I remember the women. There was Louise, Célestine, Germaine who were in Monod's lab.

That's it. They were all Bretons. That's true.

And you, you had technicians with you, in particular Martine Tallec, with whom you worked ?

Yes. Before Martine, I had, I don't remember what her name was, who is now François Gros'wife. Who was very good, very efficient. I had two at one point, I had Martine and her and it went tremendously well. Because we needed to subculture hundreds of complicated things what we stuck on dark agar which gave blue or red depending whether it was lactose+ or lactose-. And there, they were fantastic. They spent entire days culturing strains, gathering them, looking at what they were...

And all that in a perfectly accurate way. You could completely trust them ?

Yes, yes. I trusted them more than myself. Much more. Martine was incredible. She was fantastic. François'wife was a little more "distinguished". She was a little more reserved. But Martine worked hard and was very efficient. She was fantastic.

Afterwards she went on to work with Hubert Condamine.

That's right. I think they really liked each other.

Things were difficult until Mrs Veil came into office. And then Monod, who was the new director, got on really well with her, and they created a new system. It's partly because of her that the Pasteur Institute was revived. It was revived, because since Pasteur, the Pasteur Institute was self-financed. The whole world financed it, the Brazilian emperor, the... What was that cavalry regiment called ? The very famous cavalry regiment that, I forget, The Bengal Lancers I think, who brought their contribution. And that's how it all began. And it went very well until more or less the war. From the war onwards, it all completely changed because things were more and more expensive and there was less and less money. And so Monod, who had become director, and Simone Veil who had become Health Secretary. And so together they concocted a system whereby the State gave half of the budget and the Pasteur Institute somehow managed to get the other half.

It's true that the sulfonamides, for example, didn't bring anything to the Pasteur Institute.

Nothing, it's an incredible scandal. The sulfonamides, something that worked for a very long time. I think that all they brought to the Institute was a technician for Trefouel. It's really quite incredible. That's one of the reasons why Trefouel was fired, amongst others. It was unbelievable. Everything went to Rhône-Poulenc, because at the same time he worked for Rhône-Poulenc.

Yes, he was a consultant at Rhône-Poulenc. And the seventies also saw a sort of separation between precisely the production of vaccines etc.

That's right. Until then it was completely mixed up. There were labs, for example salmonella labs, there was a room for research, a room for production. And there were quite a few labs like that in the Institute where production was done. Until they were separated. I think it was Monod who separated all that and who sent everything to Garches.

That made that production was realised in a better way.

Yes, obviously, because the guys that were making huge buckets of bacteria product in their lab in the middle of the institute weren't very happy. Yes, from then on it became much more industrial.

He was a universal mind. He knew everything about biology, he knew all about literature, philosophy, he played the piano. And once in a while, he would disappear for eight days to go play the piano somewhere. He was a very very surprising person.

He was one of your closest colleagues in the mouse adventure ?

Yes, he was very much in favour of it. And unfortunately, he passed away. But intellectually he was very very bright, really remarkable. He knew everything about literature, philosophy, he was fantastic. He was a Normale graduate, he studied literature. He was a good Normale graduate ! Are you a Normale graduate ? They're not all good. Some are unbearable. There's a little of everything like everywhere. But he was particularly friendly. I felt tremendous pain seeing Hubert go. Terrible. François Cuzin, yes, a very good Normale graduate, very efficient. And what were they called the little... ? Episomes. He was really good with episomes. He's the one who found the majority of things, the F, the factors, etc. Yes, that's right, the F, etc. Yes, he was very bright. I think he's retired now. Yes, but he's in Nice now. He's a powerful lord in Nice. But there weren't many of Hubert's quality. Hubert was exceptional. Absolutely exceptional. Yes, he was very very interesting. He had ideas about everything, he knew a lot of things. And his passing truly saddened me.

Science, people don't know it and don't understand it. And people hate what they don't know and don't understand. They are always ready to take down the things they don't know. It's a simple psychological principle. And also, I don't think it bears any importance. That's very French. Because I don't think that's true in the United States. I think that the recruitment of young researchers is the same as it always was. I think it's essentially French. It's important to say that in France, literature is what people find interesting. The people who are valued are always writers. Scientists are considered as just a load of rubbish.

When you had the Nobel, you were considered as an intellectual.

Not really as an intellectual. I don't think that scientists in France are considered as intellectuals. That's exactly what I meant earlier. The class of so-called intellectuals consists of philosophers, writers, possibly painters. But definitely not scientists. Scientists, no way. I think it's a typical French thing, that in France we like literature and philosophy. And that's what is valued. In fact, when the Nobel prizes are announced, most of the time the papers vaguely talk about scientists, but develop in great detail the literature prize, etc. It's clear. In France, we don't get excited at all about science. We get excited about literature, painting, etc. I don't know. I think that it's deeply anchored in the French soul. I don't know what could be done to change this.

And the current scientific movement which took place last spring. You took part, a little, in the debate.

A little, yes.

What do you think about it ? Are the complaints justified ?

Yes, I think so. I don't think the government understands that science is essential to foresee the future. That's how the future is made. And that consequently, if we cut ourselves off from it, we can't prepare for tomorrow. It's a rare stupidity, but that's how it is. So we do need to get a move on and explain to the government that it will be useful for tomorrow.

But then there's the famous problem of the reform of science, of the institutions.

Yes, well... reforms and debates. I haven't been able to stand them for quite a while. We've seen too many of them, of debates and meetings which didn't change anything, or which provide something but you waste a great amount of time, there are always the same guys telling the same stories. There are the smooth talkers who... I really don't enjoy them.

Today we often talk about the precaution principle. What do you think about it ?

Not much, because I think it's mainly a way of protecting governments, to be sure that they protect themselves from their own possible mistakes. I think that there needs to be some precaution, but making a principle of it isn't reasonable.

Some say that it could threaten scientific knowledge.

Partly. You could freeze everything with it, if you wanted. Because obviously, by precaution, you can't touch anything. It could blow up in your face.

It sort of leads to ethical questions. You wrote quite a lot on ge-

netics, the place it can have, or the bad use that can eventually be made of genetics in regards to racism, etc. What do you think about it ? Is there a risk that genetics be used for that purpose ?

There's a risk and the Nazis showed it to us. That's clear. All that has been around for a while... The idea of separating people according to their abilities, etc., it's ancient history. It was pushed to such an extent by the Nazis, but it's ancient history. Which reappears more or less everywhere, as soon as the Nazi story clarifies itself.

And do you not think that modern technologies, in vitro reproduction, and all that, brings up a particular problem, or provides an additional risk ?

I think so. But we need to be careful. Meaning that we shouldn't be doing just anything. I think that... we can't block everything, but we need to be careful. We need to be careful not to do just anything. I was thinking of, what is it called... ? Duplication... Cloning... it's a sort of hanging threat. And what I found particularly incredible, was on the day we started speaking of cloning, the ukase of politics saying "never, never. We are banning it". But cloning a man doesn't seem like something that will be done tomorrow, so I don't see the point of it.

No ? Or for some people with very...

Yes, there are lunatics everywhere. But the importance of cloning people still doesn't seem very obvious.

Interview pour la collection "La mémoire du Collège de France" (Editions Montparnasse)

Je pense que... Vous savez, ça, c'est un problème qui sera éternel, c'est le problème de la recherche de la connaissance et de l'application de cette connaissance. Depuis toujours, disons, quand on passe de l'âge de pierre à l'âge de fer, avec le fer, on peut faire des couteaux ; avec ce couteau, on peut peler sa pomme ou le planter entre les épaules de son meilleur ami. Donc ça, ça a toujours existé, ça a des conséquences de plus en plus importantes. La recherche de connaissance me paraît exactement une des caractéristiques fondamentales de l'esprit humain, la connaissance et la recherche de connaissance, et fatalement, toute connaissance nouvelle a des applications qui peuvent être soit bonnes, soit mauvaises. Alors ce qui n'est pas clair, ce qui a mal été décidé, et mal mis au point, c'est "quelle est la mécanique, quelle est la structure, qui décide du bien et du mal, dans ce domaine ?". Mais autrement, je ne me sens pas particulièrement responsable d'avoir fait des découvertes sur les mécanismes des gènes si vous voulez.

“Don’t just believe that it’s because something is trendy that it’s good. I probably go the other extreme where if I find too many people adopting a certain idea, I’d probably think it’s wrong. Or if my work had become too popular, I probably would think I had to change. This is of course ridiculous but I see the other side of it too often where people who will do something against their own agot-instinct because they think the community wants them to do it that way, so people will work on a certain subjective and know they aren’t terribly interested in because they think that they will get more prestige by working on it. I think you get more prestige by doing good science than by doing popular science because if you go with what you really think is important then it higher chance that it really is important in the long run and it’s the long run which has the most benefit to the world.”

(Donald Knuth)

“Ne croyez pas qu’une chose soit importante sous prétexte qu’elle est à la mode. J’aurais même plutôt tendance à penser complètement l’opposé qui est que si beaucoup de personnes adoptent une certaine idée, je pense qu’elle est probablement mauvaise. Ou si mon travail était devenu trop populaire, j’aurais probablement pensé qu’il fallait que je change. C’est bien sûr complètement ridicule mais je vois si souvent le contraire, lorsque des personnes font des choses contre leur instinct naturel parce qu’elles pensent que la communauté souhaite qu’elles agissent ainsi. Et alors les gens travaillent sur un sujet dont ils savent intérieurement qu’il ne les intéresse pas vraiment parce qu’ils pensent qu’ils obtiendront plus de prestige à travailler sur le sujet en question. Je pense qu’on obtient davantage de prestige en faisant de la science de qualité plutôt qu’en faisant de la science à la mode parce qu’être en accord avec ce que l’on pense vraiment est important, et que ça augmente les chances que ça soit important à long terme et que c’est le long terme qui est le plus bénéfique au monde.”

Traduction d'une interview de

Donald E. Knuth

par

Andrew Binstock

25 avril 2008

Journal numérique Informit

http://www.informit.com/articles/article.aspx?p=1193856

Andrew Binstock et Donald Knuth [1] discutent du succès de l'open source, du problème de l'architecture multi-cœur, du manque désappointant d'intérêt pour la programmation littéraire, de la menace du code réutilisable, et de cette légende urbaine sur le fait de gagner un concours de programmation avec une seule compilation.

Andrew Binstock : Vous êtes un des pères de la révolution de l'open-source, même si l'on ne vous annonce pas comme tel. Vous avez affirmé précédemment que vous avez libéré Teχ comme open-source à cause du problème des implémentations propriétaires en ce moment, et pour inviter à ce que le code soit corrigé, ces deux points étant des facteurs-clefs des projets open-source actuels. Avez-vous été surpris par le succès de l'open-source depuis ce moment ?

Knuth : Le succès du code open-source est peut-être la seule chose qui ne m'ait pas surpris dans le domaine informatique durant les quelques dernières décennies. Mais il n'a pas encore atteint son plein potentiel ; je crois que les programmes open-source commenceront à être complètement dominants lorsque l'économie ira de plus en plus des produits vers les services, et lorsque de plus en plus de volontaires réussiront à améliorer le code.

Par exemple, un code open-source peut produire des milliers d'exécutables, parfaitement adaptés aux configurations des utilisateurs individuels, alors qu'un logiciel commercial existe en général seulement en quelques versions. Un exécutable binaire générique doit inclure des choses comme ces instructions "sync" inefficaces qui sont complètement inappropriées pour la plupart des installations ; un tel gaspillage est supprimé lorsque le code source est hautement configurable. Cela devrait être un énorme atout pour l'open-source.

Je pense également que quelques programmes, comme Adobe Photoshop, seront toujours de qualité supérieure à leurs compétiteurs comme TheGimp pour quelques raisons, je ne sais franchement pas pourquoi ! Je souhaite payer un bon argent pour du vraiment bon logiciel, si je crois qu'il a été produit par les meilleurs programmeurs.

1. Donald Knuth est entre autres l'auteur de *L'Art de la programmation des ordinateurs*, Volume 4, Fascicule 0 : Introduction aux algorithmes combinatoires et aux fonctions booléennes, livre qui vient d'être publié.

Rappelez-vous cependant, que mon opinion sur les questions économiques est profondément suspecte, puisque je suis juste un enseignant et un scientifique. Je ne comprends quasiment rien aux lois du marché.

ANDREW : Une histoire raconte que vous avez participé à un concours de programmation à Stanford (je crois) et que vous avez soumis le programme qui a gagné correctement après une seule compilation. Est-ce vrai ? Dans cette veine, les développeurs d'aujourd'hui construisent fréquemment leurs programmes en écrivant des petits incréments de code, suivi d'une compilation immédiate et la création et l'exécution d'unités de tests. Quel est votre sentiment par rapport à cette approche du développement de logiciels ?

KNUTH : L'histoire que vous avez entendue est typique des légendes qui sont basées sur seulement un petit noyau de vérité. Voici ce qui s'est réellement passé : John McCarthy a décidé en 1971 d'avoir une journée mémoire consacrée à une course de programmation. Tous les concurrents sauf moi travaillaient à son Laboratoire d'IA là-haut dans les collines au-dessus de Stanford, en utilisant le système de temps partagé WAITS ; j'étais en bas sur le campus principal, où le seul ordinateur que je pouvais utiliser était un mainframe dans lequel je devais mettre des cartes et les soumettre à la compilation en mode batch. Je programmais en ALGOL W (le langage de Wirth, le prédécesseur de Pascal). Mon programme n'a pas marché du premier coup, mais par chance, j'ai pu utiliser l'excellent système de debugging d'Ed Satterthwaite pour ALGOL W, du coup, je n'ai eu besoin que de deux exécutions. Pendant ce temps, les types qui utilisaient WAITS ne pouvaient pas obtenir assez de cycles machine parce que leur machine était complètement surchargée (je pense que celui qui est arrivé deuxième, en utilisant cette approche “moderne”, a terminé une heure environ après que j'ai soumis le programme gagnant avec des méthodes à l'ancienne). Ce n'était pas un concours très fair-play.

Quant à votre véritable question, l'idée d'une compilation immédiate et de “tests unitaires”, je n'y fais appel que rarement, quand je cherche mon chemin dans un environnement totalement inconnu et que j'ai besoin d'avoir un retour sur ce qui marche et ce qui ne marche pas. Sinon, beaucoup de temps est gaspillé à des activités que je n'aurais jamais nécessitées ou même auxquelles je n'aurais jamais pensé. “On ne doit se moquer de rien”.

ANDREW : Un des problèmes émergents pour les développeurs, spécialement les développeurs côté client, est de changer leur manière d'écrire les programmes en terme de *thread* (fil d'exécution). Ce problème, amené par l'arrivée de PC multi-cœurs peu chers, nécessitera sûrement que de nombreux algorithmes soient réécrits pour un matériel à architecture parallèle, ou du moins pour être viable sur un tel matériel. Jusque là, la plupart du travail que vous avez publié pour le Volume 4 de *L'Art de la programmation des ordinateurs (TAOCP)* ne semble pas prendre en compte cette dimension. Avez-vous l'intention d'attaquer des problèmes de programmation concurrente et parallèle dans des travaux à venir, spécialement dans la mesure où cela semble être particulièrement adapté pour les problèmes combinatoires sur lesquels vous travaillez en ce moment ?

KNUTH : Le domaine des algorithmes combinatoires est si vaste que j'aurai de la chance si je réussis à compresser ses aspects séquentiels dans trois ou quatre volumes, et je ne pense pas que les méthodes séquentielles seront sans importance. Inversement, la demi-vie des techniques parallèles est très courte, parce que le matériel (hardware) change rapidement et chaque nouvelle machine nécessite une approche un peu différente. Du coup, j'ai décidé il y a longtemps que je collerais à ce que je connais le mieux. Les autres personnes comprennent les machines parallèles bien mieux que je ne le fais ; les programmeurs devraient les écouter, plutôt que moi, pour être guidés dans tout ce qui a trait à la simultanéité.

ANDREW : Les vendeurs de processeurs multi-cœurs ont exprimé de la frustration face à la difficulté d'amener les développeurs à ce modèle. Comme professeur, que pensez-vous de cette transition et comment la faire advenir ? Est-ce une question d'outils propres, tels qu'un meilleur support natif de la concurrence dans les langages, ou de modèles d'exécution ? Ou y a-t-il d'autres solutions ?

KNUTH : Je ne veux pas descendre complètement votre question. Je pourrais plutôt flamber un peu à propos de mon mécontentement personnel par rapport à la tendance actuelle vers l'architecture multi-cœurs. Pour moi, c'est plus ou moins comme si les concepteurs d'hardware étaient à cours d'idées, et qu'ils essayaient de rejeter la faute de la prochaine disparition de la loi de Moore sur les programmeurs en nous donnant des machines qui fonctionnent plus vite seulement sur quelques benchmarks clefs ! Je ne serais pas surpris du tout si l'idée complète du parallélisme finissait par être un flop, pire que l'approche "Itanium" qui était supposée être si terrible, jusqu'à ce qu'on réalise que les compilateurs qu'elle nécessitait étaient complètement impossibles à écrire.

Laissez-moi le dire autrement : durant les 50 dernières années, j'ai écrit bien plus d'un millier de programmes, la plupart d'entre eux de taille substantielle. Je ne peux même pas penser à cinq de ces programmes, qui auraient été améliorés de façon notable par le parallélisme et le multi-threading. De façon certaine, par exemple, les processeurs multiples ne sont d'aucune utilité pour Teχ. Mon collègue Kunle Olukotun note que, si l'usage de Teχ devenait un goulot d'étranglement, de manière que les personnes aient des douzaines de processeurs et aient vraiment besoin d'augmenter leur vitesse de composition de manière terrible, une version de Teχ pourrait être développée qui utilise la "spéculation" pour composer une douzaine de chapitres simultanément : chaque chapitre pourrait être composé sous la condition que les chapitres précédents ne feraient rien d'étrange qui dérangerait la logique par défaut. Si cette supposition n'était pas respectée, on pourrait revenir à la méthode normale de faire les chapitres un par un ; mais dans la majorité des cas, quand seule une composition normale est utilisée, le processus aurait plutôt été 12 fois plus rapide. Les personnes qui sont préoccupées par la vitesse pourrait adapter leur comportement et utiliser Teχ d'une manière disciplinée..

Combien de programmeurs connaissez-vous qui sont enthousiastes à propos de ces machines qui nous sont promises dans le futur ? Je n'ai entendu que des griefs de la part des personnes du logiciel, bien que les types du hardware dans notre département m'assurent que j'ai tort.

Je sais que d'importantes applications existent pour le parallélisme, telles que le graphisme, le cassage de code, la reconnaissance d'images, la simulation de processus physiques et biologiques, etc. Mais toutes ces applications nécessitent un code dédié et des techniques spécifiques, qui devront changer substantiellement toutes les quelques années.

Même si j'en sais assez à propos de ces méthodes pour écrire à leur propos dans TAOCP, mon temps serait largement gaspillé, parce que très vite, il n'y aurait plus de raison pour personne de lire les parties du livre en question. (De façon similaire, en préparant la troisième édition du Volume 3, j'ai programmé de virer la plupart du matériau concernant le tri de cassettes magnétiques. Ce matériau a été un jour le sujet le plus chaud de tout le domaine logiciel, mais maintenant, cela gaspille du papier à l'impression).

La machine que j'utilise aujourd'hui a des processeurs duaux. J'ai l'habitude de les utiliser tous les deux seulement quand je lance deux travaux indépendants en même temps ; c'est chouette, mais ça arrive seulement quelques minutes par semaine. Si j'avais quatre processeurs, ou huit, ou plus, je continuerais de ne pas faire mieux, en considérant le genre de travail que je fais même si j'utilise un ordinateur chaque jour pendant la plus grande partie de la journée. Du coup, pourquoi devrais-je être si content du futur que les vendeurs de matériel promettent ? Ils pensent à une bulle magique qui viendra grâce à ses multi-processeurs améliorer mon type de travail ; je pense que c'est un rêve creux (Non, ça n'est pas la bonne métaphore ! Les "pipelines" travaillent vraiment pour moi, mais pas les threads (les fils d'exécution). Peut-être que le mot que je veux, c'est "bulles").

Du point de vue opposé, je remercie du fait que la navigation sur le web sera probablement accélérée par les multi-cœeurs. J'ai parlé de mon travail technique, pourtant, pas de récréation. J'admets aussi que je n'ai pas eu beaucoup de brillantes idées à propos de ce que je souhaiterais que les concepteurs de matériel fournissent plutôt que des processeurs multi-cœurs, maintenant qu'ils ont commencé à casser un mur par rapport au calcul séquentiel (mais ma conception de MMIX contient quelques idées sur ce qui améliorerait substantiellement la performance actuelle des programmes qui me concernent davantage... au coût de l'incompatibilité avec les programmes x86).

Andrew : L'un de quelques-uns de vos projets qui n'ont pas été suivis par beaucoup de monde est la programmation littéraire. Quelles sont vos idées sur ce fait que la programmation littéraire n'ait pas trop marché ? Et y a-t-il quelque-chose que rétrospectivement vous auriez fait autrement à propos de la programmation littéraire ?

Knuth : La programmation littéraire est une chose très personnelle. Je pense que ça pourrait être terrible, mais c'est vraisemblablement dû au fait que je suis une très étrange personne. Elle a des dizaines de milliers de fans, mais pas des millions.

De mon expérience, du logiciel créé par la programmation littéraire s'est avéré être significativement meilleur que du logiciel développé par des méthodes plus traditionnelles. Déjà quand le programme est ok, je lui donne une note de C (ou peut-être C++), mais pas F ; de ce fait, les méthodes traditionnelles restent avec nous. Parce qu'elles sont comprises par une vaste communauté de programmeurs, la plupart des gens n'ont pas une grosse incitation à changer, de la même façon que je ne suis pas très motivé par le fait d'apprendre l'Esperanto, même si ce serait préférable de l'apprendre plutôt que d'apprendre l'anglais et l'allemand et le français et le russe (à permutation près).

Jon Bentley s'est probablement frappé la tête quand un jour on lui a demandé pourquoi la programmation littéraire ne s'était pas étendue au monde entier comme une tempête. Il a observé qu'un petit pourcentage de la population mondiale programme bien, et qu'un petit pourcentage de la population écrit bien ; apparemment, je demande à tous d'appartenir aux deux sous-ensembles.

Toujours pour moi, la programmation littéraire est certainement la chose la plus importante qui est sortie du projet Teχ. Pas seulement parce qu'elle me rend capable d'écrire et maintenir les programmes plus vite et de façon plus fiable que ça n'avait jamais été le cas auparavant, et parce qu'une des plus grandes sources de joie depuis les années 80 a vraiment été de temps en temps indispensable. Quelques-uns de mes plus importants programmes, comme le méta-simulateur MMIX, n'aurait pas pu être écrit avec n'importe quelle autre méthodologie dont j'ai jamais entendu parler. La complexité était simplement trop intimidante pour mon cerveau limité pour que je puisse l'attaquer autrement qu'avec la programmation littéraire ; sans ce paradigme, l'entreprise complète aurait échoué misérablement.

Si les gens découvrent de bonnes manières d'utiliser les machines multi-threads qui sont tendance en ce moment, je m'attendrais à ce que cette découverte provienne de personnes qui utilisent régulièrement la programmation littéraire. La programmation littéraire est ce dont vous avez besoin pour vous élever au-dessus du niveau ordinaire de réussite. Mais je ne crois pas que l'on puisse obliger quiconque à quoi que ce soit. Si la programmation littéraire n'est pas votre style, s'il vous plaît, oubliez-la et faites ce que vous voulez. Si personne d'autre que moi ne l'aime, laissons la mourir.

De façon positive, j'ai été content d'apprendre que les conventions du CWEB sont presque des équipements standards sans logiciels préinstallés comme des Makefiles, quand j'obtiens des Linux sur l'étagère actuellement.

Andrew : Dans le Fascicule 1 du Volume 1, vous avez réintroduit le calculateur MMIX, qui est la mise-à-jour 64-bits de la vénérable machine MIX que les étudiants en informatique ont été amenés à connaître depuis de nombreuses années. Vous avez précédemment décrit MMIX en grands détails dans MMIXware. J'ai lu des parties de ces deux livres, mais ne peux dire si le Fascicule met à jour ou modifie ce qui était dans MMIXware, ou bien si c'est un pur synopsis. Pourriez-vous clarifier ?

Knuth : Le Volume 1 Fascicule 1 est une introduction pour le programmeur, qui inclut des exercices instructifs et ce genre de choses. Le livre MMIXware est un manuel de référence détaillé, quelque-chose de succinct et aride, plus un bouquet de programmes littéraires qui décrivent le prototype logiciel pour les gens qui travailleront au-dessus de lui. Les deux livres définissent le même ordinateur (une fois que les erreurs de MMIXware seront corrigées à partir de la version de mon site web). Pour la plupart des lecteurs de TAOCP, le premier fascicule contient tout ce dont ils auront un jour besoin ou qu'ils souhaitent savoir à propos de MMIX.

Je voudrais noter aussi, cependant, que MMIX n'est pas une seule machine ; c'est une architecture avec presque toutes les variétés sans limitation d'implémentations, dépendant des différents choix d'unités fonctionnelles, des différentes configurations pipelines, des différentes approches du problème des instructions multiples, des différentes manières d'effectuer la prédiction de branchements, des différents tailles de cache, des différentes stratégies de remplacement du cache, des différentes vitesses des bus, etc. Quelques instructions et/ou registres peuvent être émulés par du logiciel sur des versions "moins chères" du matériel. Et etc. C'est un lit de test, tout étant simulable avec mon méta-simulateur, même si des versions avancées ne pourront être effectivement construites pendant 5 ans encore à compter d'aujourd'hui (et alors, nous pourrons demander des avancées supplémentaires juste en faisant avancer les specs du méta-simulateur d'un cran).

Supposons que vous souhaitiez savoir si cinq unités séparées de multiplicateur et/ou trois branchements d'instructions possibles vont augmenter la vitesse d'un programme MMIX. Ou peut-être si le cache des instructions ou des données devrait être agrandi ou rapetissé ou plus associatif. Alors vous avez juste à déclencher le méta-simulateur et à regarder ce qui se passe.

Andrew : Comme je suppose que vous n'utilisez pas d'unités de test avec MMIXAL, pourriez-vous me dire les étapes par lesquelles vous passez pour être sûr que votre code est correct parmi ces variétés de conditions et d'entrées ? Si vous avez une procédure spécifique de travail autour de la vérification, pourriez-vous la décrire ?

Knuth : La plupart des exemples de code en langage-machine dans TAOCP apparaissent dans les Volumes 1-3 ; pour l'instant, nous nous occupons du Volume 4, un tel niveau de détails de bas niveau est largement non nécessaire, et nous pouvons travailler de façon fiable à un haut niveau d'abstraction. Du coup, je n'ai eu besoin d'écrire seulement qu'une douzaine ou à peu près de programmes MMIX pendant que je préparais les parties en ouverture du Volume 4, et il n'y a rien de substantiel dans ces jolis petits programmes jouets. Pour les petites choses comme ça, j'utilise juste des méthodes de vérification informelles, basées sur la théorie que j'ai écrite pour le livre, conjointement avec l'assembleur de MMIXAL et le simulateur MMIX qui sont déjà disponibles sur le net (et décrits en grand détail dans le livre MMIXware).

Ce simulateur inclut des outils de déboggage comme ceux que j'ai trouvés très utiles dans le système d'Ed Satterthwaite pour ALGOL W, mentionné plus tôt. Je me sens toujours en confiance après avoir testé un programme avec ces outils.

Andrew : Malgré sa formulation il y a de nombreuses années, Teχ continue de prospérer, principalement comme fondation de LaTeχ. Puisque Teχ a effectivement été gelé à votre demande, y a-t-il des fonctionnalités que vous voudriez changer ou ajouter, si vous en aviez le temps et la bande passante ? Dans un tel cas, quels seraient les items principaux que vous ajouteriez ou changeriez ?

Knuth : Je crois que des changements à Teχ causeraient plus de mal que de bien. Les autres personnes qui veulent d'autres fonctionnalités créent leur propre système, et j'ai toujours encouragé le développement plus avant, mis à part le fait que les personnes devaient donner à leurs programmes un autre nom que celui de mon programme. Je veux avoir la responsabilité permanente de Teχ et Metafont, et pour les détails pratiques qui affectent des documents qui s'appuient sur mon travail, comme les dimensions précises des caractères dans les polices des ordinateurs modernes.

Andrew : Un des aspects peu discuté du développement de logiciel concerne la manière dont on conçoit le travail sur le logiciel dans un domaine complètement nouveau. Vous vous êtes trouvé face à cette question quand vous avez entrepris Teχ : aucun travail n'existait pour vous comme code source, et c'était un domaine dans lequel vous n'étiez pas un expert. Comment avez-vous démarré la conception, et combien de temps cela a-t-il pris avant que vous ne vous sentiez à votre aise et n'entriez dans la partie programmation ?

Knuth : C'est une autre bonne question ! J'ai discuté de la réponse en grand détail au Chapitre 10 de mon livre *Programmation littéraire*, ainsi qu'aux Chapitres 1 et 2 de mon livre *Typographie digitale*. Je pense que toute personne réellement intéressée par ces sujets apprécierait de lire ces chapitres (voir aussi les Chapitres 24 et 25 de *Typographie digitale* pour compléter les premier et second brouillons de ma conception initiale de Teχ en 1977).

Andrew : Les livres sur Teχ et le programme lui-même montre clairement la nécessité de limiter l'usage de la mémoire, un problème important pour les systèmes dans ce domaine. Aujourd'hui, la question de l'utilisation de la mémoire dans les programmes a davantage à voir avec les tailles des caches. En tant que personne ayant conçu un processeur de façon logicielle, les questions sensibles au cache et les algorithmes oublieux du cache ont sûrement dû passer sur vos écrans radar. Est-ce que le rôle des caches des processeurs sur la conception des algorithmes est un sujet que vous allez couvrir, même indirectement, dans votre travail à venir ?

Knuth : J'ai mentionné précédemment que MMIX fournit un lit de test pour de nombreuses sortes de cache. Et c'est une machine implémentée de façon logicielle, de telle manière que nous pouvons réaliser des expériences qui seront répétables même dans une centaine d'années à compter d'aujourd'hui. Certainement que les prochaines éditions des Volumes 1-3 discuteront du comportement de quelques algorithmes de base par rapport aux différents paramètres de cache.

Dans le Volume 4 jusque là, je compte environ une douzaine de références à la mémoire cache et aux approches ne posant pas de problèmes de cache (sans mentionner une “memo cache,” qui est une idée différente mais en lien dans le logiciel).

Andrew : Quel ensemble d'outils utilisez-vous aujourd'hui pour écrire TAOCP ? Utilisez-vous Teχ ? LaTeχ ? CWEB ? un éditeur de texte ? Et qu'utilisez-vous pour coder ?

Knuth : Mon style de travail général consiste à tout écrire d'abord au crayon sur un papier, assis à côté d'une grosse poubelle. Après ça, j'utilise Emacs pour entrer le texte dans ma machine, en utilisant les conventions (balises) de Teχ. J'utilise *tex*, *dvips*, et *gv* pour voir les résultats, qui apparaissent sur mon écran presque instantanément de nos jours. Je vérifie mes maths avec Mathematica.

Je programme tous les algorithmes dont je discute (de manière à les comprendre complètement) en utilisant CWEB, qui marche de manière splendide avec le déboggueur GDB. Je réalise les illustrations avec MetaPost (ou, dans de rares cas, sur un Mac avec Adobe Photoshop ou Illustrator). J'ai quelques outils faits maison, comme mon propre vérificateur orthographique pour Teχ et CWEB dans Emacs. J'ai dessiné ma propre font bitmap, qui est utilisée par Emacs, parce que je hais l'apparence de l'apostrophe ASCII et les guillemets gauche sont devenus des symboles indépendants qui ne se ressemblent pas. J'ai des modes spéciaux dans Emacs pour m'aider à classer les dizaines de milliers de papiers et notes dans mes fichiers, et des raccourcis clavier particuliers dans Emacs qui font que l'écriture de livre ressemble un peu au jeu sur un orgue. Je préfère *rxvt* à *xterm* pour l'entrée au terminal. Depuis décembre dernier, j'ai utilisé un système de backup des fichiers appelé *backupfs*, qui satisfait mon besoin d'archiver chaque état quotidien des fichiers d'une manière merveilleuse.

Selon les répertoires courants sur ma machine, j'ai écrit 68 programmes CWEB différents jusqu'à aujourd'hui, cette année. Il y en avait 100 en 2007, 90 en 2006, 100 en 2005, 90 en 2004, etc. De plus, CWEB a une fonctionnalité très pratique, le mécanisme “change fichier”, avec laquelle je peux rapidement créer de multiples versions et variations sur un thème ; jusqu'à aujourd'hui en 2008, j'ai fait 73 variations de ces 68 thèmes (quelques-unes des variations sont plutôt courtes, seulement quelques octets ; d'autres pèsent 5 kilo-octets ou plus. Quelques-un des programmes CWEB sont assez substantiels, comme le package BDD [2] de 55 pages que j'ai terminé en janvier). Ainsi, vous pouvez voir combien la programmation littéraire est importante dans ma vie.

J'utilise actuellement un système Ubuntu Linux, sur un pc portable, je n'ai pas de connexion internet. Je transfère occasionnellement des fichiers de cette machine à mon Mac que j'utilise pour le réseau, le surf sur la toile et les graphismes, via des lecteurs de mémoire flash ; mais je ne confie mes bijoux de famille qu'à Linux. Incidemment, avec Linux, je préfère beaucoup le clavier que je peux obtenir avec le classique FVWM aux environnements GNOME et KDE que les autres personnes semblent apprécier davantage. A chacun l'environnement qui lui convient.

Andrew : Vous expliquez dans la préface du Fascicule 0 du Volume 4 de TAOCP que le Volume 4 comprendra sûrement trois volumes et peut-être davantage. Il est clair dans ce texte que vous appréciez vraiment d'écrire sur ce sujet. Ceci étant donné, quelle est la confiance que vous accordez à la note, postée à ce sujet sur le site consacré au TAOCP, que le Volume 5 verra le jour environ en 2015 ?

Knuth : Si vous vérifiez sur la Machine Repars-en-arrière [3] les incarnations précédentes de cette page web, vous verrez que le nombre 2015 n'a pas toujours été constant.
Vous corrigerez sûrement que j'ai une machine à écrire à boule qui écrit tout ce matériau, parce que je continue à courir après des faits fascinants, qui peuvent simplement être omis, même si plus de la moitié de mes notes n'iront pas en finale.
Les estimations précises des durées sont impossible, parce que je ne peux pas dire, avant d'avoir avancé profondément sur une section, combien de matériau dans mes fichiers va être vraiment fondamental et combien ne va pas être intéressant pour mon livre ou bien va être trop avancé. Beaucoup de

2. Base de Données
3. WayBack Machine.

la littérature récente consiste en une mise à niveau académique et est d'un intérêt limité pour moi ; les auteurs, de nos jours, introduisent souvent des méthodes ésotériques qui dépassent les techniques plus simples seulement lorsque la taille du problème excède le nombre de protons dans l'univers. De tels algorithmes ne seraient jamais important dans une application réelle du programme. J'ai lu des centaines de tels papiers pour voir s'ils pourraient contenir certaines pépites pour les programmeurs, mais la plupart d'entre eux sont liquidés sans en obtenir grand chose.

Du point de vue de la planification, tout ce que je sais aujourd'hui, c'est que je dois digérer une énorme quantité du matériau que j'ai collecté et mémorisé pendant 45 ans. Je gagne un temps important en travaillant en mode batch : je ne lis pas les papiers en profondeur jusqu'à ce que j'en aie trouvé une douzaine d'autres sur le même sujet durant la même semaine. Quand je suis finalement prêt à lire ce que j'ai collecté à propos d'un sujet, il peut se trouver que je peux zoomer parce que la plupart du matériau est éminemment oubliable pour atteindre mes objectifs. D'un autre côté, je peux découvrir que c'est fondamental et consacrer des semaines d'étude au sujet ; et alors, je mets à jour mon site web et je note que le nombre 2015 est plus près de l'infini.

Andrew : Fin 2006, on vous a diagnostiqué un cancer de la prostate. Comment allez-vous aujourd'hui ?

Knuth : Naturellement, le cancer est un problème sérieux. J'ai des médecins très compétents. En ce moment, je me sens en aussi bonne santé que toujours, modulo le fait que j'ai 70 ans. Les mots viennent aussi librement quand j'écris TAOCP et quand j'écris des programmes littéraires qui précèdent les brouillons de TAOCP. Je me réveille le matin avec des idées qui me plaisent, et quelques-unes de ces idées me plaisent aussi plus tard dans la journée quand je les ai entrées dans mon ordinateur.

D'un autre côté, je me mets volontairement entre les mains de Dieu par rapport au temps qu'il me reste pour être encore capable de faire des choses avant que le cancer ou une maladie cardio-vasculaire ou la sénilité ou quoi que ce soit d'autre ne frappe. Si je devais mourir de façon inattendue demain, je n'aurais aucune raison de me plaindre, parce que ma vie a été incroyablement bénie. Inversement, tant que je suis capable d'écrire à propos de l'informatique, j'essaie de faire de mon mieux pour organiser et exposer au sujet des dizaines de milliers de papiers techniques que j'ai accumulés et sur lesquels j'ai écrit des notes depuis 1962.

Andrew : Sur votre site web, vous mentionnez que le service des Archives personnelles a récemment filmé une série de videos dans lesquelles vous revenez sur votre vie passée. Dans le morceau 93, "Conseil aux jeunes gens", vous expliquez que les personnes ne devraient jamais faire quelque-chose uniquement parce que c'est à la mode. Comme nous le savons tous trop bien, le développement logiciel est sujet aux modes comme toute autre discipline. Pouvez-vous donner des exemples qui sont actuellement en vogue, mais que les développeurs ne devraient pas adopter simplement parce qu'il sont populaires en ce moment ou parce que c'est la manière dont ils se font actuellement ? Voudriez-vous identifier des exemples importants, en dehors du développement de logiciel ?

Knuth : Hmm. Cette question est presque contradictoire, parce que je suis en train de conseiller aux jeunes gens de s'écouter eux-mêmes plutôt que d'écouter les autres, et je suis un des autres. Presque toute biographie de toute personne que vous pourriez imiter dira qu'il ou elle a fait beaucoup de choses contre la "sagesse conventionnelle" de l'époque.

De plus, j'ai horreur de rabaisser vos questions même si je déteste également offenser les sensibilités des autres personnes dans la mesure où la méthodologie du logiciel a toujours été proche de la religion. Avec l'avertissement qu'il n'y a pas de raison que quiconque se préoccupe des opinions d'un informaticien/mathématicien comme moi à propos du développement logiciel, laissez-moi juste dire que presque tout ce que j'ai entendu associé avec le terme "programmation extrême" semble être exactement le mauvais chemin à ne pas prendre... à une exception près. L'exception est l'idée de travailler en équipe et de lire le code des autres. Cette idée est cruciale, et elle pourrait même effacer à elle seule tous les aspects terribles de la programmation extrême qui m'alarment.

Je dois également confesser un fort biais contre la mode du code réutilisable. Pour moi, le "code rééditable" est bien, bien mieux que n'importe quelle boîte noire ou boîte à outils. Je pourrais continuer là-dessus encore et encore. Si vous êtes totalement convaincu que le code réutilisable est merveilleux, il est peu probable que je sois capable de vous faire changer d'avis, mais vous ne me convaincrez jamais que le code réutilisable n'est pas principalement une menace.

Voici une question que vous auriez pu souhaiter poser : pourquoi votre nouveau livre s'appelle-t-il Volume 4 Fascicule 0, plutôt que Volume 4 Fascicule 1 ? La réponse est que les programmeurs de logiciels comprendront que je n'étais pas prêt à commencer l'écriture du Volume 4 de TAOCP à son réel point de démarrage, parce que nous savons que l'initialisation d'un programme ne peut pas être écrite tant que le programme n'a pas pris forme. Ainsi, j'ai commencé en 2005 avec le Volume 4 Fascicule 2, après quoi sont venus les Fascicules 3 et 4 (pensez à Star Wars, qui a commencé à l'Episode 4.)

Finalement, j'étais en disposition psychologique pour écrire les parties du début, mais j'ai rapidement réalisé que les sections introductives avaient besoin de contenir davantage de matériau que ne pouvait en contenir un seul fascicule. Alors, me rappelant la consigne de Dijskstra qui dit que le comptage devrait commencer à 0, j'ai décidé de démarrer le Volume 4 avec un Fascicule 0. Vous chercherez le Volume 4 Fascicule 1 plus tard dans l'année.

Andrew Binstock est analyste principal à Pacific Data Works. Il écrit des articles pour SD Times et contribue comme éditeur senior à InfoWorld magazine.

Traduction d'un All Questions Answered (AQA)

par

Donald Knuth

à

Google, 24 mars 2011

BILL : C'est un grand plaisir pour moi que d'accueillir Don Knuth en visite chez Google aujourd'hui. Don et moi étions juste en train de discuter, nous nous sommes rencontrés au milieu des années 70, et Don, vous savez, est un homme très jeune, je suis un très vieil homme, mais il semble que cela fait longtemps. Mais Don a fait un certain nombre de choses.

Il a reçu un nombre faramineux de récompenses. Il est difficile d'en dire assez le concernant. Je pense que beaucoup de personnes le considèrent comme, vous savez, l'informaticien vivant le plus important. Et je... il a voulu venir aujourd'hui et avoir une sorte de séance libre de Questions & Réponses et je pense que du coup, vous êtes venus armés de nombreuses questions.

Je pense qu'il est possible qu'il dédicace un livre ou deux après cette séance. Je comprends qu'un certain nombre d'entre vous aient pu amener de telles choses, mais on fera ça après. Mais avant ça, laissez moi souhaiter la bienvenue à Don Knuth.

KNUTH : Salut à tous. Ok, merci, Bill. Oui. Je ne suis pas sûr de pouvoir rencontrer Lady Gaga. Mais en tous cas, quand j'enseignais à Stanford, notre dernier jour de classe était réservé à toutes les questions auxquelles il fallait répondre. Et je disais à tous qu'ils pouvaient quitter la classe s'ils le souhaitaient, mais que s'il y avait une question qu'ils voulaient me poser, comme ils avaient payé leurs frais d'inscription et tout ça, c'était le moment de le faire. Et ils pouvaient poser des questions sur n'importe quel sujet, excepté la religion, la politique ou leur examen final.

Maintenant, il y a deux ans, il y a environ deux ans chez Google, j'ai donné une conférence qui est lié à... qui a quelque-chose à voir avec la religion. Et la politique est en quelque sorte déprimante, mais si vous voulez poser des questions sur n'importe quoi, je... vous savez, je ferai encore tout mon possible mais il est vraisemblable que je donne de meilleures réponses sur les sujets que je connais bien. Et je comprends que quelques personnes ont soumis leurs questions et alors elles vont choisir les meilleurs d'entre elles pour voter ou n'importe quoi mais admettons, voyons, vous savez, j'espère que les questions ne sont pas des questions fréquemment posées.

Ok. Actuellement en tête, ok, bon, dois-je mentionner le nom de la personne qui a posé la question ? Est-ce que cela se voit sur votre table ? Qu'importe.

Ok, donc, allons-y “Quel est le théorème le plus contre-intuitif et quel est celui que vous trouvez le plus beau ?”. Ok. Bon, donc ce genre de classement des choses selon un critère à une seule dimension, je suis content de... Non, avant tout, nous projetons les choses selon l'aspect contre-intuitif, et selon l'aspect beauté. Ok, je veux dire, quelque part, si vous demandez à un parent lequel de ses enfants il préfère ou un truc comme ça. Ok, contre-intuitif... Est-ce que quelque-chose m'est intuitif ? Du coup, je devine... allant vers de plus en plus de dimensions, notre intuition semble être de pire en pire. Je comprends George Dantzig qui a dit un jour que notre intuition des dimensions ne vaut rien. Je n'utilise pas ce genre de langage moi-même mais cependant, je pense que les choses que nous faisons dans les espaces en grande dimension et quelques-unes de ces méthodes maintenant qui gèrent plusieurs degrés de liberté, en quelque sorte, nous pouvons les projeter sur quelque-chose que nous pouvons contrôler, ces choses donc, sont vraisemblablement les plus beaux théorèmes en informatique, mon Dieu...

C'est toujours la chose que j'ai apprise le plus récemment, je crois, que je préfère, mais elle a beaucoup de concurrentes. Et alors, il y a ce lien entre l'informatique et les mathématiques qu'il est difficile de décrire. Du coup, voyons, maintenant... je vais essayer de construire ce que je trouve très beau parce que l'année passée, j'ai joué avec une structure de données appelée ZDD qui n'est pas son meilleur nom mais qui est le meilleur nom que j'ai trouvé pour représenter des familles d'ensembles. Et les familles d'ensembles couvrent de très, très nombreuses applications de toute sorte, et c'est... et j'ai joué avec... vous savez, j'ai commencé par penser que j'aurais juste à en parler dans une seule page du Volume 4 et un an après, j'avais presque 100 pages d'introduction à leur sujet et j'étais encore en train d'apprendre davantage de choses à propos de ces ZDD. Je pense qu'elles sont une très belle construction qui mérite d'être étudiée beaucoup plus et explorée, et bientôt, les gens trouveront plus de raisons de les utiliser. Maintenant voyons, dois-je alterner entre ces questions écrites et des questions de l'audience ? Ok, du coup, prenons quelqu'un qui a une question en bas.

BILL : La rumeur court qu'il y a un extraordinaire orgue à tuyaux pas loin de l'endroit où vous habitez. Y-a-t-il quelqu'un d'autre (que vous), un autre organiste, qui a joué de cet orgue, et quel est votre morceau préféré qui a été joué sur cet orgue ?

KNUTH : Ok. Bon, yeah, j'ai... si vous regardez dans *L'Art de la programmation des ordinateurs* Volume 3, index sous... Est-ce que tout le monde a entendu la question ? C'est à propos des orgues à tuyaux. Si vous cherchez dans l'index du Volume 3, sous "Royalties, utilisation", ça vous amènera à une photo qui représente un orgue à tuyaux. Et du coup, après que nous ayons vendu quelques exemplaires du Volume 1, 2 et 3, j'ai pu satisfaire mon rêve et acheter un vraiment bel instrument, chez moi. Et je sais qu'Alan Kay a lui aussi un grand orgue dans sa maison en Californie du sud. Mon père était organiste et j'ai pris quelques leçons quand j'avais 13 ans pour apprendre à jouer de l'orgue.

Et alors, j'ai été appelé quand j'étais à Pasadena en tant qu'étudiant, j'étais... brutalement, l'organiste de l'église à laquelle j'allais a eu un décollement de rétine et ils m'ont appelé un samedi et m'ont dit "Don, avez-vous vraiment pris des leçons d'orgue pendant un an quand vous étiez adolescent ? Pouvez-vous le remplacer ?". Et j'ai alors appris toute la merveilleuse littérature qui avait été écrite pour orgues à tuyaux et j'ai trouvé quelques personnes à Pasadena qui avaient un orgue chez eux. Du coup, c'est devenu mon rêve et j'ai été capable de le réaliser au milieu des années 70. Et j'ai cherché... je pensais que peut-être, je pourrais trouver quelqu'un au Danemark qui en fabriquerait un pour moi parce qu'ils avaient de si beaux instruments. Mais c'est devenu impraticable parce que je ne pouvais pas... ils ne pouvaient pas me donner un prix fixe pour cet orgue.

Et du coup, finalement, j'ai trouvé un très bon constructeur à... près d'UCLA et ils fabriquent 4 orgues par an et celui qui est chez moi est un bijou. Du coup, nous avons parfois des personnes de l'Association de Organistes qui viennent faire des récitals sur cet orgue. Et alors, comme si vous... si vous êtes organiste, venez me voir après et vous pourrez venir et l'essayer. Les étudiants de Stanford l'ont utilisé pour s'entraîner mais il n'y a pas tant d'étudiants organistes de nos jours qu'il y en avait avant.

BILL : Merci. Je viendrai vous voir après.

KNUTH : Oui. Maintenant, la question suivante ici : "De quels problèmes pensez-vous que Google ou l'industrie en général devraient les attaquer mais ne le font pas ?" Ok. Ainsi Google... ok, bien, je vais juste... une autre grande question. Je vais vous en donner une. Dans Google maps, un clic arrière... une facilité que je peux obtenir des coordonnées GPS, je peux cliquer sur Google maps et alors, j'ai un moyen de trouver les coordonnées GPS. Cela marchait l'année passée jusqu'à novembre mais ça ne marche plus maintenant. Et si vous googlez des coordonnées GPS dans Google maps, vous trouverez beaucoup d'autres utilisateurs furieux qui ont raté cette fonctionnalité, du coup, ok.

Une autre question... J'en prendrai une autre à l'écran. “La plupart des fruits mûrs de l'informatique ont déjà été cueillis et disséqués en détail. En voyez vous un que, de façon surprenante, personne n'essaierait de cueillir ?”. Ok. Ainsi, voyez-vous, c'est... c'est vrai qu'il y a de nombreuses choses qui ont été disséquées en détail mais il semble toujours... même en informatique, il semble que les gens suivent toujours les mêmes routes. Et cela m'amuse de voir le nombre de fruits mûrs qui apparaissent dans ma conscience, et également en informatique et en mathématiques, qui étaient là tout autour, vous savez, depuis des centaines d'années ou plus. Les problèmes qui sont très... juste par exemple, l'année passée, je... Voyons... Comment ça s'est passé ?... J'étais en train de finir le Volume 8 de mes Œuvres complètes, en tout 8, et je devais donner une fiche à ces livres parce que je dois admettre que j'adore ça plus que je ne peux l'expliquer.

Mais il avait été décidé il y a de nombreuses années, plus de 20 ans en arrière, que les papiers qui avaient été écrits seraient publiés sous forme d'archives avec tous les bugs enlevés et en ajoutant de l'information supplémentaire à propos des développements depuis que les papiers avaient été écrits et qu'ils seraient publiés en étant divisés en huit domaines. Le premier sujet, la programmation littéraire, et le second sujet étaient généraux, l'informatique en général pour les non-spécialistes et le troisième livre avait pour sujet la typographie et tout ça. Bon, le huitième livre, le huitième de ces huit-là, c'étaient des papiers sur les jeux et distractions, et je l'avais gardé pour le dessert. C'était celui... vous savez, comme, j'ai connu ça, vous savez, celui que vous gardez pour la fin, cela me permettait de passer à travers tous les autres livres. Et alors, quand j'aurais eu écrit tout ça... finalement, je fermerais la porte sur ces papiers que j'avais écrits. Depuis ce temps, je n'ai plus écrit d'articles. J'ai *L'Art de la programmation des ordinateurs* mais je n'en ai plus écrits... sauf 17 que j'ai ajoutés, il y a 17 chapitres dans ce livre d'articles qui n'avaient jamais été publiés.

Et deux de ces chapitres que j'ai écrits l'année passée pourraient, sur des sujets dont vous pourriez dire que ce sont des sujets qui amènent peu de fruits, des choses qui, vous savez... la recherche en était là... dans l'un des cas, il s'agissait des promenades de cavaliers. J'ai appelé ce chapitre "Les longues et maigres promenades des cavaliers". Et j'ai étudié le nombre de manières dont on pouvait se promener sur un damier de trois colonnes et lignes. Et il s'est avéré que c'était un problème vraiment intéressant, un réel défi. Cela m'a appris beaucoup de mathématiques de m'attaquer à ce problème. J'ai pu obtenir le... je ne peux pas vous dire le nombre exact qu'on obtient finalement. Et je peux vous dire les nombres asymptotiques et les classer de différentes manières qui me surprennent. On aurait dit que c'étaient des fruits inintéressants parce que vous n'avez pas besoin de tant de... je veux dire, les gens ont pensé à ce problème depuis 200 ans.

De plus, il y avait un autre problème ouvert appelé les promenades des cavaliers celtiques qui est un problème similaire à celui des promenades de cavaliers mais il est particulièrement beau parce qu'ils n'ont presque jamais trois lignes qui se touchent les unes les autres et du coup, vous pouvez réaliser de très beaux nœuds celtiques à partir des formes en tous cas. Un autre exemple qui est sorti là... et qui n'avait pas été demandé il y a deux semaines, Ron Goem m'a parlé du problème suivant : prenez un entier, écrivez-le en binaire, du coup vous obtenez une séquence quelconque de 0 et de 1. Vous pouvez toujours le couper, couper la chaîne en deux sous-chaînes de façon à ce que la somme des... considérez chaque sous-chaîne comme un nombre binaire. La somme de ces nombres binaires est une puissance de 2.

Ce n'est pas facile mais en quelque sorte, ça tire vers le bas, je dirais. Vous savez, essayez mais ne pensez pas à ce problème avant d'aller dormir parce que j'étais juste... je lisais l'information... comment ça s'appelle ? apprendre aux toilettes ? Ca vous apprend comment avoir une bonne nuit de sommeil. Donc en tous cas, de façon surprenante, il y a encore de nombreux fruits mûrs et continuez à poser des questions. Ce n'est pas... ce n'est vraiment pas comme si tout avait été complètement exploré. Oui ?

BILL : Plus tôt, vous parliez des coordonnées GPS ou... désolé...

KNUTH : Oui.

BILL : ...à propos des [indistinct] dans Google Maps ? Il y a une fonctionnalité dans le Lab qui vous permet d'avoir ça au curseur de souris non ?

KNUTH : Il y a quoi ?

BILL : Vous pouvez activer une fonctionnalité du Labs.

KNUTH : Une fonctionnalité du Labs ?

BILL : Oui, si vous configurez les paramètres.

KNUTH : Ok. Bon, dites-moi ce qu'il en est de la manière dont... parce que habituellement, à travers mes cartes, j'avais l'habitude d'obtenir un fournisseur de position mais ils ont stoppé cette fonctionnalité [indistinct], ils utilisent un code java pendant ma navigation.

BILL : Bon, oui, je ne suis pas trop familier avec ce que vous utilisez mais si vous voulez seulement les coordonnées GPS, vous pouvez toujours les obtenir.

KNUTH : Vous savez, je peux faire cela facilement avec Google Earth. Mais avec Google Maps, je veux pourvoir le faire facilement. Et j'ai cherché... personne n'a publié cette solution.

BILL : Bon, vous pouvez les obtenir avec le curseur de souris.

KNUTH : On peut les obtenir avec ça ?

BILL : C'est juste le curseur de la souris.

KNUTH : Un curseur de souris ?

BILL : Oui. Il y a un plug-in pour ça.

KNUTH : Oh, plug in.

BILL : Ou un plug-in dans Labs.

KNUTH : Un plug-in dans Labs. Ok. Très bien.

Bon, je vous remercie. Avec l'augmentation de la puissance des processeurs et l'adoption de langages de haut niveau indépendants des machines, il y a une perception commune qui est que d'être près du hardware n'a plus aucune importance. Quel impact cela a-t-il sur le domaine d'étude ? Je n'aime pas... Je ne suis pas d'accord avec cette idée que cela n'a plus d'importance. Cela n'a plus d'importance pour de nombreuses personnes mais c'est juste relatif.

Et les nombres absolus probablement ont de l'importance... Je veux dire, nous pouvons encore utiliser une puissance de plus en plus grande. Il y a tous les problèmes pour lesquels on veut augmenter l'enveloppe et faire mieux et du coup, si vous ne faites que... pour beaucoup de problèmes, il n'y a pas cet enjeu... dans la plus grosse partie du temps que j'emploie à faire quelque-chose, si ça va mettre... vous savez... mettre une microseconde plutôt que 10 secondes. Du coup, ça n'a pas d'importance, vous savez, et alors j'écris des programmes vraiment inefficaces pour résoudre certains problèmes mais [indistinct] quand je... quand j'étudiais ces problèmes de promenades de cavaliers, je devais trouver l'inverse d'une matrice de polynômes de taille 700 sur 700 et du coup, je devais penser à ça et je devais savoir un peu mieux de quoi il retournait. Et si des personnes... imaginez une génération entière grandissant avec cette philosophie que vous n'avez pas besoin de vous préoccuper... que vous n'avez pas besoin de connaître quoi que ce soit aux problèmes matériels, alors les programmes qu'ils vont écrire vont être vraiment mauvais. Et alors, bien sûr, il va y avoir pas mal de fruits à ramasser pour les personnes qui voudront faire des améliorations. Ok, question suivante.

“La programmation littéraire n'a jamais vraiment décollé bien qu'il y ait quelques langages de scripts qui aient un peu amélioré la lisibilité des programmes. Qu'est-ce qui a gêné l'adoption de la programmation littéraire d'après vous ?” Oui. C'est une question à laquelle, bien sûr, j'essaie de répondre mais la programmation littéraire est si chère à mon cœur que mon point de vue à son sujet est complètement biaisé et du coup, je... vous devez le prendre en compte par rapport à ce que je dis.

A nouveau, dans les nombres absolus, vous avez des dizaines de milliers de personnes qui utilisent la programmation littéraire. Mais là encore, c'est probablement moins de 1 % des gens probablement. Et... mais j'ai au moins un programme que j'ai écrit qui était si compliqué que j'ai totalement cru que je ne serais jamais capable de le terminer si je n'avais pas eu la programmation littéraire pour organiser mes pensées et réussir à le faire. C'est le méta-simulateur pour mon ordinateur MIX. J'ai eu cette machine-risque que vous pouvez configurer facilement d'un très grand nombre de façons.

Vous pourriez dire... Vous pouvez dire pour chaque instruction... et vous pouvez imaginer... vous pouvez simuler comment ce serait si vous aviez un processeur avec beaucoup plus de choses que celles que vous savez construire à ce moment-là. Mais en tout cas, j'ai écrit ce simulateur et ça a été le plus grand challenge que j'ai jamais affronté en programmation, je pense. Et avec la programmation littéraire, j'ai été capable de le terminer en une année mais sans la programmation littéraire, je pense que j'aurais totalement échoué. Donc la programmation littéraire... pour moi, n'est pas seulement belle ; elle est en quelque sorte essentielle. Elle est aussi belle parce que j'écris une moyenne d'un programme par jour. Quelques-uns sont plus longs que d'autres, d'autres sont plutôt courts. Mais avec cette méthode de la programmation littéraire, cela marche vraiment pour moi et cela me rend heureux. Maintenant, d'un autre côté, vous savez, moins de 100 % du monde l'aime. C'est parce que la manière dont... vous savez, je lis beaucoup de code et il y a une généralité qui est que un grand nombre des meilleurs codes que je vois adhèrent à un certain ensemble de conventions qui sont plutôt bien.

Il n'y a rien qui soit plus proche du bien que ne l'est la programmation littéraire, une fois encore, ils sont aussi bons qu'ils sont adéquats. Et ainsi... et ils sont compris par une grande communauté et du coup, les gens peuvent... vous savez, les gens connaissent ce style et c'est une langue franche. Pour moi, leur dire "Jetez ça et mettez-vous à la programmation littéraire", c'est pareil que de dire "Bon, vous savez, mettons-nous à l'Esperanto plutôt qu'à l'anglais", ou à une autre langue qui pourrait être même mieux que l'Esperanto, vous savez. Leur dire ça ne serait pas très logique. L'anglais est encore assez bon, et je ne vais pas changer de langue puisque je parle anglais. Du coup, vous savez, pourquoi devrais-je dire à des gens de changer un style de programmation qu'ils utilisent tous et qui est suffisamment bon ? Du coup, Jon Bentley pourrait s'arracher les cheveux parce que les gens qui aiment le plus la programmation littéraire sont des personnes qui aiment aussi... semblent être des personnes qui aiment aussi écrire, vous savez, des blogueurs et des enseignants. Parce que quand vous écrivez un programme littéraire, vous êtes comme face à une classe, vous écrivez pour une audience humaine plutôt que pour un ordinateur pour qu'ils comprennent ce que vous essayez d'expliquer à un autre programmeur. Du coup, il y a un certain pourcentage mondial qui est bon pour programmer et vous devez être dans cette intersection des deux pour vraiment augmenter votre niveau de programmation.

Du coup, c'est peut-être pour ça que ça n'a pas vraiment décollé. En plus, vous savez, si Google faisait un test "nous allons écrire le programme du test en programmation littéraire", ça rendrait peut-être en fait Google encore meilleur qu'il ne l'est actuellement. Mais en tous cas, je ne vais pas changer et je pense que de nombreuses personnes comprennent... Je peux pointer de très gros programmes et il y a des personnes qui comprennent mieux ces programmes que d'autres, que les autres programmes de leur domaine. C'est mon point de vue sur cela. Une chose de plus, cependant, mon livre sur les jeux et casse-têtes, le dernier chapitre... ok, je ne sais pas combien de personnes le savent, mais ma première publication était dans MAD Magazine et vous savez, quand j'ai... quand j'étais jeune homme au lycée, je... cet article est sorti et tout ça, ce chapitre un... de mes papiers sur les jeux et casse-têtes. Le dernier chapitre est aussi... est aussi fou et c'est un petit discours que j'avais donné l'été dernier quand j'avais promis que... les gens me demandaient le futur de la technique et je disais "Bon, j'ai décidé que tout ce que j'avais fait sur ce projet était une erreur et alors, j'ai démarré ça... j'ai démarré secrètement cette boîte et j'ai ce nouveau produit qui sort qui ne va pas seulement permettre de faire de la conception en trois dimensions mais c'est aussi... vous savez, ça inclut la manufacture à la demande. Et ça inclut aussi des choses comme des moteurs de recherches et du réseau social, et vous savez, il résoud aussi les équations différentielles. Et, vous savez, il est entièrement écrit par des dessins".

Et bien sûr, nous avons abandonné la programmation littéraire parce que, comme tout le monde le sait "la documentation des programmes, c'est la plaie". Ok ? Du coup, ça a été le paragraphe le plus dur à écrire pour moi. Mais je pensais que je devrais utiliser une sorte de fin de livre pour en avoir un. Vous savez, j'ai commencé à MAD magazine et je devais avoir quelque-chose qui serait en quelque sorte ma dernière publication. Ok. Jeff ?

JEFF : Monsieur, utilisez-vous call/cc sur ce programme ?

KNUTH : Est-ce que j'utilise des morceaux de call... ?

JEFF : Call/cc sur vos programmes organigrammes ?

KNUTH : Oh.

JEFF : Très bien. Voici ma question. C'est une question de recherche de masse. Ce matin, j'ai utilisé une recherche sociale pour trouver le nom d'une technique stupide appelée "appariement de score par propension". Et du coup, parfois, je sais qu'il y a des concepts mathématiques qui existent mais je ne sais pas quel est leur nom et je voudrais le trouver. La recherche des séquences d'entiers est un bon exemple d'une technique de recherche qui me permet de trouver, vous savez, de trouver...

KNUTH : Oui. Le manuel *The Online Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS), vous pouvez trouver votre chemin dans la littérature si vous pouvez...

JEFF : Exact.

KNUTH : ... si vous pouvez calculer les six premiers termes d'une séquence, vous trouvez s'il y a quelqu'un qui s'est déjà intéressé à ça.

JEFF : Exact.

KNUTH : Oui.

JEFF : Du coup c'est... c'est une bonne solution. Mais ça ne résoud pas tous les problèmes. Du coup, comment faites-vous... quand vous savez qu'il y a eu un concept mathématique sur lequel vous avez trébuché mais dont vous ne connaissez pas le nom...

KNUTH : Oui.

JEFF : ... comment trouvez-vous le nom de ce concept pour ne pas avoir à tout réinventer ?

KNUTH : Ok. Bon, la réponse à la question, c'est que j'ai 73 ans maintenant et que j'ai développé un réseau d'un tas d'amis et vous savez, du coup, je...

BILL : Recherche sociale alors.

KNUTH : Oui, exact. [indistinct]. Du coup, je sais à qui demander, vous savez, mais si c'est un champ complètement nouveau, alors je n'ai pas vraiment de bonne méthode personnellement. Mais, je... de temps en temps... vous savez, il y a certaines questions que je pose à Ira Gessel ou autres, Richard Stanley, ou vous savez, Jeff Almonds, etc. Et vous savez, par chance, je peux descendre dans le hall de Stanford et obtenir les réponses à la plupart des questions et nous nous retrouvons pour manger chaque semaine. Du coup, c'est ça ma solution. Mais ça n'est pas une solution algorithmique du tout.

JEFF : Oui. Vous ne mettez pas très bien à l'échelle.

KNUTH : Je ne quoi ?

JEFF : Vous ne mettez pas à l'échelle.

KNUTH : Je ne... bon...

JEFF : Je ne peux pas faire la même chose, vous savez...

KNUTH : Eh bien, en fait, ce serait terrible. Je veux dire, s'il y avait... Mettons-nous face à l'idée. S'il y avait 10 personnes comme moi au monde, nous n'aurions pas le temps de lire les livres des autres. Ok. "Combien de preuves de P !=NP avez-vous vues ? Quelle est votre opinion là-dessus, P=NP ou P !=NP ? Quand pensez-vous que la question va être résolue ?" Oh, mec. Ok. Bon, j'en ai eu une la semaine passée... et un gars m'a envoyé un code Java qui semble prouver que P=NP et je suis presque sûr qu'il trouve un nombre de cliques maximales, et je suis presque sûr qu'il génère les données à partir d'un ensemble de problèmes pour lequel vous pourriez trouver le nombre maximal de cliques en temps polynomial, vous savez, n^3 étapes en moyenne. Du coup, ça donne l'impression que P=NP en cela puisque le nombre de cliques maximales est un problème NP-complet. D'un autre côté, vous savez, vous devez être capable de résoudre tous les problèmes en un nombre d'étapes maximal polynomial pour obtenir que P=NP. Néanmoins, son algorithme pourrait être vraiment intéressant sur des problèmes pratiques.

Et du coup, je l'ai enregistré pour lire son code quand je serai parvenu au point où je serai en train d'écrire les techniques pour les cliques maximales. Ok, maintenant, j'ai passé beaucoup de temps dans ma vie à tester des preuves que P=NP et P !=NP et il y a quelques années, j'ai dépassé le seuil du nombre de preuves à lire dans une vie. Et alors, je ne le ferai plus jamais.

Mais néanmoins, il y a une chose assez sérieuse que beaucoup de gens ont vu pendant six mois et il s'est avéré qu'on n'avait pas un panoramique du domaine et que les idées ne devaient pas être rejetées d'emblée. Maintenant j'ai aussi lu des preuves sur la quadrature du cercle, dans ma jeunesse. Ok. Maintenant, j'ai cette opinion... A ma surprise, j'ai trouvé que j'avais déjà donné cette opinion il y a 15 ans mais j'ai peur que par rapport à cette question, quelqu'un finisse par prouver que P=NP peut être dans 50 ans. Et la preuve va être quelque chose comme ça : P=NP parce qu'il y a seulement un nombre fini de raisons qu'il ne puisse pas l'être. En d'autres mots, une preuve qui ne nous donnerait pas d'algorithme, qui prouve seulement, vous savez, qu'il existe un exposant tel que... mais un algorithme que nous ne connaîtrons jamais, c'est juste... dehors. Et du coup alors, c'était la mauvaise question à poser... même à moi. Maintenant, nous avons déjà eu des cas comme ça. Il y a des théorèmes profonds en théorie des graphes qui disent que certains types de graphes, que vous souhaitez tester, peuvent être testés en temps polynomial, mais personne ne connaît les algorithmes. Nous savons juste qu'il y a seulement un nombre fini de cas à tester mais nous ne savons pas quels sont les cas en question. Nous savons juste que ce n'est pas infini. Et, vous savez, il y a des gens [indistinct] qui décrivent quelques-uns des paradoxes qui découlent de ça. Du coup, il me semble de plus en plus que le nombre d'algorithmes va devenir de plus en plus grand, immense, et montrer qu'aucun de ces algorithmes est en un temps polynomial, peut être très long.

BILL : Bonjour. Je ne sais pas si cela touche davantage la philosophie mais croyez-vous que la programmation est plus un comportement émergent des maths ou bien est-ce une entité propre qui s'avère juste être bien décrite par les maths ?

KNUTH : Ok. La connexion entre la programmation et les maths... l'émergence des mathématiques. Mon sentiment personnel à ce propos est le suivant : les mathématiques et l'informatique sont deux sciences non-naturelles, elles sont faites par les hommes. Nous devons décrire les règles et la manière dont l'univers fonctionne n'affecte pas ces règles ; nous créons notre propre univers et nous décidons, vous savez, nous pouvons concevoir nos modèles informatiques et nous pouvons écrire les axiomes pour un problème mathématique. Alors que les physiciens et les chimistes et les biologistes et etc. sont... ont un problème différent. Ils veulent savoir ce qu'il y a vraiment dans le monde réel. Maintenant, à propos de nos deux matières, les mathématiques et l'informatique sont-elles vraiment les deux côtés d'une même pièce ou sont-elles deux pièces différentes ? Je pense profondément qu'elles sont différentes mais j'ai essayé de convaincre Bill Thurston et il... n'était pas d'accord avec moi. C'est une opinion que je ressens profondément, quand je revêts mon costume de mathématicien, plutôt que quand je mets ma cape d'informaticien.

Vous savez, je suis dans un mode ou dans l'autre. Et parfois, pour moi, la plus grande différence entre nous est que les mathématiciens travaillent la plupart du temps sur des théories unifiées où l'on a un ou deux axiomes qui en quelque sorte s'appliquent tout le temps alors qu'en informatique... je traite plutôt là de choses hétérogènes dans lesquelles il y a un cas un, un cas deux, un cas trois, et nous avons des choses différentes qui ont lieu dans différents états. Et nous avons une instruction d'affectation où nous pouvons juste dire X est remplacé par $2X$. Du coup, la valeur de X a disparu. Pour les mathématiciens, c'est un concept bizarre. Donc je pense que ce sont des mentalités différentes, des approches différentes, et je peux même parfois dire "Bon, en tant qu'informaticien, je suis coincé là.".

Je vais traduire mon problème en langage mathématique et alors, je, vous savez, je pense mathématiquement quelques instants, et alors, cela m'amène à quelque-chose d'autre. Et là, c'est mathématiquement que je suis coincé et du coup, je reviens, je remets mon chapeau d'informaticien et j'essaye de faire un raisonnement constructif ou bien j'imagine une structure de données qui m'aide à comprendre quel est le côté mathématique. Donc, je pense qu'ils sont différents mais je n'ai pas réussi à convaincre Bill Thurston. Maintenant, c'est... les autres choses que les informaticiens... Du coup, je peux conclure cela en disant nous avons tous des points positifs et des points négatifs. En conséquence, il y a des problèmes au monde que les mathématiciens ne font pas très bien parce qu'ils sont en quelque sorte hétérogènes de façon inhérente. Rien d'uniforme ne peut les décrire tous. Et alors, les mathématiciens ne vont pas, ne seront pas à l'aise du tout avec cela alors que les informaticiens peuvent couper ça en plein milieu comme on le fait avec un couteau à beurre, vous savez. Mais d'un autre côté, il y a des problèmes qui ont un modèle uniforme et un informaticien pourrait ne pas le voir parce que nous pouvons trouver un cas un, un cas deux, un cas trois, et une manière de l'attaquer est vraiment très inélégante et rate l'unité sous-jacente. Donc, pour moi, c'est ça la différence.

BILL : Merci.

KNUTH : Vous savez. "Comment votre engagement musical a-t-il affecté votre informatique et vice versa ?". Je pense qu'il y a quelque-chose en commun aux deux à propos des formes et... mais c'est juste un amour des structures qui semble présenter un haut niveau de corrélation avec la sorte de pensée qui est commune aux mathématiques et à l'informatique. A Stanford, nous avions, une fois, la dame qui était en quelque sorte à la tête de notre département, d'un point de vue exécutif, elle venait d'une haute école de droit et elle disait qu'il y avait une différence incroyable entre les écoles de droit et le département d'informatique. En musique, les étudiants étaient intéressés par la musique, les musiciens. C'était complètement différent de ce qu'elle avait expérimenté dans l'autre école. Pourtant, je pense qu'il y a probablement quelque-chose de ça, bien que... alors, dans les années 70, nous avions l'habitude de demander à nos étudiants diplômés entrant comme première question "quelle est votre instrument ?". Et nous avions des cas comme le [indistinct]. Je ne sais pas si vous vous rappelez de ces sons [indistinct] lors de l'examen oral, il donnait un récital de violoncelle. Et vous savez, nous avions des soirées étudiantes et nous faisions de la musique de chambre. Et du coup, c'était... c'était beaucoup plus le cas dans les années 70 que dans les années 80, parce qu'une année, je suis arrivé auprès des étudiants entrants et je leur ai demandé "Quel est votre instrument ?". Et il s'est avéré qu'un gars jouait de l'harmonica et qu'un autre a fait une imitation d'Abba. Et personne d'autre ne jouait de la musique du tout cette année-là. Et j'ai demandé "Bon, vous savez, quel est votre hobby principal ?". Et il s'est avéré que plus de la moitié d'entre eux cette année-là faisaient des courses à vélo. Donc il y a eu un changement dans la population et je ne comprends pas pourquoi et je ne sais pas ce qu'il en est maintenant. Cependant, je crois que ces choses vont ensemble mais c'est peut-être, vous savez, si je vis assez longtemps, j'aimerais composer de la musique avec quelques-unes des idées algorithmiques que j'ai. Et ainsi, peut-être que je pourrais influencer la musique de cette façon. Comment la musique influence-t-elle un programme que je peux écrire.

La prochaine question ici était : "Vous êtes très connu pour votre intérêt dans les contributions à la typographie digitale. 30 ans après la sortie de Teχ, quelles sont vos pensées sur l'état actuel de la typographie comme elle apparaît sur le web et sur d'autres media digitaux ?". Et de façon basique, je suis optimiste à propos de tout ça, vous savez, j'ai un Nexus S et il utilise de merveilleuses polices. J'aime la typographie que je vois. Et je pense que les personnes commencent à comprendre les fontes. Je devine, je veux dire, les seules prédictions que je... je suis célèbre pour ça les prédictions. En fait, c'est probablement un des... le fait que je puisse prédire la difficulté de réalisation d'une chose, c'est que j'ai commencé à travailler sur la typographie en premier lieu et depuis, il y a eu *L'Art de la programmation des ordinateurs* et un bouquet d'autres trucs. Mais j'ai prédit que les concepteurs de fontes deviendraient les héros et ça s'est avéré être assez proche de la réalité...

BILL : Du coup, j'ai une question très similaire à l'une des questions précédentes. Maintenant, les enfants grandissent en utilisant des ordinateurs comme ceux des téléphones cellulaires, partout, même les petits, tout petits enfants. Et puisque les ordinateurs deviennent de plus en plus compliqués, vraiment, quel impact à long terme pensez-vous que cette utilisation intensive aura ? Aurons-nous plus de personnes qui comprendront comment tout ça marche ou bien cela deviendra-t-il quelque-chose de magique, que seulement peu de personnes comprennent vraiment ?

KNUTH : C'est un paradoxe et je souhaiterais le savoir. Je vous donne seulement quelques idées, mes petits-enfants sont complètement fascinés par quelques applications dont vous diriez qu'elles sont chouettes comme la programmation, et ils mettent des objets ensemble, et les objets peuvent bouger. Et je n'arrive pas à me rappeler du nom des systèmes qu'ils fabriquent. Du coup, ils font plus que jouer passivement à des jeux, bien que les jeux soient, vous savez, j'aurais dû dire que j'ai pu passer des heures à faire rouler des dés, et je faisais bouger des chevaux le long d'un parcours, quand j'étais à l'université. Je veux dire que la chose équivalente est maintenant de faire des choses sur les ordinateurs.

Et d'un autre côté, Nick Trefethen m'a raconté il y a trois ans que son fils va dans la meilleure université d'Oxford et Nick est allé là-bas pour parler un peu aux enfants de l'école de son fils et il a trouvé qu'aucun d'entre eux n'avait jamais écrit un programme ou même n'en avait eu l'idée. Du coup, c'est pourtant... c'est une situation très étrange à laquelle nous sommes confrontés. Et vous pensez que jadis... je veux dire, les gens apprenaient avec des Legos et Karel le robot et tout ça. Et maintenant, il y a beaucoup plus de systèmes comme celui-ci qui sont très fascinants. Vous connaissez probablement celui qui s'appelle ChucK de Stanford et le MIT a celui-ci qui a été conçu à l'ACM l'année passée, et il y en a d'autres, bien plus. Mais je ne sais pas si cela changera... à travers toute ma carrière, le nombre de personnes, environ des centaines de personnes, ça a été à peu près stable d'être né pour être informaticien. Vous savez, il y a des geeks comme moi. Ils ont... nous avons une manière particulière d'organiser l'information dans notre tête et cela arrive à un certain point quand on est jeunes. Et je vois l'informatique comme quelque-chose que je fais parce qu'il se trouve que je suis bon pour faire ça, non pas parce que j'aurais une sorte d'exhortation à le faire, vous savez. “La programmation d'aujourd'hui n'est pas fondamentalement différente de la programmation il y a quelques décennies en arrière. Comment l'industrie a-t-elle pu rater cette idée et comment cela pourrait-il changer dans le futur ?” Ok.

J'aimerais répondre à propos de l'industrie que je... ma propre expérience consiste à écrire des livres et je ne sais pas. “Combien de personnes ont vraiment encaissé les 2.56 \$ pour une correction d'erreur ?”. Maintenant je pense que vous savez que je récompense les personnes qui trouvent des erreurs dans mes livres. Quand j'ai commencé, c'était 1.00 \$ dans les années 60 et alors, vous savez, dans la seconde édition, c'est monté à 2.00 \$. A un autre moment, c'est passé à 2.56 \$ qui a semblé une somme d'argent appropriée. Je devais, et au fil des années, je l'ai fait... les gens habitués à faire ces vérifications souvent et cela a touché notre compte en banque. Du coup, j'ai eu le mien propre, vous savez, j'ai eu mon propre compte parce que les autres comptes ne permettaient pas des retraits d'espèces. Maintenant, il se trouve que le transfert de fonds électroniquement est incroyablement peu sûr. Je veux dire que les banques n'ont presque pas de sécurité. Les banques croient n'importe quel message électronique qu'elles reçoivent. Et les escrocs ont appris comment faire, du coup si quelqu'un regarde un chèque que vous écrivez, vous écrivez un chèque personnel qui a des chiffres tout en haut, si un avocat connaît ces nombres, il peut utiliser une carte ATM et ponctionner de l'argent depuis votre compte. Et en tous cas, je devais fermer trois comptes parce que ces numéros de chèques étaient... je veux dire, j'ai des exemples où le chèque était marqué Banque américaine, Atlanta, Georgie et en haut, il y avait mon numéro de compte à Palo Alto. Et vous savez les gens voulaient encaisser les chèques et alors, vous savez, 400 dollars, cash au supermarché. Et... mais d'autres étaient vraiment, comme je disais, retirables dans les guichets de billets automatiques et permettaient de faire des achats sur ordinateurs et tout ça, je pense, probablement quelque part en Europe de l'est. Tout ce système bancaire a été fichu en l'air.

Du coup, il y a environ quatre ans, j'ai lancé ma propre banque et vous pouvez la trouver sur internet "La banque de Sans Seriffe" et au lieu de... vous ne pouvez pas obtenir du cash avec les chèques factices parce que ce ne sont pas des chèques au porteur avec la mention "déposez sur le compte de". Mais c'est une banque virtuelle et vous pouvez chercher les noms de tous ceux qui y ont un compte et combien d'argent ils ont gagné. Et j'ai écrit 21 de ces chèques le mois passé et j'en écrirai probablement 10 ce mois, jusqu'à aujourd'hui à ce que j'en sais, des choses qui sont entrées. La semaine passée, j'ai reçu une lettre de Chine. Un type a trouvé une erreur dans le volume un de 1960... Il n'avait pas été cité depuis 1968. Finalement, quelqu'un a lu cette page attentivement. C'est vrai. Du coup, ça a une grande importance pour moi, vous savez, d'essayer de rendre ces livres de plus en plus corrects.

"Quel est, d'après moi, la manière la plus efficace de rendre les enfants enthousiasmés par l'informatique ?". Je sais que nous avons de bons outils pour qu'ils puissent jouer avec mais j'étais meilleur pour comprendre les enfants quand j'en avais qui étaient petits. Je veux dire, quand j'étais... quand mes enfants étaient en école élémentaire, j'aurais pu concevoir des parcours pour des élèves de CP, et l'année suivante, j'aurais pu créer des parcours pour des élèves de CE1. Maintenant, c'est effacé de ma mémoire... mais je pense qu'une idée pour ce faire est de donner aux enfants des moyens d'être créatifs et de partager leurs créations avec leurs amis. Ainsi, cela serait probablement la meilleure façon ; avoir des sortes de jeux dans lesquels les enfants pourraient faire des constructions dont ils seraient fiers.

"Steve Jobs vous a-t-il dit qu'il avait lu tous vos livres et que lui avez-vous répondu ? Au revoir." Ok. Maintenant, il y a une histoire marrante à propos de... que vous pouvez regarder. Et l'histoire vraie, je crois, se trouve dans la version russe de wikipedia parce que le type en Russie voulait consulter la source. Et le fait est que j'ai... j'ai rencontré Steve à plusieurs reprises et que le plus vraisemblable est qu'il a dit ce que j'ai dit "Oh, c'est merveilleux. Vous êtes la première personne que je rencontre qui les a tous lu" mais en tout cas, je diffère la narration du reste de l'histoire. Vous aviez une question ?

BILL : Du coup, êtes-vous familier avec le domaine de la programmation en langage naturel ? Ou désolé, avec le traitement du langage naturel.

KNUTH : Pardon ?

BILL : Le traitement du langage naturel.

KNUTH : Le traitement du langage naturel. Bien, j'utilise Google traduction énormément. Et, vous savez, je connais un peu la façon dont il fonctionne. Mais...

BILL : Du coup, du peu que vous en connaissez, voyez-vous cela avoir un effet sur le domaine de la programmation littéraire ou sur celui de la programmation en général ?

KNUTH : Non. Bon, cela me semble différent... Cela a sûrement un énorme impact sur l'intelligence artificielle et de nombreux algorithmes qui sont utilisés pour gérer des trucs qui sont... Pour moi, le... j'ai toujours cherché une manière d'obtenir une traduction automatique pour cela. Je n'aurais pas besoin d'utiliser un dictionnaire mais j'aurais seulement à apprendre un dialecte de l'anglais quand je dois gérer des choses en d'autres langues. Et cela semble advenir en ce moment. Mais je n'avais rien de profond à dire à ce propos.

BILL : Merci.

KNUTH : Un ami à moi m'a donné un livre merveilleux. Il a pris Alice au pays des merveilles et l'a fait traduire en français par une machine. Et alors, il l'a fait retraduire en anglais et à nouveau en français jusqu'à parvenir à quelque-chose de stable, vous savez. Après deux cycles, vous obtenez à nouveau la même chose. Et alors ils ont transcrit le tout en une forme stable.

Et alors, que se passe-t-il ? Le lapin dit "Oh, précieux" au lieu de "Oh, très cher.". En tout cas...

BILL : Pourrais-je...

KNUTH : Oui.

BILL : Je vais me permettre de vous interrompre ici. Je vais prendre la liberté de vous poser la dernière question.

KNUTH : Oh, très bien.

BILL : Donc, vous savez, il y a de cela des années, quand j'étudiais l'informatique, il y avait beaucoup d'attente pour les entraînements mathématiques. Et j'ai noté que dans les 30 ou 40 années suivantes, il y a eu de moins en moins de dépendance aux mathématiques, et mon impression est que les étudiants sont de moins en moins entraînés pour ça. Je me rappelle que c'était [indistinct] Stanford pendant quelques années pour savoir s'il y aurait une licence d'informatique et tout ça. Et je pense qu'il y avait un présupposé qui était que les gens devraient avoir des cours de mathématiques avant d'intégrer le cursus d'informatique. Pensez-vous que... comment l'informatique a-t-elle pu changer au point que les mathématiques aient perdu à ce point-là de l'importance en son sein ? Et, vous savez, je serais vraiment intéressé par le fait d'avoir votre opinion là-dessus.

KNUTH : Oui. Ok. Encore une autre grande question. En fait, toutes ces questions ont vraiment été terribles. Donc, il y a un manque en terme d'informatique... une informatique de qualité qui pourrait être faite sans beaucoup de mathématiques maintenant. Mais il y a juste autant d'exemples où des mathématiques de pointe interviennent en informatique également. Je veux dire, il suffit que je me promène dans notre immeuble vous savez, tout ce qui concerne l'informatique graphique, toutes les méthodes de rendu qui sont profondément basées sur les mathématiques, et vous savez, les nouvelles techniques dans les caméras sont incroyables.

Les gens utilisent des mathématiques de haut niveau en intelligence artificielle, tous les [indistinct] pour les réseaux, les calculs en robotique nécessitent des mathématiques de pointe, vous savez. Du coup, je ne pense pas cependant que j'aie besoin d'une grande quantité de mathématiques pour venir avec Facebook. Mais encore, je comprends la manière dont Facebook est capable de faire sa magie en mettant vraiment chaque page facebook de chaque personne dans un ordinateur géant. Cependant cela... et une certaine connaissance mathématique dans le but de comprendre la mise en cache et tout ça, oui, mais pas des mathématiques traditionnelles. Du coup, les paradigmes mathématiques sont toujours là. Nous devons connaître les concepts des preuves rigoureuses pour au moins la moitié de l'informatique maintenant, je dirais. Mais il y a aussi beaucoup d'autres choses qui sont... quand nous parlons du design des GUI ou de choses comme ça, vous n'avons pas besoin de tant de mathématiques que ça.

BILL : C'est vrai. Mais j'ai entendu quelques personnes dire que lire vos livres... Vos livres vous savez *"L'Art de la programmation des ordinateurs"* est vraiment un défi si vous n'avez pas le bagage mathématique nécessaire.

KNUTH : Oui.

BILL : Ce qui est vrai, je pense. Mais...

BILL : C'est vrai. Mais j'ai entendu quelques personnes dire que lire vos livres... Vos livres vous savez *"L'Art de la programmation des ordinateurs"* est vraiment un défi si vous n'avez pas le bagage mathématique nécessaire.

KNUTH : Oui.

BILL : Ce qui est vrai, je pense. Mais...

KNUTH : Oui... Non, ce n'est pas facile de lire mes livres mais ça pourrait être beaucoup plus difficile. J'ai essayé de les rendre aussi simples que possible mais je n'ai pas réussi à les rendre, vous savez, une brise.

BILL : Du coup, avec ça, je voudrais vous remercier Don d'avoir accepté de nous rendre visite, ainsi que de répondre à toutes ces questions. A nouveau, merci.

Traduction d'une interview de

Donald E. Knuth

Histoire orale, Université de Stanford

menée par Susan W. Schofield
le 8 mai 2018

https://purl.stanford.edu/jq248bz8097

Schofield : Aujourd'hui, nous sommes le 8 mai 2018. Je suis Susan Schofield, du programme d'Histoire orale de la Société d'Histoire de Stanford. Je suis chez Donald Knuth et je vais l'interviewer pour le projet d'Histoire orale de notre Université. Don, votre CV contient de nombreuses interviews précédentes qui décrivent votre carrière prolifique en tant qu'informaticien de renommée internationale. Une grande quantité d'informations vous concernant est déjà dans le domaine public et nous nous sommes entendus sur le fait que l'accent principal de la présente interview serait mis sur vos expériences spécifiques à Stanford, les influences et les observations de notre université dans laquelle vous avez passé les 50 dernières années. Si vous le permettez, commençons s'il vous plaît par un très court rappel de votre histoire personnelle pré-Stanford pour préciser les idées pour ceux qui pourraient écouter cette interview ou la lire.

Knuth : Bonjour. Si vous entendez des bips dans le fond, ce sera dû à des camions de construction dont nous espérons qu'ils n'auront pas à se déplacer trop souvent aujourd'hui.

Je suis né à Milwaukee, dans le Wisconsin, en 1938. Je viens de fêter mon 80$^{\text{ème}}$ anniversaire. Je suis allé au collège à Cleveland, au lycée à Case, un lycée qui s'appelle maintenant Case Ouest. J'ai obtenu mes diplômes universitaires à Caltech [Institut californien de Technologie] à Pasadena, en Californie. A Caltech, j'ai pris maths en option principale (majeure). Bien sûr, il n'y avait pas de majeure informatique à l'époque. L'informatique démarrait vraiment à Stanford alors.

A Caltech, je faisais de l'informatique en dehors de mes heures ou lors de mon temps libre. Je suis resté à Caltech après l'obtention de mes diplômes. J'ai obtenu ma thèse en 1963 et j'étais dans le département de Math. Je travaillais aussi comme consultant chez Burroughs Corporation, qui avait une grosse division d'informaticiens à Pasadena. Ma vie d'informaticien était alors la plupart du temps non-académique, que ce soit du travail éditorial ou de conseil à Burroughs, ou bien que je donne quelques cours à Caltech. J'ai visité Stanford pour la première fois probablement en 1964.

George Forsythe [George Elmer Forsythe] invitait toutes les personnes qui travaillaient sur ordinateur à Stanford. Le département d'informatique était dans le bâtiment Polya, un des bâtiments Eichler du campus, et ça n'avait pas l'air d'être un immeuble de bureaux. J'ai pensé que je m'étais trompé d'endroit. Après une heure et demi, j'ai trouvé où aller.

SCHOFIELD : George Forsythe était en charge de la partie informatique dans le département de mathématiques ?

KNUTH : C'est ça. Le département a officiellement démarré comme département séparé des mathématiques en 1965. On m'a dit que début 1962, il y avait une division Informatique dans le département de Maths, lorsque Ed Feigenbaum et John McCarthy ont été embauchés. Je pense que McCarthy a été le premier professeur d'informatique à n'être professeur que d'informatique. George cherchait alors à recruter des gens parce qu'il avait la vision que l'informatique finirait par exister, et il donnait des conférences partout dans le pays en expliquant pourquoi ça allait arriver. C'était à ce moment-là une idée très radicale. Personnellement, je ne pensais pas du tout que l'informatique deviendrait un jour une discipline académique.

SCHOFIELD : Comment la voyiez-vous, si vous ne la voyiez pas comme une discipline ?

KNUTH : Je la voyais comme quelque-chose que les gens faisaient quand ils en avaient envie. C'est une bonne question. J'ai toujours pensé à l'informatique comme à un amusement.

SCHOFIELD : Un truc fun. Peut-être un outil, mais pas une discipline ?

KNUTH : Eh bien, j'avais obtenu d'être payé pour en faire. Mais je ne réalisais pas qu'elle avait son propre vocabulaire et ses problèmes qui présentaient un intérêt de leur plein droit. J'ai commencé à comprendre l'importance de l'informatique seulement après avoir eu des discussions avec d'autres personnes, dont j'ai réalisé que nous n'aurions pas pu les avoir (ces discussions) si nous n'avions pas eu des années d'expérience de manipulations de ces concepts. Les concepts m'étaient si naturels que je ne les pensais pas révolutionnaires, ou différents, ou comme pouvant être appris par un étudiant. Rétrospectivement, j'étais probablement aveugle, mais George a vu ça comme il faut dès le début. Le temps aidant, je pense que très peu de gens étaient aussi visionnaires que George Forsythe.

SCHOFIELD : Les visions (jeu de mot sur forsights) de George Forsythe. C'est bien.

KNUTH : En tous cas, j'ai donné une conférence [là] dans le séminaire hebdomadaire et alors, George a essayé de m'enrôler dans la faculté. Il m'a écrit une lettre - quelque part dans mes fichiers, je peux retrouver la réponse que je lui ai faite, et disant "J'adore Stanford. J'ai vraiment apprécié ma visite ici mais je dois finir mon livre d'abord. Aussi donne-moi un an de plus.".

SCHOFIELD : Et ce livre était ?

KNUTH : C'était *L'Art de la programmation des ordinateurs*, que je n'ai écrit qu'à moitié au jour d'aujourd'hui *[rires]*.

SCHOFIELD : A ce moment-là, vous aviez un jugement légèrement faux que ce travail pourrait être terminé en un an ?

KNUTH : Je pensais que je pourrais le faire avant que mon fils ne naisse. Nous attendions un enfant pour l'été 1965, et alors je me disais "Ok, je travaillerai vraiment dur et le bouquin sortira." *[rires]*. Sérieusement, j'ai cette lettre, et je le croyais vraiment à ce moment-là. Un des thèmes récurrents de ma vie est que je suis un piètre estimateur du temps que les choses vont mettre à se faire. Je ne sais jamais le temps que ça va mettre pour obtenir quelque-chose qui soit bien fait. Peut-être que ça a été une bénédiction. Peut-être que ça a été une malédiction. Mais ça a certainement été un facteur qui est intervenu tout au long de ma vie.

SCHOFIELD : Ca domine la manière dont vous avez approché l'écriture ?

KNUTH : Oui. Si j'avais eu la moindre idée de ce qui serait découvert en informatique : à la fin 1966, j'avais 3000 pages de brouillons écrits à la main pour le livre et je pensais qu'il suffirait de les taper et de les éditer. En tous cas, mon premier contact avec Stanford a été de refuser une offre en demandant qu'on me laisse un peu de temps, et alors, quand je pourrais bouger, j'aimerais aller à un endroit où j'aurais une position fixe et où je n'aurais plus jamais à bouger, pas plus d'une fois dans ma vie *[rires]*.

SCHOFIELD : Ca, ça a marché.

Knuth : Oui. George était prêt à accepter toutes mes exigences. Quand je suis venu à Stanford...

Schofield : En 1968 ?

Knuth : Mon salaire est passé en comptabilité en février 1968. Le premier volume de *L'art de la programmation* est sorti en janvier 1968. Je n'avais que 30 ans. Il y avait une légère hésitation à faire d'un type de 30 ans un professeur. Cela faisait 5 ans que j'avais obtenu ma thèse.

Schofield : Plutôt jeune *[rires]*.

Knuth : Alors ils ont vu le livre, et George a dit que tous étaient tout sourires. Des offres pour travailler à Harvard ou Berkeley m'étaient déjà parvenues quelques mois avant l'offre de Stanford. Je ne sais pas qui avaient les meilleurs standards *[rires]* mais j'ai toujours plaisanté en disant que les standards de Stanford ont été mis au point après mon arrivée. En tous cas, le fait est que Stanford était celle que j'espérais obtenir parce que George Forsythe était là. A Stanford, je pourrais devenir un des gars. Je pourrais venir et faire de l'informatique. Si j'allais à Harvard, j'aurais dû passer la moitié de mon temps à expliquer en quoi l'informatique était nécessaire et justifier l'informatique parce que j'aurais été l'une des seules 2 ou 3 personnes à Harvard. J'aurais eu une énorme responsabilité pour...

Schofield : Pour créer un département d'une certaine manière ?

Knuth : Oui, c'est ça, pour le faire tourner. J'ai aussi eu une offre de rester à Caltech et d'y développer l'informatique.

Schofield : Est-ce que Berkeley, à ce moment-là, avait un département d'informatique ?

Knuth : Il y avait une division ; Beresford Parlett en était le directeur. Il a été très gentil, même quand j'ai décliné leur offre, il a dit “bon, trouvons un arrangement pour que vous puissiez nous rendre visite quand vous le pourrez, etc.”.

SCHOFIELD : Parlez-nous un peu de la culture de l'informatique quand vous êtes arrivé là. C'était un petit département. Quelle était la culture ? Ma compréhension est qu'au début, ça n'était pas juste de l'informatique académique, mais que ça consistait aussi à faire tourner le Centre de calcul de Stanford.

KNUTH : Feigenbaum était le directeur du centre de calcul et les ordinateurs que les étudiants utilisaient étaient dans le bâtiment Pine, qui était juste à côté de l'immeuble Polya.

SCHOFIELD : Je m'en rappelle bien. J'étais là les années en question.

KNUTH : Oui ? Bon, je devine que vous deviez être étudiante quand ces immeubles ont été construits. Je perds la mémoire, mais je me rappelle d'un de mes quelques voyages à Stanford, probablement au printemps 1967, où j'ai rencontré Feigenbaum dans son bureau de directeur du Centre de calcul et où j'étais en train de vanter les mérites de Niklaus Wirth et d'essayer d'expliquer pourquoi il devrait avoir une promotion ou quelque-chose. Quand j'ai rejoint le département, il y avait je pense 10 à 12 professeurs et nous avions quelques douzaines de thésards. Quand je suis venu en visite au printemps 1967, j'ai passé beaucoup de temps avec les étudiants. Je me rappelle que Sue Graham [Susan Lois Graham] était une étudiante thésarde très influente ici. Elle a fini par devenir professeur distinguée à Berkeley. Elle travaillait avec Wirth, dont la prononciation est Veert en Suisse et Wurth en Amérique. Il était maître assistant alors. Il s'est trouvé que j'ai été son remplaçant et qu'il est devenu professeur à l'ETH de Zürich [Eidgenssische Technische Hochschule Zürich], le premier professeur d'informatique d'Europe. Les doyens de la faculté quand je suis venu étaient John McCarthy, Ed McCluskey [Edward J. McCluskey], Bill Miller [William F. Miller], George Forsythe, Jack Herriot [John G. Herriot], et Gene Golub [Gene H. Golub]. Peut-être que Gene était toujours professeur associé mais certainement que Bill Miller et McCarthy étaient professeurs. Je n'ai jamais bien mémorisé ces positions. A Caltech, j'ai eu un mandat avant même de savoir ce que c'était qu'un mandat. Plus sérieusement, j'ai souvent dit à mes étudiants qu'ils ne devraient pas trop se préoccuper des mandats parce que se faire du souci ne pourrait que leur faire du mal. S'ils méritaient les mandats, ils les obtiendraient et sinon, ça ne valait pas la peine de perdre du temps à se prendre la tête avec ça.

SCHOFIELD : Je me demande si ça les rassurait ? *[rires]*

KNUTH : J'ai lu dans le journal pendant que j'étais à Caltech qu'une personne n'avait pas obtenu de mandat à UCLA, et j'ai dit à l'homme qui avait été mon tuteur de thèse, et qui était alors directeur du département Marshall "Qu'est-ce que ça signifie qu'il n'ait pas obtenu ce mandat ?". La réponse a été "Bon, Don, tu te rappelles la dernière fois que tu as reçu un bulletin de salaire de Caltech, et qu'il y avait une ligne sur le bulletin qui correspondait à la date d'expiration du contrat, et que pour toi, elle était vide ? C'est ça un contrat." *[rires]*. Je n'accordais pas beaucoup d'attention au rang. Nous avions de jeunes professeurs alors - Jerry Feldman [Jerome Feldman], Klaus Wirth, que j'ai déjà cité, Joyce Friedman, et oh mon Dieu, il doit y en avoir eu d'autres.
Nous étions séparés en 4 endroits différents sur le campus. Le laboratoire d'IA de John McCarthy's était en haut sur les collines et il y avait le bâtiment D.C. Power, appelé ainsi d'après Donald C. Power. Feigenbaum avait un groupe qui était sur la route Welch. Le groupe de Bill Miller était au SLAC [le laboratoire de l'accélérateur national]. Forsythe et ma partie du département étions dans le bâtiment Polya. Il a fallu faire entrer le département au chausse-pied sur la propriété de Stanford, et pour le financer, il a fallu obtenir que de nombreuses personnes soient payées en liquide. Vous avez un certain pourcentage de l'argent ou un truc comme ça, ou un salaire payé également par un autre département. Je ne sais pas tous les détails, mais je sais que Joyce Friedman travaillait en Linguistique.

SCHOFIELD : Avec un salaire payé à la fois par le département de Linguistique et le département d'Informatique.

KNUTH : Probablement. Nous étions dans la partie Sciences Humaines, sous...

SCHOFIELD : Est-ce qu'Halsey Royden [Halsey L. Royden] était alors le doyen ?

KNUTH : Non. C'était...il continuait à être prévôt.

SCHOFIELD : Oh, Al Hastorf [Albert H. Hastorf].

KNUTH : Hastorf, oui. Il était en Psychologie. Il étudiait le test de Terman.

SCHOFIELD : Oui, oui.

KNUTH : Hastorf était alors notre doyen. Lorsqu'il a pris sa retraite après avoir été prévôt, je me rappelle qu'il a dit "Si j'avais su lorsque j'étais doyen ce que je sais maintenant, j'aurais sûrement été un bien meilleur doyen. J'aurais su quoi virer." *[rires]*. Royden, oui, est devenu notre doyen pour quelques temps au début des années 1970 [1973]. Je l'ai connu lorsque j'ai perçu des salaires Sciences Humaines et dans le comité de promotion pendant les années 70.

SCHOFIELD : Comment c'était ?

KNUTH : C'était merveilleux de rencontrer les autres professeurs. J'ai aussi apprécié de faire partie d'une université dans laquelle nous n'avions pas que des enseignements d'informatique mais également des enseignements en musique et, bien sûr, en physique, en chimie, en biologie et en médecine. J'ai aussi fait partie du Conseil d'Administration de l'université avec des personnes du département Médecine comme Bob Chase [Robert Chase] et Ken Arrow [Kenneth Joseph Arrow].

SCHOFIELD : Peut-être reviendrons-nous à cela plus tard.

KNUTH : Oui, dans le comité des salaires et promotions, j'ai apprécié de regarder précisément les papiers des candidats et de vérifier attentivement leurs références. J'ai sûrement été parfois trop agressif, obligeant les directeurs du département à travailler davantage qu'ils n'auraient dû le faire. Nous retournions au moins un ensemble de papiers en retour et ils ont été en colère dans le département de cette faculté mais je ne pense pas qu'ils avaient fait leur travail.

SCHOFIELD : Mais ils ont finalement fait le travail demandé et leurs papiers sont revenus et nous avons pu les approuver ?

KNUTH : Oui, c'est ça. J'ai fait mon travail sérieusement mais j'ai aussi beaucoup apprécié de connaître par ce biais des personnes des autres départements. Nous nous rencontrions occasionnellement à la table des membres au Club de la Faculté. Faire partie d'une université a toujours été l'une de mes joies d'être à Stanford.

SCHOFIELD : Je pense qu'il n'y a que peu de contextes dans lesquels ce genre d'interactions ont lieu, comme vous dites, dans le Comité des salaires et promotions, au Conseil de la Faculté, dans le Conseil d'administration, où par structure, des personnes de toutes les différentes divisions sont amenées à intervenir.

KNUTH : Exactement. Les personnes de notre département rencontrent celles des autres départements la plupart du temps lorsqu'elles sont nos représentants dans des instances comme le Conseil d'Université ou des choses comme ça. Il y a des personnes qui effectuent des recherches communes, par exemple avec des médecins ou des biologistes. Le travail en comité était beaucoup plus utile pour moi. J'ai tendance à déplorer la manière dont Stanford grossit et il devient de plus en plus difficile d'être à la fois une personne qui travaille à la fois au fonctionnement de l'Université et aussi dans un département. Je suis allé aux funérailles de Lyman [Richard W. Lyman] et il n'y avait peut-être que 2 ou 3 personnes présentes de notre faculté. Le fonctionnement est de plus en plus insulaire maintenant, plus que ça ne l'était alors.

SCHOFIELD : Je pense que vous avez raison. J'ai entendu la même chose par quelques personnes qui ont été ici le plus long temps. Cela peut avoir quelque chose à voir avec le renforcement des loyautés professionnelles qui sont maintenant internationales, attirer des loyautés peut éloigner de l'université.

KNUTH : Du point de vue de l'informatique, je dirais que c'est principalement dû à la charge de travail - le fait que nous avons de très nombreux étudiants et que nous voulons faire de notre mieux pour eux, et aussi par le fait que le domaine évolue si rapidement. D'autres domaines changent rapidement aussi, l'informatique est vraiment en train d'accélérer. Nous voulons aller de l'avant mais nous devons dépenser un temps énorme juste pour traiter le flot. Le temps à consacrer à d'autres contacts est limité. Vous vous rappelez cet appel d'offres à de grandes idées l'année passée. Le mois prochain ou bientôt, ils vont annoncer les soumissions qui auront été sélectionnées. J'ai soumis une proposition qui était une petite grande idée mais qui était destinée à promouvoir l'inter-université...

SCHOFIELD : La citoyenneté ?

KNUTH : ... en ayant quelque-chose que j'ai appelé le Stanford 101, qui signifie un-pour-un, l'université aurait financé des repas de deux personnes à Stanford qui ne se seraient jamais rencontrées précédemment. Il y aurait une appli qui planifierait ça et imprimerait un ticket pour la cafétéria de la Faculté...

SCHOFIELD : Tu vas et tu déjeunes avec la personne.

KNUTH : Oui.

SCHOFIELD : Je pense que c'est une idée fascinante.

KNUTH : Nous verrons si quelqu'un sélectionne cette idée.

SCHOFIELD : Si elle passe la sélection.

KNUTH : Oui. Les choses qui sont en vogue sont, vous savez, nous allons résoudre la crise du logement, ou des trucs comme ça.

SCHOFIELD : Des grandes idées qui pourraient regrouper d'autres choses.

KNUTH : En tous cas, je crois fortement qu'il faudrait essayer d'améliorer la communauté à Stanford. Je suis professeur invité à Oxford et j'essaie d'y aller une semaine par an. Pendant la semaine en question, je mangerai avec 4 personnes avec qui je n'ai jamais mangé précédemment et qui sont fascinantes. Et nous apprécierons tous l'expérience.

SCHOFIELD : Vous avez programmé ça ?

KNUTH : Eh bien, j'ai arrangé la rencontre avec l'éditeur du *Dictionnaire d'anglais Oxford*. Je l'ai invité à déjeuner au collège. Mais la plupart du temps, je m'assois juste à une table au hasard et je rencontre alors quelqu'un.

SCHOFIELD : C'est quel collège d'Oxford ?

KNUTH : C'est le collège Magdalen [prononcer Maudlen]. Parfois je n'ai pas de chance et je tombe sur un avocat, mais la plupart du temps, je mange avec quelqu'un de très intéressant *[rires]* - non, même les avocats, ça va *[rires]*.

SCHOFIELD : Revenons à la culture et à la trajectoire. L'informatique évolue dans les années 80, elle se développe et a de plus en plus de résultats. Il y a alors une décision de la faire sortir des Sciences et Humanités et de la faire entrer en école d'ingénieurs pour en faire une majeure de cours d'université, ce qui est énorme, évidemment. Parlez-nous un peu de cela et du regard que vous y portiez.

KNUTH : Pendant les années 70, nous avions des étudiants complètement diplômés et c'était une décision consciente. Nous sentions que l'informatique n'était pas assez mûre pour offrir suffisamment de choses à des étudiants de niveau Licence qui leur donnerait une éducation correcte jusqu'à ce qu'ils obtiennent leur diplôme. Nous pouvions leur donner un tas de cours dont nous pensions qu'ils étaient importants mais on pensait aussi que c'était mieux d'avoir une majeure en maths ou quelque-chose comme ça ; le cursus Sciences mathématiques était une combinaison de différentes sortes de Maths appliquées.

Il est très important pour des étudiants programmeurs de comprendre les principes mathématiques parce que vous devez être capable de comprendre l'idée de ce que ça signifie d'être correct et prouvable. Nous pensions que les cours que nous donnions étaient bons mais il n'y en avait pas assez pour vraiment fournir un cursus complet pour des étudiants.

SCHOFIELD : Et la faculté, à ce moment-là, était d'accord ? Ou bien y avait-il désaccord à ce propos ?

KNUTH : Oh oui, à 100 %. Nous sommes allés voir des majeures proposées dans d'autres collèges que nous avions visités et nous n'avions pas été convaincus par ce que nous avions vus. Nous ne pensions pas que ça marcherait. Bien sûr 10 ans, c'est long en informatique. On a mûri *[rires]*.

SCHOFIELD : Alors vous avez fait ça dans les années 80 et... ?

KNUTH : Je pense que je devrais vraiment parler de ça. C'est assez amusant. Stanford a eu l'un des tout premiers départements d'informatique, en 1965. Vers 1975, toutes les universités avaient un département d'informatique. C'est passé de 0 à 100 % en 10 ans.

Schofield : Dans tout le pays ?

Knuth : Oui. Je crois que la raison de cela est que des personnes comme moi avons une certaine structure mentale. Si je devais désigner cela par un mot, je nous appellerais "geek". Ca simplifie à outrance mais disons que 2 % des personnes de la population sont des geeks, bon, et que c'est vrai depuis des centaines d'années, que ça a à voir avec une manière dont les personnes se développent, ou comment leur cerveau organise l'information ou quoi que ce soit, qui les fait entrer en résonance avec ce que nous appelons aujourd'hui un ordinateur. Je lis parfois des choses écrites au XIX$^{\text{ème}}$ siècle par quelqu'un et je pense "ça aurait été un excellent programmeur." [1]. Supposons cela comme une hypothèse, qu'il existe un certain petit pourcentage de personnes au monde qui sont des geeks. Celles parmi elles qui étaient dans des universités avant 1965 se seraient retrouvées dans différents départements. Certaines seraient des mathématiciens, d'autres des physiciens, d'autres des avocats.

Schofield : Des statisticiens peut-être ?

Knuth : Bien, n'importe quoi. Des chimistes, la plupart médecins, je suppose, mais aussi poètes, n'importe quoi... Mais ils auraient vraiment été des geeks. En tous cas, l'informatique a démarré et les geeks ont finalement eu une maison.

Schofield : C'était comme un aimant. Ca les attirait ?

Knuth : Ils ont pu rencontrer des personnes qui riaient aux mêmes blagues qu'eux, comprendre les mêmes analogies qu'ils faisaient, communiquer instantanément de façon plus efficace avec les autres geeks, et ils avaient une maison.

Schofield : Vous êtes en train de dire que c'est plus intrinsèque qu'ensei-

1. Note de Don Knuth : Ada Lovelace, la fille de Lord Byron's, a été (discutablement) la première programmeuse.

gné (inné qu'acquis) ?

KNUTH : Oui, absolument. Vous ne dites pas juste “ok, maintenant il y a de bons métiers en informatique, alors ok, je vais apprendre l'informatique”. Vous devez être un geek. C'est mon opinion. Je suis conforté dans cette idée par tous les projets que j'ai vu échouer ; c'était parce que les personnes impliquées dans ces projets n'étaient pas réellement des geeks *[rires]*.

C'est une opinion controversée maintenant. Des éducateurs disent non, c'est juste que les gens ne sont pas assez motivés. Mais ce sont des geeks. Je pense qu'ils [les enseignants] ne comprennent pas ce que ça signifie que de ne pas être un geek. D'un autre côté, je connais des aspects d'autres sciences que j'ai essayé d'apprendre en bossant vraiment dur et je n'ai pas réussi. Je sais qu'il me faudrait une autre sorte de cerveau si je voulais vraiment être bon en mécanique quantique, par exemple. J'ai essayé dur, mais je n'y suis pas arrivé. En tous cas, cela explique pourquoi l'effectif du département d'informatique est passé de 0 à 100 en 10 ans. C'était à cause de ce phénomène que des personnes sont venues ensemble et ils savaient que c'était une discipline où leurs propres concepts avaient de l'importance, non pas comme applications à la physique ou à la chimie mais aussi comme applications à l'informatique. Les gens ont commencé à savoir que ce genre de connaissance méritait d'exister. Comme je l'ai dit, dans le début des années 60, je ne réalisais pas que j'étais un geek. Je ne réalisais pas qu'il y avait là tout un corpus de connaissances. Mais Forsythe lui le réalisait, et je suis venu. J'étais probablement geek à 110 %, je ne sais pas, mais c'était vraiment très fort en moi, et pas exactement pareil pour 2 personnes différentes.

L'informatique a été un succès immédiat de manière évidente. Mais pas, pourtant, à cause de l'importance économique de l'informatique ou des choses comme ça. C'était à cause de l'ensemble de compétences que ces gens avaient. Ils ont réalisé qu'ils pouvaient utiliser leurs compétences et développer leurs idées encore plus loin.

L'étape suivante a été que toute université avait son département d'informatique. Mais parfois c'était dans l'école de commerce, parfois dans l'école d'ingénieurs, parfois dans la partie Sciences et Humanités, comme à Stanford. Quelques endroits comme Purdue et Carnegie ont lancé des écoles d'informatique vers les années 70.

SCHOFIELD : Est-ce qu'il y avait des endroits où l'informatique était complètement séparée du reste comme maintenant dans une école indépendante ?

KNUTH : Oui, oui. Ca a certainement bien marché à Carnegie, et Purdue en a eu une je pense plus tard. Waterloo au Canada, et d'autres. Quelques personnes de notre faculté ont dit "Pourquoi ne laissons-nous pas l'école d'ingénieurs et ne démarrons-nous pas une école d'informatique à Stanford ; l'informatique commence à intervenir dans la plupart des autres domaines". J'ai dit "les gars, pour gagner des amis et influencer les gens, il nous faut leur dire qu'on est tellement important qu'on va démarrer notre propre école. Ca a déjà eu lieu ailleurs".

Vers les années 80, la plupart des personnes de notre faculté avaient été entraînés dans des départements d'informatique qui faisaient partie de l'école d'ingénieurs. Ils comprenaient ce que ça signifiait de faire partie d'une école d'ingénieurs. Personnellement, je ne le savais pas. J'avais fait partie du département de Maths et de celui de Sciences et Humanités de Stanford. Le facteur le plus fort était qu'à Stanford, l'école d'ingénieurs était en compétition avec les autres écoles d'ingénieurs du monde et du coup, elle devait aussi avoir son département d'informatique propre. L'école d'ingénieurs de Stanford essayait de gagner des points sur les autres écoles d'ingénieurs. Les gens demandaient "Bon, vous faites quoi avec les ordinateurs ?". Stanford avait envisagé la possibilité que le Laboratoire des systèmes de calcul fasse partie du département d'ingénierie électrique. Les étudiants candidataient, étaient admis, etc. Nous avions une ou deux facultés associées. Il y a eu quelques cas où des personnes n'ont pas été titularisées parce qu'elles devaient être approuvées par les deux écoles à la fois.

SCHOFIELD : Et les deux départements.

KNUTH : En tous cas, grosso modo, dans les années 70, nous disions "Oh, bon, nous avons deux groupes d'informaticiens à Stanford ; utilisons cela à notre avantage. Si on ne peut pas obtenir un truc d'un doyen, on l'obtiendra de l'autre. Et le boulot sera fait.".

Pourtant, il s'est avéré plus tard que nous serions toujours en compétition pour les ressources si nous avions deux groupes à Stanford, et il valait mieux que nous décidions une bonne fois pour toutes de quel côté aller. C'était beaucoup mieux d'aller côté Ecole d'ingénieurs parce que la majorité des universités du monde, à ce moment-là, avait de l'informatique en ingénierie. Stanford était trop excentrique, à avoir toujours l'informatique dans la même école que les mathématiques et la physique.

SCHOFIELD : Je pouvais voir pourquoi l'ingénierie voulait de l'informatique, et je sentais qu'ils en avaient besoin. Etait-ce problématique pour les Sciences et Humanités de l'abandonner, ou bien ont-ils juste vu que c'était logique ?

KNUTH : Je n'ai pas été impliqué dans tout ça. Jim Rosse [James N. Rosse] est décédé. Nous ne pouvons pas le lui demander. Sûrement que Jim Gibbons [James F Gibbons, doyen du département d'ingénierie] était là et Nils Nilsson [Nils John Nilsson] a été engagé à ce moment-là pour gérer cette transition.

Nils était un chercheur senior au SRI [Institut de recherche de Stanford] et il avait écrit des livres conséquents. De plus, c'est vraiment le meilleur écriveur d'email que j'ai jamais connu. Ca demande une certaine compétence, et Nils aurait été un des pionniers pour gagner un prix Pulitzer potentiel de l'écriture d'email d'un excellent style. Il est très difficile quand on écrit un email d'éviter d'être trop flamboyant ou de transmettre correctement ses émotions. C'était un maître en matière de communication. Je voulais simplement dire cela maintenant parce que...

SCHOFIELD : Vous pourriez oublier plus tard ?

KNUTH : Oui, et il le mérite vraiment.

Je suppose que d'une certaine manière, j'aurais pu être perçu comme un des principaux résistant contre les Sciences et Humanités parce que, de toute notre faculté, je suis probablement celui qui est le moins intéressé par Wall Street, vous savez, par l'aspect économique potentiel de l'informatique. Je mets mes programmes dans le domaine public. Je n'ai jamais eu la moindre intention de fonder une boîte. J'aime le fait que des gens utilisent des programmes d'ordinateur, mais je n'ai jamais compris pourquoi ils payent pour ça, ou pourquoi quiconque paye pour quoi que ce soit. Vraiment, je ne suis pas bon dans les questions financières de quelque sorte que ce soit. En tous cas, j'ai toujours été intéressé par les aspects théoriques plutôt que lucratifs de l'informatique. Bien sûr, d'un autre côté, les gens disent que quand il y a une compétition économique, ça fait que les gens réfléchissent plus âprement, et vous avez un retour sur la qualité de vos idées parce que vous voyez si des gens vont les acheter ou pas. C'est important.

J'ai toujours eu confiance dans l'intelligence des gens pour décider de ce qui est bon ou mauvais à la place de leur portefeuille. Je ne sais pas combien d'autres personnes de la faculté étaient des purs scientifiques comme moi, mais j'étais sûrement un de ceux qu'il fallait convaincre que nous devions rejoindre l'école d'ingénieurs. Je fus définitivement convaincu quand j'ai réalisé que la compétition entre les 2 groupes était mauvaise pour Stanford et pour l'école d'ingénieurs de Stanford. Et j'ai pensé "bon, ça va continuer des années si nous ne bougeons pas".

SCHOFIELD : Très peu de temps après ce déménagement, le département a pris la décision de proposer une majeure pour les étudiants de Licence. Elle a été assaillie par les étudiants.

KNUTH : Ca a commencé lentement. Je pense qu'on avait 8 majeures de première année, 16 de seconde, et 30 de troisième année. Je ne pense pas que ça doublait régulièrement. Ca a grossi lentement au tout début ; nous cherchions un peu notre chemin mais également nous devenions meilleurs pour ce qui est d'enseigner. Les premiers étudiants n'avaient pas de pairs pour leur dire que cette majeure était un bon choix. Maintenant c'est trop le contraire. Les étudiants qui veulent une majeure en anglais entendent dans leur dortoir des personnes qui leur disent qu'ils sont stupides de faire ça. Cela a causé une anxiété terrible chez les professeurs d'anglais à Stanford et je pense que c'est une honte et que la pression par les pairs provient du fait qu'il y a tellement de majeures, la pression par les pairs et la pression par les parents.

SCHOFIELD : Et la pression parentale, je suis d'accord. L'informatique est vue comme un chemin rapide vers un bon métier.

KNUTH : Si quelqu'un est né geek, il devrait définitivement prendre l'informatique comme majeure. Il y a un énorme besoin pour de tels talents. Si tu ne le fais pas parce que tu vas réellement vers ce diplôme, mais seulement parce que, bon, c'est nécessaire pour avoir tel style de vie ou un truc comme ça, ça n'est pas selon moi la bonne manière de choisir une carrière, ni d'ailleurs une majeure.

Schofield : Vous n'étiez pas impliqué dans l'enseignement les premières années, si ?

Knuth : J'étais à la retraite...

Schofield : Depuis 1993 je crois.

Knuth : Depuis 1993 officiellement. Mais non officiellement, j'ai quitté en étant absent en 1990. J'ai dit à Nilsson en 1989 que j'allais être absent un an quand j'ai réalisé que je n'avais pu travailler qu'un jour sur 365 sur *L'Art de la programmation des ordinateurs*. Alors j'ai dit "tu sais, ça n'est pas ainsi que je veux vivre le reste de ma vie. Je peux être un bon professeur et faire toutes ces autres choses que je fais à Stanford, comme gagner de l'argent, mais réellement, je peux être plus utile au monde en écrivant ces livres. Et je n'ai pas besoin d'argent, alors pourquoi ne pourrais-je pas prendre ma retraite ?"

Schofield : Vos livres ont-ils généré tant de bénéfices que vous n'aviez pas vraiment besoin du salaire de la faculté ?

Knuth : Oh, c'est très bien huilé. Tandis que nous parlons, quelqu'un est en train d'acheter l'un de ces livres. Combien de livres vendus, je ne suis pas sûr. Le livre qui est sorti en 1968, qui a rendu la faculté tout sourires, est à sa $40^{\text{ème}}$ réimpression de la troisième édition et il s'en vend probablement 10 copies par jour.

Schofield : Oh mon Dieu. Et j'ai vu qu'il avait été traduit en de multiples langues.

Knuth : Non, il n'existe qu'en anglais. Il se vend à 3000 exemplaires par an. Ce n'est pas tout à fait 10 par jours mais il rapporte environ 100 000 $ par an de bénéfices.

Schofield : C'est plutôt rare pour un livre universitaire *[rires]*.

Knuth : Oui, oui.

Schofield : Vous ne vous y attendiez probablement pas, n'est-ce pas ?

Knuth : Ca n'a jamais été une motivation. Je l'ai écrit parce que j'ai vu le besoin qu'il y avait d'un tel livre.

Schofield : Couvrons maintenant le travail au sein du département. Vous avez eu des étudiants, bien sûr. Vous avez supervisé le travail de thèse de quelques étudiants et vous avez aussi eu une fois des étudiants de premières années. Avez-vous enseigné le cours introductif ?

Knuth : J'ai enseigné le cours introductif peut-être en 1970-1971. C'était un cours introductif différent ; c'était une séquence de 3 sessions en fait. Je crois que j'ai dû l'enseigner trois années en tout. On commençait avec des notions de base, et pour la troisième session, il y avait un projet donnant lieu à un rapport par les étudiants et nous pouvions approfondir davantage les sujets à cette occasion.

J'ai introduit un nouveau cours dans le curriculum appelé Mathématiques concrètes en 1970 et je l'ai enseigné, oh, 10 fois. Nous avions des professeurs invités qui l'enseignaient parfois. Ce cours a aussi donné lieu à un livre. C'était le genre de mathématiques qui n'étaient pas enseignées dans le département de Maths. C'étaient des choses très utiles à connaître pour les informaticiens. De nombreux étudiants de majeure Maths prenaient ce cours également.

Schofield : Avez-vous apprécié d'enseigner ?

Knuth : Oh absolument. Oui. J'aimerais beaucoup vous en dire plus sur l'enseignement. Quand vous avez dit couvrir tout à l'heure (voir plus haut "wrap"), je me demandais si vous aviez dit R-A-P ou W-R-A-P.

Schofield : Je pensais W-R-A-P.

Knuth : Vous savez, on peut le "rapper". La plupart de mes cours après les années mi-70 avaient lieu dans le Skilling Auditorium et nous avions des caméras de télé dans la pièce de manière à enregistrer les cours. Mais je pouvais aussi utiliser cela pour avoir des étudiants qui assuraient une bonne partie du cours. Maintenant un truc très à la mode est d'avoir ce qui s'appelle une classe inversée. Je faisais ça tout le temps à Stanford. J'avais toujours en tête que le livre, les étudiants pouvaient le lire en dehors du cours tandis qu'en classe, nous allions parler, nous allions travailler comme une équipe résolvant des problèmes. Je voulais que tous les élèves participent comme si c'était une classe de langue ou autre.

J'avais comme principe qu'aucun élève ne pourrait parler plus de 3 fois par heure. Plutôt que de mettre un minimum de fois où un étudiant pouvait parler, j'ai mis un maximum parce que ça forcerait les autres à parler. Les loquaces, s'ils avaient quelque-chose de vraiment important à dire, je leur disais "dites-le à votre voisine et faites qu'elle le dise". Je voulais que tous soient impliqués. Le point important de tout ça était d'apprendre comment apprendre de ses erreurs et de comprendre le genre de choses que vous pouvez mettre dans un livre. Quand vous résolvez un problème, de quelle compétence avez-vous besoin et comment vous sortez-vous de vos erreurs ?

SCHOFIELD : Quand vous avancez un peu dans une impasse, comment vous revenez en arrière ?

KNUTH : Oui, exactement. C'était ça le point-clef, le point qui n'était pas suffisamment enseigné. J'ai vraiment aimé faire cours parce que je ne savais pas quelles erreurs les gens allaient faire, ou quelles erreurs j'allais faire quant à moi. Des questions sont venues auxquelles je ne pouvais pas répondre. Ok, alors je les reportais au prochain cours.

Les étudiants ne devaient pas passer tout leur temps à prendre des notes comme ils le faisaient dans les autres cours. J'avais mes maîtres-assistants qui prenaient en notes toutes les discussions qu'on avait et ils les sortaient le jour d'après, de manière à ce que les étudiants soient libres de participer à la discussion ou pas [2].

J'ai vraiment apprécié d'enseigner et je pense que j'avais une bonne ma-

2. Note de Don Knuth : J'avais commencé à enseigner de cette façon déjà à Caltech dans les années 1960. Ma motivation est venue d'un professeur de maths célèbre de Stanford, George Polya. Un de ses cours à Stanford a donné lieu à un film inspirant, intitulé Enseignons le fait de deviner. Ce film a changé ma vie. Je pense que les gens peuvent encore le regarder (*note de la traductrice* : https://vimeo.com/48768091).

nière d'enseigner. Je n'ai jamais eu 100 étudiants dans un cours. J'aurais pu en avoir plus de 50 et alors, tout le monde n'aurait pas pu participer. Mais j'aurais dit "aujourd'hui, tous ceux habillés en jaune, ou en gris, ou autre, participeront ; ou tous ceux dans la rangée du fond participeront" *[rires]*. J'aurais choisi un sous-groupe de l'audience [pour être les participants]. C'était toujours l'objectif d'un cours, faire quelque-chose qu'on ne trouve pas dans un livre.

SCHOFIELD : Quand vous avez pris votre retraite plus tôt, est-ce que l'enseignement est quelque-chose qui vous a manqué ? Ou bien avez-vous continué d'enseigner après votre retraite ?

KNUTH : Je n'ai pas continué d'enseigner régulièrement, mais je donnais des conférences en tant qu'invité, et je le fais encore... Il y a deux semaines, j'ai parlé à des étudiants de Théorie pendant le déjeuner. Chaque trimestre, je donne une conférence à tous les étudiants en Théorie et je donne des conférences en tant qu'invité dans d'autres cours de Stanford.

SCHOFIELD : Cela maintient le contact ?

KNUTH : Je déjeune aussi avec les étudiants tous les jeudi.

SCHOFIELD : Vous déjeunez avec les étudiants de majeure d'informatique chaque jeudi ?

KNUTH : Oui.

SCHOFIELD : Tout le monde peut venir ?

KNUTH : C'est un rendez-vous hebdomadaire. Nous avons ces échanges hebdomadaires à déjeuner. Nous avions l'habitude d'appeler ça les algorithmes pour déjeuner en groupes mais c'est une tradition qui remonte à 50 ans.

SCHOFIELD : Combien de jeunes viennent ?

KNUTH : La nourriture est gratuite, du coup, *[rires]*, il n'y a de la place que debout.

Schofield : Où que soit la nourriture, les étudiants la trouvent. Je pense à une autre question relative à Stanford... Vous êtes arrivé en 1968 et c'était l'année de la révolution dans les campus, Stanford inclus. Il y a des émeutes, il y a des vitres cassées, etc. Vous-même êtes alors assez jeune. Vous venez à peine de dépasser l'âge étudiant. Comment voyez-vous cela ? Participez-vous ou bien que faites-vous ?

Knuth : Tout d'abord, je suis vraiment venu en 1969, pas en 1968. J'étais absent toute la première année. Ceci avait été négocié parce que je voulais faire une année de service national. J'étais à Princeton cette année-là, travaillant pour l'Institut des analyses de défense, qui est l'un des sous-traitants principaux de la NSA [Agence de Sécurité Nationale]. Je travaillais dans le domaine de la cryptographie et du cassage de codes. J'étais Habilité Secret Défense et je n'ai toujours pas le droit de dire à ma femme ce que j'ai fait cette année-là.

Schofield : Du coup, vous n'allez sûrement pas dire au micro ce que vous avez fait cette année-là.

Knuth : Non. C'est assez étrange que quelqu'un ait changé ma biographie Wikipedia pendant les 12 derniers mois en y incluant tout un paragraphe sur mon travail pour la NSA en 1968, comme si c'était une grande partie de ma vie. Ca ne l'a pas été, et je ne comprends pas pourquoi ça a été exagéré à ce point et pourquoi c'est important pour les gens. En tous cas, pendant l'année en question, j'ai rencontré beaucoup de personnes sympathiques et intelligentes et je n'avais pas honte de casser des codes. Je pense que les gens ont le droit d'avoir des secrets ; mais je pense que c'est aussi important de faire ce que nous pouvons pour savoir si d'autres personnes peuvent casser nos propres codes, par exemple. Mon travail alors contenait beaucoup de programmation, à la limite de ce que les ordinateurs permettaient.

Je savais que j'était né pour être un enseignant. Je n'ai pas aimé devoir garder des secrets. Je savais que travailler pour le gouvernement ne serait pas une bonne carrière pour moi. Mais je voulais faire quelque-chose, parce que mon service avait été reporté et que j'avais ce privilège de vivre dans un pays dans lequel je n'avais pas à faire la guerre ou à défendre ma maison et mes biens, ce que doivent faire d'autres personnes. J'ai pensé "ok, je peux rendre cette chance qui m'est donnée comme ça.". Je me suis arrangé pour faire ce travail un an avant de venir à Stanford.

Pendant ce temps, j'étais là-bas à Princeton. Les gens me demandaient d'où j'étais et je leur disais de Stanford. Ils disaient "oh, n'est-ce pas là que des étudiants ont brûlé ça et ça ?" Je répondais "eh bien, je ne sais pas vraiment, je n'ai jamais été à Stanford.". Cette année-là, je visitais Columbia, où il y avait des émeutes toute une journée et où les étudiants avaient essayé de détruire l'ordinateur. A l'endroit où je travaillais sur le campus de Princeton, les étudiants une fois ont encerclé l'immeuble. Les administrateurs ont très judicieusement pris les pistolets des gardes de la sécurité *[rires]*. Ca, c'était avant l'état de Kent, et ce qui est arrivé après que j'aie intégré Stanford. Je suis arrivé à Stanford et la première année, en 1969, Ken Pitzer [Kenneth Sanborn Pitzer] était le président. Je ne l'ai jamais vraiment connu mais je l'ai vu le jour de l'ouverture, où il y avait de la fumée visible dans le Hall d'enceinte juste derrière l'amphithéâtre gelé où nous faisions l'ouverture. C'était un homme brisé. Il a pris 10 ans en une seule année à travers ces événements ; je crois que c'était un chimiste. C'étaient des temps terribles quand toutes sortes de gens venaient du dehors du campus pour commencer leurs protestations parce que Stanford était une cible facile. D'autres endroits étaient mieux protégés et du coup, on devait avoir les shérifs et les foules juste là. Il y avait une pancarte là où il y a le Starbucks maintenant sur El Camino, "achetez vos armes ici". Connaissez-vous El Camino de l'autre côté de l'avenue Stanford ?

Schofield : Je sais exactement de quel endroit vous parlez. C'était un marchand d'armes ?

Knuth : Oui, c'était un armurier. Après je pense que vous pouviez y acheter des barbecues ou des trucs comme ça, bien, mais ça disait armes en grosses lettres. Quand je suis arrivé en 1969, Nixon était notre président. J'étais bien sûr opposé à la guerre au Vietnam et à la manière dont les choses étaient en train d'évoluer. Le trimestre de printemps de ma première année a été quasiment totalement perdu, parce qu'il y a eu des boycotts des cours pendant longtemps.

Schofield : Ca devait être au printemps 1970.

Knuth : Printemps 1970... Avril était le début du trimestre de printemps et on essayait de faire cours mais toutes sortes de choses se produisaient. Ils appelaient ça des Teach-ins, pour exprimer le fait qu'on n'allait pas leur enseigner la vérité sur ce qu'il était en train de se passer.

Au début de mes cours de printemps, j'écrivais un signe racine au tableau : "Ceci est le signe racine [en mathématiques]." ; je disais "j'ai une grande sympathie pour les racines mais la prochaine heure, nous allons parler informatique ok.".

Un jour, Nixon a envahi le Cambodge. Ce jour-là, je n'ai pas fait cours. J'ai fait un piquet de grève à l'immeuble Pine. Bob Floyd [Robert W Floyd], mon collègue, et moi étions assis là... Je suis sûr que quelqu'un a dû nous prendre en photo. Nous avons entouré l'immeuble de manière à ce que personne ne puisse entrer et faire son travail comme d'habitude.

SCHOFIELD : Ou bien abîme l'immeuble ?

KNUTH : Oui, bon, c'est une autre histoire. Quelqu'un a mis le feu à l'immeuble Polya l'année suivante et j'avais déjà ramené tous mes fichiers à la maison pour les protéger. Oui, ça n'était pas vraiment une époque où une carrière académique semblait être une bonne idée.

SCHOFIELD : Est-ce que c'est ce que j'avais à l'esprit ? Non.

KNUTH : Mais je savais aussi que si Stanford fermait, je trouverais un moyen de rencontrer les étudiants et je trouverais un endroit où nous asseoir pour parler [informatique]. On l'aurait fait sans structure. C'est devenu très clair pour moi, que le but de ma vie était d'enseigner et de communiquer ces idées. Quelle que soit la manière dont ça devait être fait, nous le ferions. Cela m'a amené à penser "quelles sont mes vraies priorités ?". Je savais de façon sûre que j'étais né pour être professeur, mais ma zone de confort avait changé.

Où en étions-nous ? Je viens au campus et Bob Floyd et moi faisons des piquets de grève sur le département d'informatique. Je dois admettre que nous nous parlions informatique l'un à l'autre. Nous faisions de la recherche sur nos piquets de sit-in *[rires]*.

Mais nous voulions encore obtenir la chose suivante : pas de travail comme d'habitude aujourd'hui. J'avoue qu'il faudrait que je regarde dans mon livre où je note tout pour voir ce qui a réellement été fait en cours cette année-là. Le campus était un champ de bataille. Le hall d'enceinte était plein de fumée depuis le début. Vraiment je pense que l'année suivante aurait pu être bien pire. J'ai ce vague sentiment que les gens parlent surtout des années 60 mais que tout a plutôt vraiment dégringolé dans les années 70.

Schofield : Les premières années après 1970 ont été mauvaises.

Knuth : C'est vrai, mais Lyman a été capable de sensiblement gérer cela. J'aimerais parler un peu de cela parce qu'avant que je vienne à Stanford, j'avais été recruté et l'un des trucs que Forsythe m'a envoyé était le rapport d'un comité qui avait visité le département d'informatique ; ils avaient été invités en 1966 ou quelque-chose comme ça. Ils avaient fait venir des experts chefs de file en informatique du monde entier pour 2 ou 3 jours de façon à parler de ce qui se passait exactement à Stanford. J'ai eu en main les transcriptions de ces rencontres. Il y avait une personne nommée Lyman qui posait les questions les plus intelligentes dans ces transcriptions. J'ai demandé à George Forsythe qui c'était.

Schofield : Qui était ce type ?

Knuth : Oui, et c'était notre président d'université, la personne la plus importante de la faculté. J'ai admiré la profondeur de l'intelligence derrière ses questions. Bien sûr, Lyman était un historien. Il avait à faire face à des problèmes sans précédents, la plupart de ces problèmes ayant été provoqués par d'autres groupes venant sur le campus plutôt que par les gens du campus de Standord eux-mêmes.

Schofield : Il y avait sûrement des étudiants de Stanford impliqués mais aussi beaucoup de provocations venant de l'extérieur.

Knuth : Oui. Les étudiants de Stanford étaient impliqués mais il y avait beaucoup, beaucoup d'autres personnes. Lyman devait gérer tout ça, et écouter les gens plutôt que de simplement les rejeter, et essayer de parler de manière sensée. Aussi loin que j'aie pu en juger, il a géré tous ces problèmes insolubles aussi bien que n'importe quel autre humain l'aurait fait. Bien sûr, c'est dans la nature du progrès que cela engendre quelques conflits, et vous essayez d'éviter de la violence inutile. J'essaie toujours d'éviter la controverse à chaque fois que je le peux. Je n'aime pas me disputer avec les gens.

Schofield : Avez-vous été impliqué ou bien qu'avez-vous pensé du cas Bruce Franklin [H. Bruce Franklin] ?

Knuth : J'ai juste vu que c'était un orateur charismatique et il aurait pu enflammer des étudiants ou autres. Le feu dans notre immeuble a eu lieu seulement après quelques jours de ses harangues. Je pense qu'il n'a pas dépassé la limite... La parole est libre mais il y a aussi des discours destructeurs. Mais je n'étais pas complètement impliqué là-dedans.

Schofield : Je crois que Donald Kennedy était le chef du Conseil consultatif. Le Conseil consultatif était divisé là-dessus.

Knuth : Vous voulez dire divisé sur...

Schofield : Sur le fait de le virer ou bien de le discipliner en le gardant à la faculté. Ils étaient divisés mais majoritairement en faveur de le virer. Il a continué et a eu une carrière parfaitement respectable. Je crois qu'il est à Rutgers.

Knuth : Angela Davis a été virée par UCLA, n'est-ce pas ? Oui. Je pouvais comprendre d'où il venait mais je pense qu'il...

Schofield : Il est allé un peu trop loin... ?

Knuth : Il était trop charismatique, peut-être, mais ne le savait pas.

Schofield : Peut-être ne savait-il pas le pouvoir qu'il avait ?

Knuth : Je ne me suis jamais impliqué davantage en politique. J'ai fait quelques petites choses en arrière-plan. Par exemple, j'ai écrit deux lettres à des gens en Tchécoslovaquie quand j'ai appris qu'un informaticien tchécoslovaque ne pouvait pas trouver de travail parce qu'il avait été une sorte de lanceur d'alerte. J'ai dit que ses recherches avaient inspiré certains de mes papiers. J'ai écrit que je jouais du Dvorák [Antonín Leopold Dvorák] alors et que ça me faisait penser à la Tchécoslovaquie et combien j'étais triste d'entendre qu'un des scientifiques dont je respectais le travail pouvait avoir des problèmes. J'ai dit que je ne savais pas si ces rumeurs étaient fondées ou pas, mais que si elles l'étaient, je me demandais s'il y avait quelque-chose que je pouvais faire pour l'aider.

J'ai écrit une lettre dans cette veine et deux mois après, j'ai reçu anonymement deux livres de partitions de piano de Dvorák - l'un des joyaux de ma collection - et aussi que cet homme était autorisé à sortir de Tchécoslovaquie pour venir en Amérique. Il avait perdu son travail à l'Académie des Sciences mais il avait l'autorisation de quitter le pays. En tous cas, je n'ai jamais écrit d'articles ou quoi que ce soit. Ca aurait été comme une sorte de tampon apposé "si Knuth parle d'un truc, c'est que ça doit vraiment être mal" *[rires]*...

Schofield : Vous alliez parler un peu de votre collègue, Bob Floyd.

Knuth : Exact. De tous les informaticiens avec lesquels j'ai travaillé de façon rapprochée, certainement que Bob est celui qui se démarque plus que tout autre. J'ai plutôt tendance à travailler seul la plupart du temps. Je suppose que je suis une sorte d'ermite, mais Bob et moi avons fait en sorte de venir à Stanford en même temps. J'étais à Caltech et... oh, je ferais mieux de dire d'abord comment nous nous sommes rencontrés. Bob a été une des premières personnes au monde à réaliser l'importance de prouver que les programmes informatiques étaient corrects.

99 % des gens ou presque 100 % des gens pensent que vous écrivez un programme, vous jouez avec jusqu'à ce qu'il semble être correct, et alors vous espérez qu'il va continuer à marcher. Bob a dit "Non... Les mathématiciens ont une meilleure idée. Ils ont l'idée de la démonstration, selon laquelle vous pouvez prouver en conclusion que ça va marcher.". Presque personne au monde n'avait cette attitude. Il devint célèbre pour l'idée des programmes vérifiables par ordinateur. Je l'ai rencontré lors d'une conférence en 1962. Il était encore étudiant et on a été impressionné par lui. C'était définitivement un geek-né lui-aussi. Il n'a jamais obtenu de thèse. Il était étudiant dans une université de Chicago dans un programme accéléré pour personnes douées. Les jeunes-gens pouvaient intégrer cette école diplômante tout jeunes. Mais après, ils rencontraient des filles, ou un truc du style, et laissaient tomber. Bob a obtenu un travail de programmeur tôt et il s'est avéré qu'il pouvait écrire des programmes révolutionnaires, de superbes programmes. Finalement on a

fini par se rencontrer et on a réalisé qu'on était "de drôles d'oiseaux"[3].

SCHOFIELD : Il était un petit peu plus vieux que vous, mais pas beaucoup ?

KNUTH : Oui. Il vivait dans cette maison là-bas *[la montrant du doigt]*.

SCHOFIELD : Oh, à travers la fenêtre. Nous pouvons presque voir sa maison.

KNUTH : Il pouvait s'asseoir dans sa salle à manger. Il pouvait voir si ma lumière était allumée, si j'était en train d'écrire mon bouquin ou pas.

SCHOFIELD : Comment est-il venu à Stanford ?

KNUTH : C'est exactement la question qu'il fallait poser. Tous les deux, on s'écrivait des lettres l'un à l'autre, chacun poussant l'autre à surpasser le théorème précédent et se lançant mutuellement des défis. Nous échangions une correspondance technique incroyable qui me rappelait les lettres que j'avais vues échangées par certains mathématiciens du XVIIème siècle, se faisant évoluer l'un l'autre. C'était très excitant pour tous les deux. Finalement il est venu me rencontrer à Caltech et nous avons passé une semaine ensemble ; nous devions aller faire de la randonnée dans le désert et ce genre de choses.

Quand j'ai su que j'allais vouloir bouger pour l'unique fois de ma vie, je lui ai écrit et j'ai dit "et Bob, quel que soit l'endroit où j'irai, j'aimerais bien que tu y ailles aussi". Nous avions tous les deux des idées sur différents endroits où passer le reste de notre vie. Il m'a alors écrit cette longue lettre où il résumait les choses qui étaient en train d'arriver, dans les différents principaux centres d'informatique en Amérique. Il a placé Stanford plutôt très haut. En gros, il a dit que si je choisissais Stanford, il aimerait bien aller à Stanford aussi. J'ai raconté ça à George Forsythe et je lui ai dit qu'on voulait un contrat-package commun si possible *[rires]*. Bob n'avait pas de thèse.

Mais pourtant sur les 5 papiers les plus importants sur les langages informatiques, qui était alors l'un des domaines les plus importants de l'informatique, il en avait écrit 4. Il avait une très grande valeur en terme de recherche

3. birds of a feather ?

mais, vous savez, de là à le salarier en tant que professeur, ça aurait été un peu trop.

Schofield : Un peu exagéré ?

Knuth : Exact. Ils ont décidé de lui offrir un poste de professeur associé, et nous avons tous les deux décidé de venir à Stanford.

Schofield : Professeur associé. C'était avec un mandat ou pas ?

Knuth : C'est ça. C'était avec un mandat mais pas...

Schofield : Mais pas en tant que professeur.

Knuth : Exact. Je pense que c'est en 1971 qu'il est devenu professeur. Il y avait un congrès international, qui mettait en vedette les plus grands informaticiens du monde, et l'un des plus grands honneurs était de fournir les adresses de personnes qui seraient invitées au Congrès international du traitement de l'information. Bob a été la seule personne au monde à être invité à donner deux tels noms *[rires]*. Cela a été suffisant pour me permettre de convaincre l'Université de Stanford de le promouvoir professeur malgré le fait qu'il n'ait pas de thèse.

Schofield : Je me demande s'il est le seul, ou je suppose un parmi très peu de personnes, qui ont atteint ce niveau mais n'ont pas de thèse.

Knuth : Vous auriez la compétence pour...

Schofield : Je pourrais trouver ça, oui.

Knuth : Ok, alors il est venu pour être membre de notre département au moment crucial où nous travaillions avec des architectes pour nous déplacer vers l'immeuble Margaret Jacks ; le quartier général de la tour des gars était au premier et nous étions au second. Juste au milieu du campus...

Schofield : Près de la façade de l'immeuble principal.

Knuth : Oui. Notre département avait été éparpillé un peu partout. J'ai mentionné précédemment que certains étaient au SLAC et au Laboratoire central D. C. et à plein d'autres endroits. Notre nouvel immeuble nous a fait être tous ensemble au centre du campus là sur l'avenue Memorial. Bob était directeur du département au moment où nous avons déménagé. Il a pris cette responsabilité très au sérieux et il a travaillé de très près avec les architectes et ainsi de suite.

Il n'était pas un très grand communicant. Il était très timide et pas un, comment vous appelez ça, pas un marchand de roues du tout. Il était plutôt comme le Président Pitzer. C'était... disons, un pur chercheur invétéré. C'était un bon directeur mais différentes compétences vont avec différents sièges. Les uns sont bons pour collecter les fonds et les autres sont bons comme exécutants et peu importe.

En tous cas, Bob était extrêmement important pour notre département et il travaillait très dur. A ce moment-là, il travaillait tellement dur comme directeur qu'il n'avait pas de temps pour la recherche et il est tombé à la traîne. Il a pris deux années sabbatiques après ça, pour aller au MIT et à d'autres endroits et il a réussi à rattraper son retard en recherche. Mais il n'était plus le même après ça. Nous avions travaillé très intensément ensemble pendant les années 60 et le début des années 70. Mais après, dans les années 80, je crois qu'on a écrit seulement un, peut-être 2, articles en commun. Je travaillais dans le domaine de la typographie et il travaillait sur d'autres projets, même si nous vivions près l'un de l'autre. Il a divorcé et un certain nombre de choses avaient lieu dans sa vie. Nos routes se sont séparées. La tragédie est qu'il avait... je ne suis plus sûr du nom... une maladie. C'est un peu comme la maladie d'Alzheimer...

Schofield : Une sorte de démence ?

Knuth : Oui, mais c'est un autre nom.

Schofield : Est-ce que c'était une démence de Lewy [4] ?

Knuth : Si c'était bien ce terme, je l'aurais reconnu. J'ai écrit son In me-

4. note de l'éditeur : Bob souffrait d'une maladie de Pick, une maladie neurodégénérative.

moriam et ça a probablement paru dans les résolutions du Sénat.

Schofield : Exact, il l'a été.

Knuth : A la fin, dans ses dernières années, il avait une personne soignante adorable. La dernière conversation scientifique que nous ayons eue remonte à une nuit en 1997 dans la maison d'Ed Feigenbaum où beaucoup d'entre nous avions réussi à ce que nos souvenirs des débuts du département d'informatique soient filmés. Ces films font partie des archives de Stanford. Je pense qu'ils sont peut-être quelque part sur YouTube. Ca s'appelle *Les légendes vivantes* et nous étions tous là. Bill Miller était là bien sûr et John McCarthy et Herriot, je pense peut-être qu'il y a aussi Gio Wiederhold [Giovanni Corrado Melchiore Wiederhold], et Ed et Penny Nii, l'épouse d'Ed [5]. Ils ont alors pris des archives video à ce moment-là de nos souvenirs. Bob était là mais il n'a pas vraiment participé beaucoup.

Knuth : Gene Golub était présent aussi. Nous rentrions chez nous et nous observions une comète [la comète de Hale-Bopp] qui était visible dans le ciel cette nuit-là. Comme on rentrait en marchant chez nous, on parlait un peu de ça. C'est la dernière fois que Bob et moi avons eu notre dernière conversation. Laissez-moi répéter que c'était un contrat-package, que nous étions venus à Stanford ensemble et que nous avons prospéré. Il a reçu le prix Turing, qui est comme le prix Nobel en informatique, durant les années 70, juste vers la fin de son mandat de directeur je pense.

Schofield : Puisque vous avez mentionné le prix Turing, vous avez reçu une liste de récompenses et d'honneurs longue comme mon bras et jusqu'à mon autre bras. Evidemment, elles sont recensées dans votre CV et je pense qu'elles ont toutes été importantes de plein droit. Mais y en-a-t-il quelques-unes qui sont plus mémorables et qui ont plus de sens pour vous ?

Knuth : Bob [Floyd] avait cette idée que la première récompense est toujours la plus difficile. Une fois que vous en avez obtenu une, alors tous les autres veulent mettre un ticket sur vous. Mais ils ne voulaient pas être les premiers à vous donner une récompense. J'ai eu cette chance de recevoir une récompense tôt dans ma vie et alors ça pouvait...

5. note de Don Knuth : Gene Golub était présent également.

Schofield : C'était le prix Turing ?

Knuth : Non, c'était le prix Grace Hopper. C'est une récompense pour les meilleurs informaticiens qui ont moins de 30 ans. J'ai reçu cette récompense un an ou deux avant de recevoir le prix Turing. Alors les vannes se sont ouvertes. Le prix Turing était pour *L'Art de la programmation des ordinateurs* - à ce moment-là, j'en avais publié 3 volumes. Nous parlerons davantage de cela. En tous cas, c'est en partie dû au fait que je suis arrivé à un moment où l'informatique soulevait des montagnes et ainsi je suis devenu l'homme des affiches pour l'informatique. Dès qu'une université démarrerait un département d'informatique, il faudrait qu'elle se montre sous son pire aspect en délivrant un diplôme d'honneur.

Stanford ne donne pas de diplôme d'honneur mais la plupart des autres universités le font. Pour faire ça, la remise du diplôme doit être votée à l'unanimité des membres de la faculté. L'Université Duke, par exemple, ne peut pas attribuer un doctorat d'honneur à moins que les physiciens, les chimistes, les biologistes ne soient d'accord. Je crois que j'ai plus de diplômes d'honneur que Ronald Reagan *[rires]*.

Schofield : Il y en a diablement beaucoup sur votre CV.

Knuth : Oui, il y en a plus de 3 douzaines maintenant.

Schofield : Etes-vous allé physiquement les recevoir ?

Knuth : Oui à l'exception d'un seul cas. Dans un cas, je devais aller à une séance de radiothérapie pour traitement d'un cancer et je n'ai pas pu aller recevoir mon diplôme. Je pensais qu'ils diffèreraient la remise mais ils m'ont récompensé in absentia. Je pourrais aussi écrire un livre sur la genèse...

Schofield : Tous ceux en travers desquels vous vous êtes assis [6].

Knuth : Garrison Keillor est ainsi un formidable conférencier débutant. J'ai toujours considéré l'acceptation de récompenses qui couvrent toutes les

6. ?

sciences comme une bonne utilisation de mon temps, dans le but d'améliorer la visibilité de l'informatique dans le monde, parce que nous sommes les nouveaux gamins de l'immeuble. Nous devons encore diffuser le fait que c'est un domaine de connaissance qui a sa propre importance. Il y a seulement 100 ans de cela, les gens disaient "oui, bien sûr, l'informatique est importante, la physique est importante, la chimie est importante". L'une de ces matières doit être perçue comme la première. L'une d'entre elles doit être vue comme la seconde. Et nous, nous sommes les derniers du jeu. Nous avons tous la même importance, mais nous devons encore nous mettre au diapason. J'ai vu le fait de recevoir ces récompenses et ces diplômes d'honneur non pas comme les recevant moi seul personnellement, mais comme les recevant en tant que représentant d'une communauté entière, comme montrant le fait que ce domaine est important.

Schofield : Alfred Nobel était mort alors, du coup, il n'a pas pu créer de Nobel d'informatique.

Knuth : C'était agréable que l'un de mes honneurs ait été un diplôme de Doctorat par l'*[Université d'Oslo]* au moment où ils ont commencé les prix Abel, qui sont les prix Nobel des mathématiciens. En tous les cas, je considère que la plupart de ces récompenses n'étaient pas spécifiquement pour des choses que j'avais faites mais pour des choses que des informaticiens avaient faites et que j'étais une personne reconnue à qui donner les récompenses.

Schofield : Peut-être minimisez-vous votre importance en tant qu'individu, mais j'ai saisi ce que vous dites.

Knuth : Oui, j'essaie de montrer comme je suis humble maintenant.

Schofield : Je pense que vous l'êtes *[rires]*.

Knuth : Plus sérieusement, quelqu'un doit tenir ce rôle et il était plus facile pour les gens de me choisir à cause des livres que j'avais écrits *[rires]*, parce qu'ils avaient lu mes livres. Les plus grandes récompenses étaient celles qui avaient le plus grand comité de vote pour les obtenir... comme le prix Kyoto, qui nécessite un processus de vote assez large.

Schofield : C'était en 1996, je pense ?

Knuth : Oui, c'était en 1996, exact. C'est un prix très important et...

Schofield : Je pense que j'ai lu quelque part que c'est un prix qui rapporte pas mal d'argent et que vous en avez fait don à une œuvre de charité ?

Knuth : C'est vrai. Je ne sais pas combien de millions de yens c'était, mais ça équivalait à environ 400 000 $. Jill [Nancy Jill Carter Knuth] et moi sommes très heureux et nous ne voulions pas de cet argent qui aurait ruiné nos vies. Alors on voulait avoir idée de ce qu'on peut raisonnablement faire avec 400 000 $. Il s'est avéré que ça n'était pas si facile de faire un don... je ne veux pas rentrer dans les détails... en tous cas, de façon à faire cela de manière légale, nous avons dû passer par une association spéciale de la péninsule qui effectue ce transfert (une sorte d'agence de blanchiement). Il y a une charité reconnue...

Schofield : Etes-vous en train de parler de la Fondation communauté de la péninsule ?

Knuth : C'est ça.

Schofield : Oui, ils gèrent l'argent et vous pouvez désigner les associations caritatives auxquelles vous souhaitez donner par leur biais.

Knuth : Exact. J'ai décidé que 100 000 $ irait à notre église pour remplacer l'orgue ; 100 000 $ irait à Stanford ; 100 000 $ pour que nos parents aillent au Japon [7]. En tous cas, on a partagé parce qu'on n'en avait pas besoin.

Schofield : Vous pensiez que vous aviez assez d'argent ?

Knuth : Oui, et en plus, nous ne sommes pas si bons en gestion d'investissements. Nous ne voulions pas avoir à faire ça. On a divisé l'argent en 4.

Schofield : Avez-vous fait cela anonymement, ou bien les gens savaient-ils que c'étaient vous qui donniez ces cadeaux ?

7. Note de Don Knuth : Les 100 000 $ restant sont allés à mon collège luthérien de Milwaukee, dans le Wisconsin.

Knuth : Je ne pense pas que nous l'ayions fait anonymement. J'ai alors reçu une récompense de la fondation BBVA à Madrid [8]. C'était, je ne sais pas, il y a environ 10 ans. Il y avait là aussi un vote d'attribution assez conséquent et je pouvais représenter l'informatique. A nouveau, on a fait don de l'argent. Je pense avoir donné beaucoup alors aux publications du CSLI [Centre pour l'étude du Langage et de l'information, à Stanford].

Schofield : J'ai noté que nombre de vos conférences sont enregistrées ou archivées là-bas au CSLI.

Knuth : Oui. Le CSLI a publié 8 volumes, contenant tous les papiers que j'ai écrits.

Schofield : Pourquoi le CSLI ? Etiez-vous particulièrement lié à eux ?

Knuth : J'ai rencontré Dikran [Dikran Karagueuzian] alors que je travaillais sur la typographie et il s'est rapproché de moi de nombreuses années plus tard pour publier un livre... le premier s'appelait *Programmation littéraire*. C'était une compilation de mon travail sur la typographie, une nouvelle façon de programmer qui permet de comprendre les programmes comme si on lisait de la littérature en... de la façon dont vous écrivez à des êtres humains et pas à des ordinateurs.

Schofield : Dikran... Je ne sais pas de qui il s'agit...

Knuth : Dikran Karagueuzian a été à la tête des Publications CSLI depuis les années 70. Je l'ai rencontré quand il concevait des polices de caractères pour l'arménien alors que je travaillais en typographie. Nous sommes devenus amis. Il est éditeur et il a travaillé avec Etch [John Etchemendy] pour développer des publications compliquées.

Schofield : Parlez-nous de cette merveilleuse maison dans laquelle nous sommes, que vous avez en partie dessinée, et de votre vie à votre domicile en général. Vous avez toujours été marié à Jill et vous avez élevé deux enfants.

8. Note de l'éditeur : Récompense Frontières de la connaissance, financée par la Banque de Bilbao Fondation monétaire Vizcaya attribuée à Don Knuth en 2010.

Pouvez-vous s'il-vous-plaît nous parler un peu de cela ?

KNUTH : Jill et moi nous sommes mariés juste après avoir passé nos diplômes, en 1961. Notre fils est né en 1965 et notre fille en 1966. Et nous avons dessiné cette maison. L'un des gros avantages de Stanford était de pouvoir vivre sur le campus. Si j'étais allé à Harvard, j'aurais dû attendre vingt ans avant d'avoir une maison près du campus d'Harvard, par exemple, et même chose pour Berkeley. C'était très attirant de penser que je pourrais vivre une vie sans avoir à changer. Je pouvais circuler à vélo et c'est ce que je fais encore 4 jours par semaine pour aller au cœur du campus.

SCHOFIELD : Vous étiez pionnier avant l'heure pour ça.

KNUTH : L'une des raisons pour lesquelles j'ai pu avoir ma première année comme professeur, financée par Stanford, tout en étant absent, c'était que ça me donnait le droit de participer à la conception des lots dans la colline des Français où nous sommes en ce moment. Nous avons eu à choisir nos 4 lots préférés, et celui-ci est celui qui nous a été attribué. Pendant notre année à Princeton, on a passé chaque dimanche soir à parler de la maison de nos rêves. Jill et moi avons vraiment passé notre première année de fac à parler de la maison de nos rêves, et puis quand nous sommes venus, nous allions vraiment pouvoir la faire construire *[rires]*. Nous sommes venus ici avec des tonnes et des tonnes de notes et nous avons rencontré un merveilleux architecte : Jim O'Neal. Il était dans une boîte qui s'appelait Sabin, O'Neal, Mitchell qui n'a tenu que quelques années mais ils ont travaillé sur le Collège Foothill je pense. Ils ont dessiné 3 autres maisons dans cette zone. Jim était très à l'écoute et il a pu regarder tous nos plans et voir lesquels avaient vraiment du sens.

SCHOFIELD : Etaient-ce juste des plans verbaux ?

KNUTH : Non, on avait vraiment dessiné des plans. On avait des idées de murs arrondis et d'angles étranges et des trucs comme ça. Il a pu voir ce qu'on avait vraiment en tête. Il a compris comment la lumière passait par les fenêtres et, vous savez, nous n'avions pas une bonne compréhension de ça. Il y a 3 successions de plans parce qu'une chose qui nous fascinait était l'idée d'un escalier en spirale. Nous pensions que nous voulions vraiment une maison avec un escalier en spirale au milieu. Mais ça ne marchait tout simplement pas.

Les 10 premiers plans étaient des versions différentes pour essayer d'avoir un escalier en spirale qui marche. Lors de nos voyages en Europe, nous avions apprécié l'idée qu'il y ait quelques pièces plus grandes que les normales et d'autres plus petites, bref qu'elles ne soient pas toutes de la même taille. Nous voulions une grande salle de bains et beaucoup de place pour un dressing. Nous voulions une petite chambre pour les choses intimes... pour lire ; nous voulions un petit boudoir... pour parler ; et des choses de ce style.

C'étaient des éléments de la maison de nos rêves. Jim était à l'écoute et c'était un bon entrepreneur. Nous avons passé notre première année ici à rencontrer l'architecte, à discuter avec lui, et à regarder cette maison en train d'être construite. Toutes les maisons de la rue sortaient à peu près en même temps. La nôtre a été la dernière à être achevée.

Schofield : Et ça, c'est donc en 19.. ?

Knuth : C'était en 1970 ou 1971 [9]. Au fait, la société d'histoire de Stanford devrait organiser une visite des maisons de la colline des Français un de ces jours. Ils utilisent toujours la vieille partie du campus, mais, vous savez, il y a quelques maisons surprenantes là-bas qu'il serait intéressant de visiter.

Schofield : On y vient. La société historique a pris un engagement pour rechercher toutes les maisons d'avant 1930 et ils ont presque fini. Maintenant ils recherchent celles de 1950, 1960 et 1970.

Knuth : Ok. Par exemple, Herb et Eve Clark [professeurs de psychologie et linguistique, respectivement] ont un appartement au deuxième étage. Il n'y a pas de premier étage.

Schofield : Et il est sur Vernier ?

Knuth : Non, la première rue est après l'avenue Stanford.

Schofield : Wing ?

9. Note de Don Knuth : nous avons emménagé en septembre 1970.

KNUTH : Wing, oui.

SCHOFIELD : Vous avez raison. Il y a de nouvelles maisons très intéressantes.

KNUTH : Exact. Et vers Tolman, il y a une autre maison de Sabin, O'Neal, Mitchell qui consiste en 4 parties qui se font face, à angles droits, pour avoir le soleil à différents moments, et tout ça. Il y a beaucoup à faire *[rires]*. Vous avez dit que vous admiriez les lambris de cèdre de la maison, que nous aimons beaucoup à cause de notre expérience en Scandinavie. Nous disions que nous aimerions vraiment avoir une maison qui mettrait le bois en valeur. Nous ne pouvions pas nous permettre le lambris en cèdre au début alors nous avons vécu pendant 3 ans avec du placoplâtre jusqu'à ce que de l'argent rentre de la vente de mon livre.

SCHOFIELD : Est-ce ce qu'on appelle ça du cèdre grossièrement scié ? Je crois que c'en est.

KNUTH : Oui.

SCHOFIELD : C'est beau.

KNUTH : Nous avons eu des charpentiers présents dans la maison pendant des mois pour installer les lambris.

SCHOFIELD : En face du panneau mural ?

KNUTH : Oui. Comme notre maison se montait, les gens disaient que nous devions vraiment nous préoccuper des tremblements de terre parce que nous avions tellement de poutres et de contreventements en bois là. L'architecte aurait dû faire en sorte qu'on puisse tourner ça de ce côté-là *[rires]*, je ne sais pas. En tous cas, la maison a coûté le prix incroyable de 100 000 $.

SCHOFIELD : Ce qui bien sûr était une somme énorme à l'époque.

KNUTH : Notre maison a été considérée comme vraiment chère, chère à outrance. Bon, elle a une surface habitable de 450 mètres carrés. Nous voulions avoir un atelier d'art pour Jill et une pièce pour ma musique. Du coup, nous avons mis de côté une pièce dans laquelle il y aurait l'orgue. Nous ne pouvions pas nous le permettre alors, mais l'architecte a mis des renforcements sous le sol pour que ça puisse supporter un poids de plusieurs tonnes. Nous étions vraiment contents de vivre sur le campus et de pouvoir choisir notre propre architecte. C'était un arrangement incroyable, rendu possible par la manière dont Stanford avait organisé son planning.

SCHOFIELD : Je pense que c'était particulièrement avantageux pour ceux d'entre vous dans cette zone qui avez pu obtenir les premiers lots.

KNUTH : Oui, exact. Il y avait des lots et de nombreux enfants jouant dans les rues. A Halloween, on ne pouvait pas avoir assez de bonbons dans les maisons. Il y a quelques enfants qui reviennent maintenant mais c'est très différent. Les arbres étaient petits. Comme la rue évoluait, nous grandissions avec elle... Nous avons pris l'habitude de voir la baie par la fenêtre *[rires]*.

SCHOFIELD : Vraiment ?

KNUTH : Oui, parce qu'il n'y a pas d'arbre qui cache la vue. Pas cette fenêtre-ci, mais la fenêtre du dessus...

SCHOFIELD : Je ne pensais pas qu'on était assez haut, mais je devine qu'on l'est juste assez.

KNUTH : Nous le sommes.

SCHOFIELD : Et le voisinage, cela a-t-il été important d'une quelconque manière dans votre vie à Stanford ?

KNUTH : Nous nous rencontrions souvent il y a 10 ans par rapport à cette préparation du tremblement de terre et nous avions des soirées de quartier et des trucs comme ça. Mais ça n'a pas été extrêmement important. John McCarthy vivait là-bas *[pointant du doigt la direction]* et Bob Floyd vivait là-bas *[pointant]*. Bill Dally [William James Dally] vivait de l'autre côté de notre rue. Nous avions ainsi des relations sociales variées. J'ai commencé à me faire le défi de lire les livres qu'avaient écrits tous mes voisins *[rires]*. J'ai abandonné au bout de quelques temps parce qu'il y en avait trop. Beaucoup de personnes de ce quartier ont écrit des livres très attirants.

Il y a un roman de Spyros Andreopoulos... le type qui était à la tête du Bureau de la communication de l'école de médecine... Je pense qu'il s'appelle *Battement de cœur*. Nos voisins les Cancians, ont fait des recherches merveilleuses à Mexico que nous voulions lire.

SCHOFIELD : Quel était leur nom ?

KNUTH : Cancian [Frank et Francesca Cancian]. Ils étaient tous les deux professeurs d'anthropologie. Vivre dans ce quartier m'a donné l'opportunité d'apprécier d'autres domaines de la vie que l'informatique.

SCHOFIELD : Oui, vous mentionniez qu'il y avait quelques opportunités à l'université de sortir de votre champ disciplinaire. La proximité dans le campus peut fournir de telles opportunités... Ce n'est pas une opportunité pour tout le monde je trouve... Mais ça peut l'être pour certains.

KNUTH : Exact. La SCRL [association des Locataires de la résidence du campus de Stanford] organise 3 ou 4 soirées par an. J'ai passé les soirées en question à apprendre de la biologie ou bien quelque-chose sur le domaine dans lequel travaillaient les personnes que j'y rencontrais.

SCHOFIELD : Vous en aviez la curiosité. Vous avez dit que Jill est une artiste ou qu'elle avait besoin d'une pièce pour son art. Dites-nous en un peu sur sa vie en dehors de votre vie commune.

KNUTH : Elle est artiste-designer et elle n'a jamais vraiment exercé de manière salariée, mais elle fait plein de travaux en free-lance, des travaux de charité, des travaux bénévoles. Elle a reçu une formation artistique. A Pasadena, quand nous vivions à Caltech, nous avions un grand four dans notre cour où elle faisait cuire ses poteries. L'une des professeurs de Jill était l'une des grands potières japonaise-américaine, Toshiko... euh... Takaezu, c'était son nom. Si Miss Takaezu n'aimait pas votre poterie, elle était détruite sur le champ *[rires]*. Juste brisée. Jill est particulièrement douée en design et elle a conçu de nombreux logos et marques.

Elle a un livre à propos des dessins de bannières. Il est intitulé *Bannières sans mots* et l'idée est que vous pouvez faire passer un message spirituel juste grâce aux images. Elle combine des tissus d'une façon très surprenante. Elle a écrit une colonne mensuelle dans le magazine *Liturgie moderne* pendant quelques temps et ces colonnes ont été compilées dans un livre. Nous avions habituellement une collection d'une centaine de ses bannières mais elles sont maintenant dans une église de Palo Alto qui les conserve. Elle a participé à différentes expositions de ce genre de travaux qu'elle réalise, souvent avec du tissu ou de la poterie. La grande pièce de son côté de la maison est exposée au nord, ce qui fait qu'elle peut travailler là, et elle a d'excellents projets en cours tout le temps. J'ai la pièce à musique qui contient un orgue et deux pianos, et de nombreux instruments de musique de chambre.

Schofield : Pourrions-nous parler de la musique dans votre vie ? Je pense qu'elle est très importante pour vous et que vous avez fait des choses vraiment très intéressantes avec la musique. Faisons cela et peut-être terminerons-nous cette session sur ce thème.

Knuth : Bonne idée. Mon père était organiste d'église et chef de chœur. Il m'a appris le piano quand j'était très jeune... peut-être vers 7 ans. Quand j'étais au collège, j'étais le musicien accompagnateur du chœur et je faisais partie de la chorale... ils n'avaient pas d'orchestre. Je faisais partie de la fanfare au collège et au lycée.

Schofield : Vous jouiez de quoi dans la fanfare ? Pas du piano *[rires].*

Knuth : Non, je jouais du sousaphone.

Schofield : Du sousaphone, ah.

Knuth : Je prenais toujours des instruments que l'école devrait payer. Nous n'avions pas assez d'argent pour que j'achète des instruments moi-même mais les sousaphones appartenaient à la fanfare. J'aimais beaucoup jouer du piano à des soirées de fraternité et ce genre de choses. J'aurais vraiment pu choisir une université en prenant une majeure en musique, ou bien j'aurais pu aller à Case et choisir une majeure en physique. J'ai choisi la branche physique mais c'était...

Schofield : Vous auriez pu facilement prendre une autre voie ? Bon, jusqu'à ce que vous découvriez que vous étiez un geek, alors vous avez abandonné la musique ?

Knuth : Les musiciens peuvent être des geeks, vous savez. Nous avons à Stanford un professeur nommé Ge [Ge Wang] dont les deux premières lettres sont celles du mot geek *[rires]*.

Schofield : C'est vrai ?

Knuth : Oui, oui. C'est un homme qui est une merveilleuse ressource. Il a démarré SLOrk, l'Orchestre portable de Stanford. Avez-vous entendu parler de ça ?

Schofield : Non.

Knuth : Ge Wang est une des personnes importantes de Stanford. Il faut que vous fassiez en sorte de le connaître. Il est encore très jeune. Son premier livre sortira plus tard dans l'année. La musique a été un hobby important pour moi tout le temps. A Stanford, il y a cette jolie habitude que le comité d'évaluation d'une thèse [pour la partie orale de l'examen] vienne d'un autre département. Pendant quelques années, je ne sais pas, peut-être une demi-douzaine de fois, j'ai été directeur de comité d'examen oral d'une thèse dans le département de Musique ; d'autres départements aussi. La musique a toujours été pour moi le plus grand des plaisirs. Je n'ai plus participé à ce genre de comités d'examens pendant quelques temps mais ça continuait d'être la règle... quelqu'un d'un autre département est le directeur de l'examen oral. C'est une obligation de trois heures. Vous y allez et ensuite, vous mangez quelques cookies. L'étudiant fait une présentation et alors il y a consultation entre les membres de la faculté, où chacun essaye de montrer aux autres comme il est sympa et comment il a compris ce que l'étudiant a fait *[rires]*. C'est une partie très sympathique du travail à l'université parce que cela me permettait aussi de connaître mes collègues de la faculté de cette manière...Al Cohen [Albert Cohen] et John Chowning et Leland Smith. Chowning et Smith travaillaient avec des ordinateurs...

Schofield : ...au CCRMA [Centre de recherche informatique en musique et acoustique], et ils l'avaient fondé je pense.

Knuth : Oui, exact. En fait, le CCRMA allait déménager [pour aller dans le bâtiment Margaret Jacks avec nous] et un lieu a été spécialement insonorisé pour la musique, mais il s'est avéré que la partie informatique avait tellement augmenté qu'ils ont mis les ordinateurs dans cette pièce à la place. Nous souhaitions nous rapprocher des musiciens, dans les années 70, quand le bâtiment avait été dessiné. Dans le fond de mon esprit, je pensais "un jour j'aimerais en apprendre suffisamment en musique de façon à pouvoir composer une pièce significative qui rendrait un certain nombre de personnes contentes de l'écouter". Au départ, je pensais "bon, je le ferai avec des ordinateurs. J'en apprendrai suffisamment en musique de manière à apprendre à un ordinateur à écrire de la musique.".

Un tas de personnes ont vraiment eu ce même objectif. J'ai toujours pensé que la meilleure manière de comprendre quelque-chose était d'essayer de l'expliquer à un ordinateur. Vous ne réalisez à quel point vous en connaissez très peu sur un sujet que lorsque vous essayez de l'expliquer à quelqu'un qui ne connaît pas ce sujet et spécialement, lorsque vous essayez de l'expliquer à un ordinateur. Les ordinateurs ne font pas qu'hocher la tête et dire qu'ils ont compris. Les ordinateurs doivent comprendre...

Schofield : Tous les blocs de construction doivent leur être fournis.

Knuth : Oui, l'ordinateur est le test ultime pour savoir si oui ou non vous comprenez quelque-chose... si vous pouvez l'expliquer à un ordinateur. J'avais ça à l'esprit. Aussi j'ai appris quelques trucs... comme dans ce livre *[pointant un livre sur son étagère, "Papiers choisis sur le plaisir et les jeux"]*, j'ai un petit essai sur quelques trucs que j'ai appris pendant mon année à Princeton sur les algorithmes qui harmonisent la musique, trouvent un bon motif d'accords. Je connaissais quelques petites choses sur ça. Au fur et à mesure des années, j'ai lu de nombreux livres sur la théorie musicale etc. J'avais la connaissance théorique mais je ne l'ai jamais mise dans une machine moi-même. J'ai finalement décidé d'écrire de la musique, j'aurais dû me limiter à un seul morceau, parce que ce que je fais vraiment le mieux, c'est d'écrire des livres de programmation et je n'aurais pas dû prendre du temps sur cette activité. Si j'avais une quelconque bonne musique en moi, j'aurais aimé être capable d'écrire ce morceau, mais il n'y en aurait qu'un. Et quand finalement, j'ai réussi à l'écrire, j'ai tout mis dedans y compris l'évier de la cuisine *[rires]*.

J'avais dans l'arrière de ma tête depuis les années 60 qu'on devrait prendre le texte biblique *Le livre de la Révélation* et tous les motifs symboliques qui y apparaissent... Je dois un peu revenir en arrière [10]. Les gens depuis le quatrième siècle ont noté que *Le livre de la Révélation* est écrit un peu comme un morceau de musique, qu'il ne se lit pas linéairement mais qu'il contient différents symbolismes qui sont tissés ensemble.

SCHOFIELD : Et ces motifs reviennent ?

KNUTH : Oui, exact. Au début, je notais les nombres, parce qu'il y a beaucoup de symboles numériques qui apparaissent... les nombres 3 et 4 et 7 et 12. Alors, j'ai aussi remarqué qu'il y avait beaucoup d'autres symboles là-dedans. Il y a des anges et du sang et de l'or et des bougies et des démons et des trompettes. Beaucoup d'éléments me rappelaient la musique et il y a cette nature musicale. Je me disais que quelqu'un devrait écrire un morceau de musique qui contiendrait ces motifs tissés ensemble de la même façon que l'auteur du *Livre de la Révélation* avait tissé ses motifs. Voici quelque-chose qui a inspiré des gens, pendant deux milliers d'années, pour produire les plus grandes œuvres de musique et les plus grandes œuvres d'art. Ne serait-ce pas beau d'avoir une sorte de traduction littérale, dans laquelle je ne ferais pas qu'adapter mais ou plutôt je suivrais au plus près possible le texte original du *Livre de la Révélation* en recopiant quels motifs musicaux sont présents ?

C'était la question : est-ce que ça marcherait ou bien était-ce une idée folle ? Quand tu as une idée qui n'a jamais été utilisée auparavant, il y a deux hypothèses. L'une est qu'il faut vraiment la mettre en œuvre et l'autre est que c'est une idée stupide *[rires]*. Tu ne sais jamais dans laquelle de ces deux options tu es. Quelque-chose me dérangeait pour mettre mon idée en œuvre depuis les années 1960.

SCHOFIELD : Que pensait Jill ? Pensait-elle que vous deviez le faire ?

KNUTH : Je ne crois même pas le lui avoir demandé. C'est un bon point cependant *[rires]*. Mais il faut que je vous dise que quand je composais effectivement, j'était très dur avec Jill. Parce que ce que je fais, c'est que je m'assois là à l'orgue, ou au piano, et je joue, essayant de trouver des trucs.

10. Note de la traductrice : jeu de mot sur backtrack qui a aussi un sens informatique précis.

Si ça ne convient pas, alors je les joue un peu différemment, vous savez. Je les rejoue jusqu'à ce que ça sonne bien. Alors je passe à l'étape suivante et à nouveau, ça sonne mal. Elle est dans la pièce à côté, en train d'essayer de créer ses œuvres d'art, et elle entend ce crissement et toutes mes erreurs ici à côté. Je ne sais pas comment les femmes de compositeurs ont géré ça dans le passé. J'essayais d'avancer au maximum quand elle était sortie pour faire les magasins ou en visite chez sa sœur ou autre chose.

Schofield : Pour la protéger un peu de cette cacophonie ?

Knuth : Exactement. En tous cas, elle savait que je devais conduire ce projet. C'était un objectif si important pour moi... Si par exemple, disons il y a 3 ans, quelqu'un m'avait dit que je n'avais plus que 6 mois à vivre, et m'avait demandé comment j'allais occuper les 6 mois en question, la réponse aurait été que j'allais mettre toute mon énergie pour finir cette œuvre parce que je ressentais vraiment que ma vie serait incomplète si je ne le faisais pas.

Schofield : Vous étiez fait pour la composer en quelque sorte.

Knuth : Oui, c'était comme si j'étais dirigé par une muse sur mon épaule, comme si j'écrivais sous la dictée... la musique était là et j'avais juste à l'écouter jusqu'à l'entendre correctement, précisément, et enfin, à l'écrire.

Schofield : Est-ce qu'elle ressemblait à une muse religieuse, une inspiration religieuse ?

Knuth : C'est difficile de décrire un sentiment spirituel mais c'en est un absolument... C'était une combinaison d'éléments inconscients et conscients, en quelque sorte. Je n'ai pas la possibilité de l'expliquer rationnellement mais je sais que c'est une expérience d'une certaine nature et très émotionnelle. Est-ce que de la Benzedrine ou un produit similaire aurait produit une meilleure musique *[rires]*, je n'en ai aucune idée. Mais j'ai ce sentiment qu'une sorte de force voulait...

Schofield : ...voulait que vous le fassiez.

Knuth : ...me dirigeait pour que je l'écrive.

Schofield : C'est pendant quelles années que vous avez effectué ce travail ?

Knuth : J'ai commencé à conserver des notes à Noël 2012, je pense. J'avais sorti ce livre *[le montrant]*. Mon petit-fils avait fait quelques dessins et ma fille l'a édité sous la forme d'un livre blanc. Le voici. 23 novembre 2011. Dans ce livre, je projetais de noter les pensées pour un projet qui pouvait être fou mais une muse m'avait encouragé à m'embarquer sur ce projet il y avait plus de 40 ans. J'espérais être capable d'écrire une pièce pour orgue basée sur le texte de l'Apocalypse, le livre mystique de la *Révélation*, en utilisant la philosophie de base de l'Oulipo, notamment des contraintes qui aident à créer du grand art. Les contraintes suivent les motifs du livre. J'ai continué à travailler là-dessus pendant 5 ans et...

Schofield : Et ?

Knuth : Je suis parvenu au bout et je l'ai montré à un organiste... un organiste canadien renommé que j'avais rencontré quand je faisais mon année de médecine à Waterloo. Nous avions donné un concert commun à l'orgue quand j'étais au Canada. Je lui ai raconté que j'essayais de faire une traduction la plus littérale possible du *Livre de la Révélation*. Il a tout de suite compris ce que je voulais dire et il a commencé à m'envoyer chaque jour un enregistrement des parties de...

Schofield : ...des choses dont il imaginait qu'elles iraient bien avec ça ?

Knuth : Non, non. Je veux dire que j'avais mis toutes les partitions sur la toile et il les a téléchargées et il les a jouées sur différents orgues. Il a pris son Blackberry et il s'est enregistré et il a immédiatement apprécié les morceaux, ce qui, bien sûr, était très encourageant pour moi puisque c'étaient des sons différents.

Schofield : La pièce est entièrement pour orgue ?

Knuth : Elle est pour orgue à tuyaux... vous voyez, *Le livre de la Révélation* couvre tant d'émotions différentes et de thèmes qu'il était naturel pour moi d' jeter aussi les sons de l'évier parce qu'il y a tant d'ambiances différentes que vous voulez transmettre par cet unique morceau. Du coup, j'avais besoin de l'orgue à cause de sa grande variété de tonalités et aussi, j'avais besoin de combiner une grande variété de styles. Mon œuvre contient une partie rappée, par exemple...

SCHOFIELD : Du rap joué à l'orgue ?

KNUTH : Oui, du rap. Et elle contient aussi du calypso, et elle contient de nombreux thèmes classiques, des références à des shows de Broadway, et de la grande musique chantée lyrique.

SCHOFIELD : Etait-ce toute la musique que vous connaissiez et appréciez, ou bien la recherchiez-vous spécifiquement pour représenter un motif particulier ?

KNUTH : Je peux vous montrer des centaines de morceaux que j'ai collectionnés. J'ai essayé de trouver toute partie musicale qui avait été écrite et qui était basée sur *Le livre de la Révélation*. Je les ai dans la pièce à côté. J'ai joué chacun de ces morceaux pour voir s'il fallait rendre hommage à certains de leurs éléments. J'ai trouvé qu'il y avait une partie du *Livre de la Révélation* qui avait été mise en musique par 4 compositeurs différents à 4 siècles différents et qu'ils sonnaient bien ensemble. J'ai écouté le *Requiem* et j'ai réalisé qu'il avait utilisé le même texte, du coup, j'ai ajouté un autre thème pour ajouter Brahms aux 4 autres compositeurs. Je fais référence à d'autres morceaux de musique aussi bien que j'utilise différents styles pour transmettre différentes ambiances.

Il y a cette bête menaçante. Pour la bête, j'ai utilisé une musique qui était inspirée de la musique pour *Double Indemnité*, le film. Miklós Rózsa avait écrit une musique captivante pour ça. J'ai écrit la plus grosse partie de *L'Art de la programmation des ordinateurs, Volume 1* en étant accompagné par le film *Double Indemnité* qui passait à la télé tard dans la nuit. Il passait deux fois chaque nuit et il y avait des pubs pour des voitures et tout ça. Quand les enfants étaient endormis, je pouvais travailler à mon livre ou le taper en regardant *Double Indemnité* à la télé, et j'avais cette musique dans le fond de mes pensées.

En tous cas, on trouve de nombreuses choses de ma vie dans cette pièce. Comme quand je lance une machine à laver, ça joue un petit jingle quand on l'allume. Il y a une partie du *Livre de la Révélation* qui utilise ce petit jingle

Marche-arrêt *[rires]*. L'entrée au paradis est le thème de mon épouse. Je suis en train d'en avoir une vue du XXIème siècle... mais je fais ça sérieusement. Je ne crois pas que l'on doive faire la distinction entre prendre du plaisir et être sérieux.

SCHOFIELD : Donc vous avez écrit cette œuvre. Elle est terminée et elle a été jouée une première fois pour la célébration spéciale de votre 80ème anniversaire ?

KNUTH : C'est exact. C'était incroyable, la manière dont cette chose extérieure à moi semblait me rendre sûr que je l'avais terminée...

SCHOFIELD : Ca a pu être fait à temps.

KNUTH : Ca a été fait à temps et les choses se sont mises en place de telle façon que nous puissions avoir 150 personnes en Suède du nord début janvier [2018] de telle façon que la représentation a eu lieu le 10 janvier de cette année-là. Tout le monde a pu être là sans aucune mésaventure et tous les bus marchaient et tous les hôtels... et toutes les autres choses qui auraient pu dysfonctionner ont bien fonctionné.

SCHOFIELD : Pourquoi le choix de cet endroit ?

KNUTH : Il s'est trouvé que c'était le lieu qui permettait d'avoir l'orgue à tuyaux le meilleur et le plus adapté à ma pièce. La Suède du nord a une grande tradition de musique pour orgue à tuyaux qui remonte à des centaines d'années en arrière. L'école de musique dans cette petite ville a eu la prévoyance de commander l'un des meilleurs orgues d'Europe, destiné à devenir l'orgue du futur. Il a été conçu pour être une combinaison du meilleur orgue allemand plus le meilleur orgue français, plus des choses d'avant-garde, tout ça dans un seul instrument. Il n'y a aucun autre orgue que je connaisse qui soit capable de gérer toutes ces expériences tonales différentes qui sont dans mon œuvre.

SCHOFIELD : Même si vous l'avez composée et entendue sur votre propre orgue, qui présentait quelques variantes, mais il ne permettait pas ces possibilités que permettait l'orgue suédois ?

Knuth : Oui, c'est cela. Ca sonnait bien sur le petit orgue de notre église à Palo Alto ; mais pour la première, j'ai entendu parler de cet orgue en Suède, qui avait été dédicacé en 2012. Une mois après la dédicace, j'ai lu un rapport à son sujet. L'une des principales personnes impliquées dans cette dédicace, au fait, était la première organiste de Stanford... Elle est en Arizona maintenant, quel est son nom ?

Schofield : Je pense à Morgan [Robert Huw Morgan], mais c'est une autre organiste.

Knuth : Exact. Non, c'était avant elle. Elle avait fait démarrer ORCAS, le centre de recherche de l'orgue à Stanford... Kimberly [Docteur Kimberly Marshall]... Oui, elle était organiste à l'église [Memorial Church] pendant quelques années. C'était l'une des personnes principales à la dédicace de cet orgue en Suède en 2012.

Immédiatement, j'ai dit "wow, ça sonne vraiment bien pour la pièce que j'ai écrite" parce qu'une des autres choses qu'ils avaient dans l'orgue était la possibilité de montrer des videos en même temps. Il y a des écrans des deux côtés de l'orgue de telle façon que pour les spectateurs, il ne s'agit pas seulement d'écouter un morceau interprété à l'orgue mais également de regarder une video en même temps. C'est une partie de ma pièce également. J'ai 3 videos qui doivent être visionnées et vont avec.

Schofield : Et elle s'appelle *Fantasia Apocalyptica* ?

Knuth : Oui, *Fantasia Apocalyptica*. Musicalement, c'est un fantasme.

Schofield : Qu'avez-vous ressenti quand vous l'avez entendue pour la première fois puis quand vous l'avez entendue là-bas ?

Knuth : C'était juste incroyablement grand. Ca marchait. Je suis parvenu au point où cela ne devrait pas m'affecter, et maintenant j'ai le sentiment qu'elle fait partie de la culture musicale mondiale. Et j'ai simplement cette chance d'avoir été capable de l'écrire.

Schofield : Vous l'avez enregistrée ?

KNUTH : Oui, mais ce n'est plus une question que je me pose, devrais-je changer quelque-chose. Je suis très heureux que ça soit sorti de la manière dont ça s'est fait. Je suis sûr qu'un grand musicien aurait fait bien mieux avec le même projet à l'esprit en transcrivant *Le livre de la Révélation*, mais je pense l'avoir fait correctement. Il y a des parties dont je suis fier qu'elles me soient venues à l'esprit ces jours-là.

SCHOFIELD : C'est vraiment bien. Est-ce qu'il y a eu des réactions que vous craigniez ?

KNUTH : Oui, mais comment puis-je savoir ce que les gens disent dans mon dos ? Mais définitivement, ça a obtenu beaucoup de... certainement tous à ce concert étaient très contents de ce qu'ils ont entendu. Je sais cela également par les commentaires qui ont été postés sur les videos et sur les choses que j'essayais de transmettre.

SCHOFIELD : Combien de temps dure-t-elle ?

KNUTH : Elle dure une heure et demie *[rires]*. C'est une torture si tu ne l'apprécies pas, mais le public a aimé. Ce qui est triste, c'est que l'organiste qui l'a interprétée a eu une attaque cardiaque deux mois après. Il est en convalescence. Je suis en contact avec lui et il espère toujours qu'il sera capable de jouer à la première canadienne parce qu'il est en train progressivement de retrouver...

SCHOFIELD : Ses compétences motrices ?

KNUTH : Sa main gauche et son pied gauche. Nous espérions qu'il pourrait jouer.

SCHOFIELD : Son nom est Jan Overduin ?

KNUTH : Overduin, oui.

SCHOFIELD : Comment l'avez-vous contacté ?

KNUTH : Comme je l'ai dit, nous nous sommes rencontrés à Waterloo. Nous avions été en correspondance avant cela à propos de musique à l'orgue puisque j'avais un orgue chez moi. Je voulais avoir autant de musique que possible d'écrite pour 2 personnes qui auraient joué ensemble. Il avait écrit quelques articles à ce propos et nous avons correspondu.

SCHOFIELD : Deux personnes à la fois peuvent jouer sur cet orgue en même temps ?

KNUTH : Exact. Le concert que vous avons donné au Canada comprenait une douzaine de pièces pour 8 mains et 8 pieds, non. 4 mains et 4 pieds, je suis désolé.

SCHOFIELD : 8, ce serait trop.

KNUTH : Oui *[rires]*. J'ai ajouté les pieds et les mains, et ainsi trouvé 8.

SCHOFIELD : Pourquoi ne choisissons-nous pas cela comme une très bonne fin pour cette première session de l'interview ?

[Fin de la première partie de l'interview]

Traduction d'une interview de

DONALD E. KNUTH

Histoire orale, Université de Stanford

menée par Susan W. Schofield
le 11 mai 2018

https://purl.stanford.edu/jq248bz8097

Schofield : Aujourd'hui, nous sommes le 11 mai 2018. Ceci est la seconde partie d'une interview de Donald Knuth, Professeur d'Informatique par Susan Schofield de la Société historique de Stanford. Lorsque nous avons arrêté l'interview, la dernière fois, nous étions en train de parler musique, et je pensais que nous pourrions continuer, si vous en êtes d'accord, en parlant de vos écrits. Vous êtes un écrivain prolifique. Sur votre CV, je pense qu'il y a plus de trente pages de publications.

Knuth : Cela inclut les traductions.

Schofield : Oh, elles incluent les traductions, vous avez raison.

Knuth : En tous cas, il y a environ 33 livres en impression en ce moment.

Schofield : Je vois. C'est ce que j'appelle prolifique *[rires]*. Je suis intéressée par votre processus d'écriture... à moins que vous ne souhaitiez éviter ce sujet.

Knuth : En insistant sur Stanford, je suppose. Sur ma déclaration d'impôt, je me décris comme écrivain. Ils demandent quel est votre travail. C'est ce que mes entrées représentent, principalement, puisque j'ai pris ma retraite il y a 25 ans.

Schofield : Aviez-vous l'habitude de dire informaticien ?

Knuth : Professeur. J'ai aimé écrire cela depuis ma jeunesse. Mes professeurs n'étaient pas bons en science, mais ils étaient bons en anglais. J'ai appris les détails de la grammaire anglaise en classe de $7^{\text{ème}}$ (CM2). Quand je suis allé au collège, le niveau des cours était médiocre en comparaison de celui que j'avais eu en école élémentaire. De plus, les enseignants étaient forts et nous donnaient des opportunités, ce qui fait que j'ai eu la chance de travailler sur le journal de l'école et sur le livre annuel de l'école. Mes amis et moi avions écrit des pièces de théâtre. J'apprécie l'idée de communication. Ca a toujours fait partie de ma vie.

Je voulais que mes étudiants à Stanford aient aussi cette expérience. A un certain moment, j'éditais une douzaine de journaux d'informatique et j'avais des articles qui m'étaient soumis du monde entier. Si j'avais un papier venant d'Angleterre, il était presque toujours bien écrit. Mais j'ai eu un papier des [Etats-Unis], et il était plutôt globalement mal écrit et il aurait eu besoin d'être édité. Je suppose que cela provient de la nourriture, plutôt que de la nature. Les américains n'ont pas des gènes différents de ceux des anglais. Ils ont un système d'éducation différent. En Angleterre, ils ont ce système d'apprentissage dans lequel les étudiants écrivent beaucoup pour leurs enseignants. Donc, dans certains de mes cours à Stanford, j'ai décidé de baliser une semaine pendant laquelle j'apprendrais à mes étudiants à écrire plutôt que de leur apprendre l'informatique. Dans la plupart de mes cours, il y avait obligation de fournir un rapport de fin de cours, en particulier dans les séquences en 2 parties, et dans le dernier quart, chaque étudiant était censé écrire un papier original.

De ce fait, j'avais l'habitude d'afficher ça sur le campus. J'ai collé une affiche dans tous les départements du campus qui disait “expertise en informatique gratuite”. Si vous avez besoin qu'un étudiant vous aide dans vos recherches en écrivant un petit programme, faites-le moi savoir et affichez-le pour mes classes et l'un de mes étudiants pourrait utiliser cette activité comme sujet de son rapport de fin d'année. Je faisais ça dans les années 70 et j'ai eu à rencontrer de nombreux autres professeurs de cette façon. Je me rappelle particulièrement d'Amos Tversky [Amos Nathan Tversky]. Par deux reprises, les étudiants de mon cours ont écrit des rapports finaux pour moi sur ses projets à lui. Et également dans le département d'allemand, celui de musique, etc.

Schofield : Mais ces papiers n'avaient rien à voir avec l'informatique ? Ou bien ça aidait dans l'autre discipline ?

Knuth : Ils aidaient les universitaires dans leur propre recherche. Tversky, par exemple, devait analyser des questionnaires qu'ils avaient [administrés], et les étudiants pouvaient le faire. Et c'était des problèmes intéressants. Presque personne n'avait de compétences en informatique dans les années 70, du coup les professeurs avaient une appétence pour ça... ceux qui en avaient entendu parler... Les ordinateurs étaient relativement nouveaux.

Schofield : Clarifiez cela pour moi. Alors les étudiants devaient écrire des programmes qui aideraient, disons, Amos Tversky, mais après pour vous, ils devaient écrire un papier en anglais sur ce qu'ils avaient fait.

KNUTH : Oui, 30 pages ou à peu près. Je notais leur rapport final comme un professeur d'anglais. Je notais les virgules, les points-virgules, et les i-t-'-s plutôt que i-t-s. Je prenais vraiment ce temps sur du temps d'enseignement de la science. Je pensais que c'était important pour leur éducation. Plus tard, j'ai enseigné tout un trimestre un cours appelé *Ecriture mathématique*. Ca expliquait comment écrire un papier ayant un contenu technique, spécialement un contenu mathématique. J'ai eu des bons élèves pour ce cours. Il était enregistré en video, ce qui fait que les personnes utilisent encore les cassettes. Stanford a des conseillers en écriture, dans l'école d'ingénieurs et dans le département Sciences et Humanités... Les personnes qui travaillent avec des étudiants sur l'écriture recommandent ces videos du cours que j'avais donné. Mes deux assistants ont transcrit chaque session et cela est devenu mon 33$^{\text{ème}}$ livre imprimé. Il s'appelle *Ecriture mathématique* et il contient les transcriptions littérales de ce qui s'est passé pendant ce cours. Ce texte a été utilisé par de nombreuses universités. De nombreuses personnes m'ont dit qu'elles avaient appris à écrire avec. C'est non seulement quelque-chose que j'ai eu plaisir à faire moi-même, mais j'ai aussi passé beaucoup de temps en tant qu'éditeur à aider d'autres personnes à enrichir leur propre écriture. Il y a eu des cas, par exemple un cas où j'ai écrit à quelqu'un... par exemple un professeur important à Cornell... et où je dis “la recherche dans ce papier est vraiment bonne, mais je pense que tu devrais sérieusement prendre en compte le fait que tu n'as pas assez d'expérience en écriture.”. Je lui fournis son papier réécrit en 12 pages. Il m'a vraiment remercié. Il a dit que j'avais amélioré sa carrière. C'est une histoire que, bien sûr, personne ne connaît à part lui et moi, à moins que quelqu'un lise ma correspondance et trouve sa lettre.

SCHOFIELD : Et sache qui c'est.

KNUTH : J'ai trouvé que la moitié de ma... disons que ma vie... a été composé d'écriture et de X, où X était soit de l'informatique soit des maths. Bon, j'ai aussi écrit des essais sur des choses non techniques une ou deux fois.

En tout cas, l'écriture a toujours été vraiment importante dans ma vie, et j'attribue cela principalement à l'expérience que j'ai eue quand j'étais jeune, en démarrant et en pratiquant.

SCHOFIELD : Qu'est-ce qui était le plus satisfaisant pour vous, était-ce d'enseigner l'écriture ou bien d'enseigner la programmation informatique ?

KNUTH : Je vois la programmation comme quelque-chose dont je sais que je suis le seul à pouvoir le faire. D'autres personnes pourraient enseigner l'écriture mais elles n'ont pas pris le temps de le faire. Ca a eu comme résultat que les étudiants n'étaient pas mis au défi et du coup ne pratiquaient pas. En pratiquant, ils ont appris.

SCHOFIELD : Ils auraient pu résister un peu "attendez une minute ; je pensais que je m'étais inscrit à un cours de programmation. Qu'est-ce qu'il me fait, là" ?

KNUTH : Oui, je sais. Mon fils et ma fille, je voulais qu'ils pratiquent l'écriture... j'ai toujours leurs rédactions dans mon cabinet de curiosités, quel âge avaient-ils ? Je ne sais pas, ils étaient en CE1, CE2. Pendant plusieurs années, s'ils n'avaient pas écrit leur rédaction [hebdomadaire], ils ne pouvaient pas regarder la télé cette semaine-là.

Mon fils a développé une méthode pour écrire une rédaction d'une page. Il disait : au premier tour de batte, les Géants ont marqué un but ; dans le second tour... vous savez, et il continuait jusqu'à avoir rempli la page. Aussi j'ai dû changer les règles, aucune rédaction qui raconterait un match *[rires]*. Cette expérience a aidé mes enfants aussi, bien sûr. Le système d'éducation britannique, dans lequel chaque semaine les étudiants doivent rendre une page à leurs tuteurs était vraiment comme un changement des règles pour eux. Stanford en Angleterre adoptait le système éducatif local et c'était bien.

Maintenant à propos de mes propres livres. J'ai été approché quand j'étais en deuxième année d'étude... c'était en janvier 1962... j'avais alors 24 ans. Un éditeur m'invita à déjeuner et me dit "Don, aimerais-tu écrire un livre sur la manière dont on écrit les compilateurs ?"

Un compilateur est un type de logiciel très important. J'avais acquis un peu de notoriété parce que j'étais une des quelques personnes du pays qui avaient écrit de bons compilateurs à ce moment-là. Par exemple, cette même année, une compagnie m'avait dit "pourquoi ne laissez-vous pas tomber l'éducation et n'écrivez-vous pas des compilateurs ?" *[rires]*. J'ai répondu, en plaisantant “Ok, donnez-moi 100 000 $ et un assistant à temps complet”. Sans même cligner des yeux, ils ont dit OK. Mais je ne faisais que plaisanter.

SCHOFIELD : Il y avait beaucoup d'argent à gagner alors.

KNUTH : Oui, c'était en 1962 [1].

SCHOFIELD : Au-delà des graphiques. Ils n'auraient pas dû dire oui.

KNUTH : Ma blague en ce moment, c'est que si Bill Gates veut que je travaille pour eux comme consultant, mon tarif est de 10 millions de dollars par jour, payables à Stanford. Si c'est un avocat qui me veut, c'est 20 millions *[rires]*. Il était clair que je ne voulais pas baser ma carrière sur le fait de maximiser le montant d'argent que je pourrais gagner. Mais j'avais écrit des compilateurs, et c'était considéré comme un peu inhabituel mais toujours potentiellement important. L'éditeur était Addison-Wesley, qui avait publié mes livres favoris... mon livre de calcul, mon livre de physique, et quelques autres.

Mes livres de lycée étaient publiés par Addison-Wesley... J'aimais lire ces livres et ils étaient bien imprimés en plus. Ils avaient l'air bien. En quelque sorte, je bavais en me disant “wow, j'aimerais vraiment écrire un livre qui ressemblerait à ces livres qui étaient mes bouquins de fac.”.

Cet après-midi-là, je suis rentré à la maison et j'ai encore quelque part le papier jaune sur lequel je jetai mes idées pour les 12 chapitres que je pensais devoir constituer le livre. Le chapitre 12 concernait vraiment les compilateurs. Les chapitres 1 à 11 étaient en préparation au sujet de l'écriture des compilateurs. J'ai envoyé un brouillon préliminaire, disant à l'éditeur qu'il nous faudrait aussi couvrir d'autres techniques de base, de telle façon que les personnes qui liraient le livre pourraient faire plus que juste écrire des compilateurs. J'avais trouvé qu'alors, la littérature était très pauvre sur le sujet et la plupart des techniques n'avaient alors encore été décrites nulle part. L'éditeur a adoré cette idée et a dit “Ok, appelons-le *L'Art de la programmation des ordinateurs*.”. Ces 12 chapitres étaient ceux dont je vous ai parlé l'autre jour quand je vous avais dit que lorsque George Forsythe m'avait demandé de venir à Stanford, je lui avais dit que j'avais un livre à finir. C'est de ce

1. Note de l'éditeur : plus de 800 000 $ en dollars de l'époque.

livre dont nous parlons.

Schofield : C'est ce livre, oui. Celui dont vous pensiez que vous pourriez le terminer en un an.

Knuth : Exact, avant que mon fils ne naisse. C'est le livre que je suis encore en train d'écrire... J'en suis au milieu du chapitre 7 maintenant.

Schofield : Gardez-vous toujours cette même structure, votre idée de ce que ces 12 chapitres devaient être ?

Knuth : Presque exactement. Certains des chapitres... L'ordre a changé.

Schofield : Mais vous n'êtes pas encore arrivé aux compilateurs ?

Knuth : Les compilateurs c'est le chapitre 12 et le volume 7. D'autres personnes ont écrit de très bons livres à propos des compilateurs maintenant aussi ce n'est pas...

Schofield : Ce ne sera pas aussi important ?

Knuth : Oui. Il y a de nombreux domaines dans lesquels je pense que mon avis personnel est meilleur que celui de n'importe qui que je connaisse. Je suis particulièrement intéressé par le fait de développer ces choses-là. Bien sûr, beaucoup plus de choses sont connues maintenant que celles qu'on connaissait en 1962. L'informatique continue de se développer, chaque jour, et elle a explosé dans les années 70. Par exemple, considérez le chapitre 7, la partie de mon projet sur laquelle je suis en ce moment. J'ai en quelque sorte jeté ce chapitre là-dedans comme par caprice en 1962, parce que c'était quelque-chose qui n'était pas trop développé mais c'était le genre de choses que j'appréciais le plus. Je l'ai jeté là-dedans parce que j'aimais ce sujet, pas parce qu'il y avait beaucoup d'éléments connus à son propos. Pendant les années 1970, ce sujet a explosé et presque la moitié des articles qui ont été écrits dans tous les journaux d'informatique traitaient de sujets qui appartiennent au chapitre 7.

Schofield : Quel est le sujet du chapitre 7 ?

Knuth : Il traite d'algorithmes combinatoires. C'est lorsque vous avez des méthodes qui gèrent des zillions de possibilités. Comme les ordinateurs deviennent plus rapides et plus gros, les gens devraient davantage penser à ça et trouver de meilleures idées. C'était un domaine où une bonne idée pouvait rendre quelque chose un million de fois plus rapide.

Schofield : Vous n'êtes pas en train d'exagérer ? Vraiment un million ?

Knuth : Je n'exagère pas... En fait, il y a des cas où c'est un billion de fois plus rapide, juste parce que vous faites quelque-chose d'une manière différente. J'ai toujours su, même dans les années 60, qu'il y avait des choses que vous pouviez faire 10 fois plus vite qu'avec la méthode triviale, une fois que vous aviez trouvé la bonne idée. Avec les algorithmes combinatoires, vous pouvez aller beaucoup, beaucoup plus vite. Même si vous ne rendez pas l'ordinateur plus performant, votre programme va beaucoup plus vite sur le même ordinateur. De plus en plus de gens avaient ce genre d'idées, spécialement dans les années 70, qui étaient les beaux jours où les choses allaient si vite. A ce moment-là, j'avais déjà publié les chapitres 1 à 6 mais j'essayais de suivre avec le chapitre 7. J'avais finalement écrit les 100 premières pages du chapitre 7 en 1978 quand j'ai réalisé que je devrais travailler sur la typographie, qui est une autre partie de ma vie.

Schofield : J'aimerais que vous nous parliez de cela.

Knuth : Il était temps de sortir une seconde édition du volume 2, qui contenait les chapitre 3 et 4 [2]. Il était temps de venir avec la seconde édition du volume 2 parce que beaucoup de choses avaient été découvertes. Pendant ce temps, l'industrie de l'impression avait complètement changé, passant du type à base de métaux chauds aux films optiques, et aux choses photographiques. Dans le processus, ils avaient perdu la capacité à écrire les mathématiques correctement. Les galères que j'ai rencontrées pour cette seconde édition m'ont rendu malade. Je ne voulais plus jamais écrire un bouquin qui ressemblerait à ça.

Schofield : Du point de vue esthétique ?

2. Note de Don Knuth : il y avait 2 chapitres dans chaque volume. Le volume 1 contient les chapitres 1 et 2. Le volume 2, les chapitres 3 et 4.

KNUTH : Exactement. Les lettres étaient baveuses et elles ne collaient pas ensemble. Les mathématiques, l'espacement de tous les éléments dans les formules mathématiques, étaient mauvais. Quand ils ont changé la technologie, ils ont fait que la nouvelle technologie était adaptée pour les journaux et les magazines et la littérature ordinaire. Mais les impressions mathématiques... ils avaient l'habitude d'appeler ça les copies pénibles... Si vous vouliez composer une formule, il fallait payer plus. Les journaux mathématiques professionnels ont commencé à avoir l'air atroces. Presque personne ne se rappelait comment faire des mathématiques. Il y avait quelques endroits comme l'Inde ou la Hongrie où ils utilisaient encore l'impression métallique et où il y avait encore de vieilles personnes qui faisaient ça bien, mais elles disparaissaient. Je vivais ça particulièrement mal. Dans les archives de Stanford, vous pouvez voir des copies de ces épreuves que j'ai obtenues et vous pouvez voir comme elles sont de mauvaise qualité. Je pense qu'elles ont été exposées à la bibliothèque il y a 2 ans parce que Becky Fischbach [Elizabeth Fischbach] avait cette collection.
Au printemps 1978, j'étais en train de finir les 100 premières pages typographiées du chapitre 7. Comme faisant partie de mes obligations cette année-là, je dirigeais ce que nous appelons le Comité de l'ensemble des examens.

SCHOFIELD : Du département Informatique ?

KNUTH : En informatique. Les étudiants qui passent leur diplôme doivent passer un examen complet, qui couvre toutes les matières d'informatique ; ils doivent aussi passer un examen spécialisé dans la spécialité d'informatique qu'ils ont choisie, comme l'intelligence artificielle, les compilateurs, ou toute autre spécialité. J'étais président du comité et l'un de nos devoirs était de sortir une liste lisible pour que les étudiants puissent préparer l'examen complet. Un nouveau livre venait de sortir qui avait été édité par une nouvelle méthode qui utilisait le type digital plutôt qu'optique.

Tous les livres de nos jours sont imprimés numériquement mais en 1977, c'était inouï. Numériquement (digitalement), ça signifie que vous divisez la page en petits pixels et chaque pixel reçoit ou ne reçoit pas d'encre. Pour la première fois de ma vie, j'ai vu un livre bien imprimé qui était fait à partir de pixels. A Stanford, on avait expérimenté la méthode avec pixels, mais la résolution était très faible. Nous avions seulement 200 points par pouce. Ca ressemblait un peu à un livre mais ça vous donnait vraiment mal à la tête si vous le lisiez trop longtemps. Ca ressemblait un peu aux choses réelles parce que les lettres n'avaient pas l'air d'être tapées à la machine. C'était un peu comme passer du beurre à la margarine. Ce n'était pas la vraie chose mais...

SCHOFIELD : C'était mieux que ce qu'il y avait avant ?

KNUTH : C'était utile, oui. Les gens commençaient à s'intéresser à ça... l'idée de faire quelque-chose de manière digitale mais la qualité était encore horrible. A ce moment-là, vous n'auriez pas pensé à vraiment réaliser un livre professionnel de cette manière-là. Ca ne semblait même pas proche de ces mauvaises épreuves. Pourtant, ce nouveau livre que j'ai vu, alors que je construisais cette nouvelle liste de lectures, avait été fait sur une machine d'une nouvelle marque à Los Angeles. Ca avait été inventé par un brillant informaticien. C'était encré à 5000 points par pouce, parce qu'ils avaient développé cela non seulement pour les pages ordinaires, mais aussi pour fabriquer des microfilms. Ils pouvaient fabriquer des films qui étaient écrits minuscule mais qui devenaient lisibles en les agrandissant. Alors ils ont pris cette technologie et ils l'ont adaptée à l'impression. Je devine que Los Angeles était impliquée là-dedans d'une manière ou d'une autre. J'ai vu une épreuve faite avec ça.

Maintenant voici l'essentiel : avoir digitalisé tout le processus signifie qu'on travaille alors avec des pixels, on travaille alors dans le domaine informatique... zéros et uns, allumé et éteint. Je suis supposé être la personne la plus calée au monde pour obtenir que des zéros et des uns fassent le bon truc. Je ne connais rien à la métallurgie. Je n'y connais rien à l'optique et au cinéma. Des zéros et des uns, ça, c'est moi.

SCHOFIELD : C'est votre domaine.

KNUTH : En une semaine, j'ai pris un vol pour Los Angeles pour voir cette machine, et j'ai décidé de changer complètement le plan de ce que j'allais faire. Notre famille allait passer l'année suivante... c'était mon année sabbatique... Nous allions aller à Santiago, au Chili, où je pourrais continuer à travailler sur le chapitre 7. Je pensais que ça serait une bonne occasion d'apprendre l'espagnol ; j'irais au sud. Mais nous avons annulé tous ces plans. Nous avons décidé de passer mon année sabbatique à Stanford où j'avais pu fabriquer des fontes et faire le travail de manière digitale. A nouveau, mon estimation était qu'en un an, je pourrais écrire tous les programmes dont j'aurais besoin pour imprimer mes livres informatiquement.

Mes écrits m'avaient en quelque sorte obligé à faire quelque-chose à propos de l'impression. A nouveau, Stanford était très impliquée là-dedans. Au printemps 1977, les Editeurs associés à Stanford... Oh mon Dieu, quel est leur nom, ça commence par un B... Le mari avait des livres rares... Byra Wreden était très active dans cette maison d'édition et elle organisait des événements à propos de l'impression fine. Stanford a cette collection vraiment merveilleuse dans la pièce des livres rares appelée la Collection Gunst. J'avais énormément de ressources à lire sur ce que je voulais faire informatiquement, en apprenant ce qui avait été fait en utilisant la technologie précédente. Les éditions associées ont organisé un voyage dans le pays de l'or. Nous avons rendu visite à des personnes qui vivaient dans les bois avec leurs propres presses à main. C'était mon entrée dans le monde de l'impression de précision, et ça m'a amené à me faire des amis à San Francisco qui étaient impliqués dans l'état de l'art.

Mon idée alors est passée d'obtenir un livre qui avait l'air bien, à celle d'utiliser des ordinateurs pour obtenir un livre qui avait l'air aussi bien que tous ceux qui avaient pu être faits jusque là, c'est à dire de maximiser ce que nous pourrions faire informatiquement. J'ai changé tout mon plan de vie à ce moment-là. J'ai tout mis en attente pour je pensais un an, de manière à travailler en typogrpahie.

C'est une longue histoire que je raconte dans mon livre, *Typographie digitale*. Mais l'autre aspect concernant Stanford était que je décidai que je ne voulais pas que les logiciels soient sous le modèle propriétaire. Je voulais mettre tout ce travail dans le domaine public, du coup, je n'ai même pas demandé à Stanford si j'avais le droit de faire ça. Je l'ai juste fait. Comme résultat, c'est devenu l'un des premiers exemples de ce que les gens appellent maintenant source ouvert ou logiciel libre. Ca n'était pas libre dans tous les sens de libre, mais cela signifiait que j'avais tout à coup des milliers de volontaires partout dans le monde qui voulaient rentrer dans le truc et aider à le rendre meilleur.

L'alternative consistait à faire tout ce que les autres faisaient et à dire “ok, bon, vous pouvez utiliser ce merveilleux système si vous me payez pour”.

Du coup, Stanford aurait bien sûr fait beaucoup de bénéfices. Les gens factureraient de grosses sommes d'argent pour les systèmes basés sur des ordinateurs pour l'impression... comme le système appelé Page 3, qui avait été utilisé pour le livre que j'avais vu à Los Angeles.

Tous les fabricants d'une nouvelle sorte d'impression digitale avaient leur système propre, et ils n'étaient pas interchangeables les uns avec les autres. Toute personne qui développait un tel truc pensait qu'elle allait obtenir que tous au monde achètent son système. Ca ne me convenait pas trop, parce que je sentais que c'était quelque-chose qui devait vraiment appartenir à tous... la possibilité d'avoir de beaux livres. J'ai mis tous mes programmes dans le domaine public et j'ai eu des milliers de volontaires et ça a donné un très joli...

SCHOFIELD : C'est le système TeX ?

KNUTH : Teχ, oui. Ca n'est pas un X. C'est un χ. Parce que le mot grec pour Art est Techne [$\tau\acute{\varepsilon}\chi\nu\eta$]. Le mot technologie a la même racine que le mot désignant l'Art. Le saviez-vous... techne ?

SCHOFIELD : Non. Et votre seule année pour le faire est devenue combien... ?

KNUTH : Dix *[rires]*. Nous avons fini le projet. Alors j'ai eu mon année sabbatique... 1985, je pense, on a fini la phase principale. Vous pouvez voir plusieurs livres ici *[pointant l'étagère]*. Il y a 5 volumes dont les couvertures sont de différentes nuances de gris. La dernière est gris clair. Ce sont les 5 livres qui résument le travail que j'ai fait sur la typographie... les volumes A, B, C, D, et E. Ces livres se décrivent d'eux-mêmes parce que... Bon je dois vous montrer. J'ai la 10$^{\text{ème}}$ impression de celui-ci, qui est le volume E. Cela montre comment les lettres sont vraiment conçues par ordinateur. Vous pouvez prendre la lettre R...

SCHOFIELD : Ce programme ici produit cette lettre ?

KNUTH : Exact, et il produit aussi ces variations si vous dites que vous la voulez dans un autre style. Nous cherchons la lettre R ici, mais le livre décrit la manière dont le livre lui-même a été fait parce que, vous savez, il y a une lettre R sur cette page. Ce R a effectivement été généré par le programme. Ces 5 livres sont sortis en 1986, quand je prenais une année sabbatique à

Boston.

SCHOFIELD : Est-ce que des personnes utilisent encore ce système ? Est-ce que tout le monde utilise ce système ?

KNUTH : Les physiciens et les mathématiciens... Plus de 95 % d'entre eux l'utilisent. 20 % des biologistes. Les chimistes, peut-être 5 %. Il y a de nombreuses encyclopédies qui ont été écrites en utilisant ce système. Comme c'est un système de source libre, personne n'en fait la publicité. Il y a d'autres personnes qui font la publicité de leur propre système.

Oui, il a certainement monopolisé la marché de l'écriture technique. Un bon exemple... regardons un journal, pris au hasard dans la bibliothèque. Celui-ci est de 2006 mais en tous cas, tout ce truc est fait avec la même lettre R *[rires]*.

SCHOFIELD : Je vois le challenge typographique que ça peut être de créer des formules qui sont espacées correctement et lues correctement.

KNUTH : Oui. C'est qu'il y avait un besoin de ça et ça a été oublié quand la technologie est devenue digitale.

SCHOFIELD : Vous avez dit que vous n'avez pas demandé à Stanford, vous avez juste versé tout ça dans le domaine public. Est-ce que Stanford vous a rejeté d'une manière ou d'une autre ?

KNUTH : J'ai parlé à Niels [Niels J. Reimers] un petit peu mais il souriait tout le temps. Je ne sais pas ce qu'il disait dans mon dos *[rires]*. A ce moment-là, Stanford faisait tout très bien pour ses brevets de biologie, par exemple, et je sais aussi que Marty Hellman [Martin Edward Hellman] avait quelques brevets en cryptographie qui étaient faits avec Niels. En tous cas, je considérais que je voulais faire ça pas seulement pour moi mais pour le bien général (mondial). Je ne voyais pas pourquoi je devrais essayer de... si j'avais été dans une situation où je n'aurais pas fait ça correctement pour les livres que j'avais écrits, l'histoire aurait sûrement été différente... je n'aurais pas embarrassé d'autres personnes sous prétexte qu'elles n'auraient pas mis leur travail dans le domaine public. Mais dans ce cas, ça m'a semblé avantageux. Et ça s'est confirmé par toute l'aide que j'ai reçue. Le système est devenu bien meilleur grâce à toutes ces idées qui venaient en masse des utilisateurs.

C'est pour cette raison que ça m'a pris tant de temps pour finaliser. Comme de plus en plus de gens l'utilisaient, ils disaient “oh oui, vous savez, vous devriez changer cela.”. Et ça me donnait de nouvelles idées. A nouveau, ça a eu des répercussions sur Stanford parce que nous avions un grand colloque ici, je me rappelle que c'était en 1982, amenant les meilleurs designers de polices de caractères et tailleurs de pierres [3] et des personnes qui travaillaient dans le domaine de l'impression fine partout dans le monde, pendant deux semaines en été. C'était assez marrant parce que tout le monde restait dans les dortoirs ; quand ils sont arrivés dans le bâtiment dans lequel la rencontre était prévue, ils sont passés devant des pom-pom girls qui étaient là pour un camp d'été. Les pom-pom girls chantaient “donnez-moi un A, donnez-moi un B”. Nous, nous sommes allés à notre colloque et nous parlions aussi de A et de B.

SCHOFIELD : De A et de B. J'adore. Stanford pendant la saison des colloques d'été est un endroit un peu sauvage et délirant. La diversité des types qui sont là pour différentes choses est vraiment absolument merveilleuse.

KNUTH : Exact. J'ai initialement reçu des fonds de la Fondation Scientifique Nationale (NSF), pour faire de la recherche sur les algorithmes. Je travaillais toujours sur les algorithmes, mais soudainement, tous les algorithmes avaient comme sujet la typographie, et je continuais de publier des papiers à propos d'algorithmes à utiliser dans d'autres contextes. Cet argent, une grosse partie de cet argent, a été utilisé pour payer les étudiants qui m'aidaient à écrire le logiciel et à faire en sorte que les choses tournent. C'est une des autres raisons pour lesquelles je souhaitais que cela passe dans le domaine public, parce que c'était financé par des fonds gouvernementaux. Je ne pensais pas que je priverais quiconque de business parce qu'aucun imprimeur n'aime faire des mathématiques. Je faisais quelque-chose qu'ils ne voulaient pas faire.

Cependant, il y avait un homme dont la carrière consistait vraiment à concevoir des systèmes d'impression pour les mathématiques et à les vendre à des éditeurs. Il a écrit une lettre à, je ne sais pas moi, peut-être son député ou autre en lui demandant pourquoi son argent de contribuable était utilisé

3. ?

pour lui faire perdre son activité. Cela m'a rendu mécontent parce que je ne pensais pas blesser quiconque avec mon travail. Toutefois, j'ai montré cette lettre aux personnes de la NSF. Ils m'ont dit qu'il n'avait pas de raison de s'inquiéter [4]. C'est un exemple, mais il n'y avait rien que je puisse faire pour améliorer la qualité des choses en ne blessant personne je crois.

SCHOFIELD : Oui, mais c'est l'un des buts des fonds fédéraux, que les résultats puissent faire leur chemin dans le domaine public.

KNUTH : Oui, c'est exact. Beaucoup de personnes diront que de toutes les choses que j'ai regardées, celle-ci est la plus importante parce qu'elle a eu un impact sur tant de personnes. Bien sûr, maintenant, de nombreuses personnes ont également une carrière en fournissant des services basés sur Teχ. Sans ça, ils n'auraient pas de travail, puisque leurs services sont basés sur lui. C'est amusant. Jill et moi avons visité Prague au début des années 1990 et nous attendions un tram. Nous avons remarqué que les horaires du tram étaient écrits avec Teχ, bien sûr en tchèque.

SCHOFIELD : Vous avez pu reconnaître ça ?

KNUTH : Les formes des lettres sont différentes. Mais cela m'a rendu mécontent aussi parce qu'ils avaient un planning spécial pour le samedi qui était doré, ou un peu différent. Les lettres S ne me semblaient pas bien. J'ai dit "Oh non, je n'aurais pas dû faire le centre si épais" *[rires]*. J'étais si embarrassé que cette erreur se retrouve sur chaque rue de Prague.

SCHOFIELD : Vous n'êtes pas revenu et l'avez changé, si ?

KNUTH : Si je l'ai fait *[rires]*. Bien sûr. Ca n'a plus l'air si moche.

SCHOFIELD : Oh mon Dieu. J'adore ça.

KNUTH : Sur les bus à Prague, nous avons également vu des publicités qui avaient été écrites dans une fonte appelée Lithos, qui était sortie du cerveau de Carol Twombly, une de nos étudiantes à Stanford. Avec Chuck Bigelow [Charles A. Bigelow], nous avions un programme conjoint entre le dépar-

4. ? difficulté de traduction : he didn't have any case.

tement d'Art et le département d'informatique en typographie numérique. Carol était l'une des - probablement la - conceptrice de fonte la plus exceptionnelle. Elle a fait de nombreuses choses merveilleuses et son travail était là, il était disséminé partout dans le monde. Tout le monde aime ce type de lettres - Lithos - et d'autres modèles qu'elle a conçus. J'ai eu à signer son diplôme puisqu'il avait été obtenu dans les départements d'Art et d'Informatique.

SCHOFIELD : Ce programme existe-t-il toujours ?

KNUTH : Non, nous n'avions pas assez de fonds pour obtenir un programme de faculté pérenne. Chuck recevait de l'argent facile à obtenir. Pour obtenir un diplôme permanent, il aurait fallu plus d'un billet, et c'était trop. Ce programme a pu être conduit pendant, je ne sais pas, cinq, six ans. Un résultat de cela est que la plupart des leaders de la Silicon Valley qui ont créé Adobe et tout ça, qui sont responsables de graphisme numérique, ont été produits par ce programme. C'est devenu hors de contrôle vous comprenez *[rires]*.

SCHOFIELD : C'est devenu hors de contrôle. Quand vous allez écrire le chapitre suivant ou les dix pages suivantes ou autres - en termes d'habitudes et de processus physiques, vous vous y prenez comment ?

KNUTH : J'écris au stylo sur papier et j'ai - est-ce que je l'ai là ? Je garde habituellement mon manuscrit ici - mais je vais vous montrer, parce que je suis en train d'écrire quelque chose. Là, ça dit 8 mars. Je suis juste au milieu de ce paragraphe. Je gribouille et je raye, et je fais ainsi parce que je suis trop bon pour taper au clavier. Je tape plus vite que je ne pense.

SCHOFIELD : Oh, fascinant.

KNUTH : Cela cause des problèmes de synchronisation. Mais je pense à la même vitesse que j'écris au stylo.

SCHOFIELD : Que vous transcrivez, oui.

KNUTH : J'ai vraiment appris cela de moi-même au lycée. J'écrivais des lettres chez moi et cela m'aurait pris plus de temps de les taper que de les écrire à cause de cette synchronisation. Je perdais le fil de mes pensées en quelque sorte.

SCHOFIELD : Fascinant.

KNUTH : Du coup, j'obtiens ce document écrit à la main, mais c'est une copie brute. Alors, je le tape et je l'édite quand je pars. Je peux l'éditer à vitesse de frappe. Mon second brouillon va dans [l'ordinateur]. Quand j'écris le premier brouillon, je suis assis dans ce fauteuil.

SCHOFIELD : Ce fauteuil-là.

KNUTH : Ce fauteuil - il s'appelle Dux. C'est un fauteuil suédois que nous avons découvert quand nous vivions en Scandinavie, et nous avons su plus tard que l'homme qui avait dessiné ce fauteuil était venu [aux Etats-Unis] et qu'il vivait dans la péninsule depuis quelques années. Je pense qu'il est possible qu'il soit allé à l'église à laquelle nous allons maintenant. Je n'ai jamais vu de fauteuil nulle part qui soit aussi confortable pour s'asseoir et écrire pendant des heures. Il est bas. Il a une forme particulière. Je ne sais pas mais...

SCHOFIELD : ... il est parfaitement adapté à votre morphologie.

KNUTH : Il est juste parfait. Exactement. Je l'ai fait recapitonner. Ce cuir est le quatrième. A l'origine, il était couvert de tissu.

SCHOFIELD : Quand l'avez-vous acheté ?

KNUTH : Dans les années 1970.

SCHOFIELD : Il a vraiment ce style des fauteuils scandinaves des années 1970.

KNUTH : Absolument. La manière dont ils donnent la forme au bois et le tournent et des trucs comme ça.

SCHOFIELD : Il est beau.

KNUTH : Même s'il avait été fait autrement, la façon dont il est bas et s'incline est juste exactement ce qu'il me faut. Je m'assois dans mon fauteuil et j'écris.

SCHOFIELD : Au crayon.

KNUTH : Au crayon. Alors je me relis, je me lève et vais me mettre debout à mon écritoire. Je n'avais pas d'écritoire jusque dans les années 1990, mais c'est Martin Gardner qui est un des écrivains les plus prolifiques qui m'en a parlé. Il doit avoir [écrit] une centaine de livres. Il est le héros de nombreuses personnes parce qu'il a écrit chaque mois pour le Scientific American pendant 30 ans. Tout le monde a lu et appris à propos des mathématiques à travers ses colonnes. C'étaient des mathématiques récréatives, des mathématiques avec lesquelles les gens s'amusaient. Il a écrit aussi beaucoup d'autres livres à propos de philosophie, et des romans, et etc. J'ai pu être ami avec lui. Il avait cette machine à écrire sur un piédestal et il tapait à la machine debout. C'est bon pour ma santé - pour mon dos.

A la fin des années 1980, j'avais des problèmes de dos. J'ai appris à ce moment-là pourquoi les gens avaient l'habitude de dire que l'éducation physique était importante pour tous, parce que je n'avais jamais fait beaucoup d'exercice. Alors j'ai commencé à aller à la piscine quatre fois par semaine à Stanford, à la fin des années 1980. Ca a renforcé mon dos.

Avant ça, je pensais "comment vais-je avoir un fauteuil confortable sur lequel m'asseoir quand j'utilise un ordinateur ?". Un professeur d'ingénierie à Stanford - Bob Eustis - avait dessiné une nouvelle sorte de fauteuil avec un usinage menuisier particulier et tout ça. Il aimait fabriquer ces fauteuils et je lui ai parlé de mon besoin d'en avoir un particulier à utiliser quand je travaillais à l'ordinateur. C'était l'un des meilleurs professeurs d'ingénierie [mécanique]. J'ai aussi parlé à un dénommé Sam Maloof qui était un grand designer de meubles et nous avons travaillé au design d'un bureau adapté à une meilleure assise possible. Je voulais parfois avoir mes pieds remontés d'une certaine manière et tout ça. L'écritoire position debout était vraiment la meilleure solution de telle sorte que nous n'avons jamais fabriqué les autres idées que nous avons eues.

SCHOFIELD : Une fois que vous avez testé ça, ça a marché. Vous ne voudriez cependant certainement pas rester debout durant trois heures, n'est-ce pas ?

Knuth : J'ai remarqué que je peux rester debout trois heures si je porte ces sandales [désignant ses chaussures du doigt]. Ce sont des chaussures de plage et elles ont des petites bulles à l'intérieur. La même entreprise fabrique des sandales du même type mais sans bulles, et mes pieds sont fatigués au bout de dix minutes. Avec les bulles, elles font quelque chose, elles donnent un signal à mes nerfs qui les garde contents.

Schofield : Il s'agit de quelle entreprise ?

Knuth : C'est la société Sensi. Ce sont des chaussures italiennes - fabriquées en Italie.

Schofield : Du coup maintenant, vous vous assurez d'avoir au moins une paire de ces chaussures ?

Knuth : Oui. Quand elles sont fatiguées, j'en ai une paire d'avance pour les remplacer. Oui, travailler debout ne serait pas possible si je n'avais pas ces chaussures.

Schofield : Je n'avais pas entendu parler de cette chaussure particulière mais j'avais entendu parler de...

Knuth : ... certaines stimulations des pieds. C'est vraiment magique c'est vrai. J'ai entendu quelque chose de différent avec l'association des bibliothécaires de Stanford quand nous sommes allés visiter la maison de l'ermite Jack London. Ils avaient l'habitude d'organiser des voyages vraiment agréables qui duraient deux jours, avec une nuit quelque part, et des visites en lien avec des livres. Par exemple, nous avons visité la maison de campagne de Steinbeck [John Ernst Steinbeck, Jr.]. Le voyage dédié à Jack London nous a emmenés jusqu'à un monument au nord - dans quelle ville est-ce ? Napa [Note de l'éditeur : Sonoma County]. Il avait construit cette maison incroyable qui a brûlé un an après avoir été construite [en 1913].

En tous cas, il y a vécu une vie d'homme des bois. Il venait d'une famille pauvre d'Oakland et une fois qu'il s'est mis à toucher pas mal d'argent de la vente de ses livres, de nombreux parents à lui vinrent le voir pour lui en soutirer le plus possible. Il s'était fixé cette règle d'écrire un millier de mots chaque jour avant de parler à quiconque - un millier de mots ajoutés à ce qui existait. Le reste du jour, il pouvait s'occuper de l'impression à galets, et des corrections, mais il devait avoir ses mille nouveaux mots avant que quiconque ne soit autorisé à...

SCHOFIELD : Même à lui parler ?

KNUTH : C'était une règle sévère. C'est pour cette raison que j'en ai parlé, bon, ok, je ne suis pas aussi discipliné. Mais j'essaie effectivement d'organiser mon temps de telle façon que les moments où je suis le plus créatif correspondent aux moments où je suis capable d'écrire et que les moments où je suis le plus fatigué correspondent à ceux où je fais d'autres corvées qui sont importantes mais qui ne nécessitent pas de créativité particulière.

SCHOFIELD : Vous sentez-vous plus créatif le matin ?

KNUTH : J'avais l'habitude d'être plus créatif le soir, mais je deviens vieux maintenant et il arrive, comme ce matin, que je me réveille avec une vraiment bonne idée à 6 heures du matin.

SCHOFIELD : Très bien ! L'avez-vous écrite ?

KNUTH : Non *[rires]*. Non, mais je m'en rappelle suffisamment pour être quasiment sûr que je le ferai...

SCHOFIELD : Je déteste vraiment cela, quand je me réveille le matin et que j'ai eu une idée dont je ne me souviens pas, et que je ne pourrai retrouver pour le restant de mes jours. Je devrais avoir un petit bloc-notes près de mon lit.

KNUTH : Oui, souvent, l'idée se dissout complètement. La nuit dernière, c'était un peu inhabituel parce que j'étais resté éveillé jusqu'à 1 heure du matin. Je pensais à quelque chose mais mon esprit devait continuer à réfléchir parce que les concepts contre lesquels je me battais à une heure du matin, j'ai finalement vu, oh, que ça faisait un magnifique motif. Du coup, j'ai commencé une nouvelle page pour le chapitre 7 à partir de cette idée *[rires]* qui, n'ayons pas peur des mots, est une idée brillante.

SCHOFIELD : Et c'est marrant. Brillante à quel point ? *[rires]*

KNUTH : Hier, après être revenu de cette soirée à Berkeley, dans le fond de mon esprit je pensais "Oui, mais à propos de ce problème. Je ne comprends pas sa structure.". Et la solution m'est apparue ce matin à l'aube. Voilà ce qui s'est produit. Avec la musique, il y a un ou deux cas aussi. Les trois premières mesures du chapitre 21 de *Fantasia Apocalyptica* me sont venues lorsque je me suis réveillé dans un avion qui nous emmenait à Prague un jour. Je l'ai appelé mon thème de Prague. C'est ce que j'ai écrit.

SCHOFIELD : Vous vous étiez endormi dans l'avion ?

KNUTH : Je m'étais endormi dans l'avion. Je me suis réveillé et cette mélodie était dans ma tête. J'avais un morceau de papier avec moi et je l'ai écrite. Quand je suis rentré chez moi, je l'ai consignée dans ce carnet de notes et finalement, je l'ai utilisée. Comme je vous l'ai dit l'autre jour, elle m'avait été en quelque sorte dictée.

SCHOFIELD : Oui, vous sentiez comme un appel à le faire. Je pensais après que nous en ayons parlé l'autre jour à votre notion d'être né geek et aussi à votre fascination pour la musique. Cela m'a fait penser au livre *Gödel, Escher, Bach*, d'Hofstadter [Douglas Hofstadter], qui relie les mathématiques à la musique et à l'art. Que pensez-vous de cette théorie ?

KNUTH : J'ai rencontré Doug à nouveau cette année en janvier à Uppsala. Il travaille sur quelques problèmes intéressants aujourd'hui encore. Je vois définitivement cette connexion. N'importe qui ne voit pas forcément cette relation mais une personne obnubilée par les détails comme moi voit ces sortes de formes et rythmes. Bien que je n'aie jamais été un fan de ce livre-là en particulier, Doug a écrit d'autres choses à propos de la traduction que j'ai adorées.

SCHOFIELD : Le *Ton Beau de Marot*, oui. Je pensais que c'était un livre fascinant. J'ai eu cette occasion de connaître Doug quand j'étais beaucoup plus jeune et que nous étions à l'école à Genève.

KNUTH : Oui, c'est un grand ami. Martin Gardner, qui avait une colonne dans le *Scientific American*, a pris sa retraite et m'a demandé si je serais intéressé par le fait de m'occuper de cette colonne après lui. C'était une énorme responsabilité - et je ne pouvais pas croire qu'il me demanderait une telle chose - et j'ai refusé. Doug Hofstadter a rédigé cette colonne pendant cinq ans ou quelque-chose comme ça. Doug et moi avons également interagi dans le cadre de mon projet de typographie, parce que j'avais écrit un article pour les typographes à propos du concept d'une métafonte. Vous vous rappelez quand je vous ai montré la lettre R il y a une minute ? Il y avait trois R sur cette page mais ils avaient tous été dessinés par le même programme d'ordinateur. Doug avait cette idée qu'on pourrait déclencher ces programmes par des molettes que l'on pouvait faire tourner. J'avais ce programme et vous tourniez la molette pour indiquer le degré de graisse (blod) de la lettre que vous vouliez.

Il y a quelques soixante molettes différentes que vous pouvez tourner et qui ont un effet sur la forme des lettres. J'ai appelé cela une métafonte parce qu'elle incorpore plusieurs fontes en une. Ce n'est pas juste une forme de lettre. Les informaticiens sont habitués à l'idée que l'on puisse faire une description meta de quelque-chose qui va au-delà d'une simple description. Elle varie en fonction de la variation de paramètres [5]. Nous sommes habitués au fait d'écrire un programme qui produira des effets différents si nous changeons les valeurs des paramètres.

Mais c'était un concept vraiment nouveau pour les dessinateurs de fontes. Ils traiteraient chaque nouvelle fonte comme un nouveau challenge. Si une semaine, on leur demandait de la faire de façon ordinaire, la semaine suivante, leur chef leur demandait une fonte plus grasse, et ils devaient recommencer et recommencer. Avec l'ordinateur, je peux me dire “bon, essayons d'imaginer qu'est-ce que ça donnerait si je graissais cette fonte seulement à moitié”, “qu'est-ce que ça donnerait si j'en prenais une autre”... Vous savez, on essaie de résoudre plusieurs problèmes d'un seul coup, en une seule fois. J'ai écrit un article pour les typographes appelé *Le concept d'une métafonte*. Cet article a vraiment été marrant à écrire parce qu'au milieu des phrases, je pouvais distordre les lettres de différentes manières. J'ai commencé l'article avec une police qui était d'un style très ancien du seizième siècle, et je l'ai terminé dans un style hyper-moderne, dans lequel la largeur des lettres est importante et les lettres sont sans serifs. Au milieu, il y a une section qui

5. Note de Don Knuth : paramètres ou molettes.

contient le 23ème psaume et la première lettre du 23ème psaume est dans ce style très ancien du seizième siècle... Il y a six cent et quelques lettres dans ce passage et la dernière lettre est dans le style hyper-moderne. Chaque lettre est dans un style un peu plus proche de celui de la dernière lettre.

Doug a adoré ça. Il l'a mis dans l'article du Scientific American. C'est arrivé dans la traduction en russe, ce qui fait que nous avons une traduction du 23ème psaume en russe communiste *[rires]* comme exemple. Alors il a écrit un essai sur les formes des lettres parce que ça l'avait inspiré aussi. Il a écrit un article qui montre, je ne sais pas, cinquante versions différentes de la lettre A et demande ce que cela nous enseigne de la psychologie humaine et des choses comme ça. Il a déclaré dans son article que la question la plus importante de l'intelligence artificielle est "qu'est-ce que cette lettre A ?". J'ai répondu "et la seconde question la plus importante de l'IA est "qu'est-ce que cette lettre I ?"" *[rires]*. Voilà quelles étaient mes anecdotes concernant Doug Hofstadter. Bien sûr, j'ai visité sa maison lors de la visite des maisons historiques de Stanford.

SCHOFIELD : Où il a grandi ?

KNUTH : Oui. Elle est sur la colline San Juan.

SCHOFIELD : Passons à d'autres sujets. Vous avez dit que vous allez nager, et que vous avez commencé à le faire comme une forme d'exercice et que vous continuez de faire ça chaque jour - et non quatre fois par semaine.

KNUTH : Lundi, mardi, jeudi, vendredi. Le mercredi, je reste à la maison.

SCHOFIELD : Vous allez à l'une des piscines de Stanford ?

KNUTH : Maintenant je vais à la nouvelle piscine qui est...

SCHOFIELD : Près du gymnase Roble ?

KNUTH : Exact. C'est une toute nouvelle piscine. Il y avait une petite piscine là avant et nous y allions parfois en été. Maintenant, cette base de loisirs de plein-air a une belle piscine.

SCHOFIELD : Vous faites des longueurs ?

KNUTH : Oui, effectivement. Mon principal souci à propos de la natation, c'est que je pourrais devenir trop bon nageur et alors je prendrais ça trop au sérieux.

SCHOFIELD : Vous ne voulez pas devenir un trop bon nageur ?

KNUTH : C'est ça. Je veux seulement apprécier de nager.

SCHOFIELD : Juste faire de l'exercice.

KNUTH : C'est très bon pour mon cœur et c'est très bon pour mes muscles et mes poumons, etc. Je dois admettre qu'il y a à Stanford quelques charmants étudiants qui sont vraiment gracieux quand ils nagent, et j'apprécie cet aspect de nos piscines. Je ne suis pas un nageur très compétitif, mais j'apprécie de voir d'autres personnes qui aiment bien l'eau aussi.

SCHOFIELD : Quand vous voyez quelqu'un qui est un vraiment bon nageur, quand les mouvements de nage sont vraiment bien exécutés, c'est très beau.

KNUTH : C'est comme un poème, oui. Parfois je pense à mon livre pendant que je nage. Si je suis en train de travailler sur un problème difficile, au début, j'ai besoin d'un papier et d'un crayon et je dois griffonner et biffer les choses. Quand je suis proche de la solution du problème, je peux faire cela de tête pendant que je suis en train de nager. Je sais si ce que je fais est bien lorsque je suis capable de le faire pendant que je...

SCHOFIELD : ... pendant que vous nagez. Intéressant.

KNUTH : Oui, et, bien sûr, je rencontre d'autres personnes d'autres parties du campus qui viennent aussi à la piscine. C'est une autre occasion où je sors de mon cercle immédiat du département.

SCHOFIELD : Et vous faites du vélo également, n'est-ce pas ?

KNUTH : Je vais à la piscine en vélo, et cela fait partie de ce qui me permet de maintenir mon dos en forme.

SCHOFIELD : Où que vous alliez sur le campus, vous le faites à vélo, et vous mettez bien votre casque, pour protéger votre caboche ?

KNUTH : Il y a quelques personnes qui ne m'ont jamais vu sans mon casque *[rires]*. A la bibliothèque en particulier. Je ne sais pas si elles pourraient me reconnaître si je ne l'avais pas.

SCHOFIELD : La seule chose à propos de la conduite à vélo est que vous devez regarder tous ces autres fous autour de vous.

KNUTH : Oh c'est vrai. J'ai eu quelques rapprochements un peu trop serrés par ci par là, oui.

SCHOFIELD : Mais vous n'avez jamais eu d'accident sérieux à vélo ?

KNUTH : Non. Maintenant, la nuit, je porte des catadioptres. J'ai aussi une veste phosphorescente.

SCHOFIELD : Mais vous ne sortez pas du campus sur des routes plus grandes ?

KNUTH : Je n'y vais pas très souvent. Non. J'ai commencé à le faire à peu près vers la fin de... bon, j'ai toujours fait du vélo.

SCHOFIELD : C'est bien. Vous vivez sur le campus et vous êtes près des endroits où vous avez besoin d'aller.

KNUTH : C'est exactement pour cela que je suis venu à Stanford, parce que je pouvais vivre à deux miles de ma maison et de mon travail pour le restant de mes jours.

SCHOFIELD : J'ai noté quelques choses vous avez décrites, je pense, ou bien que je décrirais, comme des valeurs personnelles, par exemple les valeurs de rigueur et d'élégance. Je me demande si vous souhaiteriez parler de l'une ou l'autre, ou bien d'autres valeurs personnelles. Je crois aussi que vous avez une histoire forte de relation à votre église, à votre foi protestante.

KNUTH : J'ai certainement grandi dans une communauté très aimante qui a donné le ton. Mes parents étaient tous les deux très portés sur le service aux autres plutôt que portés sur ce qu'ils pourraient faire pour eux-mêmes. Le prénom de mon père était Ervin, ou Erv pour surnom. Il a commencé par créer une entreprise qui le faisait sortir de chez lui, pour faire des projets avec ses amis. Il l'a appelée Services d'Erv et le logo était "s erv ice", avec erv en grandes lettres. Service a en quelque sorte été l'histoire de sa vie, à réfléchir à ce qu'il pourrait faire que d'autres personnes apprécieraient. Il travaillait dans un environnement local. En d'autres termes, quasiment personne en dehors de Milwaukee n'a jamais eu vent de ce qu'il faisait. Mais là où il était, il était toujours en train de démarrer des choses et d'aider les gens de plein de manières.
Ma mère était d'un genre similaire. Elle était membre de nombreuses organisations de bénévoles, et elle était un peu plus visible que mon père parce qu'on la voyait sur un certain nombre de gratte-ciels dans le centre-ville de Milwaukee ; elle gérait des immeubles.

SCHOFIELD : Gérante de la propreté.

KNUTH : Elle devait travailler avec les équipes de nettoyage s'il y avait des inondations, mais elle avait également à concevoir les espaces pour les nouveaux locataires, les médecins et les banquiers, etc. Elle faisait plein de choses dans le centre-ville et elle était membre de l'association des gérants et propriétaires d'immeubles et l'une des premières femmes de cette organisation à l'échelle nationale. Elle faisait cela à plein-temps... mais cela ne diminuait en rien le travail qu'elle faisait bénévolement à temps partiel sur toutes ses autres organisations. Du coup, j'ai grandi avec l'idée que c'est ainsi qu'il faut vivre.

Parmi les valeurs, il y avait notamment l'idée d'aider les autres avec toutes les compétences dont on dispose. En ce moment, nous avons un président dont l'idéal est en quelque sorte en contradiction avec toutes mes valeurs, il est beaucoup plus facile pour moi de comprendre ce que sont mes propres idéaux.

SCHOFIELD : J'entends bien.

KNUTH : Je suis content de voir que je ne suis pas la seule personne à avoir ces idéaux-là. Mais je suis étonné par le nombre de personnes... Je pensais qu'il y avait davantage de bonnes âmes autour.

Schofield : C'est difficile de comprendre comment nous en sommes arrivés là, comment tant de personnes ont pu croire qu'il pourrait être le président de notre pays.

Knuth : Oui. Ce n'est pas de la politique. C'est juste l'intégrité, la composante globale du caractère. Jill et moi sommes allés à un événement à Stanford de formation tout au long de la vie il y a quelques mois où Herant Katchadourian a fait une étude des sept péchés capitaux.

Schofield : Je pense l'avoir lue.

Knuth : Nous avons passé tout notre samedi dans ces sessions, et c'est vraiment un conférencier brillant. De toutes ces valeurs, ok, qu'est-ce que Trump a à dire à propos de chacun de ces sept péchés capitaux. Y en a-t-il un qui... Ok, on a l'avidité, la paresse, la luxure, la gourmandise, la colère, l'envie et l'orgueil... peut-être pas la paresse. Accordons lui celui-là. Car les valeurs morales proviennent de ce que je pense être commun à toutes les religions du monde. Et Trump est en contradiction avec la plupart de ces principes.

Maintenant il y a toujours eu des personnes qui commettaient ce genre de fautes mais elles ne les commettaient pas de manière aussi flagrante et elles n'étaient pas dans des positions où en quelque sorte, elles me représentaient. Je déteste l'idée que maintenant, davantage de personnes vont me détester, mais je n'ai pas changé *[rires]*. Ce que je veux dire, c'est que maintenant les gens ont tellement plus de raisons de penser que je suis une mauvaise personne qu'elles n'en avaient avant, parce qu'elles peuvent identifier [les Etats-Unis] avec les valeurs que Trump exhibe. Elles peuvent penser "Oh, il est américain, il doit être comme ceci". Peut-être que non, mais je me suis trouvé à penser cela en différents endroits. J'ai tendance à me tromper sur les gens mais...

Schofield : Je sais. Je pense que nous avons tous tendance à le faire. Mais ne vous rappelez-vous pas qu'il fut un temps où on nous appelait les odieux américains ? Les touristes qui se rendaient en Europe se comportaient d'une façon horrible, atrocement mauvaise.

KNUTH : Je les ai rencontrés *[rires]*, oui...

SCHOFIELD : Espérons que cela passera aussi. Nous devons faire ce que nous pouvons pour...

KNUTH : Bien sûr. Mais cela nous amène à un contexte plus étroit. En tant qu'informaticien et mathématicien raté, il y a une part de ma vie dans laquelle je suis capable de trouver l'absolue vérité de quelque-chose. Avec les mathématiques et l'informatique, nous pouvons démontrer que quelque-chose est correct sans aucun doute. C'est sans faille. Les physiciens n'ont même pas cette capacité. Ils ne savent jamais s'ils ont capturé les lois de la nature. Ils peuvent seulement mesurer jusqu'à un certain degré de précision. Les mathématiciens peuvent mesurer jusqu'au bout et savoir qu'ils ont exactement la réponse et deux plus deux ne vaudra jamais autre chose que quatre. Cela me donne quelque satisfaction de pouvoir circonscrire quelque chose et le comprendre complètement. D'un autre côté, je me réjouis du fait qu'il y a des mystères que je ne comprendrai jamais, qu'il y a des choses qui sont au-delà de moi. Je n'ai pas de raison d'être surpuissant et de penser que je peux résoudre tout problème. Je suis seulement un être humain et j'ai des limitations humaines et il y a donc des mystères et je suis très à l'aise avec cet aspect-là également, qu'il y a des questions dont je ne connaitrais jamais la réponse mais je peux continuer à chercher et à me rapprocher un petit peu de la réponse. C'est de cette manière que je vois la partie spirituelle de ma vie, la partie religieuse de ma vie. Je ne pense pas que Dieu veuille que je continue cette quête qui consiste à chercher à en apprendre plus sur ce que Dieu souhaite que je fasse. Je ne pense pas que Dieu est un prétexte commode ou quelque chose comme ça. Je pense à Dieu comme à une présence qui est là et, grâce à Dieu, ne pourra jamais être prouvé ou réfuté, mais reste un mystère. Et cela me fait croire qu'il y a du sens et de l'ordre en toute chose plutôt que juste du hasard.

SCHOFIELD : Est-ce Dieu qui en quelque sorte transcende une religion individuelle ?

KNUTH : C'est cela. Je ne suis pas en train de dire que tout principe de toute religion ne soit pas un jour démontrable. Beaucoup des grands philosophes pensent cela mais je pense qu'ils ont tort. Je pense que si cela était prouvable, tout le monde courrait vers la preuve, la mémoriserait et l'oublierait la semaine suivante. C'est pour ça que je remercie Dieu d'être un mystère. J'ai passé beaucoup de temps à chercher des indices que je pourrais obtenir sur ce que Dieu souhaitait que je fasse. Par exemple, j'ai en quelque sorte le sentiment que Dieu, lui ou elle, veut que je démontre le théorème que j'ai démontré ce matin *[rires]*. Et que j'écrive de la musique. Cela me guide.

J'ai aussi un sentiment différent à propos de l'intimité. Je n'ai jamais ressenti que j'avais des secrets de Dieu, du coup, je ne suis pas très bon pour travailler sur les domaines de l'informatique qui protègeront la vie privée. Je ne veux bien sûr pas que des escrocs sachent tout de moi et exploitent cela. Mais je ne suis pas à l'aise du tout avec l'idée que les pires côtés de mon comportement puissent être connus par quelqu'un. Je sens seulement que cette partie de ma vie n'est pas totalement privée.

Voilà ma petite réponse sur la façon dont j'interragis avec la spiritualité. Je suis devenu un peu le type sur le poster pour ça parce qu'on m'avait demandé d'en parler quelques fois dans ma vie. Je pense que ce que je fais bien, c'est l'informatique, mais l'informatique, ce n'est pas tout.

Quand on m'a demandé de venir au MIT pendant un trimestre pour donner des conférences publiques sur l'interaction entre foi et science, bon, j'étais honoré qu'ils aient pu penser à moi. Et j'ai aussi dit "ok, peut-être que c'est quelque-chose que je devrais faire une fois dans ma vie". Je ne voulais pas faire une carrière en faisant quelque chose dans quoi je n'étais pas bon, mais je pensais que l'interaction entre la foi et la science était quelque chose qui méritait d'être abordé. J'y ai passé trois mois et j'ai vraiment apprécié ces six conférences d'une heure, basées sur quarante minutes de notes et les quinze minutes restantes étaient improvisées comme en ce moment [cette interview], question et réponse. Ces conférences ont été enregistrées et retransmises sur la chaîne Dobbs pendant une dizaine d'années après ça, et elles ont dû obtenir les scores d'audience les plus élevés de cette chaîne pour longtemps. Cela a montré que d'autres personnes trouvaient également qu'il y avait un besoin de contempler différentes parties de leur vie.

Schofield : Et voir cette science n'était pas antithétique de la religion.

Knuth : Antithétique, exact. Je n'ai jamais fourni des réponses ou bien dit que je pensais ceci et que je serais content si vous les pensiez aussi. Je disais, voici les choses que je pense intéressantes. Ne pensez-vous pas vous aussi qu'elles sont intéressantes ? Que pensez-vous de ces questions controversées ?

Je pense que cette idée personnelle de réaliser que nous n'avons pas toutes les réponses peut être explorée pendant énormément de temps. Où mieux le faire qu'à Boston, où il y a eu tant d'études théologiques, ainsi qu'au MIT où ont eu lieu tant d'avancées de la science ?

SCHOFIELD : C'était en quelle année ?

KNUTH : C'était en 1999. J'avais vécu précédemment à Boston, pendant une année sabbatique en 1986 après que le projet Teχ ait été terminé. C'était l'année sabbatique de mon épouse. C'était l'année de nos 25 ans de mariage et les enfants avaient terminé le lycée et avaient quitté la maison... Je pouvais faire à manger et les courses et Jill pourrait travailler sur ses livres cette année-là.

SCHOFIELD : C'était votre année sabbatique ?

KNUTH : Un an tous les 25 ans, je donnais à Jill son année sabbatique. J'étais l'homme au foyer et je...

SCHOFIELD : Et vous avez fait ça fidèlement toute l'année ?

KNUTH : Oui. Pendant mon temps libre, je suis allé à la Bibliothèque publique de Boston pour faire mes recherches pour le livre 3 :16, dans lequel j'avais eu l'idée folle d'étudier le chapitre 3, verset 16 de chaque livre de la Bible et voir qu'est-ce qui avait été écrit à ce propos pendant des années. Pendant mon temps libre cette année-là - nous vivions dans le centre-ville de Boston, dans le centre-ville de Cambridge, pas dans la baie de Boston, et donc à six blocs de la bibliothèque municipale de Boston.

SCHOFIELD : Après une année comme homme au foyer, vous avez décidé que ça suffisait ?

KNUTH : Oh, j'ai apprécié ce que ça entraînait. L'un des événements majeurs a été que mon fils dirigeait le groupe de musique de Stanford *The Fleet Street Singers* cette année-là et ils sont venus en tournée et ils ont tous dormi dans notre appartement une nuit.

Schofield : Est-ce que vos deux enfants sont allés à Stanford ?

Knuth : Non, non. Jenny savait qu'elle ne voulait pas aller à Stanford, mais elle voulait tout de même savoir si elle serait admise et elle l'a été.

Schofield : Elle a été admise et puis elle est allée à... ?

Knuth : A Brown. Elle voulait choisir sa propre majeure. John ne voulait pas s'aventurer si loin, du coup, il a candidaté aussi loin vers l'est qu'au Lycée du Pacifique à Stockton *[rires]*.

Schofield : Voyons. Laissez-moi vous interroger... Il y a deux ou trois choses ici mais je pensais que nous devrions discuter de votre intérêt en histoire.

Knuth : En histoire, oui, parce que j'ai trouvé alors que j'écrivais *L'Art de la programmation des ordinateurs*, qu'une des choses les plus importantes est non seulement de réaliser qu'il y a également des geeks qui vivent dans d'autres pays, mais aussi de voir l'aspect humain historique dans cette découverte. Je me dis “ok, nous avons obtenu ces merveilleux résultats ; mais quelqu'un y a pensé le premier.”. Et si vous comprenez comment les gens trouvent les grandes idées, alors il est plus probable que vous serez capable d'avoir de grandes et nouvelles idées vous-même. J'ai essayé de montrer la manière dont les idées naissent et se précisent et comment cela entre dans l'expérience de l'humanité.

C'est vraiment merveilleux que les cultures du monde entier aient contribué à l'informatique, et depuis tant d'années. Je me suis souvent trouvé à travailler avec d'autres amis ou élèves à étudier des documents en Sanskrit, et en français, en russe et allemand, en espagnol, japonais, etc.

Schofield : Vous lisez toutes ces langues ? Ou bien vous lisez leur traduction ?

Knuth : Oh, j'ai seulement appris à reconnaître un motif, et comment utiliser un dictionnaire... J'ai des dictionnaires ici, d'allemand ou autre. Je ne suis pas un grand linguiste mais habituellement, je peux reconnaître certains motifs combinatoires que la personne qui écrit a utilisés... du coup, j'ai un petit nombre de pages que je peux montrer à un autre professeur de Stanford. Par exemple, si j'ai une question de latin, je demanderai plutôt à Michael Wigodsky. J'utiliserais les ressources de Stanford pour toutes ces choses. George Brown [George Hardin Brown] m'a également aidé en latin médiéval.

J'ai réalisé tôt sur ces matériaux littéraires écrits par différentes personnes que lorsque des personnes découvrent quelque chose, il est très important pour moi de comprendre ce processus de découverte. J'essaie de faire passer cela dans mes écrits. Mais ça a aussi été le plus gros échec de ma carrière, qu'aucun de mes étudiants - à l'exception d'un seul maintenant - n'ait eu cet amour de l'histoire que j'ai. Je n'ai pas été capable de les convaincre de cela quand j'étais leur tuteur de thèse. Mais Lyle Ramshaw [Lyle Harold Ramshaw] a écrit un article il y a deux ans dans lequel il a fait une grande recherche historique qui remontait au dix-huitième siècle en Suède. Il a un peu attrapé le virus.

Schofield : Vous essayiez de les amener à l'histoire pendant vos cours ?

Knuth : Dans mon tutorat davantage que partout ailleurs. Dans mes cours, je raconte l'histoire et je donne des conférences publiques. Par exemple, je me suis focalisé sur l'Arabe et le Sanskrit dans une conférence que j'ai donnée à Noël il y a deux ans je crois. Il y a des histoires fascinantes qui montrent à quel point les gens étaient en avance sur leur temps. Je devrais également mentionner les écrits hébraïques de la Kabbale qui ont anticipé des idées d'informatique. C'est plus qu'un hobby pour moi. Je pense que c'est important.

Maintenant, nous sommes dans une situation où les universités en Amérique ne financent plus l'histoire des sciences de la façon dont c'est fait en Europe. Il y a seulement deux ou trois endroits aux Etats-Unis où il y a un bon professeur d'histoire des mathématiques... Princeton, Yale, et le troisième est la Virginie Ouest ou quelque chose comme ça. Mais les principaux historiens des mathématiques sont en Angleterre, en Allemagne et en France.

Schofield : Je pense que Stanford avait un petit programme d'histoire des sciences, mais je ne sais pas s'il est poursuivi encore aujourd'hui.

Knuth : L'histoire des sciences a connu une grande mutation. Il y a cinquante ans, l'histoire des sciences expliquait comment les idées scientifiques avaient été découvertes. Maintenant, elle raconte comment les scientifiques obtiennent des fonds, ils n'entrent pas dans la vraie science profondément du tout. C'est passé de l'histoire interne à l'histoire externe. Regardez par exemple le journal principal d'histoire des sciences ; il s'appelle Isis, il traite de tous les domaines. Isis est la divinité égyptienne de la sagesse [ou de la fertilité] ou quelque chose comme ça. J'ai parcouru et lu ce journal depuis une cinquantaine d'années et je continue de lire les numéros actuels. J'ai mesuré dans ces journaux le rapport entre la science effective et le contexte scientifique, la vie dans le monde, comment les scientifiques payent pour l'éducation, qui les critique pourtant.

Schofield : Le côté plus sociologique ?

Knuth : Une partie de la cause de cela est que la science devient de plus en plus difficile *[rires]*. Du coup, si les personnes qui vont vous promouvoir comprennent vos articles, vous feriez mieux de ne pas écrire quelque chose sur cette spécialité qui va les rendre mal à l'aise. Cela leur fera subtilement ressentir qu'ils ne méritent pas suffisamment leur propre position de professeur et alors, ils ne vous financeront pas. En tous cas, pour une raison quelconque, ce changement immense a eu lieu. J'ai été dérangé par ce changement, mais j'ai aussi réalisé qu'une partie du problème provient du fait que pas un seul département d'informatique d'une seule université américaine ne finance un historien de l'informatique.

Il y a des personnes qui s'inscrivent à un programme d'histoire des sciences mais elles ne sont pas autorisées à écrire à propos de l'informatique elle-même parce que leurs collègues ne vont pas comprendre ce qu'elles disent si elles parlent trop technique. Elles écrivent des choses intéressantes comme “voici la première femme qui a fait ça”. Elles collent à ces choses plus culturelles et, bien sûr, ce sont des sujets importants, mais cela représente un pour cent du domaine. Je me suis défoulé là-dessus lors d'une conférence que j'ai donné à Kailath en 2014. J'avais travaillé à un plan dans lequel Stanford pourrait employer un historien de l'informatique à temps plein, pour diriger la prochaine génération d'historiens. Pourtant, je n'ai pas assez de temps personnel pour mener cette bataille. Je suis à la retraite et je sais que je fais bien mieux d'écrire mes livres que de mener des batailles. J'espère que quelqu'un d'autre reprendra le flambeau. En tous cas, puisque nous sommes en train de parler histoire orale, je voulais mentionner l'Histoire.

SCHOFIELD : Bien pour vous, une fiche pour l'Histoire. Je sais que vous êtes fan de nombreuses choses que la Société d'Histoire de Stanford fait. Je vous vois vous régaler dans toutes sortes d'endroits où des conférences intéressantes ont lieu.

KNUTH : Merci.

SCHOFIELD : Sur quoi travaillez-vous en ce moment ? Vous continuez sur *L'Art de la programmation des ordinateurs* et espérez...

KNUTH : Chapitre sept, section 7.2.2.1. J'espère qu'en octobre, j'aurai trois cent pages prêtes à être publiées.

SCHOFIELD : Vous le publiez en morceaux ?

KNUTH : Oui. Ce papier sur le bureau est le numéro six. Le numéro cinq est celui sur lequel je suis en train de travailler en ce moment, qui sera avant le six et quand j'aurai les cinq, six et sept, j'en ferai un nouveau volume relié.

SCHOFIELD : J'ai compris. Très bien. C'est une manière de ressentir que vous avez accompli des étapes de ce livre, et cela s'oppose au fait de ressentir que le volume en entier doit venir d'un seul tenant.

KNUTH : Le sujet s'est tellement développé que je ne peux être calé sur tout. En le sortant de cette manière, j'ai des personnes partout dans le monde qui le critiquent et qui m'aident à le compléter, à rendre l'histoire juste.

SCHOFIELD : Si c'est publié de cette manière, couverture souple et obtention de feedback dessus, le mettez-vous à jour avant qu'il soit relié ?

KNUTH : Oh oui, absolument. C'est exact. Voici la version reliée du Volume 4A. Ceci est le début du chapitre sept mais il a seulement neuf cent pages.

SCHOFIELD : C'est le Volume 4 ?

KNUTH : 4A.

SCHOFIELD : Partie 1 ?

KNUTH : C'est exact *[rires]*. Je suis désolé, le Volume 4A traite des Algorithmes combinatoires, Partie 1. Le Volume 4B sera Algorithmes combinatoires, Partie 2. Ils contiennent des parties du Chapitre 7 qui, comme je le disais, a explosé durant les années 70. Je continue de l'appeler Chapitre 7 mais, vous savez, c'est pour cette raison que j'ai 7.2.2.1 comme sous partie du chapitre 7. Ce volume est initialement sorti comme des fascicules 0, 1, 2, 3, 4 en livres de poche. Avant que les livres de poche ne sortent, ils étaient sur internet au format pré-fascicules. Maintenant, toutes les trois semaines ou environ, je mets à jour la version courante sur laquelle je suis en train de travailler.

SCHOFIELD : Je regarde les réponses aux exercices. Et c'est un livre ? Un livre dans lequel vous posez des problèmes et vous avez les réponses ?

KNUTH : C'est pour les autodidactes. C'était la manière la plus efficace de compresser beaucoup d'information dans un seul livre. Je peux obtenir beaucoup de détails dans les exercices et dans les réponses. Je peux compresser un article de dix pages en un exercice suivi de dix lignes de réponses. Si quelqu'un est motivé pour travailler sur l'exercice, alors les réponses sont suffisantes pour lui donner toutes les idées clefs qui étaient dans cet article. Si je devais tout écrire et introduire tous les processus de pensée et tout ça, ce serait beaucoup plus long.

SCHOFIELD : Je viens juste de trouver une page dans laquelle vous avez des notations au crayon en haut de page ? Est-ce quelque-chose que vous aimeriez changer ?

KNUTH : C'est mon original. Ce volume particulier en est maintenant à sa onzième édition et dans chacune d'elle peut-être soixante pages ont été mises à jour.

SCHOFIELD : Je vois. Vous écrivez quelque chose et vous souhaitez le mettre à jour.

KNUTH : C'est cela, oui.

SCHOFIELD : Quelle méthode et ça ne s'arrête jamais !

KNUTH : Si c'est en bleu dans cet original, j'ai corrigé une erreur. Si c'est en orange, c'est une amélioration mineure. Et si c'est en jaune, c'est un amendement ou une extension.

SCHOFIELD : Et c'est juste au crayon ?

KNUTH : C'est une erreur. J'aurais dû le coder en couleur. Où est la nouvelle réponse ? J'aurais dû l'écrire en jaune *[rires]*.

SCHOFIELD : Maintenant, il faut que vous la coloriez en jaune ? *[rires]*. Oh mon Dieu. Une vie de travail effectivement.

KNUTH : Vous avez mentionné que mes valeurs étaient la rigueur et l'élégance... J'essaie de trouver la manière la plus élégante de présenter ces réponses. Je suis étonné que nous ne voyions pas plus de bleu. C'était une erreur.

SCHOFIELD : J'ai lu, et vous en avez parlé, que vous encouragez toute personne qui trouverait des erreurs à vous le faire savoir. Et si vous êtes d'accord sur le fait qu'il y a une erreur, vous les payez ?

KNUTH : Deux dollars cinquante-cinq cents.

SCHOFIELD : Deux dollars cinquante-cinq cents, qui n'ont pas changé ?

KNUTH : Exact. Cette pile là-bas contient des lettres [que j'ai reçues]... comme ici, il y a une erreur d'orthographe dans des noms en russe ; ici quelqu'un dit "regardez à la page 862". Oui, il y a des lettres auxquelles je n'ai pas encore répondu. Toutes les quatre semaines environ, je parcours cette pile.

SCHOFIELD : Et votre assistant lit tous les mails que vous ne recevez pas directement et choisit les choses qu'elle - je suppose que c'est une femme - pense devoir vous montrer ?

KNUTH : C'était la manière dont ça fonctionnait jusqu'à ce qu'elle prenne sa retraite il y a quinze ans.

SCHOFIELD : Oh oh. Maintenant comment faites-vous ?

KNUTH : Les gens ne sont pas censés savoir cela mais le mail va à Maggie McLaughlin [Margaret McLaughlin] qui a travaillé à Stanford de nombreuses années. J'utilise sa boîte mail.

SCHOFIELD : Oh, du coup, c'est vraiment vous ?

KNUTH : C'est vraiment moi.

SCHOFIELD : Fascinant. Souhaitez-vous que nous retirions ceci de cette histoire orale de façon à ce que les gens ne l'apprennent pas ?

KNUTH : C'est bien. Voici des cas où j'ai déjà fait la correction. J'ai maintenant une secrétaire qui vient un après-midi par semaine et renvoie les vérifications.

SCHOFIELD : Renvoie les deux dollars et cinquante-cinq cents ? J'adore ça.

KNUTH : Les chèques sont émis par mon épouse, de ma propre banque. C'est une banque fictive, la Banque de San Serriffe. Jill a dessiné ces chèques.

SCHOFIELD : Mais ils sont échangeables contre de l'argent ?

KNUTH : Non, non, il s'agit juste de les déposer sur un compte et alors ça va sur internet et tout le monde obtient des points factices pour que leur nom apparaisse là. S'ils veulent du cash, ils peuvent me le demander, je peux leur envoyer des timbres ou autre.

SCHOFIELD : Oui, mais ils préfèreront probablement avoir ce chèque unique.

KNUTH : C'est pour ça que nous avons essayé de donner un joli look au chèque en question.

Schofield : Oui, il est joli. Arrêtons là sur ce sujet auquel nous avons consacré suffisamment de temps. Terminons en parlant de l'environnement à Stanford, peut-être de certains moments mémorables ou des personnes que vous avez connues. J'ai vu que vous étiez sur la liste des invités quand la Reine Elizabeth [la Reine du Royaume-Uni] est venue en visite. Je ne sais pas si vous êtes effectivement allés à cette réception mais...

Knuth : Oui, nous sommes allés à Hoover House, au domicile du Président. Je me rappelle qu'elle était très petite. Il y avait un emploi du temps merveilleux pour elle, et toutes les quelques minutes, elle devait partir. Je me rappelle que le Prince Philip [Prince Philip, Duc d'Edinburgh] était très grand.

Schofield : C'est plutôt inhabituel. C'était en 1983 je crois ?

Knuth : Exact. Ca fait quoi ? Il y a trente-cinq ans. Je ne sais pas comment il est maintenant. C'était la maison de Don Kennedy alors, n'est-ce pas ?

Schofield : Oui, Hoover House est la résidence du président.

Knuth : A quelques occasions, j'ai rencontré quelques sénateurs américains, et autres. Un jour, j'ai rencontré Nicolae Ceausescu quand je suis allé en Roumanie.

Schofield : Comment était-il ?

Knuth : C'était un homme occupé qui, à ce moment-là, était entouré de caméras de télévision. Il a juste marmonné quelques mots. Beaucoup plus important, j'ai eu à rencontrer le roi de Suède. Ah oui. Jill et moi avons dîné avec lui et pendant une demi-heure, nous avons pu juste discuter.

Schofield : Quand était-ce ?

Knuth : J'ai eu une médaille par l'Académie suédoise, la médaille Adelsköld. Je devrais être capable de me rappeler en quelle année c'était. Oui, 1994.

Schofield : Du coup, vous êtes allé en Suède pour recevoir cette médaille ?

KNUTH : C'est exact. Il n'y a pas d'argent associé comme pour le prix Nobel. C'est une jolie médaille. Elle provient de la même Académie que celle qui donne les Prix Nobel. Elle est donnée tous les, je ne sais pas, dix ans ou quelque chose comme ça. Des personnes telles que Edison l'ont reçue par le passé.

SCHOFIELD : C'est un honneur, d'être en pareille compagnie, charmant.

KNUTH : Nous étions là et le roi a assisté à la cérémonie. Les Etats-Unis avaient un nouvel ambassadeur de Suède qui avait été recruté par Bill Clinton ; il venait de présenter ses références ou quelque-chose comme ça, et le roi nous a remis nos récompenses. Je lui ai parlé. Il parlait de ce qu'ils appelaient alors l'autoroute de l'information. L'Internet commençait tout juste et il expliquait que sa fille adolescente était intéressée par les ordinateurs et tout ça. C'était un homme charmant. Il était très timide et parlait vraiment très bien anglais. Il est dyslexique et les gens peuvent penser qu'il n'est pas aussi sympathique qu'il l'est réellement.

SCHOFIELD : Et concernant Gorbachev [Mikhail Gorbachev], qui a visité le campus deux fois ? Ne l'avez-vous jamais croisé ?

KNUTH : Je l'admire beaucoup. Pendant qu'il était ici, j'ai vu quelqu'un qui l'avait vu. Il y avait une telle foule. Mais j'ai pu regarder une personne et voir que cette personne voyait vraiment Gorbachev.

SCHOFIELD : Par associativité.

KNUTH : Oui.

SCHOFIELD : Que pouvez-vous dire d'autres personnes, je ne sais pas, des personnes célèbres ou qui sont intéressantes pour vous... Des informaticiens, peut-être les avez-vous tous rencontrés, ou des musiciens peut-être ?

KNUTH : Bien sûr, Stanford étant toujours je pense numéro un en informatique, tout le monde vient ici un jour. Stanford était si prestigieuse à l'époque, nous n'avons même pas un coin du marché maintenant. Je suis heureux qu'il y ait autant d'endroits dans le monde...

SCHOFIELD : Où ils font ce genre de bon travail ?

KNUTH : De bons endroits, oui. A l'époque, on admettait seulement vingt étudiants par an et seuls dix-huit valideraient leur diplôme. Cinq d'entre eux obtiendraient des récompenses de l'Agence Scientifique Nationale (NSF). Ils viendraient tous à Stanford. Tout bon endroit a accueilli ces personnes et a eu à les rayer de sa liste des meilleurs. Nous avons un taux de quatre-vingt dix pour cent d'admission.

SCHOFIELD : Pour les vingt qui étaient acceptés, combien avaient candidaté ?

KNUTH : Oh, trois cent. Oui.

SCHOFIELD : Vous avez travaillé aux admissions pour les diplômes, non ?

KNUTH : J'ai été président de ce comité à mon tour.

SCHOFIELD : Mais vous n'avez jamais été directeur du département ?

KNUTH : Non, non, non. J'ai dit à Stanford que la seule raison qui me ferait quitter serait si on me demandait d'être directeur du département *[rires]*.

SCHOFIELD : Vous saviez où étaient vos talents, vos centres d'intérêt et vos engagements ?

KNUTH : Je savais aussi où étaient mes défauts. Ok, dans le comité d'admission, j'ai inventé une procédure assez intéressante pour lire les candidatures, une sorte de modèle tel que tout candidat serait traité correctement mais qui ne prendrait pas trop de temps à être appliqué par le comité. Ils continuent à l'utiliser... J'ai écrit une sorte de modèle combinatoire dans ce but. Une fois, j'ai été directeur du comité des Curriculum et ils essayaient de décider de politiques pour les cours qu'ils donnaient aux premiers cycles. J'ai pensé "Ok, j'ai une bonne idée pour gérer ces questions de contentieux". Je vais louer le second étage d'un restaurant chinois, puis nous irons là-bas et tiendrons notre meeting et gérerons toutes ces histoires et nous résoudrons tous ces problèmes.

SCHOFIELD : Vous y êtes parvenus ?

KNUTH : Oui. On a bien travaillé. Tous les problèmes ont été résolus et nous sommes rentrés chez nous. Mais j'ai oublié de dire à quelqu'un quelle était la solution *[rires]*. Elle était sortie de mon esprit. Oui, je sais que je l'ai soufflée. En d'autres mots, comme administrateur potentiel, je suis un très mauvais communicant.

SCHOFIELD : Heureusement, quelqu'un a comblé le trou... Je pense que c'est ce que nous avions décidé n'est-ce pas ?

KNUTH : Je me suis finalement souvenu de la solution.

SCHOFIELD : Quand vous regardez le campus...

KNUTH : Il est très beau...

SCHOFIELD : ... ou sa culture, toutes ces choses, pendant cinquante ans, qu'est-ce qui vous frappe ? Les changements ici ?

KNUTH : Au premier chef, ce qui me frappe, c'est que je devrais plutôt traverser le campus vers un autre immeuble pour parler à quelqu'un, parce que c'est juste un merveilleux campus, plutôt que de prendre mon téléphone et de les appeler. Ca a changé, quoique. Si je prends le téléphone maintenant, je n'obtiendrai la plupart du temps qu'une voix de boîte mail. C'est rare que quelqu'un réponde à son téléphone, y compris dans les rares lieux réservés aux livres de la bibliothèque. Les gens trouvent que maintenant, ils ont cette machine qui prend les messages, et ils oublient cette partie de leur vie beaucoup plus souvent qu'ils ne le faisaient il y a cinquante ans. Mais maintenant je n'ai plus à faire cela si souvent parce que j'aime aller dans les jardins et regarder les immeubles devant lesquels je passe. Par exemple, j'utilise le site de la bibliothèque très intensivement et j'y trouve souvent des problèmes. Il y a un gars dénommé James Harris qui devrait répondre à mes mails quand je dis quelque chose à propos du site qui pourrait être amélioré. Je me demandais qui c'était. Je suis sorti “oh il est dans son bureau, pas dans la bibliothèque, mais dans la vieille école d'affaires”. Le quatrième étage a été modifié et vous ne pouvez pas monter là-bas à moins d'avoir une clef ou je ne sais quoi. Mais j'ai trouvé mon chemin jusqu'à son bureau... parlé à des gens de manière à ce qu'on me permette de le voir en personne. C'est la manière dont j'aime travailler à Stanford... Voir les gens. J'aime beaucoup ça. J'ai toujours aimé cet aspect de mon travail.

SCHOFIELD : Ca devient de plus en plus difficile. Je pense que vous avez raison.

KNUTH : Oui. L'autre chose est qu'il y a des constructions qui sont en train de se monter sur le campus. J'avais l'habitude de dire "Oh, comme ce sera beau quand cette construction sera terminée." *[rires]*. Maintenant je réalise que ça ne sera jamais terminé. Je dois changer mon chemin à vélo tous les quelques mois jusqu'à la fin de mes jours.

SCHOFIELD : Le changement est-il bon ? Je suis d'accord avec vous. Dans l'une de mes incarnations précédentes, j'avais des responsabilités pour des accès facilités au campus, et je pensais "ok, nous pouvons projeter peut-être cinq ou six immeubles vraiment importants et après, ça sera bon.". Jamais, jamais, jamais. Au début des années 70, je me rappelle qu'il y avait de belles clôtures en contre-plaqué, et quelqu'un avait peint "Stanford a un complexe compliqué." *[rires]*. Je crois que c'est vraiment le cas.

KNUTH : Oui. Il est nécessaire de toujours se réinventer soi-même. C'est la nature d'une université.

SCHOFIELD : J'imagine. Mais je pense que de bonnes idées peuvent naître dans de vieux immeubles.

KNUTH : C'est vrai. A chaque fois que vous ajoutez un nouvel immeuble, vous devez le maintenir pour toujours.

SCHOFIELD : Du coup, vous devez le remplir avec de nouvelles personnes et...

KNUTH : Je comprends. Ils vont détruire l'immeuble du département de Biologie, Herrin Lab, et en construire un nouveau pour le département d'informatique, pour nous, l'année prochaine.

SCHOFIELD : C'est vrai ?

KNUTH : Oui.

SCHOFIELD : Où est l'informatique en ce moment ?

KNUTH : Elle est dans l'immeuble Gates.

SCHOFIELD : Mais il y a besoin d'un autre immeuble ?

KNUTH : Oui, alors nous aurons deux immeubles.

SCHOFIELD : Est-ce parce que l'informatique grossit... le département ?

KNUTH : Vous vous moquez de moi ?

SCHOFIELD : Je sais que le domaine grossit, mais est-ce que votre département grossit ?

KNUTH : Oh absolument, oui. Nous avons également tellement de positions que nous ne pouvons remplir parce qu'il n'y a pas tant de personnes qualifiées que ça.

SCHOFIELD : C'est à cause de la faculté ?

KNUTH : Oui.

SCHOFIELD : Des postes d'enseignants de faculté. Pas seulement davantage de post-docs ou d'étudiants diplômés ?

KNUTH : C'est cela. Le domaine est en train de se développer extrêmement rapidement. Nous avons aussi beaucoup de notre faculté dans le... comment appelez-vous cela... Bio-X. Nous sommes beaucoup trop développés pour pouvoir organiser une party pour tout le département maintenant.

SCHOFIELD : Intéressant. Combien d'enseignants de faculté ?

KNUTH : Je ne sais pas. Il y en a environ soixante[6].

6. Note de l'éditeur : en 2018, le département d'informatique de Stanford compte 58

SCHOFIELD : Oh mon Dieu. Plus grand que quelques petites écoles. Peut-être que votre idée que cela devienne une Ecole d'Informatique était une bonne idée.

KNUTH : J'étais à Berkeley hier et j'ai remarqué qu'ils venaient juste de démarrer une nouvelle école de Science des données. Leur doyen va probablement demander que l'Ecole d'Informatique quitte l'Ecole d'Ingénierie et aille... Je ne sais pas.

SCHOFIELD : Une nouvelle Ecole de Sciences des Données. Je me damnerai.

KNUTH : Je ne sais pas. Je n'ai pas d'idée. Cela est très litigieux. J'ai parlé au gars... C'est tout nouveau et ils n'ont vraiment pas de curriculum. Leurs cours sont très populaires mais ils semblent changer chaque semaine. La manière dont les étudiants voient la science des données maintenant c'est : "cette semaine, nous allons étudier des données d'astronomie et la semaine prochaine, nous étudierons des données d'un autre champ." Chaque étudiant Google tout ce qu'il peut là-dessus et travaille dessus, et étudie, et après, ils vont faire ça sur un autre domaine.

SCHOFIELD : En parlant de Google, c'étaient vos étudiants ?

KNUTH : J'étais à la retraite mais nous avons vraiment travaillé ensemble. Je parlais toujours à Sergey [Sergey Mikhaylovich Brin]... mais pas tant que ça à Larry [Lawrence Edward Page], mais je connaissais Sergey assez bien. On avait fait un pari Sergey et moi sur qui de nous deux finirait le premier, lui, sa thèse, et moi *L'Art de la programmation des ordinateurs [rires].*

SCHOFIELD : Ils ont filé pour monter une sacrée boîte. Une dernière question, peut-être en est-ce une bonne[7]. Quelles sont vos opinions et observations à propos des relations entre Stanford et la Silicon Valley ?

KNUTH : C'est une merveilleuse source et un lieu catalyseur de nouvelles

professeurs de faculté, en comptant également les assistants, les maîtres-assistants, les adjoints à la faculté et les professeurs émérites.

7. segue ?

idées qui nous garde jeunes. Nous pouvons avoir des projets sur l'état de l'art pour nos étudiants et nous avons des professeurs invités tout le temps qui donnent des cours absolument de premier plan. C'est déprimant quand nous perdons leurs grandes qualités pour des start-ups. Beaucoup de départs en retraite anticipés sont venus de personnes qui ont réalisé que leurs compétences pouvaient changer le monde plutôt que changer une centaine d'étudiants. Nous les voyons encore fréquemment et certainement que le fait que Terman ait développé l'expertise en électronique et l'ait amené à la Silicon Valley a été bénéfique pour le monde et pour Stanford. C'était la raison pour laquelle Stanford a pu passer à autre chose et se réinventer elle-même.

SCHOFIELD : Je pense que quelques personnes s'inquiètent que peut-être les connexions soient trop profondes, que les entrecroisements entre quelques départements de Stanford et l'industrie ne sont pas sains. Mais je n'ai certainement pas la connaissance pour en juger.

KNUTH : Je ne sais pas. Je pense vous avoir dit que les choses que je comprends le moins au monde sont la finance et l'économie. Comme je l'ai dit, au début des années 70, je savais que si pour une raison ou pour une autre, l'université était amenée à fermer, je continuerais d'enseigner... je trouverais un moyen d'enseigner. C'était ma principale motivation. Mais alors j'ai fait ce travail de typograhie. Il n'y avait pas d'enjeu financier là-dedans. Mais je ne suis pas sûr que mon attitude soit l'attitude correcte à avoir en général.

SCHOFIELD : C'est l'attitude que vous avez.

KNUTH : Oui.

SCHOFIELD : C'est votre approche. Terminons.

KNUTH : Ok, merci Susan.

SCHOFIELD : Y a-t-il des questions que vous auriez souhaité que je pose, ou des commentaires que vous souhaitez faire en conclusion, au sujet de ces 50 années passées à Stanford ?

KNUTH : Juste que je suis comblé par votre merveilleuse manière d'interviewer.

SCHOFIELD : C'est gentil à vous, mais ça n'est probablement pas vrai.

KNUTH : C'est absolument vrai. Je ne peux imaginer comment l'interview aurait pu être mieux menée qu'elle ne l'a été. Je suis sûr que vous avez d'autres compétences, mais cette capacité à interviewer est indéniable.

SCHOFIELD : Merci. C'est une sorte de passion. J'ai beaucoup apprécié d'être impliquée dans ce programme, et d'aider à le faire se développer, ce programme d'Histoire parlée. Nous vous sommes si reconnaissants de nous avoir donné de votre temps, même après de si nombreuses interviews données ailleurs. Ces réflexions sur Stanford, en particulier, sont je crois d'une grande valeur.

KNUTH : Oui, vous avez été capable de poser le contexte de telle manière que je dise toutes sortes de choses que j'étais vraiment content d'enregistrer, et dont je ne pense pas qu'on les trouve sur les enregistrements précédents.

SCHOFIELD : Bien. Merci beaucoup.

Traduction d'une interview de

Donald E. Knuth

par

Innovations

sur

L'Art de la programmation des ordinateurs

http://www.informit.com/articles/article.aspx?p=1327952

Pour célébrer la publication des fascicules 0-4 du Volume 4 de *L'Art de la programmation des ordinateurs*, nous présentons une interview de Donald Knuth datant de 1996. Cette interview avait été menée peu de temps après que Don ait gagné le Prix Kyoto, et alors qu'il préparait la publication de nouvelles éditions des Volumes 1, 2, et 3 de *L'Art de la programmation des ordinateurs.*

Cette interview a été publiée dans le journal d'Addison-Wesley, Innovations.

Donald Knuth est en train de mettre à jour la totalité des trois volumes de sa série, *L'Art de la programmation des ordinateurs*, un des travaux les plus connus en informatique. Innovations l'a interviewé pour en savoir plus à ce sujet.

INNOVATIONS : Que considérez-vous comme les développements les plus importants depuis que vous avez commencé *L'Art de la programmation des ordinateurs (TAOCP)*?

KNUTH : Les développements les plus importants ont vraisemblablement été les idées de la programmation structurée (dans les années 70) et la programmation littéraire (dans les années 80). Mais je suis un fan de tous les développements, pas seulement les plus importants ; et, bien sûr, nous connaissons maintenant un très grand nombre de nouvelles techniques, spécialement par rapport au Volume 4 [à venir]. Quand j'ai commencé à écrire *TAOCP* en 1962, presqu'aucune des idées maintenant dans le Volume 4 n'avait été découverte ; presque personne n'avait même pensé à écrire un livre à propos des algorithmes combinatoires. Mais durant les années 70, plus de la moitié des articles écrits en informatique traitaient de ce sujet.

INNOVATIONS : Comment ces développements se reflètent-ils dans ces nouvelles éditions ?

KNUTH : Je suis repassé sur chaque page et j'ai mis à jour le matériau, quand j'ai pensé que le sujet avait "convergé" vers une forme que les gens considéreraient comme importante pas seulement maintenant mais également dans 50 ou 100 ans. De tels changements apparaissent tout au long des livres, plus clairement dans le chapitre sur les nombres aléatoires. D'autre part, de nombreux sujets dans les Volumes 1, 2, et 3 continuent d'évoluer rapidement. Dans de tels cas, je n'ai pas fait de mise à jour majeure ; j'ai simplement ajouté

une petite icône à la page, signifiant “désolé, toujours en construction”! Je ferai une mise à jour finale à ces livres quand j'aurai fini les Volumes 4 et 5; sinon, je devrais les réécrire à nouveau, et je n'aurais jamais fini. C'est plus important pour moi d'avoir le Volume 4 écrit que de garder les Volumes 1, 2 et 3 strictement à la page [1] à la minute.
Les nouvelles éditions contiennent des centaines de nouveaux exercices et de réponses aux exercices dont je sais qu'ils seront toujours instructifs; j'ai noté ces choses dans mes propres exemplaires des livres depuis les années 70, et je les rends publiques maintenant.

Innovations : Pourquoi réviser les Volumes 1, 2, et 3 avant de publier le Volume 4?

Knuth : Parce qu'ils n'ont pas été révisés depuis longtemps et que j'ai un mégaoctet de mises à jour dont je suis sûr que les gens aimeraient les connaître. Silvio Levy m'a permis de faire cela sans perdre trop de temps pour le Volume 4, parce qu'il fait le dur travail de convertir les vieux livres en Teχ et de tout bien mettre ensemble. Un autre ami, Jeff Oldham, a transcrit toutes les illustrations au format METAPOST, de telle façon qu'elles vont être améliorées aussi.
Et il y a une autre raison significative : en relisant et améliorant les Volumes 1, 2, et 3 de cette manière, je suis capable de m'assurer que le Volume 4 s'adapte bien à ces volumes, malgré le fait que j'ai laissé de côté cette rédaction pendant 13 ans pour travailler sur Teχ et METAFONT et *Mathématiques concrètes* et quelques autres livres qui devaient être écrits dans les années 80.

Innovations : Voyez-vous toujours cela comme un ensemble de sept volumes?

Knuth : Le Volume 4 sera découpé en trois sous-volumes : 4A, 4B, 4C. J'ai toujours considéré le sujet des Volumes 1-5 comme le “cœur de base” des méthodes informatiques pour les machines séquentielles. Ces volumes traitent des algorithmes qui sont utilisés pour des centaines d'applications différentes de toutes les branches de l'informatique. Du coup, après avoir terminé les Volumes 1-5, je pense sortir un seul volume version “résumé pour le lecteur”

1. *note de la traductrice* : en cohérence avec les développements courants.

qui résumera leurs points forts.
Inversement, j'ai toujours considéré les Volumes 6 et 7 comme des ramifications du cœur de base. Le Volume 6, sur la théorie des langages context-free, et le Volume 7, sur l'écriture des compilateurs, traitent de domaines très importants mais ils ne sont pas aussi centraux que les algorithmes dont je parle dans les Volumes 1-5.
Quand j'aurai fini d'écrire les volumes centraux - et s'il vous plaît, veuillez noter qu'il y en aura sept, puisque le Volume 4 se décomposera en les Volumes 4A, 4B, and 4C -, je reviendrai bien sûr aux Volumes 6 et 7, en supposant qu'ils auront toujours besoin d'être écrits. J'ai conservé beaucoup de bon matériau pour ces livres, et mes fichiers sont pleins de choses que je garde sous le coude pour les inclure dans ces livres un jour. Mais ça sera dans 15 ou 20 ans. Si je découvre que tout ce que je veux dire a déjà été dit par quelqu'un d'autre, alors je déclarerai ma série terminée et je serai heureux de déclarer le travail de toute ma vie terminé. Alors je partirai et j'écrirai la musique à laquelle j'ai rêvé pendant toutes ces années.

Innovations : Pouvez-vous nous dire le processus par lequel le Volume 4 sera finalement publié ?

Knuth : Je publierai ces soi-disants fascicules, de 128 pages chacun environ, à peu près deux fois par an. Ce sera des versions "beta-test" du livre final ; ils représenteront mes meilleurs coups, mais je suis sûr que les lecteurs seront capables de m'aider à apporter de nombreuses améliorations à l'édition finale. Le sujet est si vaste que je ne peux pas espérer que tout soit juste à mon premier essai. Charles Dickens a fait une chose similaire avec ses romans : il a publié des fascicules contenant les chapitres 1 et 2 avant d'avoir la moindre idée de la manière dont ses histoires se termineraient. De cette manière, il pouvait obtenir le meilleur retour de ses lecteurs.
Je vois mon rôle comme celui de porte-parole de nombreuses personnes qui développent des programmes ; j'essaie de présenter leurs découvertes d'une manière uniforme telle qu'un programmeur-de-la-rue qui ne lit pas le jargon scientifique avancé soit capable de les comprendre. J'ai passé 35 années de ma vie à rassembler une base de données de matériau et notes à propos de ces sujets, et je pense que mon point de vue (bien que biaisé) sera utile à de nombreux lecteurs ; c'est pourquoi j'espère avoir des lecteurs qui participeront et c'est pour cette raison que j'ai adopté cette stratégie des fascicules en prélecture.

Innovations : Qu'est-ce qui vous a inspiré pour démarrer ce projet ?

Knuth : Il n'y avait pas vraiment de guide fiable de la littérature en 1962. J'étais la seule personne à ma connaissance à avoir lu la plupart des choses présentes dans les journaux même si je n'avais pas découvert encore beaucoup de choses par moi-même ; et j'aime écrire. Du coup, je pensais que je pourrais rendre compte d'une manière plus équilibrée et moins biaisée que les personnes qui avaient fait les découvertes les plus importantes. Bien sûr, après que j'aie commencé, j'ai découvert quelques choses par moi-même, ce qui fait que mon avis est maintenant aussi biaisé que celui de n'importe qui. Mais vous m'avez demandé quelle était mon inspiration en 1962. Et la réponse est : il y avait un énorme besoin d'un livre tel que *L'Art de la programmation des ordinateurs*, mais toute personne qui était capable de l'écrire aurait un point de vue extrêmement partial !

Innovations : Quel est d'après vous le défi le plus grand que les programmeurs ont à affronter aujourd'hui ?

Knuth : La chose la plus difficile consiste à aller se coucher chaque soir, quand il y a tant de choses urgentes qui nécessiteraient d'être faites. Un écart énorme existe entre ce que nous savons être possible avec les machines actuelles et ce que nous avons été capables de faire jusque là.

Innovations : Qui a eu la plus grande influence sur votre carrière d'informaticien ?

Knuth : Bien sûr, j'ai été influencé par des géants du domaine comme Dijkstra, Flajolet, Karp, Schönhage, Tarjan, Yao, ainsi que par de grands mathématiciens comme de Bruijn. Mais l'informatique, comme toutes les sciences, grossit principalement par des milliers de petites étapes plutôt que par quelques pas de géants. Du coup, je suis convaincu que le Grand Edifice de l'Informatique est construit principalement sur les pierres de fondations auxquelles ont contribué des milliers de personnes qui ne seront probablement jamais des membres de l'Académie Nationale des Sciences. Ca a été un grand plaisir pour moi d'apprendre d'eux et d'essayer d'intégrer leurs merveilleuses découvertes à un ensemble cohérent. Certains grands informaticiens n'écrivent jamais de papiers ; j'apprends leur travail soit lors de conversations soit en lisant leurs programmes. Si seulement quelques “grandes influences” avaient été derrière mes livres, j’aurais fini de les écrire il y a de nombreuses années.

Innovations : Que pensez-vous de la guerre des langages avec C++, Java, etc. ?

Knuth : Eh bien, quoi de neuf ? Il y a eu de telles batailles depuis que j’ai appris à programmer comme jeune lycéen en 1957. Les langages vont et viennent plus vite que je ne peux écrire des livres. C’est pourquoi j’ai choisi d’expliquer les algorithmes en anglais, pas dans le langage du moment. Les lecteurs apprennent beaucoup en convertissant de l’anglais vers leur langage favori ; *L’Art de la programmation des ordinateurs* met en lumière les choses qui sont indépendantes des langages. Peu importe que les langages de programmation soit “tendance”, vous avez besoin d’avoir de bonnes idées pour les exprimer dans ces langages. Si vous voulez que vos algorithmes soient pré-écrits, bien, mais alors mes livres ne sont pas écrits pour vous.
Vraiment, je suis extrêmement content de voir que le développement des langages continue, pas seulement parce que les langages de programmation deviennent du coup de mieux en mieux de nombreuses manières, mais aussi parce qu’un tel travail fait dépenser énormément d’énergie à de nombreuses personnes - et donc les informaticiens n’écrivent pas les papiers que sinon, je devrais lire, et mes livres peuvent être terminés bien plus vite.

Innovations : A part écrire les nouvelles éditions de *L’Art de la programmation des ordinateurs*, à quoi utilisez-vous votre temps en ce moment ?

Knuth : Je nage avec plaisir, je joue d’instruments à claviers, et j’accepte des prix.

Innovations : Quelle a été votre première réaction lorsque vous avez appris que vous étiez récipiendaire du Prix Kyoto ?

Knuth : C’est un formidable climax pour ma carrière, même si je reste persuadé que je suis capable de faire un travail bien meilleur et un travail meilleur chaque année. Cela me rappelle qu’un jour, je commencerai à “redescendre”, du coup, je ferais mieux de terminer le Volume 4 bientôt.

La géométrie de l'incertitude

Dana Mackenzie

Pour additionner ou multiplier des nombres, chacun sait que l'ordre des termes n'a aucune importance : $1+2=2+1$. Mais, dans la vie quotidienne comme en mathématiques, la propriété de pouvoir ainsi "commuter" sans difficulté n'est pas la règle générale. Voici plus d'un siècle et demi qu'un astronome irlandais transforma la non-commutativité en élément perturbateur des mathématiques classiques. Après avoir bousculé l'algèbre et participé à l'avènement de la physique quantique, elle est désormais au cœur des développements de la géométrie contemporaine. Serait-elle aussi cachée derrière la physique des interactions fondamentales ?

Professeur de mathématiques en premier cycle universitaire pendant des années, je suis toujours resté stupéfait du nombre d'erreurs que commettaient les étudiants à propos de la commutativité. Glissez l'expression $(x+y)^2$ dans un examen et, comme attiré par un miroir aux alouettes, même quelques-uns des meilleurs élèves la développeront en x^2+y^2 (au lieu de $x^2+2xy+y^2$). Comme si les règles de l'arithmétique leur permettaient d'effectuer les opérations "additionner" et "élever au carré" dans n'importe quel ordre.

D'où vient cette fâcheuse habitude ? Je soupçonne qu'elle découle, en grande partie, d'une analogie incorrecte. A l'école primaire, en classe d'arithmétique, les enfants apprennent très tôt que l'ordre n'a aucune importance lorsqu'ils additionnent deux nombres. Pourquoi s'étonner si ces mêmes élèves, des années plus tard, confrontés à des expressions plus compliquées et pressés par le temps, s'en remettent inconsciemment à cette règle familière ?

Il est cependant curieux de procéder de la sorte. Après tout, hors de la salle de classe, personne ne tient la commutativité pour acquise. Lorsque l'on s'habille le matin, peu importe si on met sa montre avant ou après ses chaussures : "mettre sa montre" commute avec "mettre ses chaussures". "Mettre ses chaussettes", en revanche, ne commute pas avec "mettre ses chaussures" et même les jeunes enfants savent dans quel ordre effectuer ces gestes pour obtenir un résultat satisfaisant (quoiqu'ils puissent en décider autrement, histoire de rire un peu). En règle générale, en mathématiques, les nombres

Magazine La Recherche n° 307, Mars 1998,

commutent mais pas les opérations, ni les actions. La seconde partie de cette assertion, la non-commutativité des actions, est la pierre de touche de mathématiques peu connues, dont les implications vont du trivial au complexe. Elle sème souvent l'anarchie au cœur de théories dociles et prévisibles. Véritable farfadet théorique, elle surgit régulièrement, sous différents visages, dans les débats entourant les grands chambardements de la pensée mathématique. On la retrouve dans les bizarreries de la mécanique quantique, y compris dans le fameux principe d'incertitude du physicien allemand Werner Heisenberg. Au cours des dernières années, le sujet s'est libéré de ses origines algébriques et a permis d'élaborer une géométrie radicalement nouvelle qui, peut-être, contribuera au prochain bond en avant des physiciens vers une "théorie du tout" unifiée.

Pour se familiariser avec la non-commutativité, il faut tout d'abord savoir que toutes les opérations non commutatives ne sont pas similaires. Cela peut paraître étrange - après tout, les choses commutent où ne commutent pas, n'est-ce pas ? En fait, pas vraiment. Prenez deux navires qui lèvent l'ancre côte à côte à l'équateur. Un des navires parcourt 100 milles vers l'est puis vire de bord et couvre 100 milles vers le nord. Le second navire parcourt 100 milles vers le nord puis 100 milles vers l'est. Se retrouvent-ils au même endroit ?

Non ! Le second navire termine sa course à près d'un trentième de mille à l'est du premier. Si le trajet avait été dix fois plus long dans chaque direction, l'écart aurait atteint à peu près 32 milles - presque mille fois plus. La commutativité ne peut s'appliquer ici à cause de la courbure de la Terre ; de plus, l'erreur commise en l'appliquant dépend de la route suivie par les navires.

La non-commutativité s'impose quand il s'agit de démêler des nœuds. Alexandre le Grand, s'y essayant il y a vingt-trois siècles, finit par couper en morceaux le légendaire nœud gordien. De nos jours, les mathématiciens ne cessent d'apporter de surprenants raffinements à cette approche brutale. Grâce à la non-commutativité, John Horton Conway, de Princeton University, a pu mettre sur pied une ingénieuse méthode pour dénouer certains nœuds sans jouer du sabre.

C'est un Irlandais prodige en mathématiques, William Rowan Hamilton, qui fit entrer le fauve de la non-commutativité dans l'arène. Nommé astronome royal d'Irlande à 22 ans, il fut anobli à 30, et avait déjà atteint l'âge avancé de 38 ans lorsque, le 16 octobre 1843, il eut un trait de génie et résolut un problème qui lui résistait depuis plus d'une dizaine d'années. Hamilton fut l'un des premiers à reconnaître l'importance des nombres complexes. Il s'est ensuite acharné à découvrir de nouveaux systèmes numériques "par-delà" les nombres complexes. Observant que les nombres réels et complexes ordinaires obéissent aux règles de l'arithmétique - notamment l'associativité et la commutativité de l'addition et de la multiplication -, il espérait découvrir de nouveaux nombres exotiques ayant les mêmes propriétés. Mais, en dépit de tous ses efforts, ses recherches n'aboutirent pas (les mathématiciens savent aujourd'hui que de tels nombres n'existent pas). Hamilton comprit finalement qu'il pouvait se contenter d'un sujet de moindre envergure. Ce jour d'automne, il imagina en effet un système numérique satisfaisant toutes les règles habituelles sauf une : la commutativité de la multiplication. Il baptisa son nouveau système quaternions.

Avant même la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, les quaternions furent largement supplantés par d'autres outils plus flexibles, mais leur découverte ne manqua pas de laisser derrière elle au moins un héritage durable : les mathématiciens se sentirent libres de construire de nouvelles structures algébriques enfreignant les règles de l'arithmétique conventionnelle. Ces structures parmi lesquelles les groupes, ou l'algèbre de Clifford (cette dernière étant la plus réussie des généralisations modernes des quaternions), font maintenant partie de la panoplie du chercheur en mathématiques.

L'esprit d'Hamilton survit à travers les travaux des spécialistes contemporains de la géométrie non commutative, En supprimant la commutativité des axiomes d'un type particulier de structure algébrique découverte dans les années 1940, ils ont ouvert une voie menant à de nouveaux types d'espaces géométriques. Leurs travaux ont également été profondément influencés par un autre rebondissement qui, lié à la non-commutativité, se produisit dans le domaine de la physique.

Au début du siècle, la physique du monde subatomique semble prendre un visage de plus en plus étrange. Jusqu'alors, des particules telles que les photons et les électrons étaient considérées comme des objets ponctuels, auxquels on pouvait attribuer des nombres représentant des quantités observables, l'énergie par exemple. Puis, en 1925, Heisenberg esquisse le formalisme mathématique de la physique quantique moderne. Forts de la nouvelle théorie quantique, les physiciens passent “de l'autre côté du miroir”. Des quantités observables comme l'énergie ne sont plus décrites par des nombres mais par ce qu'on appelle des opérateurs, ou actions, agissant sur les particules. Ces dernières ne sont plus des points mais des fonctions d'onde.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, les nombres réels commutent mais, en général, les actions ne le font pas. En réinterprétant ce qui est observable à l'aide d'opérateurs, Heisenberg introduisit du même coup l'idée de non-commutativité. En particulier, il découvrit que les actions “mesurer la position de” et “mesurer la quantité de mouvement de” ne commutent pas. Lorsque l'on mesure la position d'une particule, son état est perturbé de telle sorte que sa quantité de mouvement ne peut pas être connue avec une précision optimale. On peut done voir le principe d'incertitude d'Heisenberg, qui stipule que la position et la quantité de mouvement d'une particule ne peuvent pas être connues simultanément avec des degrés de précision indépendants, comme une conséquence de la non-commutativité.

Les fondateurs de la théorie des quanta firent certainement preuve d'audace à propos de la matière et de l'énergie, mais ils se montrèrent plus conservateurs et tolérants vis-à-vis de la géométrie de l'espace. Ils assimilèrent l'Univers à ce que les mathématiciens appellent une variété, quelque chose de semblable à une feuille de caoutchouc lisse et continue ne possédant ni bords ni faux plis.

Dans un sens, les variétés sont des modèles de commutativité. Que l'on mesure la position d'une particule d'abord par rapport à un axe horizontal puis par rapport à un axe vertical ou vice versa, cela n'a aucune espèce d'importance : on obtient le même résultat dans les deux cas.

Il y a à peu près une quinzaine d'années, des théoriciens commencèrent cependant à concevoir de nouveaux espaces bizarres - des espaces originaux dans lesquels même des opérations simples telles que “mesurer la distance à partir du mur arrière” et “mesurer la distance à partir du mur latéral” ne commutent pas. La non-commutativité donnant lieu à l'incertitude, il s'ensuit que ces distances ne peuvent être connues simultanément. Imaginez-vous en train de chercher vos chaussures dans un placard quantique de cet acabit.

Dès que vous connaissez leur position exacte de la gauche vers la droite, leur image se dilue dans le sens de la profondeur.

Les espaces non commutatifs ont ouvert de nouveaux horizons en géométrie, comme le fit la théorie des quanta en physique. Depuis Euclide, les spécialistes de la géométrie considéraient les points comme des éléments fondamentaux, les “atomes” à partir desquels toutes les autres structures géométriques sont construites, le combustible des fonctions - ces relations mathématiques qui transforment les points en nombres. Les spécialistes de la géométrie non commutative balaient cette tradition vieille de 200 ans et, dans la foulée d'Heisenberg, ils opèrent une refonte de la géométrie, donnant la prépondérance non plus au point, mais à la fonction - un peu comme les physiciens remplacèrent l'idée de *particule* par celle de *fonction d'onde* en physique des quanta.

Le paysage qui en résulte est un monde chimérique, un monde composé exclusivement de verbes et dépourvu de noms, un monde où les seules réalités sont des actions mais où aucun obiet (points ou particules) n'est là pour s'y soumettre. Si les mathématiciens peuvent se satisfaire d'un tel univers fictif, il n'en reste pas moins qu'ils doivent savoir en revenir pour en expliquer les retombées sur le monde observable, ils doivent pratiquer une “ingénierie inverse” et transformer les fonctions en points, jusqu'à ce que tout objet ou relation dans l'un des espaces ait une interprétation dans l'autre. Etablir une telle correspondance est en tout point similaire à ce que Conway fit lorsqu'il trouva le moyen de coder numériquement les enchevêtrements de cordes.

Le problème de la transformation inverse fut résolu en 1943 grâce à un théorème démontré par le mathématicien Israël M. Gelfand, à l'époque exerçant en Union soviétique, actuellement à la Rutgers University de New Brunswick, dans le New Jersey. La méthode utilisée par Gelfand pour reconstruire l'espace est à la fois élégante et ironique. Dans un monde où les verbes sont des objets, fit-il remarquer, les noms doivent devenir des actions. Dans un sens, Gelfand apporta une réponse mathématique à la question posée par le poète irlandais William Butler Yeats à la fin de son poème *Among School Children* : “Comment connaître le danseur à partir de la danse ?”. Les danseurs sont des points, les danses sont des fonctions. L'approche de Gelfand (qui va à l'encontre de l'entendement) suggère que “la danse précède le danseur”. Pour connaître un danseur, il suffit d'observer l'artiste en train de danser - pas seulement *une* danse, plutôt *toutes* les danses possibles.

D'après le théorème de Gelfand, il est possible de reconstruire l'espace à partir de l'univers fictif des fonctions (auquel les mathématiciens donnent le nom obscur d'"algèbre C^*- commutative") si ce dernier satisfait à une courte liste de spécifications, ou axiomes. En tête de liste vient la commutativité : la multiplication des fonctions est commutative, tout comme la multiplication des nombres réels. Supposons alors que, suivant l'idée de Hamilton, on supprime la commutativité de cette liste d'axiomes. Ce critère aboli, des fonctions jusqu'alors interdites jaillissent du système axiomatique comme d'une boîte de Pandore. Mais quelle sorte d'espace obtient-on alors ? L'exemple le plus simple en a été proposé par Alain Connes, professeur de mathématiques à l'Institut des hautes études scientifiques à Bures-sur-Yvette. Connes est souvent considéré comme le père de la géométrie non commutative ; ses travaux lui ont d'ailleurs valu la médaille Fields, équivalent mathématique du prix Nobel. L'espace proposé par Connes est composé de deux points seulement.

Une fonction ordinaire opérant dans cet espace peut être représentée simplement par une paire de nombres. Mais Connes fait alors quelque chose d'extraordinaire : en inscrivant ces deux nombres dans les coins d'un tableau 2×2, il passe des fonctions ordinaires à une algèbre non commutative bien connue, l'ensemble des matrices 2×2. Or une de ces matrices a la propriété irritante d'interchanger les deux points. Cette matrice M étant néanmoins une citoyenne légitime du territoire fictif, il n'existe aucun moyen d'immuniser les points contre ses effets. Il est par conséquent impossible de distinguer les deux points. C'est bien là un principe d'incertitude !

L'exemple peut paraître badin mais il est loin d'être frivole. Connes a montré qu'en raffinant légèrement son espace à deux points, on pouvait obtenir un modèle d'univers permettant de faire des prédictions identiques à celles de la théorie physique qui unifie la force électromagnétique et la force faible responsable de la radioactivité. Connes soutient que, moyennant quelques modifications supplémentaires, il peut également incorporer la troisième force fondamentale de la physique : la force nucléaire forte.

L'essence même de l'espace quantique, on s'en souvient, est d'être "imprégné" d'incertitude. L'espace engendré par le modèle de Connes a une couleur beaucoup plus classique. Comme dans son espace à deux points, chaque point y “est jumelé” avec un alter ego indiscernable, Le déterminisme classique est maître des lieux, et l’incertitude provient uniquement du fait que l’on ne sait pas à quel point on a affaire. Mais Connes assure que cette incertitude est suffisante pour engendrer la totalité du modèle classique décrivant les interactions entre particules élémentaires.

Le modèle de Connes va encore plus loin : il permet en effet d’atteindre un niveau de prédiction inaccessible au modèle classique. En 1995, les physiciens Bruno lochum, Daniel Kastler et Thomas Schücker du Centre de physique théorique de Marseille montrèrent par exemple que, si la structure de Connes est correcte, la masse du boson de Higgs, une particule dont l’existence est prévue par la théorie peut être calculée avec précision, une fois la masse du quark top déterminée. Personne n’a encore observé le boson de Higgs, mais lochum et ses collègues pensent avoir découvert un lien entre cette particule et le quark top. *“Nous pensons,* déclarent-ils dans leur publication*, que la géométrie non commutative est sur le point de révolutionner la physique comme [...] le fit la géométrie de Riemann”.*

Connes insiste sur le fait que la géométrie non commutative est davantage qu’un simple outil facilitant l’étude de la théorie des champs quantiques. Même si elle ne permettait pas aux physiciens de réaliser leurs rêves, elle n’en resterait pas moins un outil mathématique valide et utile. Des ajouts récents au bestiaire des espaces non classiques pourraient d’ailleurs être mieux compris dans le contexte de la nouvelle formulation de Connes. La géométrie non commutative constitue par exemple un environnement naturel pour les fractales, ces figures devenues matière première du pop’art et de la science populaire. Il en est de même pour les pavages non périodiques, motifs construits à partir de formes s’imbriquant à l’infini sans laisser aucun vide et sans jamais se répéter. Pour les mathématiciens, l’aspect le plus surprenant des travaux de Connes est peut-être la facilité avec laquelle ils permettent de rassembler des concepts apparemment sans relation au sein d’une structure commune.

En géométrie non commutative, il existe une opération technique permettant de fusionner certains objets. Non sans humour, les mathématiciens l’ont baptisée en anglais *Connes fusion*. L’expression pourrait certainement s’appliquer à l’ensemble du sujet : un nouveau modèle fusionnant de nombreux cas particuliers, trop rebelles pour les géométries classiques et dont la non-commutativité est le lien caché.

Encarts et légendes des illustrations

LES NŒUDS DE CONWAY

J.H. Conway s'est penché sur un type de nœuds appelés *tangles*, qu'il définit comme des enchevêtrements quelconques de deux brins dont les quatre bouts restent visibles. Par commodité, on les prend répartis sur les quatre sommets d'un carré, et deux *tangles* sont considérés comme équivalents si l'on peut passer de l'un à l'autre en faisant tourner l'ensemble des brins à l'intérieur du carré. Le but est de démêler les deux brins de telle sorte qu'ils finissent parallèles et horizontaux sur le carré, comme les deux barres du signe =. Conway a démontré que pour une importante classe de *tangles* baptisés *tangles* rationnels, il suffit d'une suite de deux opérations élémentaires. La première opération consiste à saisir le paquet de brins et à le faire tourner de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre. Si l'on commence avec deux cordes côte à côte mais verticales (||), *tourner* donne le signe =.
Seconde opération : *torsader*. Tout en immobilisant les deux bouts situés à gauche, on torsade les deux bouts de droite de manière à faire passer le bout du haut par-dessus celui du bas. En torsadant la conformation = on obtient un *tangle* en forme de X pour lequel le brin descendant en diagonale vers la droite passe par-dessus l'autre. Si l'on torsade le *tangle* ||, on retrouve ce même *tangle* ||. Il est facile de s'apercevoir que les opérations *tourner* et *torsader* ne commutent pas. Par exemple, si l'on tourne puis torsade le *tangle* =, on obtient le *tangle* ||. Mais si l'on torsade avant de tourner, on obtient un X.
Conway attribue à chaque *tangle* un nombre qui représente son nombre de torsades. Le *tangle* = ne comportant aucune torsade, son nombre de Conway est zéro. Ensuite, on ajoute 1 par torsade. L'opération *torsader* pour les *tangles* correspond à l'opération ajouter 1 pour les nombres. Et pour l'autre opération, *tourner* ? A première vue, faire tourner un nœud ne semble pas affecter le nombre de torsades qu'il renferme. C'est là que Conway eut une intuition étonnante : tourner un *tangle* correspond en fait à prendre l'opposé de l'inverse de son nombre de Conway ($-1/n$). Par exemple, si l'on tourne un fangle contenant trois torsades, le *tangle* obtenu possède moins un tiers de torsade (nombre de Conway $= -1/3$).

On comprend aisément que n'importe quelle fraction puisse être obtenue avec une séquence appropriée de torsades et de tours. Etonnant, non ? Peut-être, mais ça marche. Pour démêler un *tangle* rationnel quelconque, il suffit d'annuler son nombre de Conway en lui infligeant une série d'opérations appropriée peu importe comment il avait été formé. En conférence, Conway a coutume d'expliquer sa méthode en sortant deux bouts de corde et en orchestrant la danse arithmétique de quatre volontaires autour d'un carré. Vous préférerez peut-être essayer avec des lacets de chaussures. Quoi qu'il en soit, jetez un coup d'œil au *tangle* figurant sur cette page (nombre de Conway : $-3/5$). Il résulte de la séquence $torsader - torsader - torsader - tourner - torsader - torsader - tourner$. Vous pourriez bien sûr le démêler en appliquant la séquence inverse, mais vous pourriez aussi procéder de la manière suivante : *torsader* ($-3/5 + 1 = 2/5$), puis *tourner* (-1 divisé par $2/5 = -5/2$), puis *torsader* trois fois ($-5/2 + 3 = 1/2$), *tourner* (-1 divisé par $1/2 = -2$), et enfin *torsader* deux fois ($-2 + 2 = 0$). Essayez !
Cette méthode fonctionne pour une raison : les manipulations correspondant à la torsade et au tour sont les reflets exacts des opérations arithmétiques utilisées pour calculer le nombre de Conway. Autrement dit, l'absence de commutativité affecte de manière similaire les opérations *torsader* et *tourner* d'une part et les opérations plus 1 et prendre l'opposé de l'inverse d'autre part. Par exemple, en prenant par deux fois l'opposé de l'inverse d'un nombre quelconque, on retombe systématiquement sur le même nombre. Transposé dans le langage des *tangles*, cela implique que tourner l'un quelconque d'entre eux deux fois d'affilée devrait redonner le même *tangle*. Pourtant, si l'on tente de tourner deux fois le *tangle* 3/5, on obtient un *tangle* d'aspect très différent. Il existe néanmoins un moyen de retomber sur la version initiale en manipulant les brins de ce dernier (voir schéma ci-dessous). On peut facilement trouver des relations plus subtiles. Par exemple, pour tout *tangle* rationnel, la séquence d'actions $torsader - tourner - torsader - tourner - torsader - tourner$ donne un *tangle* équivalent. Voyez-vous pourquoi ?

Hamilton

Passionné d'astronomie et d'optique, Hamilton est nommé astronome royal d'Irlande en 1827 à 22 ans. Egalement mathématicien, il a longtemps cherché à généraliser les nombres complexes avec des triplets de réels. Mais en 1843 il réalise soudain, lors d'une promenade dans Dublin, qu'il faut considérer des quadruplets. Sur la pierre d'un pont, il écrit alors les équations définissant les quaternions, première algèbre non commutative.

Heisenberg

En 1924, Heisenberg définit une loi de multiplication non commutative pour certaines variables quantiques décrivant la position et l'impulsion. Puis il donne les fameuses relations d'incertitude sur ces variables.

Le principe d'incertitude d'Heisenberg peut s'interpréter comme une conséquence de la non-commutativité.

Illustration par un tableau de Magritte

De même que Magritte défie les lois de la réflexion sur le miroir, la géométrie non-commutative malmène l'intuition en supprimant une habitude vieille comme le monde mathématique.

Promenades sur la sphère

Les trajectoires orange et jaune ne se terminent pas au même point, ce qui montre que les opérations "faire route de 100 milles au nord" et "faire route de 100 milles à l'est" ne commutent pas. On voit surtout que pour une distance de 1 000 milles, l'écart à l'arrivée est beaucoup plus grand. La noncommutativité n'affecte donc pas tous les résultats de la même manière.

Pour le mathématicien, cela signifie qu'il faudra modéliser les ensembles non commutatifs au cas par cas : quaternions, nœuds de Conway ou espaces de fonctions en mécanique quantique ne sont pas semblables ; il n'y a pas de non-commutativité universelle.

Non-commutativité et Alain Connes

Les spécialistes de la géométrie non commutative donnent la prépondérance aux fonctions et non plus aux points.

La géométrie non commutative est davantage qu'un simple outil facilitant l'étude de la théorie quantique des champs.

Père de la géométrie non commutative qu'il a développée à partir de 1977, Alam Connes a reçu la médaille Fields en 1982. Connes modélise l'incertitude quantique avec un espace où chaque point a un jumeau indiscernable.

La vérité est mathématique

Alain Connes

Lauréat de la médaille Fields, Professeur au Collège de France, organisateur de la "Rencontre du millénaire", Alain Connes est l'un des grands "découvreurs" de notre époque. Défenseur de la doctrine platonicienne selon laquelle le monde mathématique a une existence indépendante des constructions mentales, il vient de publier "Triangle de pensées", un livre d'entretiens avec André Lichnerowicz et Marco Schützenberger.

TANGENTE : Vous êtes le plus connu des mathématiciens français, mais vous l'êtes moins que d'autres scientifiques, les prix Nobel de physique, par exemple. Pourtant, la médaille Fields est en mathématiques l'équivalent du prix Nobel, et vos travaux figurent parmi ceux qui jouissent de la plus importante reconnaissance mondiale. On ne sait donc que peu de choses de vous. Einstein affirmait que l'univers appartenait aux monomaniaques. Avez-vous d'autres centres d'intérêt que les mathématiques ou la physique quantique ?

ALAIN CONNES : Les scientifiques connus du public ont tout fait pour qu'on parle d'eux. Pierre-Gilles de Gennes, par exemple, n'a pas hésité à faire le tour des établissements scolaires ou à prendre des positions discutables. Pour répondre à votre question, bien sûr qu'il y a d'autres activités dans la vie d'un chercheur ! La concentration fatigue. La musique, par exemple, permet de se libérer d'une certaine anxiété suscitée par cet excès de concentration.

Le contact précoce avec la musique prépare à la profondeur du raisonnement mathématique.

C'est ce qui m'arrive quand je joue du piano, surtout quand j'improvise. J'ai appris le piano à 5 ans, dans la ville de Draguignan où j'ai passé ma petite enfance. Puis je l'ai interrompu lorsque mon père, qui pensait que c'était préférable pour mon éducation, s'est installé à Marseille, adoptant pour la circonstance une vie dangereuse : d'inspecteur des contributions, il est devenu chef d'une brigade d'intervention qui arrêtait des trafiquants.
En reprenant le piano à 20 ans, je n'avais rien perdu de mes qualités (je peux jouer n'importe quel morceau d'oreille), mais j'ai eu du mal à me remettre à la discipline du solfège.

TANGENTE : La musique fait bon ménage avec les mathématiques, c'est connu. Avez-vous dû faire un choix entre disciplines littéraires et scientifiques ?

ALAIN CONNES : A passer des mathématiques à la musique, on ne ressent pas de véritable rupture. La similitude des structures ne peut être niée. Il y a là quelque chose de très profond. Songez au développement en fractions continues

Revue Tangente, août-septembre 2000, n° 76, © Tangente, l'aventure mathématique.

de $\log 3/\log 2$ et à la partition du "Clavier bien tempéré" de J.-S. Bach. Mais j'ajouterai que le contact précoce avec la musique prépare à la profondeur du raisonnement mathématique.
Pour les disciplines littéraires, j'ai mis plus de temps à mûrir. Aujourd'hui, en revanche, j'apprécie hautement la littérature.

TANGENTE : Von Neumann aimait le gin, Hardy s'intoxiquait à la cigarette, Erdös avalait de la Benzédrine. D'après-vous, peut-on se dispenser de drogues dans une activité de recherche ?

ALAIN CONNES : Moi, je suis drogué au café. J'ai un autre stimulant : l'agression des autres. Lorsque je subis des attaques ou des préjudices, cela décuple mon énergie. Le premier exemple auquel je pense est une affaire de plagiat dont j'ai été victime alors que j'étais jeune et naïf. J'écrivais des lettres de vingt pages pour leur faire part de mes progrès à des chercheurs qui travaillaient sur le même thème que moi. Une fois, un de mes "espions" dans l'ex-Union Soviétique me rapporta un fascicule recensant mes dernières trouvailles sous la signature d'un mathématicien dont je tairai le nom. Le milieu scientifique n'échappe pas aux margoulins. Le plagiaire en question s'estimait-il protégé par le rideau de fer ? Toujours est-il que j'ai attendu une occasion favorable, qui s'est présentée aux Etats-Unis, pour le mettre en face de son imposture.

TANGENTE : Comment travaillez-vous ? Quelle est la part de la recherche dans votre emploi du temps ?

ALAIN CONNES : Avec l'expérience, j'ai mis au point une méthode pour ne pas travailler dans le vide, et éviter que la mémoire de moments de recherche me trahisse : mes carnets. Ecrits au crayon mais très proprement, ils recèlent tous mes calculs et toutes mes idées qui ont abouti à quelque chose. D'un style plus libre que dans des articles, ils sont rigoureusement tenus à jour, au prix d'une ascèse quelquefois contraignante. Une sorte de "journal scientifique". J'ai aujourd'hui cent carnets.
Il m'est arrivé de passer trois semaines sur le même calcul, à raison de huit heures par jour, pour vérifier un résultat (nous étions deux à calculer indépendamment). Il m'arrive aussi, par exemple après l'intense période de recherche que représente un cours au Collège de France, de rester un mois à me consacrer à la littérature.

La recherche en temps réel

Un cours au Collège de France est un exercice extraordinaire de recherche en temps réel. Comme vous le savez, les cours ne doivent pas porter sur des sujets ayant déjà fait l'objet de publication. Alors, on prépare une piste, et on la suit, quinzaine après quinzaine, avec l'obligation d'apporter, d'un cours sur l'autre, de nouveaux résultats. Quelle stimulation ! La moitié de mes résultats de cette année a été produite pendant cette période de cours ! L'obligation de donner quelques cours - à dose homéopathique - est peut-être la seule chose qui manque au système français du CNRS, par ailleurs fort bon.

TANGENTE : Nous avons un bon système de recherche en France ?

ALAIN CONNES : Excellent. Je parle du CNRS et non des enseignants-chercheurs tiraillés entre deux missions incompatibles. A l'étranger, les situations des chercheurs sont fortement dépendantes de leur densité de publication. Vous connaissez le slogan "Publish or Perish". Alors, on est tenté de s'intéresser à des problèmes mineurs, pour faire paraître régulièrement des articles, au détriment des problèmes profonds, conceptuels. Savez-vous que Wiles, qui, pour parachever la démonstration du théorème de Fermat, n'a pas publié d'articles pendant quelques années, a failli perdre son poste ?

TANGENTE : Les sept problèmes du millénaire sélectionnés par le Clay Mathematic Institute sont conceptuels ? Est-ce pour cela qu'aucun d'entre eux ne peut être compris par le commun des mortels ?

ALAIN CONNES : Les sept problèmes résument l'inconnu d'un sujet, voire d'une branche des mathématiques, puisqu'ils ont été choisis pour recouvrir l'ensemble des domaines étudiés par les mathématiques. On ne peut donc les expliquer simplement, sauf à décrire en détail l'historique de chaque sujet. Des questions explicables en peu de mots à un public non averti peuvent être intéressantes, elles resteront anecdotiques, sauf exception. Le miracle de Fermat, c'est qu'un problème a priori mineur a pu être résolu parce qu'on l'a transformé, quelques siècles plus tard, en problème conceptuel.

TANGENTE : Il reste une place pour la recherche en amateur ?

ALAIN CONNES : Bien sûr ! Je pense même que ce sont des non professionnels qui trouvent souvent les choses les plus merveilleuses ! Je pense, par exemple, à l'algorithme de Lucas (voir en fin d'article). Mais il est peu vraisemblable que des amateurs résolvent une des sept questions Clay.

TANGENTE : Cette difficulté n'a pas gêné la médiatisation très forte de leur proclamation. En aurait-on parlé autant s'il n'y avait pas eu les millions de dollars ?

ALAIN CONNES : Non, bien sûr ! Même ainsi, ce n'était pas gagné d'avance. Il a fallu déployer une énorme énergie pour faire de cette conférence une réussite. Mais une telle organisation est intéressante, et reposante pour le cerveau. Nous avons bénéficié de circonstances favorables, le travail fait par les différents acteurs de l'année mondiale des mathématiques, l'efficacité du service communication du Collège de France...
Mais j'ai craint jusqu'au bout que la presse, ou même les mathématiciens, ne répondent pas à notre invitation.

Un continent à explorer

Tangente : Il est important que la presse parle de mathématiques ?

Alain Connes : Vital. Il faut que l'opinion publique, en particulier les jeunes en formation, comprennent ce que sont les mathématiques, et ce qu'elles ne sont pas.
Qu'elles sont à l'opposé de ce qu'Allègre a dit d'elles. Qu'elles n'ont pas vocation à être un instrument de sélection, qu'elle ne sont d'ailleurs plus. Qu'en aucun cas, et jamais, elles ne pourront être remplacées par des ordinateurs.
Qu'elles sont une irremplaçable usine à concepts.
Qu'elles constituent un continent à explorer qui n'attend que ses découvreurs.

Tangente : Un continent à explorer, c'est l'approche platonicienne que vous défendez depuis votre livre d'entretiens avec Jean-Pierre Changeux. Cette fois, dans "Triangle de pensées", les interlocuteurs sont des mathématiciens, aujourd'hui disparus. Le dialogue est plus crédible. car dans le premier livre, on avait souvent l'impression que Changeux ne comprenait rien à vos propos. Un livre passionnant, mais au prix de quels efforts de compréhension ! Pour qui ce livre est-il écrit ?

Alain Connes : C'est vrai que le livre est difficile. Un de ses buts est de faire comprendre aux mathématiciens eux-mêmes les conséquences du théorème de Gödel. Une grande découverte du siècle, avec ses conséquences philosophiques.

Tangente : L'autre partie du livre est consacrée aux liens avec la physique, la physique quantique en particulier. Vous êtes au fait, si ce n'est au cœur, des derniers états de la recherche en physique théorique. Y a-t-il beaucoup d'autres mathématiciens dans ce cas ?

Une explication à a renormalisation

Alain Connes : La physique utilise la géométrie non commutative. Et j'ai eu la satisfaction extraordinaire d'apporter, avec le physicien Dirk Kreimer avec qui je travaille ici à l'IHES, une explication à la renormalisation (voir définition en fin d'article) en la reliant au vingt-et-unième problème de Hilbert, qui fait appel aux mathématiques les plus profondes.
C'est vrai que les mathématiciens n'abordent pas toujours les problèmes de physique comme il le faudrait. Il y a ceux qui les sortent de leur contexte pour les résoudre comme des problèmes de mathématiques, et à l'opposé ceux qui cherchent carrément à lire dans la pensée de Dieu.
Moi, ce qui m'intéressait, c'était de savoir pourquoi les physiciens utilisaient telle ou telle recette, et pourquoi elle marchait. Et nous avons fini par trouver ! Il faut dire que tout le monde n'a pas la chance d'avoir, comme ici à l'IHES, des chercheurs de haut niveau de l'autre discipline à proximité. C'est presque par hasard que j'ai rencontré Dirk Kreimer, en allant écouter une de ses conférences.

TANGENTE : Cela serait exceptionnel qu'un mathématicien obtienne, après la médaille Fields, le prix Nobel de physique ! Pourquoi n'avez-vous pas invité des physiciens à vos entretiens de “Triangle de pensées” ? A quand des entretiens avec un philosophe ?

ALAIN CONNES : C'est vrai, nous aurions pu inviter un physicien. Cela s'est trouvé comme cela. Mais ce furent des moments extraordinaires. Aujourd'hui, chaque fois que je relis ce livre, j'entends leurs voix. Un entretien avec un philosophe ? Curieusement, j'ai peur que nous ayons du mal à trouver un langage commun. Je redoute les tiroirs, la classification. J'apprécie la clarté de pensée, mais je crains une philosophie qui ne se heurte pas à une réalité.
Je préfèrerais carrément un poète ! J'ai plus confiance dans la poésie que dans la philosophie.

TANGENTE : Pourtant, même à votre corps défendant, vous êtes vous-même un philosophe. Votre conception de la vérité mathématique est une philosophie. Vous avez affirmé dans La Recherche : “On s'apercevra un jour que la réalité matérielle se situe en fait à l'intérieur de la réalité mathématique”. Qu'entendez-vous par là, et y voyez-vous une des raisons de la “redoutable efficacité des mathématiques” ?

ALAIN CONNES : Les grandes découvertes nous le disent : rien n'est trop beau pour être vrai. Considérez d'un côté les trajectoires paraboliques, de l'autre côté les orbites elliptiques. Newton arrive. Une équation, quelques principes et tout s'éclaire. Envisagez maintenant une idée terriblement abstraite : le principe d'exclusion de Pauli. Et qu'obtient-on à la sortie ? Le tableau périodique des éléments de Mendeleïev. Si vous passez l'effroyable complexité du monde matériel à travers le tamis de la vérité scientifique, que reste-t-il ? De merveilleuses pépites mathématiques.

Propos recueillis par Francis Casiro et Gilles Cohen

Textes des encarts

La renormalisation

Les équations de la théorie quantique des champs engendrent des infinis et des divergences indésirables.
J. Schwinger, R. Feynman, S. Tomonaga et F. Dyson résolurent partiellement le problème aux alentours des années 50.
La théorie de la renormalisation permet d'escamoter par un tour de passe-passe mathématique les infinis qui pénalisaient la théorie.
Par exemple, un électron ne peut s'imaginer sans son champ électromagnétique. L'idée est de dissocier l'électron de sa charge, d'attribuer au premier une masse infinie et à la seconde une énergie infinie, et de s'arranger pour que les contributions réciproques se compensent afin de donner un résultat fini qui coïncide

avec la quantité observable.

Le test de primalité de Lucas-Lehmer

$2^p - 1$ est un nombre premier si et seulement si $2^p - 1$ divise $L(p-1)$, où $L(n)$ est la suite définie par $L(1) = 4$ et $L(n+1) = L(n)^2 - 2$ pour $n > 1$.
On a successivement, $L(1) = 4, L(2) = 14, L(3) = 194, L(4) = 37\ 634$. Ainsi, $15 = 2^4 - 1$ n'est pas premier car 15 ne divise pas $L(3) = 194$. En revanche, $31 = 2^5 - 1$ est premier car 31 divise $L(4) = 37\ 634 = 31 \times 1214$.

Ordinateur : le meilleur et le pire

Tangente : Quelle est donc la place de l'ordinateur dans la recherche mathématique ? Dans quelle mesure l'Internet a-t-il accéléré la vitesse de la transmission de l'information ? La masse des informations ne devient-elle pas démentielle ?

Alain Connes : Mon opinion sur l'ordinateur est contrastée. Un ordinateur peut être un excellent assistant, mais il ne faut pas lui donner plus d'importance que cela.
Oui, pour la circulation des idées et des informations. Avoir accès de manière instantanée aux dernières recherches, pouvoir lire des abstracts, consulter des encyclopédies électroniques vous donnant de manière ramassée les bonnes définitions et les théorèmes essentiels, facilitent grandement la vie d'un chercheur et représentent un gain de temps formidable. Alors, tout cela représente une masse d'informations considérable, mais les outils existent pour la digérer. Les choses se simplifient avec le temps. On a coutume de dire que les derniers mathématiciens universels, à pouvoir embrasser l'ensemble des connaissances, furent Hilbert et Poincaré. Ce n'est que partiellement vrai.
En dehors de cela, l'ordinateur est, pour moi, essentiellement nocif. Faites l'expérience. Arpentez les couloirs d'un centre de recherche. Et que voyez-vous dans les bureaux ? Des chercheurs vissés à leur machine, consultant leur courrier électronique ou tapant un article. Ce n'est pas du boulot de chercheur. Autrefois, avant l'avènement de l'ordinateur, quand on pénétrait dans un bureau, on se cognait à un matheux allongé sur le plancher, les yeux fixés au plafond, ruminant une idée ou en quête d'une illumination. "Sécher" devant sa feuille blanche est indispensable. L'ordinateur propose une échappatoire nuisible. On devrait imposer chaque mois une semaine sans e-mails.
Il existe un argument plus subtil à opposer à l'engouement pour l'ordinateur. La puissance calculatoire de la machine nous prive du sentiment, de l'intuition que peuvent apporter de longs calculs faits à la main. Je vous ai raconté qu'avec un collègue, chacun de son côté, nous nous sommes lancés dans une longue suite de calculs. On a obtenu le même résultat. Résultat décevant par ailleurs. On était parvenu à une certaine somme de trente-six termes. Si on changeait le signe de huit termes, on tombait sur un cocycle. Résultat qui lui était pertinent. On a pensé à une erreur. On a recommencé nos calculs, en pure perte. En se concentrant sur les détails du calcul, on a constaté l'oubli d'une donnée qui contribuait de manière négative à deux fois l'apport des huit termes. On retombait ainsi sur

nos pieds. A travers des détails de mille petits calculs, on a vu poindre l'esprit d'une algèbre de Hopf. La machine nous aurait donné un résultat brut, inexploitable, nous privant ainsi d'un résultat intéressant.
D'ailleurs vous pouvez constater qu'il n'y a pas d'ordinateur dans mon bureau.

Questions posées à Alain Connes dans le livre Mathématiques, un dépaysement soudain

Une démonstration est-elle éternelle ? Un théorème est-il éternel ?

La position du raisonnement mathématique par rapport à la vérité mathématique est analogue à celle des déductions du tribunal par rapport à la réalité extérieure. Un raisonnement juste est éternel mais il ne dévoile qu'une réalité partielle. Si l'on s'en tient même aux propriétés des entiers naturels, la plupart des propriétés vraies sont non démontrables à partir des axiomes de Peano. Un exemple simple est le fait que ce soit la tortue qui gagne dans la fable suivante du lièvre et de la tortue. L'on part d'un entier n par exemple $n = 9$ et on l'écrit en base 2. $9 = 2^3 + 1$. On écrit aussi tous les exposants en base 2, et ainsi de suite s'il y a à nouveau des exposants, de sorte que dans notre exemple on écrit l'exposant $3 = 2 + 1$ et $9 = 2^{2+1} + 1$. Le lièvre arrive et remplace tous les 2 par des 3, ce qui remplace 9 par $3^{3+1} + 1$, la tortue soustrait 1. Le lièvre réécrit le résultat en base 3, puis remplace tous les 3 par des 4, ce qui dans notre exemple donne 4^{4+1}. La tortue soustrait 1. Le lièvre réécrit le résultat en base 4, ce qui donne $3 \times 4^4 + 3 \times 4^3 + 3 \times 4^2 + 3 \times 4 + 3$, puis remplace tous les 4 par des 5, la tortue soustrait 1 et ainsi de suite. Eh bien, l'on sait démontrer grâce à la théorie des nombres ordinaux que, comme dans la fable, c'est la tortue qui gagne, c'est-à-dire que quel que soit l'entier n dont on parte, on arrivera toujours à 0 au bout d'un nombre fini d'étapes, malgré les bonds prodigieux du lièvre ! L'on sait aussi que l'énoncé "pour tout n c'est la tortue qui gagne" n'est pas démontrable au sein de l'arithmétique de Peano, de même que la non-contradiction de cette arithmétique n'est pas démontrable en son sein ! On peut comprendre que le nombre de pas nécessaires est extrêmement grand en prenant l'exemple très simple $n = 4$ pour lequel le nombre de pas est de l'ordre de $10^{121210694}$.

Vous souvenez-vous d'un rêve mathématique ?

La recherche mathématique se nourrit du "rêve" bien que celui-ci n'ait aucun droit de cité officiel, mais reste l'expression la plus pure de l'intuition. Mon "rêve" actuel a trait aux nombres que l'on définit, comme le faisait Euler, à partir d'expressions asymptotiques mais divergentes tels les nombres qui apparaissent naturellement dans les calculs de physique quantique. Ils sont définis de manière ambiguë et cette ambiguité n'implique plus des groupes finis comme dans la théorie de Galois, mais des groupes connexes comme ceux qui font encore défaut dans la théorie globale des corps de nombres.

Lorsque vous fermez les yeux, voyez-vous quelque chose de mathématique ?

Le propre du mathématicien est de créer des images mentales, c'est ainsi qu'une page de formules "parle" à un mathématicien, mais ces images mentales ont peu en commun avec la figuration du monde extérieur et n'ont de "sens" que de manière très intériorisée et difficilement transmissible.

Misha Gromov distingue quatre mystères dans le monde : la nature des lois de la physique, le mystère de la vie, le rôle du cerveau, le mystère de la structure mathématique reliée aux trois premiers. En voyez-vous autant, moins ou plus ?

L'on peut formuler nombre de questions. L'une des évolutions actuelles les plus frappantes est l'émergence progressive mais bien réelle d'une "super intelligence" qui se traduit par exemple au niveau de l'expérimentation en physique par l'expérience du LHC au CERN ou bien au niveau de la mémoire globale par Google. La puissance de l'ordinateur comme assistance au mathématicien est indéniable. Il reste heureusement ce terrain pour le moment inaccessible de l'intuition, de l'analogie où le cerveau humain a encore une avance considérable, que nous devons chérir et préserver à tout prix.

Le périple du mathématicien est un voyage dans une autre géographie, dans un autre paysage, au cours duquel il se heurte à une autre réalité. Cette réalité mathématique est tout aussi dure, tout aussi résistante, que la réalité matérielle dans laquelle nous vivons.

Texte extrait du livre Les déchiffreurs

L'impitoyable réalité

Préambule

Ce texte décrit une relation très personnelle avec les mathématiques, n'oublions pas que chaque mathématicien(ne) est un "cas particulier" et ce qui est dit ci-dessous n'engage que son auteur et ne saurait en aucun cas passer pour un point de vue "générique".

Les mathématiques sont de mon point de vue, avant toute chose, l'outil de pensée, le générateur de concepts, de loin le plus élaboré que nous ayons, simplement pour comprendre, en particulier, le monde qui nous entoure. Les nouveaux concepts sont engendrés par un lent processus de distillation dans l'alambic de la pensée.

Il est tentant au départ de vouloir diviser les mathématiques en domaines séparés comme la géométrie, science de l'espace, l'algèbre, art de manipuler les symboles, l'analyse, qui donne accès à l'infini et au continu, la théorie des nombres, etc., mais ceci ne rend pas compte d'un trait essentiel du monde mathématique, à savoir qu'il est impossible d'en isoler une partie sans la priver de son essence.

Acte de rébellion

En mathématiques de mon point de vue, le b a-ba c'est que l'on ne devient pas mathématicien en apprenant, on devient mathématicien en faisant des mathématiques. Donc ce n'est pas le "savoir" qui compte, ce qui est important, c'est le savoir-faire. Bien entendu, les connaissances sont absolument nécessaires - et il n'est pas question de faire table rase des savoirs acquis - mais j'ai toujours pensé que l'on progressait davantage en séchant devant un problème de géométrie qu'en absorbant toujours plus de connaissances mal digérées.

Ainsi, à mes yeux, on commence à devenir mathématicien plus ou moins par un acte de rébellion !

En quel sens ? Au sens où le futur mathématicien va commencer à réfléchir à un certain problème, et il va s'apercevoir qu'en fait, ce qu'il lit dans la littérature, ce qu'il lit dans les bouquins, ne correspond pas à la vision personnelle qu'il a du problème. Bien sûr, très souvent, cela correspond en fait à de l'ignorance, mais cela est sans importance du moment qu'il s'appuie sur une intuition personnelle et, bien entendu, sur la démonstration. Ainsi peu importe, parce qu'il va comprendre à cette occasion qu'en mathématiques il n'y a pas d'autorité ! Un élève de douze ans peut très bien tenir tête à son professeur s'il a trouvé une démonstration de ce qu'il avance et que cela singularise les maths par rapport aux autres disciplines où le professeur aurait beau jeu de se retrancher derrière des connaissances que l'élève n'aura pas. Un enfant de cinq ans peut dire à son père "Papa, il n'y a pas de plus grand nombre" et en être sûr, non parce qu'il l'a lu dans les livres mais parce qu'il en a trouvé une démonstration dans sa tête... Il y a un espace de liberté grand ouvert à celui qui sait le découvrir en respectant ses règles. Et la première chose qui compte, c'est de devenir soi-même sa propre autorité. C'est-à-dire, pour comprendre quelque chose, ne pas chercher tout de suite à vérifier si c'est écrit dans un livre, non ! Cela ne ferait que retarder l'éveil à cette indépendance. Ce qu'il faut, c'est vérifier dans sa tête que c'est comme ça. A partir du moment où l'on a compris cela, on peut, petit à petit, devenir très familier avec une toute petite portion du territoire mathématique et commencer un long parcours à travers ces territoires merveilleux que l'on essaie de dévoiler depuis son repère personnel.

Elan poétique

On peut dire qu'il y a deux aspects dans la tâche du mathématicien, il y a celui qui consiste à démontrer, à vérifier, etc., et qui demande une intense concentration, qui demande un rationalisme exacerbé, mais heureusement, il y a aussi l'aspect vision ! Et cet aspect vision, c'est un peu comme une mise en mouvement par l'intuition, qui n'obéit pas à des certitudes mais est plus proche d'une attirance de nature poétique. En simplifiant, il y a deux temps dans la découverte mathématique. Il y a un premier temps dans lequel l'intuition n'est pas encore formulable en termes transmissibles de manière rationnelle. Et dans cette période-là, ce qui compte, c'est la vision ! Non pas le côté statique, mais un espèce d'élan poétique.

Cet élan poétique est presque impossible à transmettre par les mots. Lorsqu'on essaie de le transmettre, lorsqu'on essaie de le dire, on arrive presque à le statufier, pour ainsi dire, et on perd cette espèce de mouvement qui est essentiel dans la découverte.

Ensuite, lorsqu'on a mis en place suffisamment de pièces du puzzle, et qu'on s'aperçoit que cette vision se traduit par des résolutions de problèmes, les choses changent. Par exemple, lorsque j'ai commencé à devenir mathématicien, une des choses qui m'a le plus frappé dans ce que j'avais trouvé - c'était au temps de ma thèse avec Jacques Dixmier - c'est qu'une algèbre non-commutative tourne avec le temps ! Ce que j'avais montré, c'est qu'en fait une algèbre non-commutative a une évolution dans le temps, qui lui est donnée de manière complètement canonique. Plus précisément, l'évolution qui était donnée par la théorie de Tomita, mais qui dépendait d'un état, ne dépendait en fait de cet état que modulo les automorphismes intérieurs, qui sont triviaux, qui n'existent pas. Donc ce que cela montrait, c'était que la non-commutativité engendrait le temps ! A partir de rien ! Simplement ! Comme ça ! Bien sûr il en résultait tout de suite qu'une algèbre a quantité d'invariants comme par exemple ses périodes, c'est-à-dire les temps t où l'évolution est triviale. Mais ces résultats, bien que parfaitement formulables et transmissibles n'épuisent pas le contenu poétique, la mise en mouvement merveilleuse de la trouvaille initiale.

Réalité mathématique

Il y a des poètes que j'admire beaucoup, comme Yves Bonnefoy, pour leur proximité au niveau méthodologique avec les mathématiques. Ce qui distingue, à mes yeux, le poète du mathématicien est que le matériau brut du poète, c'est l'expérience humaine dans la réalité matérielle. Et la poésie a pour ingrédient principal ce heurt entre l'être intérieur d'un individu et la réalité extérieure, qui tout le temps nous surprend par sa brutalité. Alors que le périple du mathématicien est un voyage dans une autre géographie, dans un autre paysage, au cours duquel il se heurte à une autre réalité. Cette réalité mathématique est tout aussi dure, tout aussi résistante, que la réalité matérielle dans laquelle nous vivons. Et la période qui est la partie vision ne suffit pas pour faire des mathématiques. C'est-à-dire qu'en contrepoint de cette partie vision, dans celle qui vient après la démonstration il y a les heures d'incertitude, de souffrance, qui consistent à avoir toujours peur de s'être trompé. C'est un peu la descente de la paroi qui consiste, cette fois, à être constamment obligé de regarder... On est obligé constamment de se dire : “Tiens, j'aurais pu me tromper ici, peut-être me suis-je trompé”. On n'en sait rien, on a toujours peur ! Il arrive qu'on passe des heures et des heures d'anxiété terrible, justement parce qu'on se heurte à une vraie réalité. Donc, ce n'est pas la réalité au sens ordinaire, mais elle est sans doute encore plus impitoyable.

La notion de vérité s'adresse alors à un monde qui est autre, qui n'est pas le monde de l'expérience humaine dans la réalité extérieure, mais qui est celui de la réalité mathématique. Le point crucial à comprendre est qu'alors que tant de mathématiciens ont passé leur vie à explorer ce monde, ils sont tous d'accord sur ses contours et sa connexité : quelle que soit l'origine de son itinéraire, un jour ou l'autre si le parcours est assez long et si l'on se garde de se confiner dans une aire de spécialisation extrême, l'on atteindra l'une de ces cités bien connues comme les fonctions elliptiques, les formes modulaires, les fonctions zêta, etc. "Tous les chemins mènent à Rome" et le monde mathématique est "connexe". Bien sûr cela ne signifie pas que toutes ses parties se ressemblent et Grothendieck dans *Récoltes et semailles* décrit ainsi son passage des paysages de l'analyse où il commença son parcours à ceux de la géométrie algébrique :

"Je me rappelle encore de cette impression saisissante (toute subjective, certes), comme si je quittais des steppes arides et revêches, pour me retrouver soudain dans une sorte de "pays promis" aux richesses luxuriantes, se multipliant à l'infini partout où il plaît à la main de se poser, pour cueillir ou pour fouiller..."

Alexandre Grothendieck

Galois

Ce que Galois a compris, d'une certaine manière, et c'est un peu le point de départ des mathématiques vraiment modernes, c'est qu'en fait, il faut être capable d'aller au-delà des calculs. C'est-à-dire ne pas faire les calculs, mais *en pensée* les faire ! Et comprendre quelle sera leur nature, comprendre quelles seront les difficultés qui vont se présenter, etc., mais sans vraiment effectuer concrètement les calculs, comprendre de quelle forme sera le résultat. Quelle symétrie aura le résultat. Et donc, dépasser cette espèce de gangue dans laquelle on s'engluerait facilement si l'on ne levait pas le nez du guidon. Il faut essayer d'en sortir par le haut, de réfléchir au niveau des symétries, etc.

"Sauter à pieds joints sur ces calculs ; grouper les opérations, les classer suivant leurs difficultés et non suivant leurs formes ; telle est selon moi, la mission."

Evariste Galois

Alors que ses prédécesseurs recherchaient des fonctions symétriques des racines d'une équation, Galois, lui, commence par briser la symétrie, pour y voir clair... Son point de départ est le choix arbitraire d'une fonction des racines qui n'admet *aucune* symétrie. La merveille est que le groupe d'invariance qu'il déduit du passage de cette fonction aux racines est en fait indépendant du choix arbitraire initial.

Loin d'être passées de mode, les idées de Galois irriguent encore les mathématiques contemporaines, simplement par leur simplicité et le mouvement qu'elles engendrent. La théorie des motifs due à Grothendieck est une généralisation naturelle de la théorie de Galois en dimension > 0 c'est-à-dire, si l'on veut, aux polynômes à plusieurs variables. Ces développements actuels, comme ceux de la théorie de Galois différentielle, se situent directement dans la dynamique des idées de Galois. Il convient de citer la fin de sa lettre testament.

"Tu sais, mon cher Auguste, que ces sujets ne sont pas les seuls que j'aie explorés. Mes principales méditations depuis quelque temps étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté. Il s'agissait de voir a priori *dans une relation entre des quantités ou fonctions transcendantes quels échanges on pouvait faire, quelles quantités on pouvait substituer aux quantités données sans que la relation pût cesser d'avoir lieu. Cela fait reconnaître tout de suite l'impossibilité de beaucoup d'expressions que l'on pourrait chercher. Mais je n'ai pas le temps et mes idées ne sont pas encore assez développées sur ce terrain qui est immense."*

Evariste Galois

Algèbre et musique

Il est crucial, à mes yeux, pour un enfant, d'être exposé très tôt à la musique. Je pense qu'exposer un enfant à la musique, vers l'âge de cinq ou six ans, permet d'équilibrer un petit peu la prépondérance dans son intellect du sens de la vue, de cette richesse incroyable purement visuelle, qu'un enfant acquiert très tôt et qui donc, en fait, est reliée à la géométrie. La musique permet de l'équilibrer par l'algèbre, c'est-à-dire qu'elle s'inscrit dans le temps, exactement comme l'algèbre s'inscrit dans le temps. Dans les mathématiques il y a cette dualité fondamentale entre d'un côté la géométrie, qui correspond aux aires visuelles du cerveau, et qui donne une intuition instantanée, immédiate. On voit une figure géométrique, boum ! C'est ça, c'est tout, on n'a même pas besoin d'expliquer, on n'a pas envie d'expliquer. Et d'un autre côté, il y a l'algèbre. L'algèbre, cela n'a rien de visuel, en revanche, cela a une temporalité, ça s'inscrit dans le temps ! C'est le calcul, etc. C'est quelque chose qui évolue, et c'est quelque chose qui est très proche du langage et qui donc a la précision diabolique du langage. Et l'on peut percevoir cette puissance, l'élaboration de l'algèbre, à travers la musique. Donc, pour moi, il y a une connivence incroyable, justement, entre la musique perçue comme cela, et l'algèbre. Par exemple, j'adore certains préludes de Chopin parce que je trouve qu'ils ont exactement cette merveilleuse propriété de condensation, de distillation. C'est une musique qui arrive dans une pièce un petit peu comme si la fenêtre s'ouvrait brutalement par un coup de vent, et puis repart de l'autre côté. Condenser une idée sous sa forme la plus limpide, sous la forme la plus pure qui soit... L'algèbre, c'est ça, d'une certaine manière.

Conseils

Je terminerai ce texte sur quelques conseils "pratiques".

Faire un tour

Une pratique bien saine, quand on est aux prises avec un problème très compliqué (souvent impliquant des calculs), est de partir faire un long tour à pied (sans papier ni crayon) et de faire les calculs mentalement (en ignorant l'impression de départ "c'est trop compliqué pour ça"). Même si l'on n'y réussit pas, cela entraîne la "mémoire vive" et aiguise les dents de l'intellect.

Divan

Les mathématicien(ne)s ont en général le plus grand mal à faire comprendre à leur conjoint que le moment où ils travaillent le plus intensément est lorsqu'ils sont couchés dans l'obscurité sur un lit. Malheureusement l'invasion des écrans d'ordinateur et du courrier électronique tend à rendre cette manière de se concentrer de moins en moins courante ; elle n'en est que plus précieuse.

Etre courageux

Il y a deux temps dans la découverte mathématique, il y a un temps dans lequel il faut être courageux : il faut monter le long de la paroi, et ne jamais regarder en bas... Pourquoi ? Parce que si vous commencez à regarder en bas, vous allez dire : "Oui ! Mais bien sûr, Untel a déjà regardé ce problème, il n'est pas arrivé à le résoudre, donc il n'y a aucune raison que j'y arrive."

Et vous allez trouver trente-six raisons rationnelles qui vont vous empêcher de monter. Donc il faut faire complètement abstraction de cela. Il faut en quelque sorte “protéger son ignorance” pour permettre l’éclosion d’une idée sans la dissoudre prématurément dans le bain des connaissances à l’instant t.

Stress

Il arrive souvent dans la vie d’un mathématicien (souvent dès le début) d’être confronté à des difficultés dues à l’âpreté de la compétition. Par exemple, on reçoit un “preprint” d’un compétiteur sur le même sujet que celui sur lequel on travaille et l’on sent une pression déraisonnable pour publier vite. La seule recette que je connaisse dans ces cas-là est d’essayer de transformer ce sentiment de frustration en énergie pour travailler plus dur.

De mauvaise grâce

Un de mes collègues me confiait il y a longtemps : “Nous (les mathématiciens) travaillons pour l’approbation à contrecœur de quelques amis.” Il est vrai que comme le travail de recherche est de nature plutôt solitaire, le chercheur ressent le besoin d’approbation, d’une manière ou d’une autre. En vérité il ne faut pas attendre grand-chose, les mathématiciens sont avares de louanges. La vérité est qu’il n’y a qu’un seul véritable juge qui compte en la matière, c’est soi-même. Et il n’y a pas moyen de transiger avec celui-là. Trop se préoccuper de l’opinion des autres est simplement une perte de temps, aucun théorème n’a été jusqu’à présent démontré par référendum et comme le dit Feynman : “Why do you care what other people think !”

Le point de vue d'Alain Connes [1]

Dès que j'ai su compter, j'ai été fasciné par la clarté des nombres, et ce sentiment de sérénité a été amplifié à mesure que j'ai assimilé de nouvelles connaissances. Je n'ai toutefois jamais eu l'impression que les mathématiques étaient d'accès facile : ma démarche est assez lente... mais pugnace. En recherche, les mathématiciens dits «rapides», s'ils voient et formulent très vite la difficulté centrale d'un problème, ne le résolvent pas plus rapidement que les autres : une chose est d'arriver au pied du mur, une autre de le sauter. Ce qui m'attriste un peu dans la sélection par les mathématiques, c'est qu'elle est fondée sur la rapidité à résoudre des problèmes.

J'ai toujours eu le désir de vérifier mon aptitude à surmonter les difficultés ; mes collègues tenaces me sont plus sympathiques et me semblent plus productifs que ceux qui, bien que très rapides, abandonnent trop vite devant l'obstacle. J'ai résolu à 28 ans un problème sur lequel j'ai travaillé un an à temps plein et trois ans à temps partiel.

Bien sûr, il faut faire des gammes pour maîtriser la technique mathématique d'un domaine. La semaine qui suit un mois de vacances est difficile : on se sent «sale», on souffre de courbatures comme un sédentaire après un effort physique. À l'inverse, quand on est immergé dans un sujet, on en maîtrise la technique et on est à l'aise avec sa conscience de mathématicien.

La vie à Draguignan, puis à Marseille, où j'étais lycéen, me laisse un souvenir de soleil. J'aimais le baby-foot et le rugby, et je lisais assez peu : j'avais des préoccupations normales mais non supérieures. L'atmosphère parisienne me surprit : à Marseille, je n'étais pas beaucoup tracassé par mes possibilités

1. extrait d'un Dossier intitulé Les mathématiciens d'un ancien magazine Pour la Science.

intellectuelles ; à Normale et dans le milieu étudiant, tout le monde avait des préoccupations intellectuelles.

Je ne voudrais pas donner l'impression que mon enfance et mon adolescence n'ont pas été studieuses. Mes parents s'occupaient beaucoup de nous, nous faisaient réciter toutes nos leçons deux fois et ne nous accordaient, à mes frères et à moi, qu'un mois de vacances : en dehors de cette période, nous avions des devoirs à faire, ce qui créa entre nous une certaine connivence pour trouver les solutions corrigées des problèmes et les traductions des versions latines. Beaucoup de mes impressions de lycée sont des souvenirs de bon élève : l'affectueuse mais ferme discipline parentale ne laissait pas de place à l'échec. Un des problèmes actuels de l'éducation est que les parents se reposent peut-être trop sur l'école et sont trop stressés ou épuisés pour aider leurs enfants. C'est dans la disponibilité qu'il y a une inégalité sociale, plutôt que dans les capacités techniques des parents à aider les enfants. Comment s'étonner que les enfants laissés sans soutien réussissent mal ? Bien des difficultés à l'école sont d'ordre psychologique et affectif,la non-compréhension des mathématiques par exemple.

Mon examen d'entrée à l'École Normale a été picaresque : j'ai été paralysé d'incompréhension pendant la première épreuve, la composition principale de mathématiques, et j'ai rendu une feuille quasiment blanche ; j'étais obnubilé par un autre candidat qui couvrait à toute allure sa feuille de calculs. En sortant de la salle, je vis en un éclair ce que j'aurais dû faire, constatation qui acheva de me démoraliser. Si des amis ne m'avaient soutenu en m'emmenant à la plage et en me distrayant, je ne serais pas allé aux autres épreuves où je réussis suffisamment bien pour passer l'obstacle. Ainsi j'ai réussi grâce à mes copains ; nous sommes tous, un jour ou l'autre, exposés à un échec que nous surmontons plus facilement quand nous pouvons puiser dans un réservoir affectif.

Après l'École Normale, nous habitions dans la banlieue Nord de Paris, en dehors de tout. Mes beaux-parents m'avaient prêté un bureau où je travaillais tous les jours, seul. Je me promenais beaucoup et, pendant ces promenades, je réfléchissais au problème qui m'intéressait, et qui me battait dans la tête ; lorsque j'avais trouvé quelque chose, je revenais pour l'écrire dans un de mes cahiers de travail. Une fois par semaine, j'allais à un séminaire, et quand j'avais fait une petite avancée je l'expliquais à mon directeur de thèse, Jacques Dixmier. Je vivais cette journée comme un test de ma compréhension des mathématiques, mais j'avais besoin de l'isolement pour cultiver mon propre jardin mathématique qui combinait l'algèbre et l'analyse. Cette combinaison de sujets était difficile, car elle faisait appel à des sensibilités que les mathématiciens ne développent en général pas simultanément. J'ai bien aimé cette vie qui paraît monacale, car on forme ses outils en attaquant un problème difficile, en dehors de la mode du moment.

En taupe, je m'intéressais déjà à des techniques personnelles, en dehors des sentiers battus : je traduisais les propriétés différentielles en propriétés de différences finies ; j'ai rempli des cahiers de résultats et je regardais tout à partir de ce jardin privé. Quand je suis en voyage, une de mes distractions est d'acheter un cahier ; je le choisis avec un soin maniaque, puis je l'entrepose dans un tiroir, comme un souvenir, pour l'utiliser quelques années plus tard. J'ai ainsi accédé à ce que l'on appelle la réalité mathématique en m'appropriant un petit territoire que j'ai agrandi par la suite. Plus tard, à l'Institut des Hautes Études Scientifiques, j'ai élargi mon champ d'intérêt de manière naturelle, avec ma méthode personnelle et polarisée de voir les choses. Il y a des domaines des mathématiques qui sont simples, mais que je ne comprends pas, car ils ne s'insèrent pas dans mon domaine de recherches.

J'ai un souvenir précis des circonstances exactes de deux de mes découvertes. Pour la première, j'avais accompagné ma femme en voiture, au lycée où elle enseigne : en revenant, alors que je pensais, croyais-je, à tout autre chose, j'eus la certitude absolue, devant un feu rouge, que les calculs longs et pénibles que je faisais depuis six mois s'éclairaient à la lueur d'une astuce mathématique qui allait devenir classique, le *two by two matrix trick*. Je n'étais pas parvenu à la découverte par un raisonnement, tout s'était passé comme si mon inconscient s'était brutalement exprimé.

La seconde expérience se passe au Canada, où j'avais été envoyé au titre de la coopération. Je faisais régulièrement la même promenade sans progresser d'un millimètre dans mon problème, lorsqu'un jour j'eus l'impression que tout pouvait se débloquer, ce que je vérifiai à ma table de travail. J'eus alors le sentiment de ne pouvoir exprimer ma joie ; des éléments chaotiques et incontrôlables s'organisaient en un tout cohérent.

Le mois qui a suivi a été assez pénible, car je devais remplacer l'intuition par une démonstration rigoureuse et je naviguais d'épouvante en épouvante : ne me serais-je pas trompé ? Le résultat me comblait tellement que je ne pouvais laisser une erreur ou même un doute ; aussi je refaisais cette assez longue démonstration qui fondait mon résultat, dans le bus, quand j'étais invité à dîner, partout. Ensuite j'ai pu la montrer à des collègues. On reproche quelquefois aux mathématiciens d'être introvertis ; comment pourrait-il en être autrement, du moins pendant la période de leur vie où ils cherchent ? Pour naviguer ainsi à l'aveugle dans des zones inexplorées, il faut qu'ils soient persuadés qu'une petite lumière éclairera leurs travaux. Le parcours personnel semble métaphysique, mais il y a une différence fondamentale : la nature universelle de la réalité mathématique. Qu'est-ce que cette réalité mathématique ? En physique on peut définir de façon précise la réalité qui est perceptible par le grand public, même si certains objets de la physique, les particules élémentaires par exemple, ne sont pas directement accessibles aux sens. La réalité mathématique est d'assimilation plus difficile, elle s'acquiert par un sens que l'homme ne possède pas naturellement.

Pour expliquer cette réalité, il ne faut pas choisir un beau théorème car on rentre trop vite dans la technique ; je choisirai plutôt les contraintes qui établissent les limites de l'univers mathématique. Comme un enfant, qui apprend à se déplacer, perçoit les contraintes du monde extérieur en se heurtant à des obstacles, le mathématicien distingue le possible de l'impossible. Abel et Galois ont démontré qu'on ne pouvait résoudre les équations de degré supérieur à 4 avec des radicaux ; c'est par ces impossibilités que la réalité mathématique se manifeste et aussi par la structure harmonieuse que notre invention mathématique élabore. Ainsi la théorie des groupes rassemble en une structure une multitude d'objets et d'opérations mathématiques disparates.

À la différence de la métaphysique, la réalité mathématique est objective : elle n'est pas tangible, mais éternelle et immuable. C'est un monde virtuel non localisé dans l'espace ni dans le temps. La science la plus proche des mathématiques serait, à ce point de vue, la cosmologie qui étudie les propriétés de l'espace et d'un univers également immuable.

On peut se demander pourquoi les mathématiciens ont mis si longtemps pour résoudre des problèmes d'énoncés assez simples comme le théorème de Fermat. Je crois que c'est parce qu'ils ne s'intégraient pas de façon harmonieuse dans l'univers des mathématiques ou encore que l'on ne comprenait pas assez bien la signification du problème posé.

Distinguons, en recherche, les méthodes inductives et projectives ; le théorème de Fermat a été une constatation inductive, il est vérifié par tous les nombres que l'on essaie. Les mathématiciens élaborent des structures pour cerner la vérité de façon projective, établissant des résultats jusqu'à ce que les questions non résolues et pressenties de manière inductive tombent naturellement dans leur escarcelle. C'est alors qu'ils ont l'impression que la question est bien comprise, qu'elle s'insère bien dans le corpus des mathématiques.

C.R. Acad. Sc. Paris, t. 286 (19 juin 1978) **Série A - 1175**

ALGÈBRE. - *Une caractérisation des mots périodiques.*

Note[1] de **Yves Césari** et **Max Vincent**, transmise par M. Marcel Paul Schützenberger.

En réponse à une question de M. P. Schützenberger[2], nous établissons la périodicité des mots du monoïde libre dont toute lettre accepte un double recouvrement.

We establish the periodicity of words in which all letters admit a double covering.

A* étant le monoïde libre de base A et m une application du segment $(1, n)$ de N dans A, nous noterons $(1, n)m$ le mot non vide de A* de longueur n dont la lettre de rang $i(1 \leq i \leq n)$ est l'image de i par m et pour $1 \leq i \leq j \leq n$ nous noterons $(i, j)m$ le facteur de $(1, n)m$ commençant au rang i et finissant au rang j.

Nous dirons que i est doublement recouvert s'il existe des entiers p, q, r, s $(1 \leq p \leq r \leq i \leq q \leq s \leq n)$ tels que

$$(p, q)m = (r, s)m.$$

Ceci implique que $(i-k, i)m = (i, i+k)m$ où $k = r - p = s - q \geq 1$. Nous utiliserons la définition du double recouvrement sous cette forme réduite.

Soit i un indice doublement recouvert, nous noterons k_i le plus petit entier (≥ 1) tel que

$$(i - k_i, i)m = (i, i + k_i)m.$$

Nous dirons qu'un facteur $(\alpha, \beta)m$ de $(1, n)m$ admet une translation de $p(\geq 1)$ si pour tout i vérifiant $\alpha \leq i < i + p \leq \beta$ on ait

$$(i + p)m = (i)m.$$

Un facteur $(\alpha, \beta)m$ est périodique de pas p si p est la plus petite translation de $(\alpha, \beta)m$.

Enfin nous noterons (u, v) un segment de $(1, n)$ tel que tout indice $i(u \leq i \leq v)$ est doublement recouvert et nous noterons $k = \sup_{u \leq i \leq v} k_i$.

Lemme 1. - $(u - 1, v + 1)$ admet une translation de k.

Preuve. - Si $k = 1$, les k_i sont tous égaux à 1, donc $(i-1)m = (i)m = (i+1)m$ pour $i \in (u, v)$, c'est-à-dire $(i)m = (i + 1)m$ pour $u - 1 \leq i < i + 1 \leq v + 1$.

1. Séance du 3 avril 1978.
2. **M. P. Schützenberger**, A Property of Finitely Generated Submonoids of Free Monoïds [Colloque de Szeged, G. Pollak, North-Holland (à paraître)]

Supposons la propriété vraie pour tout k_0 tel que $k_0 < k$ et montrons qu'elle est vraie pour k.

Si elle est fausse il existe j dans $(u-1, v+1-k)$ tel que $(j)m \neq (j+k)m$. Mais alors pour tout i dans $(j, j+k) \cap (u,v)$ on a $k_i < k$. Or, il existe l dans (u,v) tel que $k_l = k$. Nous continuons la preuve pour le cas où $l < j$ (si $l > j+k$ une preuve analogue utilisant la symétrie des énoncés permet d'aboutir).

Plus précisément, on note l le plus grand indice inférieur à j tel que $k_l = k$. Pour tout i dans $(l+1, l+k), k_i$ est défini puisque

$$l + k < j + k \leq v + 1$$

et de plus $k_i < k$.

Posons $k_0 = \sup\limits_{l+1 \leq i \leq l+k} k_i$.

Par hypothèse de récurrence $(l, l+k+1)m$ admet une translation de k et *a fortiori* il en est de même pour $(l, l+k)m$. Donc

$$(l, l+k-k_0)m = (l+k_0, l+k)m,$$

mais, puisque $k_l = k$, nous avons aussi

$$(l-k+k_0, l)m = (l+k_0, l+k)m,$$

par conséquent

$$(l-k+k_0, l)m = (l, l+k-k_0)m,$$

ce qui donne

$$k_l \leq k - k_0 < k,$$

ce qui contredit l'hypothèse et établit le lemme.

Lemme 2. - Si $u \leq j < i \leq v$, $k_j < k$ et $k_i < k$ alors il existe $l < i$ tel que $k_l = k$ et $l + k > i + k_i$.

Preuve. - Par récurrence sur k.

La propriété est vraie pour $k = 1$.

Supposons-la vraie pour $k_0 < k$ et montrons qu'elle est vraie pour k. Si elle est fausse, soit l le plus grand indice inférieur à i tel que $k_l = k$. Alors pour tout $j (l < j \leq i) k_j < k$. Posons $k_0 = \sup\limits_{l<j\leq i} k_j$. Si $k_i = k_0$ nous posons $p = i$; dans le cas contraire, en appliquant l'hypothèse de récurrence au segment $(l+1, i)$ nous obtenons $p (l < p < i)$ tel que $k_p = k_0$

et $p + k_p > i + k_i$. Dans les deux cas, l et p sont tels que

$$k_l = k; \qquad k_p = k_0 = \sup_{l<j\leq p} k_j$$
$$l + k \leq p + k_p \qquad \text{et } k_0 < k.$$

Suivant le lemme 1, $(l, p+1)m$ admet une translation de k_0.
De plus, puisque $k_p = k_0, (p - k_0, p + k_0)m$ admet une translation de k_0 ; par conséquent $(l, p + k_0)m$ admet une translation de k_0, et il en est de même de son facteur $(l, l + k)m$. Par le même argument que dans la preuve du lemme 1, nous obtenons $k_p, \leq k - k_0$, ce qui contredit l'hypothèse $k_p = k$ et établit le lemme.
PROPOSITION 1. - Si $u \leq j < i \leq v$ et $k_j > k_i$, alors il existe l tel que

$$j \leq l < i, \qquad k_l \geq k_j, \qquad l + k_l > i + k_i.$$

Preuve. - Il suffit d'appliquer le lemme 2 au segment (j, i).

PROPOSITION 2. - $\sup_{u\leq i\leq v} (i + k_i) = \sup_{k_i=k} (i + k_i)$.
Preuve. - Posons $u_0 = \inf_{u\leq i\leq v} (i - k_i), v_0 = \sup_{u\leq i\leq v} (i + k_i)$.
Si la proposition est fausse, alors $k_i < k$; appelons j le plus grand indice tel que $k_j = k$; en appliquant le lemme 2 au couple j, i on obtient la contradiction

$$j + k_j > i + k_i.$$

THÉORÈME - Le segment $(\inf_{u\leq i\leq v} (i - k_i), \sup_{u\leq i\leq v} (i + k_i))m$ est *périodique* de pas k.
Preuve. - Posons $u_0 = \inf_{u\leq i\leq v} (i - k_i), v_0 = \sup_{u\leq i\leq v} (i + ki)$.
Par le lemme 1, nous savons que $(u - 1, v + 1)$ admet une translation de k. La proposition 2 établit que $(v_0 - 2k, v_0)m$ admet la même translation puisque $(v_0 - 2k, v_0 - k)m = (v_0 - k, v_0)m$.
On montrerait de même que $(u_0, u_0+2k)m$ admet une translation de k. Puisque $u_0 \geq u-k$ et $v_0 \leq v + k$, le facteur $(u_0, v_0)_m$ admet une translation de k. Il est donc périodique de pas inférieur ou égal à k. Le pas est bien égal à k puisque tous les k_i sont inférieurs au pas.

Département de Mathématiques, Université de Montpellier, 34000 Montpellier.

Un héritage mathématique fertile

Jean Malgoire

Janvier 1985, une vague de froid exceptionnelle s'est abattue sur toute l'Europe. Dans sa très modeste masure perdue au milieu des vignes, Alexandre Grothendieck est plongé depuis des mois dans la rédaction de Récoltes et semailles. Le 7 janvier, les rigueurs de l'hiver s'invitent dans son récit et celui-ci nous parle du vent glacé qui descend du mont Ventoux, du potager gelé, des souches de vigne qu'il coupe à la hache chaque jour pour alimenter le poêle auprès duquel il tape sur sa vieille machine à écrire. Mais rien n'entame son ardeur et ce qui devait être une introduction à un texte purement mathématique deviendra un ouvrage autonome de plus de 1500 pages...

Dans le premier fascicule sous-titré "Promenade à travers une œuvre - ou l'enfant et la mère", il parle avec passion des grands thèmes mathématiques qu'il a développés au cours de sa carrière et de la spécificité de sa démarche ; et cela dans un langage "non technique" accessible à des lecteurs non mathématiciens auxquels il s'adresse individuellement : *"[...]aussi si tu "accroches" à ce que je vois à dire sur mon œuvre (et sûrement alors quelque chose de l'image en moi "passera" bel et bien), tu pourras te flatter d'avoir mieux saisi ce qui fait l'essentiel dans mon œuvre, qu'aucun peut-être de mes savants collègues".* Peut-on rêver meilleur guide ?

Au fil de sa promenade, Grothendieck cite une liste des douze idées maîtresses de son œuvre mathématique. Parmi ces thèmes, explique-t-il, certains sont à l'état embryonnaire, d'autres sont encore dans leur enfance, mais la moitié ont atteint une telle maturité que *"parmi la gent géomètre surtout, "tout le monde" de nos jours les entonne sans même plus le savoir (comme Monsieur Jourdain faisait de la prose), à longueur de jour et à tout moment".* La notion de topos est l'un de ces thèmes, et pas n'importe lequel. Pour Grothendieck, il s'agit de l'idée majeure de son œuvre, la plus vaste par sa portée :

Le thème du topos est ce "lit", ou cette

> *"rivière profonde", où viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre, la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des structures "discontinues" ou "discrètes" Si le thème des schémas est comme le cœur de la géométrie nouvelle, le thème du topos en est l'enveloppe, ou la demeure. Il est ce que j'ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse, par un même langage riche en résonances géométriques, une "essence" commune à des situations des plus éloignées les unes des autres, provenant de telle région ou de telle autre du vaste univers des choses mathématiques.*

C'est aussi une porte d'entrée vertigineuse dans la pensée mathématique de Grothendieck.

En 1958, le mathématicien, devenu célèbre après avoir démontré une généralisation du théorème de Riemann-Roch[1], pose les bases d'une géométrie nouvelle en introduisant la notion de schéma. A l'époque la géométrie algébrique est divisée en plusieurs domaines aux interactions limitées : des domaines où les objets sont perçus comme continus (géométrie analytique, géométrie algébrique classique sur le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes) et d'autres où ils sont discontinus (géométrie arithmétique sur les corps finis, par exemple).

Les schémas fournissent une autre façon, généralisée, de voir les objets de la géométrie algébrique, c'est-à-dire les variétés algébriques - par exemple des surfaces définies par une équation polynomiale

note : Jean Malgoire, ancien élève de Grothendieck, est maître de conférences à l'Université de Montpellier.

1. voir l'article de Winfried Scharlau, pages 22 à 29 du même numéro.

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (équation d'une sphère) ; cette vision permet d'englober même les structures discontinues - discrètes - de la géométrie arithmétique [2].

Pour Grothendieck, les schémas constituent ainsi “le cœur” de la nouvelle géométrie, l'outil qui unifie les géométries algébrique et arithmétique. Mais ce sont les topos, notion introduite en 1963 [3], qui forment “la demeure” de la nouvelle géométrie. Les topos sont une métamorphose de la notion d'espace. Ils permettent d'appliquer une vision topologique subtile aux objets de la géométrie algébrique (les variétés ou leur généralisation, les schémas). Les schémas et les topos créent en quelque sorte un pont entre le discret et le continu.

Dans l'histoire du concept mathématique d'espace, les topos constituent un dépaysement soudain, explique Grothendieck :

> *“Jusqu'à l'apparition du point de vue des topos, vers la fin des années cinquante, l'évolution de la notion d'espace m'apparaît comme une évolution essentiellement “continue”* [4]*.*
> *La notion d'“espace” est sans doute une des plus anciennes en mathématique. Elle est si fondamentale dans notre appréhension “géométrique” du monde, qu'elle est restée plus ou moins tacite pendant plus de deux millénaires* [5]*.*
> *Certes, des changements profonds ont eu lieu dans la façon dont le mathématicien ou le “philosophe de la nature” concevait “l'espace”. Mais ces changements me semblent tous dans la nature d'une “continuité” essentielle - ils n'ont jamais placé le mathématicien, attaché (comme tout un chacun) aux images mentales familières, devant un dépaysement soudain* [6]*.”*

Et pourtant, les précédentes évolutions de la notion d'espace offraient déjà des changements conceptuels considérables.

Les métamorphoses de la notion d'espace

D'abord au XVII^e^ siècle, grâce à René Descartes et son invention des coordonnées cartésiennes, les figures géométriques se sont métamorphosées en équations : le cercle réapparaît sous la forme “$x^2 + y^2 = 1$”. La représentation de l'espace au moyen des nombres est une transformation que l'on peut qualifier de radicale (et qui continue de dérouter les étudiants...).

Puis au XIX^e^ siècle, le mathématicien allemand Bernhard Riemann introduit la notion de variété abstraite, un espace qui peut être décrit localement par une, deux, trois ou même n coordonnées (espace à n dimensions). Avec Riemann, les variétés se dégagent des espaces ambiants dans lesquels elles sont plongées et prennent leur autonomie : il n'y a plus *a priori* d'extérieur naturel à une variété. Cela a permis par exemple à Einstein de concevoir l'Univers comme une variété qui ne soit pas *a priori* un espace euclidien (dont les lois sont celles de la géométrie traditionnelle d'Euclide). Le progrès est réel, mais la disparition du décor demande un certain effort d'abstraction.

---

2. voir l'article de Winfried Scharlau, pages 22 à 29 du même numéro.
3. Il est aussi question de l'année 1958 dans le passage : *“C'est ce dernier travail surtout qui absorbait le plus gros de mon énergie - un patient et vaste travail de fondements que j'étais le seul à voir clairement et, surtout, à “sentir par les tripes”. C'est lui qui a pris, et de loin, la plus grosse part de mon temps, entre 1958 (l'année où sont apparus, coup sur coup, le thème schématique et celui des topos) et 1970 (l'année de mon départ de la scène mathématique)”.*
4. début de l'*Épilogue Les cercles invisibles.*
5. Dans *La topologie ou l'arpentage des brumes.*
6. *idem*

Au début du XX^{e} siècle, les mathématiciens s'aperçoivent que dans les espaces métriques (c'est-à-dire munis d'une notion de distance entre les points), beaucoup de propriétés fondamentales (telle la connexité, qui est la propriété d'un espace d'être "d'un seul tenant", ou la "compacité") ne dépendent pas de la métrique qu'ils portent, mais seulement des parties dites ouvertes de ces espaces. Une partie est dite ouverte si, dès qu'elle contient un point, elle contient une boule centrée en ce point. Par exemple, les ouverts de la droite réelle sont les réunions (quelconques) d'intervalles ouverts, et les ouverts du plan les réunions de disques ouverts, c'est-à-dire privés de leurs bords. De plus, les ouverts ont des propriétés intéressantes qui leur confèrent une certaine stabilité : une réunion quelconque d'ouverts ou une intersection d'un nombre fini d'ouverts est encore un ouvert.

En 1914, le mathématicien allemand Felix Hausdorff s'appuie sur ces propriétés de stabilité pour définir la notion d'espace topologique : un espace topologique est un ensemble E muni d'un ensemble de parties de E appelées ouverts (ou parties ouvertes de E) vérifiant les deux propriétés suivantes :

- l'ensemble E lui-même et l'ensemble vide sont des ouverts,
- et une réunion quelconque d'ouverts ou une intersection d'un nombre fini d'ouverts est encore ouverte.

On dit que l'ensemble des ouverts de E est une topologie sur E. Des concepts antérieurs (comme ceux de variété ou d'espace métrique), la définition d'espace par Hausdorff ne conserve qu'une idée très affaiblie de proximité à travers le concept d'ouvert.

La notion d'espace topologique permet d'appliquer notre intuition "spatiale" à des situations sans métrique naturelle. Par exemple, en géométrie algébrique, grâce à Oscar Zariski, mathématicien d'origine russe de la génération précédant celle de Grothendieck, on sait associer à tout anneau A (c'est-à-dire à tout ensemble muni d'une addition et d'une multiplication, par exemple l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs ou les anneaux de polynômes) un espace topologique Spec A appelé spectre de A. L'espace Spec A n'a pas de métrique naturelle (c'est-à-dire de fonction définissant une distance entre les éléments de Spec A) qui donnerait les ouverts de Spec A. Pourtant, la topologie de Zariski qui définit Spec A en fait bien un espace topologique : pour $\mathbb{Z}$, par exemple, ce spectre est l'ensemble des nombres premiers auquel on adjoint 0, et ses ouverts sont la partie vide et les complémentaires des ensembles formés d'un nombre fini de nombres premiers. Pour un anneau quelconque, le spectre est l'ensemble des "idéaux premiers" (qui sont une généralisation des nombres premiers).

Avec le concept d'espace topologique, les mathématiciens ont vraiment l'impression d'avoir atteint un degré de généralité maximal, en quelque sorte indépassable. De fait, grâce à sa souplesse et à sa simplicité, le concept connaît un grand succès et continue d'être le cadre naturel de la topologie générale. Aussi, si les limitations de cette notion d'espace sont apparues assez naturellement à Grothendieck à la fin des années 1950, il a fallu faire un effort conceptuel considérable pour imaginer comment les dépasser.

Un manque cruel d'ouverts

Pour Grothendieck, les limitations se font particulièrement sentir dans le cadre de la topologie (l'ensemble d'ouverts) que Zariski a définie, par extension, pour les variétés algébriques, car si elle est suffisante pour beaucoup de propos, elle "manque cruellement d'ouverts" : par exemple sur une courbe algébrique sur $\mathbb{C}$, les seuls ouverts non vides pour la topologie de Zariski sont les complémentaires des parties finies de la courbe. Si l'on prend comme courbe la droite affine sur $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire le spectre de l'anneau des polynômes à une variable et à coefficients dans $\mathbb{C}$), on trouve l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, et ses ouverts pour la topologie de Zariski sont la partie vide et les complémentaires des parties finies de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire le plan privé d'un nombre fini de points. Tous les ouverts (à part le vide) sont donc très gros : on ne peut pas avoir de "petits" voisinages d'un point. En revanche, pour la topologie ordinaire sur le plan complexe, les ouverts sont les réunions quelconques de disques ouverts ; il y a donc beaucoup plus d'ouverts ! Par exemple, autour de chaque point, on peut prendre pour voisinages du point des disques ouverts de rayons aussi petits que l'on souhaite. Ainsi, des espaces X au-dessus d'une variété complexe - c'est-à-dire munis d'une application continue de X vers la variété - peuvent être localement très simples pour la topologie ordinaire sans l'être pour la topologie de Zariski.

Pour pallier cette difficulté, Grothendieck élargit la notion de topologie sur une variété en étendant celle des ouverts à prendre en compte. Il ne se limite plus aux parties ouvertes de la variété, mais accepte aussi certains espaces au-dessus des ouverts, appelés revêtements étales d'ouverts *(voir Encart 1).*

Cette notion remonte en quelque sorte à Riemann et aux surfaces qu'il inventa au XIX^{e} siècle pour faciliter l'étude des fonctions multiformes, c'est-à-dire des fonctions mal définies parce qu'elles associent plusieurs valeurs à une même valeur de la variable. Puisque les fonctions donnaient plusieurs valeurs en un même point de l'espace de départ, Riemann a transformé l'espace de départ en feuillets superposés et recollés de telle façon que sur la nouvelle surface constituée - appelée depuis surface de Riemann -, la fonction n'associe plus qu'une seule valeur à chaque valeur de la variable.

D'après Luc Illusie, ancien élève de Grothendieck, l'idée de la localisation étale chez son maître remonte à avril 1958, à l'occasion d'un exposé de Jean-Pierre Serre au séminaire Chevalley, Jean-Pierre Serre avait remarqué qu'élargir la localisation d'un espace au-dessus d'une variété algébrique à des revêtements étales d'ouverts permettait de révéler certaines de ses propriétés. Enthousiaste, Grothendieck a repris l'idée pour élargir la topologie de Zariski. Il voyait même déjà comment cet élargissement aiderait à s'attaquer aux conjectures de Weil.

Depuis leur formulation, en 1949, par André Weil, un des membres fondateurs du groupes de mathématiciens Bourbaki (que Grothendieck a rejoint au début des années 50), ces conjectures font miroiter l'idée que des relations existent entre des informations de nature arithmétique et la topologie. Weil les a énoncées alors qu'il menait des calculs sur le nombre de solutions de certaines équations algébriques dans des ensembles finis de nombres. En substance, les conjectures de Weil relient le nombre de certaines solutions d'une équation algébrique à des propriétés topologique de la variété algébrique décrite par l'équation. Cette relation entre informations arithmétiques et topologie suggérait de construire une théorie plus subtile - une théorie cohomologique - qui permettait d'englober les propriétés arithmétiques et topologiques de la variété. Grothendieck construira une telle théorie quelques années plus tard (la cohomologie étale) et prouvera une partie dse conjectures ; la dernière sera démontrée en 1974 par son élève Pierre Deligne et lui vaudra une médaille Fields.

La genèse des topos

Cependant, en 1958, pris par le considérable travail de refondation de la géométrie algébrique qu'il a entrepris, Grothendieck ne développe pas tout de suite ses idées sur la localisation étale. Tout est dans sa tête, mais il n'y revient que quelques années plus tard, en 1963, avec le séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie n°4 (SGA4) à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques (IHES), à Bures-sur-Yvette, consacré... à sa nouvelle géométrie. Grothendieck donne alors un cadre mathématique formel à l'idée de localisation étale. Les deux principaux outils qu'il utilise pour cela sont le langage des catégories et la théorie des faisceaux.

La notion de catégorie a été introduite en 1945 par les américains Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane. Elle formalise la notion de classe d'objets, c'est-à-dire d'objets de même nature, et de relations entre ces objets. Une catégorie est d'abord un graphe orienté - des objets et des flèches entre ces objets, qu'on appelle morphismes. Mais on a en plus une composition des flèches généralisant la composition des applications entre ensembles.

Parmi les catégories les plus usitées, citons la catégorie des ensembles (les flèches sont alors les applications entre ensembles), ou celles des groupes, des anneaux, des espaces topologiques, etc. De même, si E est un espace topologique muni d'un ensemble $Ouv(E)$ d'ouverts, alors $Ouv(E)$ est, de manière naturelle, une catégorie (avec pour tout couple d'ouverts U et V tels que V inclus dans U, un seul et unique morphisme de V vers U : l'application inclusion de V dans U).

La “philosophie” des catégories est de mettre l'accent sur les morphismes plutôt que sur les objets eux-mêmes : deux objets isomorphes dans une catégorie sont, du point de vue catégorique, “interchangeables”. Et un objet est connu si l'on connaît ses relations à tous les autres objets. Ce résultat élémentaire, mais fondamental, porte le nom de lemme de Yoneda et peut se traduire par : “Dis-moi qui tu fréquentes et je te dirai qui tu es.”

Bien évidemment, les mathématiciens s'intéressent aussi aux relations entre catégories. Celles-ci sont formalisées sous la forme de foncteurs, des analogues des applications entre ensembles qui permettent de transporter des objets et les relations entre eux d'un “cadre” (une catégorie) dans un autre (une autre catégorie).

L'autre outil clé que Grothendieck utilise est le concept de faisceau, introduit en 1946 par le mathématicien français Jean Leray. En substance, un faisceau sur un espace topologique est un foncteur qui a la propriété de relier entre elles des données locales pour en faire une donnée globale *(voir encart 3)*.

Grothendieck remarque que la notion centrale qui permet de définir ce qu'est un faisceau sur un espace topologique B est simplement la notion de recouvrement d'un ouvert par une famille d'ouverts. Si l'on veut élargir la notion d'ouvert à des objets au-dessus de B (par exemple à des revêtements d'ouverts pour la localisation étale), en d'autres termes, si l'on veut formaliser la notion d'ouvert pour pouvoir considérer les revêtements étales d'ouverts comme des ouverts, il faut élargir la notion de recouvrement à d'autres objets que les ouverts ordinaires.

En remarquant aussi que les ouverts d'un espace forment une catégorie, Grothendieck fait le saut de remplacer la catégorie des ouverts d'un espace par une catégorie quelconque C, munie pour tout objet d'une notion de recouvrement : c'est la donnée pour tout objet x de C de familles d'objets de C au-dessus de x, appelées familles couvrantes (de x). Grothendieck nomme site cette notion de catégorie munie de familles couvrantes, et l'ensemble des familles couvrantes constitue une topologie dite depuis *topologie de Grothendieck*. La notion de faisceau sur un site C est alors absolument analogue à celle de faisceau sur un espace topologique : c'est un foncteur de la catégorie C dans celle des ensembles, qui vérifie la propriété de “passage du local au global” pour tout objet de C et toute famille couvrante de cet objet.

Grothendieck aurait pu s'arrêter là pour les besoins de la géométrie algébrique. Plusieurs sites ont été définis, dont le site dit étale qui a conduit à la cohomologie étale, grâce à laquelle les conjectures de Weil ont été démontrées. Le site étale et les faisceaux pour la topologie associée, la topologie étale, sont les objets qui ont cristallisé l'idée initiale de la localisation étale. Mais il voit toujours plus loin. Pour lui, l'objet le plus intéressant, intrinsèque, associé à un site est la catégorie de tous les faisceaux sur la catégorie du site. C'est cette catégorie des faisceaux qu'il nomme topos.

Plus généralement, pour Grothendieck, un topos est une catégorie équivalente à la catégorie des faisceaux sur un site. Cette nouvelle notion d'espace a deux propriétés importantes, explique-t-il dans *Récoltes et semailles* :

> *Primo, la nouvelle notion n'est pas trop vaste, en ce sens que dans les nouveaux "espaces" (appelés plutôt "topos", pour ne pas indisposer des oreilles délicates), les intuitions et les constructions "géométriques" les plus essentielles, familières pour les bons vieux espaces d'antan, peuvent se transposer de façon plus ou moins évidente. Autrement dit, on dispose pour les nouveaux objets de toute la riche gamme des images et associations mentales, des notions et de certaines au moins des techniques, qui précédemment restaient restreintes aux objets ancien style.*
> *Et secundo, la nouvelle notion est en même temps assez vaste pour englober une foule de situations qui, jusque-là, n'étaient pas considérées comme donnant lieu à des intuitions de nature "topologico-géométrique", aux intuitions, justement, qu'on avait réservées par le passé aux seuls espaces topologiques ordinaires (et pour cause...).*

A chaque espace topologique X est associé un topos - la catégorie des faisceaux sur X. Cette correspondance est un foncteur. C'est ce foncteur, cette "traduction" que Grothendieck appelle "traversée du miroir" :

> *Comme si souvent en mathématique, nous avons réussi ici (grâce à l'idée cruciale de "faisceau", ou de "mètre cohomologique") à exprimer une certaine notion (celle d'"espace" en l'occurrence) en termes d'une autre (celle de "catégorie"). A chaque fois, la découverte d'une telle traduction d'une notion (exprimant un certain type de situations) en termes d'une autre (correspondant à un autre type de situations), enrichit notre compréhension et de l'une et de l'autre notion, par la confluence inattendue des intuitions spécifiques qui se rapportent soit à l'une, soit à l'autre. Ainsi, une situation de nature "topologique" (incarnée par un espace donné) se trouve ici traduite par une situation de nature "algébrique" (incarnée par une "catégorie") ; ou, si on veut, le "continu" incarné par l'espace, se trouve "traduit" ou "exprimé" par la structure de catégorie, de nature "algébrique" (et jusque-là perçue comme étant de nature essentiellement "discontinue" ou "discrète").*
>
> *Mais ici, il y a plus. La première de ces notions, celle d'espace, nous était apparue comme une notion en quelque sorte "maximale" - une notion si générale déjà, qu'on imagine mal comment en trouver encore une extension qui reste "raisonnable". Par contre, il se trouve que de l'autre côté du miroir, ces "catégories" (ou "arsenaux") sur lesquels on tombe, en partant d'espaces topologiques, sont de nature très particulière. Elles jouissent en effet d'un ensemble de propriétés fortement typées, qui les font s'apparenter à des sortes de "pastiches" de la plus simple imaginable d'entre elles - celle qu'on obtient en partant d'un espace réduit à un seul point.*

Cette catégorie est précisément la catégorie des ensembles car un faisceau sur un espace réduit à un point est un ensemble. Donc la catégorie des faisceaux sur un point est la catégorie des ensembles ! Ce qui a, sans doute, de quoi dépayser quelque peu : l'espace le plus réduit, le point, comme topos, est représenté par quelque chose d'aussi énorme que la catégorie des ensembles (que dans ce cadre on appelle plutôt topos ponctuel ou topos final). Ainsi les topos sont des catégories qui présentent "beaucoup de propriétés" de la catégorie des ensembles.

Pour Grothendieck, de l'autre côté du miroir entre les espaces ordinaires et les topos, du côté des topos, "le monde est plus beau". Pour m'en donner une illustration, Olivier Leroy, un ancien élève de Grothendieck, m'avait expliqué il y a bien longtemps : "Passer des espaces topologiques aux topos, c'est comme passer de la géométrie affine à la géométrie projective : cela fait disparaître les cas particuliers.” *(voir encart 4)*.

Plus généralement, le langage des topos permet de donner une représentation spatiale pertinente à des situations qui, classiquement, n'étaient pas associées à une telle représentation (principalement en algèbre). Par exemple, la théorie de Galois, qui portait originellement sur la résolubilité des équations algébriques, devient, dans le cadre des topos, un exemple de situation galoisienne que l'on rencontre dans beaucoup de domaines, comme la classification des revêtements d'un espace topologique.

Le langage des topos est devenu un outil fondamental pour un grand pan de la géométrie algébrique actuelle, notamment la géométrie algébrique dérivée. Continuation de la géométrie algébrique dans l'esprit de Grothendieck, cette géométrie est développée par des mathématiciens comme Jacob Lurie et Bertrand Toen en France. Ces mathématiciens ont même dépassé les “simples” topos et utilisent des notions de topos d'ordres supérieurs (les ∞-topos, par exemple).

Certains essayent aussi de mieux comprendre les “espaces de modules”, c'est-à-dire les espaces décrivant toutes les formes possibles d'objets d'un type géométrique donné, comme les courbes algébriques. Dans les années 1980, l'étude de l'espace algébrique de toutes les formes possibles de courbes, qui est en fait un topos et non un espace ordinaire, a été centrale dans le travail de Grothendieck.

Les applications de la théorie des topos vont aussi bien au-delà de la géométrie algébrique. Les physiciens théoriciens y voient un cadre naturel pour une logique quantique. Les logiciens, quant à eux, les utilisent pour construire des modèles de théories formelles : on peut voir chaque topos comme une sorte d'univers des ensembles avec sa propre logique. Comme application, on a pu construire un topos dans lequel l'hypothèse du continu n'est pas vérifiée. Formulée au XIX^{e} siècle par le mathématicien Georg Cantor, cette hypothèse affirme que si un ensemble présente un nombre d'éléments d'une infinité d'ordre supérieur à celle de l'ensemble des nombres naturels, alors il a au moins autant d'éléments que l'ensemble des nombres réels. La démonstration de cette hypothèse est le premier des 23 problèmes que le mathématicien allemand David Hilbert avait proposés en 1900 pour guider la recherche en mathématiques. En 1963, le mathématicien américain Paul Cohen avait montré que l'hypothèse ne peut se déduire des axiomes de la théorie des ensembles, ce qui lui avait valu la médaille Fields. La théorie des topos a permis de retrouver ce résultat de manière plus simple.

Nul besoin de points pour exister

Contrairement aux points des espaces topologiques, ceux des topos ne font pas partie de la structure, mais ils ne disparaissent pas forcément : un point d'un topos T est un morphisme du topos ponctuel (la catégorie des ensembles) dans T. Un topos non vide n'a donc pas forcément de point. En revanche, dans un topos, il peut y avoir des morphismes entre les points, comme dans la situation décrite dans la figure de l'encart 4.

D'une certaine manière, le théorème de Banach-Tarski (*voir encart 5*), si difficile à accepter dans le cadre classique, et qui s'éclaire dans celui des topos, nous montre une certaine limite du choix qui prévaut depuis au moins Descartes, et qui consiste à modéliser (et même à penser !) l'espace comme un ensemble de points. Postulat d'ailleurs conforté par le point de vue ensembliste en vigueur depuis Cantor et Hilbert : dans les mathématiques “modernes”, tous les objets sont des ensembles !

Le cadre des topos nous permet de sortir de ce carcan, car les topos n'ont pas besoin de points pour exister : il donne au au mathématicien - comme s'il avait chaussé de nouvelles lunettes - un nouvel outil d'exploration, plus fin, faisant apparaître de nouveaux objets et apportant de nouvelles réponses à d'anciennes questions.

Résumé

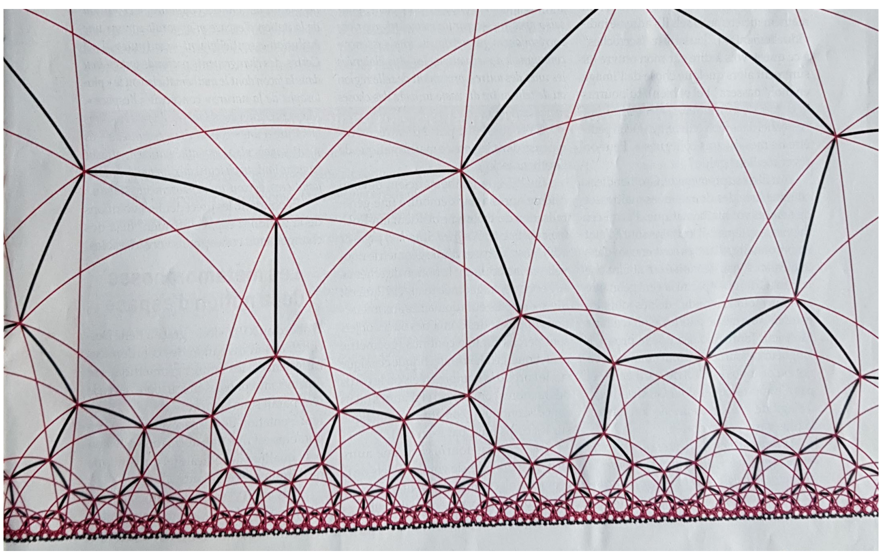
— Pour Grothendieck, la notion de topos est une idée majeure de son œuvre mathématique.

— Introduite au cours de sa refondation de la géométrie algébrique, elle offre un nouveau point de vue sur les objets de cette discipline et plus généralement, un cadre plus vaste où se rejoignent différentes branches des mathématiques.

— Les mathématiciens continuent d'explorer ce point de vue, dont ils trouvent des applications jusqu'en physique mathématique et en logique.

Illustration 1 : Un exemple de topos

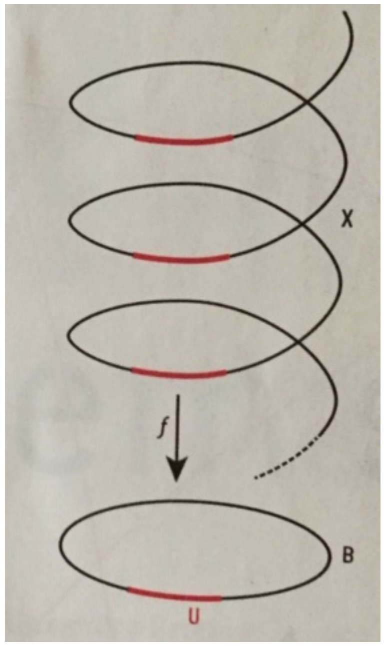
Un exemple de topos est représenté ci-dessous : le topos dit mixte constitué du demi-plan de Poincaré en géométrie hyperbolique et du groupe associé au pavage de type $(7, 3)$, où chaque pavé a 7 côtés et où chaque sommet est relié à 3 arêtes (en noir).



Encart 1 : Un revêtement étale du cercle

Un revêtement étale d'un espace topologique B est un espace (X, f) au-dessus de B (c'est-à-dire un espace X muni d'une application f continue de X dans B) qui vérifie la propriété suivante : il existe un recouvrement de B par des ouverts U (c'est-à-dire une famille d'ouverts U de B dont la réunion donne B) tels que, pour tout U, la partie de X au-dessus de U est une réunion de copies de U. On dit qu'un tel U trivialise le revêtement.

Par exemple, l'enroulement de la droite réelle sur le cercle est un revêtement étale. Dans cet exemple, B est un cercle, X la droite réelle et f "l'enroulement de corde sur la poulie définie par le cercle", représenté comme une projection verticale (voir la figure ci-contre, où un ouvert U a été représenté). La notion de revêtement est fondamentale en topologie et la classification des revêtements d'un espace donné est souvent un des premiers chapitres des traités de topologie algébrique.



Encart 2 : Les premiers pas de la nouvelle géométrie

Avant les réflexions de Grothendieck et de son école, les objets de base de la géométrie algébrique étaient les anneaux de polynôme (à coefficients réels ou complexes) dont les éléments s'interprètent de manière assez évidente comme de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Grothendieck a voulu étendre à tous les anneaux (commutatifs) le champ de la géométrie algébrique. Pour cela, il fallait pouvoir, par analogie avec les anneaux de polynômes, considérer les éléments d'un anneau A quelconque comme des fonctions. C'était faisable, mais avec un certain prix à payer, comme le montre le cas de l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Pour considérer tout entier n de $\mathbb{Z}$ comme une fonction, il suffit d'associer à n une fonction définie sur le spectre de $\mathbb{Z}$ (l'ensemble des nombres premiers) par sa valeur en chaque nombre premier p. On pose cette valeur égale au résidu modulo p de n dans le corps premier $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, c'est-à-dire au reste de la division euclidienne de n par p. Le prix à payer est une différence essentielle avec le cas des anneaux de polynômes, car pour $\mathbb{Z}$, la fonction associée à n ne prend pas ses valeurs sur un corps unique comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais sur un corps différent $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour chaque nombre premier p. Toute la difficulté consistait donc à rassembler de manière cohérente tous ces corps. Et bien sûr à faire de même pour chaque anneau (commutatif avec élément unité). C'est le formalisme des faisceaux (voir ci-après) qui a donné la solution à Grothendieck et qui l'a conduit au langage des schémas.

La notion de faisceau avait été introduite quelques années plus tôt en 1946, par le mathématicien français Jean Leray. Prisonnier de guerre en Autriche, Leray participait à une université de captivité et, de peur d'être réquistionné pour travailler à l'effort de guerre allemand, il avait délaissé sa spécialité l'hydrodynamique, plus proche d'applications potentielles, pour y donner un cours de topologie algébrique. Dans ce cours, il avait notamment cherché à reconstruire la topologie algébrique en se débarrassant des hypothèses inutiles. Dans la continuité de ses recherches, il avait conçu une première notion de faisceau sur un espace topologique, un outil qui lui permettait de relier entre elles des données locales pour en faire une donnée globale. Jean-Pierre Serre a étendu ces méthodes à la géométrie algébrique, où Grothendieck les a utilisées et considérablement développées à son tour.

Encart 3 : La notion de faisceau

Un faisceau sur un espace topologique B n'est rien d'autre qu'un espace étalé sur B une notion qui s'apparente à celle de revêtement étale (voir encart 1), mais qui est plus faible.

Un espace étalé sur B est un espace (E, p) au-dessus de B où p est une applicaion qui a la propriété d'être un homéomorphisme local : autour de chaque point x de E, il existe un ouvert U de E le contenant tel que U soit une copie de son image $V = p(U)$ dans B.

Par exemple. les revêtements étales sont des espaces étalés, mais la réciproque est fausse : l'inclusion de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ dans la droite réelle $\mathbb{R}$ fait de lui un espace étalé sur $\mathbb{R}$, mais ce n'est pas un revêtement de $\mathbb{R}$ (il y a un probème au-dessus de 0 et 1...).

En quelque sorte, pour un revêtement étale, on demande d'être très simple “localement en bas”, c'est-à-dire sur B, et pour un espace étalé, on demande d'être très simple “localement en haut”, c'est-à-dire sur E, ce qui est une condition plus faible.

A un tel espace étalé (E, p) sur B, associons un foncteur F, défini sur l'ensemble des ouverts de B (c'est une catégorie) et à valeurs dans la catégorie des ensembles. Formellement, cela signifie qu'à tout ouvert U de B, on associe l'ensemble $F_E(U)$ des fonctions continues de U dans E qui, composées avec p, donnent l'identité de U. Alors pour U et V deux ouverts quelconques de B tels que V est inclus dans U, on a une application dite de restriction de $F_E(U)$ dans $F_E(V)$ qui, a chaque fonction sur U, associe sa restriction sur V.

On vérifie facilement que E peut être reconstitué à partir de F_E. On vérifie aussi la propriété fondamentale suivante sur F_E, dite propriété de recollement : si (U_i) est un recouvrement d'un ouvert U de B (c'est-à-dire une famille d'ouverts U dont la réunion donne U) et si on s'est donné pour chaque i un élément s_i de $F_E(U_i)$ tel que les s_i soient compatibles deux à deux (pour tout i et j les restrictions de s_i et de s_j sur l'intersection de U_i et U_j coïncident), alors il existe un et un seul élément s dans $F_E(U)$ dont les restrictions à chaque U_i sont précisément les s_i.

En résumé, des données “locales” compatibles (les s_i) permettent de définir une donnée “globale” unique (s) dans $F_E(U)$.

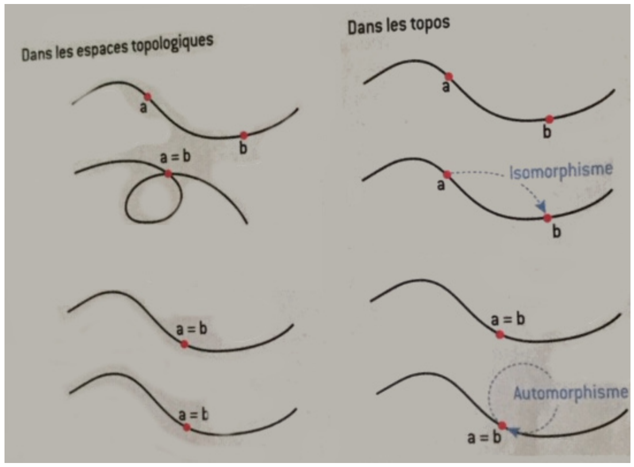
On part de cette définition de foncteur associé à un espace étalé pour définir la notion générale de faisceau sur un espace topologique B : un faisceau sur B est un foncteur sur la catégorie des ouverts de B vérifiant la propriété de recollement.

Cette propriété est ce qui permet de construire des objets globaux à partir de données locales - un outil d'une grande utilité en géométrie algébrique.

Encart 4 : Les topos font disparaître les cas particuliers.

Par exemple, pour identifier deux points a et b d'un segment dans le cadre classique des espaces topologiques, on fait une boucle avec le segment pour faire coïncider a et b, sauf dans le cas particulier où a et b sont confondus. Dans ce cas particulier, rien ne se passe. En revanche, dans le cadre des topos, pour identifier deux points sur un segment, on les recolle au moyen d'un isomorphisme, qui relie les points a et b.

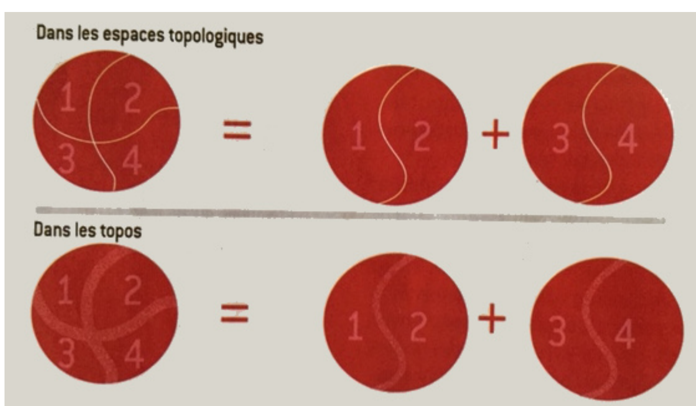
Et si a et b sont confondus, l'isomorphisme existe toujours, c'est un automorphisme du point ; et on a encore une sorte de "boucle infinitésimale"...



Encart 5 : Le paradoxe de Banach-Tarski

Le point de vue des topos éclaire d'un jour nouveau un célèbre "paradoxe", le "paradoxe de Banach-Tarski", et le fait même disparaitre. Le théorème de Banach-Tarski entraîne l'existence d'une partition "paradoxale" de toute boule de rayon égal à 1 en quatre "pièces de Lego" identiques qui, prises deux à deux, permettent de reconstituer deux boules de rayon 1. Ces quatre pièces sont impossibles à dessiner, car on sait seulement, par le théorème, qu'elles existent. Elle ne sont pas non plus mesurables, c'est-à-dire qu'on ne peut pas leur attribuer de volume, car sinon, en additionnant leurs volumes, on aboutirait à une contradiction du type $1 = 1 + 1$... Et pourtant, ces pièces de Lego existent, dit le théorème.

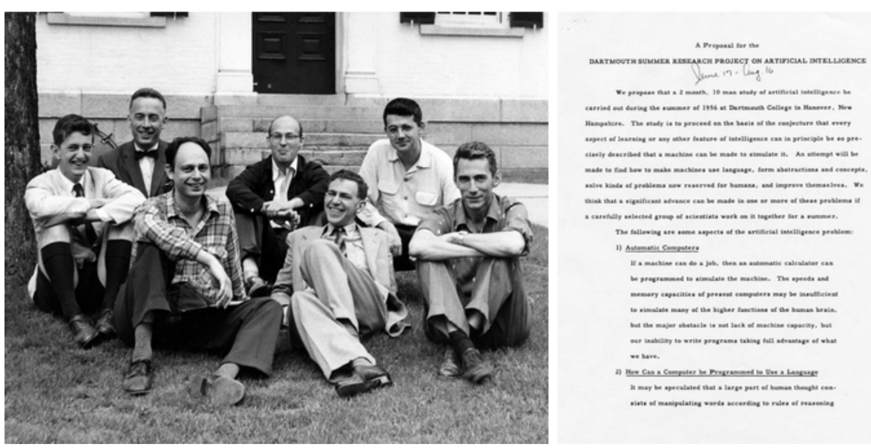
En fait, le paradoxe s'évanouit dans le cadre des topos, comme l'a montré Olivier Leroy en 1995. La partition ensembliste "paradoxale" n'est en effet plus une partition du point de vue toposique, car dans le cadre des topos, les pièces de Lego ne sont plus disjointes deux à deux : il existe des intersections de nature purement toposique (en fait elles n'ont pas de points) qui rendent mesurables tous les sous-topos de la boule et lèvent la contradiction. La vision classique ne les voit pas, il faut chausser de nouvelles lunettes pour les déceler.



La Conférence de Dartmouth, naissance de l'Intelligence Artificielle
(©AAAI, AI magazine, vol. 27, 4, 2006)

Le projet de recherches d'été de Dartmouth sur l'intelligence artificielle est un colloque qui est largement considéré comme le moment fondateur de l'intelligence artificielle en tant que champ de recherche. Ce colloque s'est tenu pendant huit semaines à Hanovre, dans le New Hampshire, en 1956, et la conférence a réuni 20 des plus brillants esprits en informatique et sciences cognitives pour un colloque dédié à la conjecture suivante : "tout aspect de l'apprentissage et de n'importe quelle caractéristique de l'intelligence peut être si précisément décrit qu'en principe, une machine devrait pouvoir être fabriquée pour simuler l'intelligence". Des tentatives seront menées pour trouver comment fabriquer des machines étant capables d'utiliser le langage naturel, de formuler des abstractions et des concepts, de résoudre des sortes de problèmes habituellement réservés aux humains, et de s'améliorer elles-mêmes. Nous pensons qu'une avance significative de l'un ou plus de ces problèmes peut avoir lieu si un groupe sélectionné de scientifiques travaillent ensemble sur ce sujet pendant la durée d'un été.

Une proposition pour le projet d'été de recherches sur l'intelligence artificielle (McCarthy et al, 1955)


A Proposal for the

DARTMOUTH SUMMER RESEARCH PROJECT ON ARTIFICIAL INTELLIGENCE

June 17 - Aug. 16

We propose that a 2 month, 10 man study of artificial intelligence be carried out during the summer of 1956 at Dartmouth College in Hanover, New Hampshire. The study is to proceed on the basis of the conjecture that every aspect of learning or any other feature of intelligence can in principle be so precisely described that a machine can be made to simulate it. An attempt will be made to find how to make machines use language, form abstractions and concepts, solve kinds of problems now reserved for humans, and improve themselves. We think that a significant advance can be made in one or more of these problems if a carefully selected group of scientists work on it together for a summer.

The following are some aspects of the artificial intelligence problem:

1) Automatic Computers

If a machine can do a job, then an automatic calculator can be programmed to simulate the machine. The speeds and memory capacities of present computers may be insufficient to simulate many of the higher functions of the human brain, but the major obstacle is not lack of machine capacity, but our inability to write programs taking full advantage of what we have.

2) How Can a Computer be Programmed to Use a Language

It may be speculated that a large part of human thought consists of manipulating words according to rules of reasoning

FIGURE 1 – Minsky au centre, Shannon à droite, et d'autres participants à la conférence

Cet article est la traduction d'un article de Jørgen Veisdal, qui a écrit quelques articles en lien avec les mathématiques, consultable dans le paradis de Cantor ici https://medium.com/cantors-paradise/the-birthplace-of-ai-9ab7d4e5fb00

Motivation

Avant la conférence, le professeur assistant de mathématiques à Dartmouth John McCarthy et Claude Shannon du MIT avaient co-édité le Volume 34 du journal des Annales d'études mathématiques qui devait paraître dans un avenir proche, sur des études des automates (Shannon & McCarthy, 1956). Les automates sont des machines autonomes destinées à suivre des séquences prédéterminées d'opérations ou à répondre à des instructions prédéterminées. Comme mécanismes d'ingénierie, les automates apparaissent dans une large variété d'applications tels que les horloges mécaniques où un marteau tape sur une cloche toutes les heures et un coq sort pour chanter.

Selon James Moor (2006), McCarthy en particulier avait été déçu par les soumissions d'articles à paraître et leur incapacité à se focaliser sur les possibilités des ordinateurs possédant une intelligence au-delà du plutôt trivial et simple comportement des automates :

> *A ce moment-là, je pensais : "si nous pouvions obtenir que toute personne intéressée par le sujet lui consacre du temps en évitant la distraction, nous pourrions faire de réelles avancées sur le sujet". (John McCarthy)*

Le groupe initial que McCarthy avait en tête incluait Marvin Minsky qu'il avait connu lorsqu'ils étaient tout deux étudiants ensemble à Fine Hall au début des années 1950. Ces deux-là avaient parlé d'intelligence artificielle et la thèse de Minski en mathématiques avait comme sujet les réseaux de neurones (Moor, 2006) et la structure du cerveau humain (Nasar, 1998). Ils avaient tous les deux été recrutés aux côtés de Claude Shannon en 1952. Peu de temps avant, McCarthy avait appris que Shannon, qui était bien plus vieux qu'eux, était intéressé par le domaine, également. Finalement, McCarthy s'était rué vers Nathaniel Rochester au MIT quand IBM leur avait offert un ordinateur. Il montra lui aussi de l'intérêt pour l'intelligence artificielle (McCorduck, 1979), et ainsi, les quatre se mirent d'accord pour soumettre à la fondation Rockefeller une proposition pour une conférence / colloque.

La proposition

Nous proposons qu'une étude 2 mois-10 hommes de l'intelligence artificielle soit menée pendant l'été 1956 au Collège de Dartmouth, à Hanovre dans le New Hampshire.

La proposition avait été envoyée par McCarthy et Minsky à la fondation Rockefeller à Dartmouth, puis à Harvard. Ils amenèrent leur proposition aux doyens de la faculté,

FIGURE 2 – Les initiateurs de la conférence : John McCarthy, Marvin Minsky, Claude Shannon, Nathaniel Rochester)

à Claude Shannon aux Bell Labs et à Nathaniel Rochester à IBM et ils obtinrent leur soutien (Crevier, 1993). La proposition suivit, et fut reproduite dans le magazine AI (McCarthy et al, 1955, Magazine AI Volume 27, Numéro 4 p. 12-14) :

Proposition pour le projet de recherches d'été de Dartmouth sur l'intelligence artificielle (21 août 1955)

1. Machines automatiques :
Si une machine peut réaliser une tâche, alors un calculateur automatique peut être programmé pour simuler la machine. La vitesse et la capacité mémoire des ordinateurs actuels peuvent être insuffisants pour simuler un grand nombre des hautes fonctions intellectuelles du cerveau humain, mais l'obstacle principal n'est pas le manque de capacités de la machine, mais notre incapacité à écrire des programmes qui tirent totalement parti des machines dont nous disposons.

2. Comment un ordinateur peut-il être programmé pour utiliser un certain langage ?
On peut supposer qu'une large part de la pensée humaine consiste à manipuler des mots selon des règles de déduction et des règles d'induction. De ce point de vue, former une généralisation consiste à admettre un nouveau mot et quelques règles selon lesquelles des phrases contenant ce mot impliquent et sont impliquées par d'autres. Cette idée n'a jamais été très précisément formulée et n'a pas été testée sur des exemples.

3. Réseaux de neurones
Comment un ensemble de neurones (hypothétiques) peuvent-ils être arrangés de manière à former des concepts. Un travail théorique et expérimental considérable a été réalisé sur ce problème par Uttley, Rashevsky et son groupe, Farley et Clark, Pitts et McCulloch, Minsky, Rochester et Holland, et d'autres. Des résultats partiels ont été obtenus mais le problème nécessite davantage de travail théorique.

4. Théorie de la taille d'un calcul
Si l'on nous donne un problème bien défini (un problème pour lequel il est possible de tester mécaniquement si une réponse proposée est valide ou non), une manière

de le résoudre est de tester toutes les réponses possibles dans l'ordre. Cette méthode est inefficace et pour l'exclure, on doit disposer d'un critère permettant de mesurer l'efficacité d'un calcul. Quelques réflexions montrent que pour obtenir une mesure de l'efficacité d'un calcul, il est nécessaire d'avoir en main une méthode pour mesurer la complexité des processeurs de calcul, ce qui peut être fait si l'on a une théorie de la complexité des fonctions. Des résultats partiels sur ce problème ont été obtenus par Shannon, et également par McCarthy.

5. Auto-amélioration
Probablement qu'une machine vraiment intelligente pourrait réaliser des tâches qui seraient mieux décrites en disant qu'elles permettent une auto-amélioration. Des schémas ont été proposés pour faire cela et méritent d'être mieux étudiés. Il semble que cette question puisse être étudiée de façon abstraite également.

6. Abstractions
Un certain nombre de types d'"abstraction" peuvent être définis distinctement et d'autres moins distinctement. Une tentative directe de les classifier et de décrire les méthodes des machines pour fabriquer des abstractions à partir de perceptions et d'autres données sembleraient dignes d'intérêt.

7. Hasard et créativité
Une conjecture attractive et encore clairement incomplète est que la différence entre la pensée créatrice et la pensée compétente sans imagination réside dans l'injection d'un sain hasard. Le hasard doit être guidé par l'intuition pour être efficace. En d'autres termes, le fait de deviner d'une manière apprise ou bien l'intuition incluent l'un et l'autre une dose de hasard contrôlée dans une pensée ordonnée différemment.

Dans la proposition étaient fournies de courtes biographies des "proposants" :

Claude E. Shannon, Mathématicien, Laboratoires téléphoniques Bell. Shannon a développé la théorie statistique de l'information, l'application du calcul propositionnel aux circuits alternatifs, et a obtenu des résultats sur la synthèse efficace des circuits alternatifs, la conception de machines qui gagnent, la cryptographie, et la théorie des machines de Turing. Lui et J. McCarthy sont co-éditeurs des Annales de l'étude mathématique de la théorie des automates.

Marvin L. Minsky, professeur assistant en mathématiques et neurologie à Harvard. Minsky a construit une machine pour simuler l'apprentissage par réseaux de neurones et a soutenu une thèse en mathématiques à Princeton intitulée "les réseaux de neurones et le problème de la modélisation du cerveau" qui contient des résultats sur la théorie de l'apprentissage et sur la théorie des réseaux de neurones aléatoires.

Nathaniel Rochester, Directeur de recherches en théorie de l'information, IBM, à Poughkeepsie, New York. Rochester a étudié le développement de radars pendant sept ans et les machines informatiques pendant sept ans. Lui et un autre ingénieur ont été conjointement responsables de la conception du IBM type 701, qui est un ordinateur de grande dimension qui est largement utilisé aujourd'hui. Il a travaillé sur des techniques de programmation automatique largement utilisées aujourd'hui et a étudié comment l'on pourrait obtenir que des machines effectuent des tâches qui étaient jusque-là dévolues aux seuls humains. Il a aussi travaillé sur la simulation des réseaux de neurones avec un accent particulier sur l'utilisation des ordinateurs pour tester des théories en neurophysiologie.

John McCarthy, Professor assistant de Mathématique, Collège Dartmouth.
McCarthy a travaillé sur un certain nombre de questions liées à la nature mathématique du processus de pensée incluant la théorie des machines de Turing, la vitesse des ordinateurs, la relation d'un modèle de cerveau à son environnement, et l'utilisation des langages par les machines. Quelques résultats de son travail sont inclus dans les Annales à venir, éditées par Shannon et McCarthy. Les autres travaux de McCarthy ont concerné le domaine des équations différentielles.

La proposition complète est disponible sur le site de Stanford. Les salaires des participants non supportés par des institutions privées (comme les laboratoires Bell et IBM) furent estimés à 1 200 $ par personne, 700 $ pour les deux étudiants diplômés. Les dépenses de train s'élevaient à 300 $ et seraient remboursées aux participants qui ne résidaient pas dans le New Hampshire. La fondation Rockefeller prit en charge 7 500 $ du budget estimé à 13 500 $ pour la totalité de la conférence, qui dura pour tout dire six à huit semaines (les comptes-rendus diffèrent) à l'été 1956, commençant le 18 juin et se terminant le 17 août.

Participants

Bien qu'ils viennent d'une grande variété de domaines, que ce soient les mathématiques, la psychologie, l'ingénierie électrique et plus, les participants à la conférence de Dartmouth de 1956 partageaient une croyance qui les définissait en commun, notamment le fait que penser n'est pas une propriété spécifique que ce soit aux humains ou même aux êtres biologiques. Ils croyaient plutôt que le calcul est un phénomène de déduction formelle qui peut être compris de façon scientifique et que le meilleur instrument non humain pour effectuer une telle chose est l'ordinateur digital (McCormack, 1979).

Les quatre participants initiaux invitèrent chacun quelques personnes qui partageait leur croyance à propos de ces propriétés uniques de la cognition. Parmi elles il y avait les futurs lauréats du prix Nobel John F. Nash Jr (1928-2015) et Herbert A. Simon

(1916-2001). Le premier a vraisemblablement été invité par Minsky, et les deux ont été étudiants à Princeton ensemble vers le début des années 50. Simon a été invité par McCarthy lui-même ou par transitivité par Allen Newell, car tous deux avaient travaillé ensemble chez IBM en 1955. Selon les notes prises par Ray Solomonoff, vingt personnes ont participé sur la période des huit semaines. Parmi elles :

Herbert A. Simon (1916-2001)

Selon une des communications de McCarthy en mai 1956, Herbert A. Simon devait assister aux deux premières semaines du colloque.
Simon, alors Professeur de gestion à Carnegie Mellon (alors dénommée Carnegie Tech) avait jusque-là travaillé sur les problèmes de décision (qu'on appelait "comportement administratif") jusqu'à l'obtention de sa thèse en 1947 à l'Université de Chicago. Il irait jusqu'à gagner le prix Nobel d'Economie en 1978 pour son travail, et plus généralement pour "ses recherches pionnières dans les processus de décision mis en œuvre dans les organisations économiques". Au moment de la conférence, il collaborait avec Allen Newell et Cliff Shaw sur le langage-machine de traitement de l'information (IPL) et sur les programmes pionniers en théorie logique (Logic Theorist en 1956 et General Problem Solver en 1959). C'était le premier programme écrit pour simuler les capacités de résolution de problèmes d'un humain, et il réussirait à prouver 38 des 52 premiers théorèmes des Principia Mathematica de Whitehead et Russell, en trouvant même des preuves nouvelles et plus élégantes que celles proposées en 1912. Cliff travaillerait plus tard sur la machine universelle de résolution de problèmes, qui pourrait résoudre tout problème exprimé d'une manière suffisamment formelle par un ensemble de formules bien formées. Ce travail évoluerait en architecture Soar pour l'intelligence artificielle.

Allen Newell (1927-1992)

Allen Newell, le collaborateur de Simon, assista également aux deux premières semaines du colloque.
Ils s'étaient connus à RAND Corporation en 1952 et avaient créé ensemble le langage de programmation IPL en 1956. Ce langage était le premier à introduire la manipulation de listes, les listes de propriétés, les fonctions de haut niveau, le calcul symbolique et les machines virtuelles comprenant des langages de calcul digital. Newell était aussi le programmeur qui le premier introduisit le traitement des listes, l'application de l'analyse par les moyennes au raisonnement général et à utiliser des heuristiques pour limiter l'espace de recherche d'un programme. Un an avant la conférence, Newel avait publié un article intitulé "La machine qui joue aux échecs : un exemple de traitement d'une tâche complexe par adaptation", qui délimitait les contours théoriques d'

> *"..une conception imaginative pour qu'un ordinateur puisse jouer aux échecs d'une façon humanoïde, incorporant la notion de buts, les niveaux souhaités pour arrêter la recherche, se satisfaisant de mouvements "suffisamment bons", des fonctions d'évaluation multi-dimensionnelles, la génération de*

sous-buts pour implémenter la réalisation des buts et quelque-chose qui ressemblait à la "Best first search" (recherche du premier d'abord). L'information à propos de l'échiquier devait être exprimée symboliquement dans un langage qui ressemblait au calcul des prédicats."

(citation extraite de "Allen Newell" dans les mémoires auto-biographiques d'Herbert A. Simon, 1997).
Newell attribue l'idée qui l'amena à son article à une "expérience de conversion" qu'il eut lors d'un séminaire en 1954 en écoutant un étudiant de Norbert Wiener, Oliver Selfridge des Laboratoires Lincoln Laboratories, décrire "un programme d'ordinateur qui apprend à reconnaître des lettres et d'autres formes" (Simon, 1997).

Oliver Selfridge (1926-2008)

Oliver Selfridge a rapporté avoir également assisté au colloque pendant deux semaines. Selfridge écrirait des papiers visionnaires importants sur les réseaux de neurones, la reconnaissance des formes, et l'apprentissage machine. Son "article Pandemonium" (1959) est considéré comme un classique dans le milieu de l'intelligence artificielle.

Julian Bigelow (1913-2003)

L'un des ingénieurs informaticiens pionniers était là lui-aussi. Bigelow avait travaillé avec Norbert Wiener sur l'un des papiers fondateurs au sujet de la cybernétique, et avait été recruté par John von Neumann pour construire l'un des premiers ordinateurs digital, à l'Institut des Etudes Avancées (IAS) en 1946 sur la recommandation de Wiener. Les autres participants incluaient Ray Solomonoff, Trenchard More, Nat Rochester, W. Ross Ashby, W.S. McCulloch, Abraham Robinson, David Sayre, Arthur Samuel et Kenneth R. Shoulders.

FIGURE 3 – Von Neumann et al.

Résultats

De façon assez ironique, les "échanges scientifiques intenses et soutenus pendant deux mois" imaginés avant la tenue du colloque par John McCarthy n'ont jamais vraiment eu lieu (McCormack, 1979) :

> *"La plupart de ceux qui étaient là étaient assez obnubilés par la poursuite des idées qu'ils avaient avant de venir, ou n'étaient pas là, et aussi loin que j'aie pu le voir, il n'y eut pas de réel échange d'idées. Les gens vinrent pour différentes périodes. L'idée était que chacun soit d'accord pour venir six semaines, et les personnes vinrent pour des périodes allant de deux jours à six semaines, ce qui fait qu'il n'y eut aucun moment où tout le monde était présent. C'était très décevant pour moi parce que cela signifiait vraiment que nous ne pourrions pas avoir de réunions régulières."*

Quelques résultats tangibles peuvent cependant être tirés de cette expérience. D'abord, le terme Intelligence artificielle (IA) lui-même fut inventé pour la première fois par McCarthy pendant la conférence. Parmi les travaux importants qui furent réalisés pendant la période de la conférence, McCarthy cita plus tard les travaux de Newell, Shaw et Simon sur le langage de traitement de l'information (IPL) et sur leur machine pour la théorie logique (Moor, 2006). Parmi d'autres résultats, un des participants à la conférence, Arthur Samuel, inventerait l'expression "apprentissage machine" en 1959 et créerait le programme de jeu d'échecs Samuel, l'un des premiers programmes auto-apprenant au monde. Oliver Selfridge est maintenant considéré comme le "père de la perception machine" pour ses recherches en reconnaissance des formes. Minsky serait récompensé par le prix Turing en 1969 pour son "rôle central dans la création, la mise en forme et les avancées apportées au domaine de l'intelligence artificielle". Newell et Simon recevraient le prix Turing également en 1975 pour leurs contributions "à l'intelligence artificielle et à la psychologie cognitive humaine".

Ci-dessous, un article résumant les événements de la conférence anniversaire AI@50 qui a été écrit après la conférence par James Moor et publié dans le Magazine AI Vol. 27 Numéro 4 en 2006.

La conférence de l'Intelligence artificielle du Collège de Dartmouth : les 50 années à venir

La conférence de l'Intelligence artificielle du Collège de Dartmouth : les 50 années à venir (AI@50) a eu lieu du 13 au 15 juillet 2006.

La conférence avait trois objectifs :

- célébrer le projet de recherches d'été de Dartmouth, qui s'était tenu en 1956 ;
- dresser le bilan de la façon dont l'IA avait progressé ;
- et projeter la façon dont l'IA se développerait ou devrait le faire.

Cette conférence a été généreusement financée par le Doyen de la Faculté et le bureau du Prévôt du Collège de Dartmouth, par la Darpa, et par quelques donateurs privés.

FIGURE 4 – Cinq participants au projet initial devant la plaque de commémoration (lors du projet AI@50 en 2006) : Trenchard More, John McCarthy, Marvin Minsky, Oliver Selfridge, and Ray Solomonoff.

Réflexions sur 1956

Dater le début d'un mouvement est difficile, mais le projet de recherches d'été de 1956 est souvent considéré comme l'événement qui a fondé l'Intelligence Artificielle (IA) comme discipline de recherche. John McCarthy, alors professeur de mathématiques à Dartmouth, avait été déçu que les papiers sur les études concernant les automates, qu'il co-éditait avec Claude Shannon, n'en disent pas davantage sur les possibilités des ordinateurs de faire preuve d'intelligence. Aussi, dans la proposition écrite par John McCarthy, Marvin Minsky, Claude Shannon, et Nathaniel Rochester pour cet événement de 1956, McCarthy voulait, comme il l'a expliqué lors de la conférence AI@50, "clouer le drapeau au mât" (ne pas accepter la défaite). On attribue à McCarthy l'invention de l'expression "intelligence artificielle" ainsi que d'avoir solidifié

FIGURE 5 – Plaque commémorative.

profondément l'orientation de la discipline. Il est intéressant de spéculer pour savoir si le domaine aurait été différent si on l'avait appelé "intelligence calculatoire" ou avec un autre nom parmi de nombreux noms possibles.

Chacun donna ses souvenirs. McCarthy reconnut que le projet de 1956 ne donna pas naissance aux coopérations attendues. Les participants ne vinrent pas au même moment et la plupart restèrent fixés sur leur propre agenda de recherche. McCarthy insista sur le fait qu'il y avait néanmoins à ce moment-là d'importants développements de la recherche, particulièrement pour le langage IPL avec Allen Newel, Cliff Shaw et Herbert Simon sur la machine logique théorique.

Marvin Minsky fit comme commentaire que, bien qu'il ait travaillé sur les réseaux de neurones pour sa thèse quelques années avant le projet de 1956, il stoppa ce travail initial parce qu'il était convaincu que des avancées pourraient être faites avec d'autres approches informatiques. Minsky exprima ce constat que trop de personnes en IA aujourd'hui essayaient plutôt les approches populaires et ne publiaient que sur les succès.

Oliver Selfridge souligna l'importance des nombreux domaines de recherches avant et après le projet d'été de 1956, ce qui a aidé l'IA en tant que domaine. Le développement des langages améliorés et des machines était essentiel. Il offrit des opportunités à de nombreuses activités pionnières telles que celles que J. C. R. Lickleiter développa plus tard, sur le temps partagé, ou bien la conception d'ordinateurs chez IBM par Nat Rochester ou encore le travail de Frank Rosenblatt sur les perceptrons.

Trenchard More fut envoyé sur le projet d'été pour deux semaines non consécutives par l'Université de Rochester. Quelques-unes des meilleures notes décrivant le projet IA ont été prises par More, bien qu'il admette ironiquement qu'il n'a jamais aimé l'utilisation des mots "artificielle" ou "intelligence" comme termes pour dénommer le domaine.

Ray Solomonoff dit qu'il vint sur le projet d'été pour convaincre tout le monde de l'importance de l'apprentissage machine. Il en repartit en ayant beaucoup perfectionné ses connaissances sur les machines de Turing, ce qui lui servit dans des travaux ultérieurs.

Ainsi, selon certains points de vue, le projet de recherche de 1956 ne répondit pas tout à fait à toutes les attentes. Les participants vinrent à différents moments, et travaillèrent sur leurs propres projets, et ainsi, ce ne fut pas tout à fait une conférence au sens habituel.

Il n'y eut pas d'accord sur une théorie générale du domaine, en particulier sur une théorie générale de l'apprentissage. Le domaine de l'IA a démarré non par accord sur la méthodologie ou par choix des problèmes ou de la théorie générale, mais par une vision partagée du fait que des ordinateurs pouvaient être fabriqués pour exécuter des tâches intelligentes. Cette vision a été hardiment établie dans la proposition de la conférence de 1956 : "L'étude doit être menée sur la base de la conjecture que tout aspect de l'apprentissage et de toute autre caractéristique de l'intelligence peut en principe être si précisément décrite qu'une machine doit pouvoir être capable de la simuler".

Evaluations en 2006

Il y eut plus de trois douzaines d'excellentes présentations et événements à la conférence AI@50, et il n'y a pas assez de place ici pour leur donner toute celle qu'elles méritent. Des chercheurs de haut niveau donnèrent des conférences au sujet de l'apprentissage, de la recherche, des réseaux, de la robotique, de la vision, du raisonnement, du langage, de la cognition et de la théorie des jeux.

Ces présentations montraient les résultats significatifs de l'IA durant le demi-siècle écoulé. Considérons la robotique comme un exemple. Comme l'a souligné Daniela

Rus, en 1956, il n'y avait pas de robots tels que nous les connaissons aujourd'hui. Il y avait des automates dédiés à des tâches spécifiques. Aujourd'hui, les robots sont partout. Ils nettoient nos maisons, explorent les océans, voyagent sur la surface de Mars, et gagnent le grand Challenge de la DARPA d'une course de 32 miles dans le désert de Mojave. Rus émit l'hypothèse que dans le futur, nous pourrions avoir nos propres robots personnels comme aujourd'hui nous avons nos ordinateurs personnels, des robots qui pourraient être programmés pour nous aider dans toute tâche que nous voudrons réaliser. On peut imaginer que des morceaux de robots puissent être assemblés pour devenir le genre de structure dont nous avons besoin à un moment donné. Beaucoup de progrès ont été accomplis en robotique, et beaucoup de progrès semblent atteignables dans un proche horizon.

Bien que l'IA ait obtenu de nombreux succès dans les 50 dernières années, de nombreux désaccords importants restent associés au domaine. Les différents domaines de recherche ne collaborent pas, les chercheurs utilisent des méthodologies de recherche différentes, et il n'y a toujours pas une théorie générale de l'intelligence et de l'apprentissage qui unifierait la discipline.

L'un des points de désaccord dont il a été débattu à AI@50 est la question de savoir si l'IA devrait être plutôt basée sur la logique, ou bien sur les probabilités.

McCarthy continue d'être un fervent partisan d'une approche basée sur la logique. Ronald Brachman a argumenté sur le fait qu'une idée maîtresse de la proposition pour le projet de 1956 était qu'"une grande partie des pensées humaines consiste à manipuler des mots selon certaines règles pour raisonner et certaines règles pour conjecturer" et que cette idée clef a servi de base commune à la plupart de l'IA des 50 dernières années. C'était la révolution de l'IA ou, comme l'a expliqué McCarthy, la contre-révolution, puisque c'était une attaque du comportementalisme, qui était devenu la position dominante en psychologie dans les années 1950.

David Mumford argumenta au contraire sur le fait que les 50 dernières années avaient expérimenté le déplacement depuis la fragile logique vers les méthodes probabilistes. Eugene Chamiak alla dans le sens de ces arguments également en expliquant comment le traitement du langage naturel est maintenant un traitement essentiellement statistique. Il établit franchement : "Les statistiques ont pris le contrôle pour le traitement du langage naturel parce que ça marche."

Un autre point de désaccord, corrélé à la question *logique versus probabilités*, est le débat *psychologie contre paradigme pragmatique*. Pat Langley, dans l'esprit d'Allen Newell et Herbert Simon, a vigoureusement maintenu que l'IA devrait revenir à ses racines psychologiques si l'on souhaite obtenir une intelligence artificielle de niveau humain. D'autres chercheurs en IA sont plus enclins à explorer ce qui réussit même fait par des moyens non humains. Peter Norvig suggéra que la recherche, particulièrement du fait de l'énorme quantité de données exploitables du web, pourrait montrer des signes encourageants de traitement des problèmes traditionnels d'IA même sans tenter de simuler une intelligence humaine. Par exemple, la traduction machine avec un degré raisonnable de précision entre l'arabe et l'anglais est maintenant possible en utilisant des méthodes statistiques alors même que personne dans le domaine de recherches en question ne parle telle ou telle langue que l'on a besoin de traduire.

Finalement, il y a eu le débat en cours sur l'utilité des réseaux de neurones pour atteindre l'intelligence artificielle. Simon Osindero qui travaille avec Geoffrey Hinton discuta des réseaux plus puissants. Terry Sejnowski et Rick Granger expliquèrent tous deux les nombreuses connaissances acquises sur le cerveau dans la dernière décennie et comment cette information était très pertinente pour construire des modèles en machine de l'activité intelligente.

Ces différences variées ont été utilisées pour montrer la bonne santé du domaine. Comme Nils Nilsson l'a souligné, il y a de nombreux chemins qui mènent au sommet. Bien sûr, toutes les méthodes peuvent ne pas être fructueuses sur la course longue, mais puisque nous ne savons pas quelle est la meilleure option, il est bon d'explorer différentes voies. Malgré les différences, comme en 1956, il y a une vision commune sur le fait que les ordinateurs peuvent exécuter des tâches intelligentes. Peut-être que cela seul unifie déjà la discipline.

FIGURE 6 – Collège de Dartmouth.

Prospective pour 2056

De nombreuses prédictions à propos du futur de l'IA ont été données à AI@50. Quand on leur a demandé ce que seraient les 50 prochaines années au regard d'aujourd'hui, les participants à la conférence initiale avaient différentes positions. McCarthy a fourni sa vision qui est qu'une IA de niveau humain n'est pas assurée pour 2056. Selfridge a exprimé que les ordinateurs feraient davantage que de la planification, incorporeraient des sentiments, et seraient affectés par eux, mais n'atteindraient pas le niveau humain. Minsky pensait que ce qui était nécessaire pour qu'il y ait un progrès significatif dans le futur était que quelques brillants chercheurs poursuivent leur recherche en poursuivant leurs propres bonnes idées, et non pas en faisant ce que leurs aînés avaient fait. Il s'est lamenté que trop peu d'étudiants aujourd'hui ne poursuivent de telles idées mais soient plutôt intéressés par l'entrepreneuriat ou la loi. La plupart espéraient que les machines seraient toujours sous le contrôle des humains et suggérèrent que les machines ne puissent jamais atteindre l'imagination des humains. Solomonoff prédit au contraire que des machines vraiment efficaces ne tarderont pas à être obtenues. Le danger, selon lui, est politique. Les technologies disruptives, comme le calcul, fournissent une grande puissance, puissance qui peut être mal utilisée, mise entre les mains d'individus et de gouvernements.

Ray Kurzweil offrit une vision bien plus optimiste à propos des progrès et déclara que nous devions avoir confiance dans le test de Turing, argument avec lequel beaucoup furent en désaccord. Prévoir les événements technologiques est toujours hasardeux. Simon avait prédit une machine championne d'échecs dans les 10 ans. Il a eu tort sur les 10 ans, mais cela arriva au bout de 40 ans. Ainsi, en se donnant une plus longue période, 50 ans de plus, il est fascinant de méditer à ce que l'IA pourra accomplir.

Sherry Turkle pointa judicieusement que la composante humaine est facilement négligée dans le développement technologique. Le résultat important pour nous concerne peut-être moins les capacités des ordinateurs que nos propres vulnérabilités quand nous serons confrontés à des intelligences artificielles très sophistiquées.

Plusieurs douzaines d'étudiants diplômés et post-doctoraux ont été financés par la DARPA pour assister à la conférence AI@50. Notre espoir est que beaucoup d'entre eux aient été inspirés parce ce qu'ils ont observé. Peut-être que certains d'entre eux présenteront leurs résultats à la conférence de célébration des 100 ans du projet de recherches d'été de Dartmouth.

Notes

Une plaque commémorant le projet de recherches de l'été 1956 a récemment été accrochée dans le Hall au Collège de Dartmouth, l'immeuble dans lequel les activités ont eu lieu (figure 4).

Pour obtenir plus de détails sur les orateurs et les sujets,
voir https://www.dartmouth.edu/ ai50/homepage.html.

James Moor est professeur de philosophie au Dartmouth College. Il est professeur adjoint au Centre de philosophie appliquée et d'éthique publique (CAPPE) à l'Université Nationale Australienne. Il a obtenu sa thèse en Histoire et Philosophie des Sciences à l'Université d'Indiana. Ses domaines de recherche sont la Philosophie de l'intelligence artificielle, l'Ethique des machines, la Philosophie de la pensée, la Philosophie des sciences et la Logique. Il est éditeur du journal *Pensées et machines* et est président de la Société internationale de l'éthique de la technologie de l'information (INSEIT). Il a obtenu une récompense "Faire la différence" de l'association SIGCAS.

Skolem et le pessimisme à propos des preuves en mathématiques

Paul J. Cohen

Les attitudes par rapport à la formalisation et à la preuve ont fait de grands mouvements de balanciers durant les 150 dernières années. Nous brossons leur développement depuis la première formalisation de Frege, aux débats à propos de l'intuitionnisme et d'autres écoles, en passant par le programme de Hilbert et le coup de tonnerre du théorème d'incomplétude de Gödel. Un rôle essentiel est joué par le théorème de Skolem-Lowenheim, qui a montré qu'aucun système d'axiomes du premier ordre ne détermine un modèle infini unique. Skolem lui-même voyait cela comme un coup de boutoir à la croyance que les mathématiques ne peuvent être fondées de manière fiable qu'au-dessus de systèmes axiomatiques. Dans un article extrêmement visionnaire, il dessine même la possibilité de nouveaux modèles intéressants pour la théorie des ensembles elle-même, une chose qu'il a ensuite réalisée par la méthode du forcing. Ceci est en contradiction avec la croyance de Hilbert que les mathématiques pourraient résoudre toutes leurs questions. Nous discutons de cela pour la théorie des ensembles, ainsi que des questions dans la théorie des ensembles elle-même, et de leur pertinence, puis nous regardons en détail les conséquences de l'usage d'un raisonnement mathématique basé sur les méthodes du calcul des prédicats. La conclusion est qu'il n'y a pas de base raisonnable à l'assertion d'Hilbert. La grande majorité des questions, même en théorie élémentaire des nombres, et qui sont de complexité raisonnable, sont hors d'atteinte d'un tel raisonnement. Bien sûr, cela ne peut pas être prouvé et nous présentons seulement des arguments de plausibilité. Le grand succès des mathématiques est le rôle de nouveaux axiomes pour la théorie des nombres. Nous en arrivons à considérer des "problèmes naturels", ceux qui semblent présenter une bonne chance d'être résolus. Les grandes gloires du raisonnement humain, depuis la découverte de la géométrie par les Grecs, ont tenu contre cette vision pessimiste. Nous concluons en souhaitant une bonne santé aux mathématiques d'aujourd'hui et aux mathématiques des nombreux siècles à venir.

Introduction

Je voudrais remercier les organisateurs de la conférence de m'avoir invité à présenter mes idées sur la nature de la preuve mathématique. Ce que j'ai à dire peut être ressenti comme quelque peu anachronique, dans la mesure où j'étudierai un débat qui

Traduction en français d'un article de Paul J. Cohen, téléchargeable ici https://www.math.upenn.edu/ kazdan/proof/notes/Proof2005-PJCohen-2407-18.pdf.

a fait rage il y a presque un siècle, mais qui s'est calmé plus tard. Néanmoins, à la lumière de ce qui s'est passé, je crois que l'on peut aboutir à des conclusions raisonnables à propos de l'état actuel de la preuve mathématique. La plupart des références à la littérature la plus ancienne peuvent être trouvées dans l'excellente collection "De Frege à Gödel", éditée par Jean van Heijenoort (1971, cf. [5]).

Le titre de mon exposé fait allusion à la fois au travail de Thoralf Skolem, mais également, et peut-être encore plus, aux conclusions auxquelles il a abouti, assez tôt lors du développement de la logique mathématique.

Le travail en question est bien sûr le théorème célèbre de Lowenheim-Skolem, dont Skolem a donné une démonstration simplifiée, et qui est indubitablement le résultat le plus basique à propos duquel les systèmes axiomatiques généraux peuvent se voir donner des formulations diverses, mais la forme que Skolem lui-même attribue à Lowenheim est qu'une expression du "vraiment premier" ordre est soit contradictoire, soit satisfiable par un domaine infini dénombrable" (Skolem 1970, cf. [4]). Comme Skolem l'a montré, il y a une extension naturelle au cas de telles expressions dénombrables.

"Contradictoire" ici est défini en référence aux règles du calcul des prédicats, i.e. qui correspondent au raisonnement mathématique normal. La conclusion surprenante à laquelle Skolem est arrivé est le fameux paradoxe de Skolem, qui énonce que n'importe lequel des systèmes d'axiomes habituel pour la théorie des ensembles aura des modèles calculables, à moins qu'ils ne soient contradictoires. Dans la mesure où je ne peux supposer que mon audience n'est constituée que de logiciens experts, je rappellerai que bien que l'ensemble des réels ait un modèle calculable qui est calculable vu de l'extérieur, il n'y a pas de fonction "vivant dans le modèle" qui le mette en correspondance de façon bijective avec l'ensemble des entiers du modèle. Ce fait et d'autres considérations ont amené Skolem à ce point-de-vue.

> *Je croyais qu'il était si clair que l'axiomatisation en terme d'ensembles ne constituait pas un socle ultime de fondements satisfaisant des mathématiques, que les mathématiciens, pour la plupart, ne seraient pas très concernés par cette axiomatisation.*

Le point de vue que je présenterai diffère un peu de celui-ci, et est en un certain sens plus radical, notamment parce qu'il n'est pas raisonnable de s'attendre à ce que chaque raisonnement tel que ceux que nous appelons rigoureux en mathématiques puisse espérer tout résoudre mais puisse résoudre seulement la plus petite portion des questions mathématiques potentielles.

Le théorème de Lowenheim-Skolem a été la première découverte vraiment importante à propos des systèmes formels en général, et il en reste probablement la plus basique. Ce n'est pas un résultat négatif du tout, mais il joue un rôle important en mathématiques dans de nombreuses situations. Par exemple, dans la preuve de Gödel de la consistance de l'hypothèse du continu, le fait que l'hypothèse soit vérifiée dans l'univers des ensembles constructibles est essentiellement une application de ce théorème. Dans la présentation de Skolem du théorème de base, on le lit comme un théorème plausible, naturel en mathématiques, non encombré du jargon qui prévaut dans de nombreux papiers actuels, et, par dessus tout, dans les débats philosophiques concernant les fondements des mathématiques. Comme le lecteur peut le vérifier en se référant au livre de référence de van Heijenoort, tous les écrits de Skolem sur la logique et sur la théorie des ensembles sont d'une clarté et d'une simplicité qui est frappante. Même maintenant, il est vraiment réconfortant de lire ces papiers et de réfléchir à leur sujet.

Maintenant, aucune discussion de preuve ne manque de faire référence au théorème d'incomplétude de Gödel. Son résultat est qu'aucun système raisonnable de mathématiques ne peut prouver sa propre consistance, où ce dernier est établi comme un théorème à propos des preuves dans son propre système formel, et par conséquent, peut être construit comme un résultat en combinatoire ou en théorie des nombres. Le théorème d'incomplétude est un théorème de mathématiques, et non un énoncé philosophique. Ainsi, en ce sens, il est inattaquable, mais, dans un autre sens, puisqu'il fait référence à une question si spécifique, il n'est pas très pertinent pour la question que j'adresse dans cet exposé, notamment le fait qu'on puisse raisonnablement attendre qu'il soit répondu aux questions mathématiques par des raisonnements mathématiques. C'est bien sûr la première, et peut-être la seule, assertion prouvée qui soutienne le pessimisme de base du point de vue de Skolem.

Laissez-moi commencer en rappelant quelques faits concernant le développement de la méthode axiomatique, qui vous est, j'en suis sûr, familière. Avec le livre fondateur de Frege "Begrifischrift" en 1879, la notion de système formel a reçu sa forme définitive. Un important travail lié à cela a été effectué par Boole, et Pierce, et plus tard, Peano a présenté une approche similaire, mais le travail de Frege, pour la première fois dans l'histoire de la pensée humaine, la notion de déduction logique, a reçu une formulation complètement précise. Le travail de Frege ne contenait pas seulement la description du langage (que nous pourrions appeler de nos jours le “langage machine”), mais également une description des règles pour manipuler ce langage, ce que nous appelons de nos jours le calcul des prédicats. Maintenant les grecs avaient introduit la méthode axiomatique, et Leibniz avait émis des spéculations à propos d'un mécanisme déductif universel. Ainsi, comme avec beaucoup de grandes découvertes, la formulation précise de ce qui est signifié par un système formel, a grandi graduellement dans l'inconscient collectif, et de ce fait, elle n'est peut-être pas apparue à de nombreuses personnes comme une percée. Certainement aucune idée radicalement nouvelle ne fut introduite, et aucun problème particulièrement difficile n'a été surpassé. Mais c'était un point de repère majeur. Pour la première fois, on pouvait précisément parler de preuves et de systèmes axiomatiques. Le travail a été largement dupliqué par d'autres, e.g. Russell et Whitehead, qui ont donné leurs propres formulations et notations, et même Hilbert a fait quelques tentatives pour reformuler la notion de base d'un système formel. La variété de telles tentatives est reliée au fait de faire une distinction claire entre les axiomes qui sont déclarés comme étant le point de départ d'une théorie et les méthodes de déduction qui devront être utilisées. Le théorème de complétude de Gödel, que beaucoup pensent implicite dans le travail de Skolem, montre explicitement qu'il n'y a pas d'ambiguité dans les règles de déduction. Cela est très en contraste avec le théorème d'incomplétude, qui montre qu'aucun système raisonnable d'axiomes ne peut être complet.

Pendant tous ces développements, un vif débat a fait rage, continuant quasiment jusqu'à la seconde guerre mondiale, sur la validité ultime des mathématiques. Ce débat a montré l'émergence du formalisme, du logicisme et de l'intuitionnisme comme compétiteurs pour des fondements correcte des mathématiques. Je discuterai brièvement de ces philosophies concurrentes, en notant au début que chacune d'elles semble se focaliser sur les preuves plutôt que sur les modèles. De ce point de vue, les idées de Skolem était en total contraste avec celles de ses contemporains. Je crois qu'aujourd'hui, la situation est plutôt inverse, en partie à cause de mon propre travail, qui montre combien de modèles de la théorie des ensembles peuvent être construits en utilisant la notion de forcing (Cohen 1966). En effet, Skolem prévoyait même, dans son article de 1922, la construction de nouveaux modèles de la théorie des ensembles, du moins c'est ce qu'il déclare.

> *Ce serait dans tous les cas d'un bien plus grand intérêt si l'on pouvait prouver qu'un nouveau sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ pouvait lui être adjoint sans donner naissance à des contradictions ; mais cela “serait probablement très difficile”. Comme il le disait, en avance sur son temps, donc le désintérêt pour la question des modèles était peut-être l'un des points de vue les plus*

communs au sujet des fondements des mathématiques.

D'abord, je mentionnerai la croyance de Hilbert que les belles mathématiques, érigées au cours des siècles, était en quelque sorte sacro-saintes, et ne pourrait être défiées. Par exemple, il pensait que la connaissance mathématique était notre droit de naissance, et qu'en principe, le raisonnement humain pourrait décider de toutes les questions mathématiques. Il pensait nécessaire de défendre, à tout prix, les mathématiques des attaques de Kronecker et Bronwer. Dans son article de 1904, il résume les articles de Kronecker, Helmholtz, Christoffel, Frege, Dedekind et Cantor, trouvant des défauts dans leurs points de vue, et fournissant son propre traitement comme une alternative. Je ne suis pas très impressionné par ses efforts dans ce papier, mais j'admire grandement la ténacité avec laquelle il défend l'inviolabilité du raisonnement mathématique. Peut-être a-t-il lui-même réalisé les difficultés de donner des fondements quelconques satisfaisante, et s'est-il du coup rétracté, si je peux utiliser cette expression, sur une position plus modeste, qui est que si nous regardons les mathématiques comme un jeu formel sur des symboles, nous pourrions montrer que le jeu est consistant. Cela a été appelé le programme de Hilbert, et alors de nombreuses tentatives ont été faites dont peu ont été accomplies, et les raisons pour cela en devinrent claires quand Gödel prouva son théorème d'incomplétude. Le programme a survécu en une certaine forme, sous le nom de théorie de la preuve, et nous ferons plus tard référence au résultat exceptionnel de Gentzen dans cette discipline, le but de Hilbert fut informellement esquissé, puisque ce que l'on entendait par preuve de consistance n'était pas entièrement explicite. Sa conviction principale était qu'au-delà de tout doute, les mathématiques faisaient référence à une réalité existante, et que cela les mettait à l'abri de toutes les attaques philosophiques, et il apprécia sans aucun doute le soutien qui lui fut prodigué par une grande majorité de mathématiciens.

Ensuite, une école de pensée démarra qui questionnait les méthodes de preuve impliquant ce qui pourrait être appelé le raisonnement non-constructif. Les premiers personnages de cette école de pensée furent Brouwer et Weyl, tous deux de très renommés mathématiciens. Les objections frappèrent l'utilisation du calcul classique des prédicats, en rejetant par exemple le principe du tiers-exclus et les preuves d'existence non-constructives qui lui étaient liées. L'école intuitionniste n'obtint probablement jamais beaucoup de crédit parmi les mathématiciens en exercice, mais elle a refait surface de façon répétée sous des formes variées, par exemple dans le travail de Errett Bishop sur l'analyse constructive. Dans certaines formes, cette école peut même complètement rejeter l'utilisation des systèmes formels, sur la base qu'ils ne sont pas pertinents pour le raisonnement mathématique.

Une question récurrente a été de savoir si la théorie des ensembles, qui parle d'ensembles infinis, fait référence à une réalité existante, et dans un tel cas, comment quelqu'un "sait-il" quels axiomes accepter. C'est là que la plus grande disparité d'opinions existe (et le plus grand nombre de possibilités d'utiliser différents systèmes consistants d'axiomes).

Questions concernant le calcul des prédicats

"La formulation, par Frege et d'autres, des mathématiques comme un système formel, doit certainement être considérée comme une étape dans l'histoire de la pensée humaine. D'une certaine manière, c'est une des réussites les plus curieuses, en ce qu'elle a seulement codifié ce qui était connu. Pourtant, comme structure complétée, réduire la pensée mathématique à ce que nous appelons aujourd'hui le langage machine, et par là en éliminer tout ce qui est vague, a été une étape historique. Peut-être que Frege et les premières personnes qui ont travaillé ainsi ne séparaient pas complètement la formalisation de la pensée logique et les règles logiques de déduction. Aujourd'hui, nous faisons cela clairement, et ces règles sont connues comme le calcul des prédicats. Concernant le calcul des prédicats lui-même, il n'y a pas de controverse, bien que les intuitionnistes et autres restreignent son utilisation. Le travail de Lowenheim et Skolem, et le théorème de complétude de Gödel montrent en effet qu'on a un invariant, la notion naturelle. Laissez-moi maintenant établir ces résultats.

D'abord, je revois la formulation du langage. On a des symboles pour les relations (d'arités variées) entre les objets. On a les connecteurs logiques, les quantificateurs, et quelques symboles utiles comme les parenthèses, les virgules, et finalement les symboles pour les variables individuelles et les constantes. Les règles pour la manipulation des connecteurs sont quelquefois appelées le calcul booléen ou le calcul propositionnel. Beaucoup plus utile, dans le sens où ils contiennent le nœud du raisonnement mathématique, il y a les quantificateurs. Ce sont les quantificateurs existentiels ("il existe") et les quantificateurs universels ("pour tout"). Les règles du calcul propositionnel sont élémentaires et bien connues. L'étape clef dans le raisonnement mathématique est que si l'on stipule qu'"*il existe un z ayant une certaine propriété $A(z)$.*", alors nous inventons un nom pour un tel objet et l'appelons une constante, et nous pouvons former des phrases avec le nom choisi.

Inversement, si une assertion universelle stipule que "$A(z)$ *est vraie pour tout z.*" alors nous pouvons déduire $A(c)$ pour toutes les constantes. Par exemple, si nous avons une constante positive réelle a, et que nous savons qu'une racine carrée existe pour tout réel positif, alors nous inventons le symbole b pour la racine carrée de a.

Vues de cette manière, les règles deviennent extrêmement transparentes, si l'on évite les conflits entre noms pour les constantes et autre. La découverte fondamentale de Lowenheim et Skolem, qui est sans aucun doute la plus grande découverte en logique pure, est que l'invention (ou introduction) des "constantes" qui est présente dans le calcul des prédicats, est équivalente à la construction d'un "modèle" dans lequel les assertions sont vraies. Plus précisément, si l'utilisation du calcul des prédicats n'amène pas à une contradiction sur la base d'un ensemble S de phrases, alors l'usage répétée de ces règles résultera en un modèle pour le système S. De plus, la méthode assure que nous obtenons un modèle calculable si S est calculable. Et ainsi, nous parvenons au "paradoxe" de Skolem qui est que si un système d'axiomes du premier ordre est consistant alors il a un modèle calculable, parce que tous les systèmes courants de la théorie des ensembles ont un nombre dénombrable d'axiomes.

Dans mon for intérieur, je remarque que ce travail a reçu de manière étonnante très peu d'attention. Par exemple, Skolem remarque qu'il a communiqué ces résultats à des mathématiciens à Gottingen, et a été surpris de ce que, malgré le fait qu'il révélait une "déficience" dans la méthode axiomatique, il perdurait, dans son opinion, une foi injustifiée en le fait que la méthode axiomatique pouvait capturer la notion de vérité mathématique. C'est le pessimisme auquel je fais référence dans le titre. Plus loin, je ferai référence à un pessimisme encore plus profond, qui a trouvé peu d'expression dans la littérature.

Skolem avait un beau style d'écriture, intuitif, totalement précis, encore plus dans l'esprit du reste des mathématiques, pas du tout dans le style fantastiquement pédant de Russell et Whitehead. Ainsi, Hilbert avait même posé comme un problème le résultat que Skolem avait prouvé, et même Gödel, dans sa thèse dans laquelle il prouve ce qui est connu comme le théorème de complétude, ne semble pas avoir apprécié ce que Skolem avait fait, même si dans une note de bas de page, il reconnaît effectivement qu'"une procédure analogue a été utilisée par Skolem". Une explication possible de cela réside dans le fait que Skolem mettait l'accent sur les modèles, et était étonnamment d'avant-garde dans certaines de ses remarques concernant les preuves d'indépendance en théorie des ensembles. Une discussion sur la question de la priorité des résultats peut être trouvée dans les notes des Œuvres complètes de Gödel (Gödel 1986).

Gödel était absolument sincère dans sa croyance que sa preuve était en un certain sens nouvelle, et, au regard des ses contributions monumentales, je ne souhaiterais en aucune manière lui jeter une quelconque faute. Ce qui est intéressant, c'est plutôt la manière dont l'orientation plus philosophique des logiciens de cette époque, même pour le grand Hilbert, a créé une distorsion dans sa manière de voir le domaine et ses résultats. Quand Gödel a montré, dans son théorème d'incomplétude, que le programme de Hilbert était condamné, Hilbert (autant que je puisse en lire dans les comptes-rendus) ne l'a même pas invité à présenter ses résultats à Gottingen. Gödel n'avait pas de position permanente, et c'est seulement grâce à la perspicacité de mathématiciens américains, qui ont compris l'importance de son travail, qu'il a finalement été nommé à l'Institut pour les Etudes Avancées (IAS) à Princeton.

Du coup, quelles sont les disputes impliquant les règles de la logique, étant donné que le théorème de complétude semble dire qu'elles rendent comptent de tout le raisonnement correct, dans la logique du premier ordre ? Je n'essaierai pas de caractériser les écoles diverses dans cette dispute, ni leurs principes philosophiques. Mais je pense que l'on peut dire sans se tromper que les différences concernent la notion de constructivisme, et la restriction des preuves d'existence est basé sur le raisonnement constructif. Beaucoup de personnes ont voué leurs efforts à développer différentes parties des mathématiques de manière constructive. Je pense que pour beaucoup, le problème crucial est déjà présent dans la partie la plus basique des mathématiques, la théorie des nombres. Puisque la théorie des ensembles est non constructive presque par définition, en cela qu'elle parle d'ensembles infinis, on attend grandement que des idées constructives aient du succès là (bien sûr, Gödel, dans sa preuve de la consistance de l'hypothèse du continu et de l'axiome du choix, preuve pour laquelle on peut dire qu'il y a un avant et un après elle, Gödel donc, utilise la notion de "constructibilité", mais c'est dans un sens étendu qui implique la référence aux ordinaux, et ainsi, la preuve est complètement naturelle dans la théorie des ensembles).

En théorie des nombres, la plupart des résultats sont obtenus constructivement, même si cela nécessite un certain travail de le voir. Laissez-moi fournir ce que je pense être le premier exemple d'une preuve vraiment non-constructive en théorie des nombres, de manière à ce que la lectrice, si elle n'est pas une logicienne, soit exposée à quelques-unes des subtilités que cela entraîne. C'est le fameux théorème du compatriote de Skolem, Thue, étendu par Siegel, et dans un sens complètement démontré par Roth. Il dit qu'un nombre algébrique peut seulement avoir un nombre fini de bonnes approximations par des nombres rationnels. Il n'y a pas besoin de préciser la signification de "bonne approximation" ici, l'idée de base étant que l'erreur d'appoximation devrait être inférieure à une certaine fonction du dénominateur du rationnel approximant. Le théorème a pour conséquence que certaines équations polynomiales en deux variables ont seulement un nombre fini de solutions entières.

Maintenant, toutes les preuves classique sont complètement “élémentaires” (même si elles sont ingénieuses), et sont constructives excepté dans les toutes dernières lignes de la preuve. Thue a montré qu’il ne pouvait y avoir deux approximations p/q and y/q', où à la fois p et q sont plus grands qu’un nombre c (constructivement donné), avec q plus grand qu’une puissance de 4. Alors il aboutit à la conclusion qu’il ne peut y avoir qu’un nombre fini de bonnes approximations, puisque p/q est donné, il y a une limite pour toutes les autres approximations p'/q. C’est une déduction parfaitement correcte, mais si l’on ne connaît pas une solution, alors on n’est pas en mesure de limiter les autres. C’est un problème plus difficile, et, bien que le travail de Baker ait amené des estimées constructives dans quelques cas, on semble loin d’obtenir des limites constructives en général. Depuis l’époque de Thue, d’autres exemples ont été trouvés, mais pas plus d’une douzaine. Bien sûr on n’a pas de preuve que des limites constructives n’existent pas. Même si on est incertain à propos des limites exactes de cette notion, on peut, et on le fait d’ailleurs, demander s’il y a des limites récursives générales, ou des primitives récursives meilleures.

Comme je ne partage pas l’idéologie intuitionniste, ou aucune de ses variantes, je ne ferai pas l’objection qu’ils feraient, mais clairement tout mathématicien doit se sentir mal à l’aise par rapport à la preuve ci-dessus. Il est simplement souhaitable d’avoir une preuve plus constructive.

Il y a des personnes qui sont plus extrêmes, et qui prétendent que toute preuve inductive (telle que celle ci-dessus) basée sur des prédicats avec trop de changements de variables (de telle façon qu’aucune instance ne soit immédiatement vérifiable) ne devrait pas être autorisée. L’opinion la plus extrême, défendue par un mathématicien au moins d’une université respectable, est qu’une contradiction finira par être trouvée en théorie élémentaire des nombres.

Laissez-moi expliquer pourquoi je ne peux pas accepter de telles limitations à l’utilisation du calcul des prédicats. La raison se trouve dans les procédures du calcul des prédicats, parce qu’en un certain sens, toute assertion est prouvée par contradiction. La forme de la preuve peut varier mais, par essence, le théorème de complétude dit que si un ensemble d’axiomes n’amène pas à une contradiction alors il est satisfiable. Du coup, pour montrer que quelque chose est valide, i.e. que cette chose est nécessairement satisfaite, on doit montrer que l’assomption de sa négation aboutit à une contradiction.

Puisque je ferai à nouveau référence à cette procédure ultérieurement, laisse-moi insister plus en détail sur les règles en jeu. En utilisant des règles élémentaires, on peut mettre toute assertion en forme prénexe. Une assertion en forme prénexe est de la forme "*pour tout* $a, A(a)$" ou "*il existe* a *tel que* $A(a)$", où A lui-même peut contenir d'autres quantificateurs, et des constantes qui ont été introduites précédemment. Dans le cas de "*pour tout* x, $A(x)$",on peut ajouter à la liste dont on cherche à amener une contradiction tous les "*A(c)*". Dans le cas d'une assertion "*il existe z tel que A(z)*", on ajoute le "*A(c)*" correspondant à une nouvelle constante c. S'il y a une contradiction dérivable de nos assertions originales, alors on aboutira à cette contradiction au bout d'un nombre fini d'applications des règles procédurales, et à ce moment-là, la contradiction aura été obtenue par le calcul propositionnel, puisque tous les quantificateurs prénexes auront été éliminés. Plus spécifiquement, comme Skolem le note explicitement, nous regardons toutes les relations originellement définies, et les substitutions obtenues en utilisant les constantes introduites aux différentes étapes, et nous finirons par être incapables d'assigner des valeurs de vérité qui marchent pour les variables, nous sommes en effet en train de construire un modèle de l'ensemble original d'assertions. Il y a des détails techniques qui nécessitent d'être revus encore et encore, mais ils ne sont pas compliqués. Je renvoie le lecteur au papier original de Skolem pour une explication intuitive.

Maintenant il est clair pour moi que si une contradiction est obtenue, l'ensemble constitué des assertions originales doit être "faux". Bien sûr, les intuitionnistes peuvent rétorquer que cela n'est pas assez bon, qu'on veut plus qu'une preuve par contradiction de logique classique. Je peux seulement répondre que dans les mathématiques habituelles, celles de tous les jours, comme pratiquées par une vaste majorité de mathématiciens, toutes les preuves procèdent par contradiction. Cela peut paraître surprenant à première vue, mais penser au théorème de la complétude dans les termes ci-dessus montrera que c'est exactement ce qui se fait dans toutes les preuves. Dans mon commentaire final, dans lequel je présenterai une vue "pessimiste", il est important que chacun comprenne la méthode autorisée par le calcul des prédicats.

Questions de consistance

Durant la période du grand débat, entre 1910 et 1920, émergea l'école formaliste associée à Hilbert. Mon impression est qu'Hilbert partageait le point de vue des mathématiciens "naïfs", c'est-à-dire que les mathématiques existantes, avec leur notion de preuve, correspondent au monde réel. Et encore, dans un sens, le formalisme affirme le contraire. Hilbert voulait sécuriser les mathématiques des attaques des intuitionistes et des autres, et du coup, il proposa un programme minimal pour prouver que les mathématiques formalisées étaient consistantes. Il ne fait pas de doute que ceci apparut à ce moment-là comme un but raisonnable, et on aurait même pu espérer que la preuve de consistance puisse être faite en mathématiques combinatoires élémentaires (de ce point de vue, les mathématiques pourraient être construites comme un jeu combinatoire). Une idée accompagnant cela était plus audacieuse, notamment qu'une telle analyse combinatoire pourrait même résulter en une procédure de décision, i.e. une méthode pour décider si une assertion donnée pourrait être prouvée ou pas, ou, encore plus ambitieusement, pour décider de la valeur de vérité de l'assertion en question.

Cet espoir fut bien sûr brisé par le théorème d'incomplétude de Gödel, qui affirme qu'aucun système raisonnablement complexe ne peut prouver sa propre consistance, à moins qu'il ne soit inconsistant, auquel cas tout est prouvable et le système est inutile. Ma thèse principale ici, dont je discuterai à la fin de la conférence, est que la prémisse du programme de Hilbert est plus profondément fausse. Je décrète que les mathématiques peuvent prouver seulement une incroyablement petite proportion de toutes les assertions vraies. Mais maintenant, je vais présenter quelques résultats techniques en théorie de la preuve.

"La preuve d'incomplétude peut être formulée de différentes manières, équivalentes pour l'essentiel. En particulier, elle est reliée de façon proche à la notion de fonction récursive ou calculable, et a motivé le large sujet de la théorie des fonctions récursives, de telle manière qu'on ne peut regarder les résultats de Gödel comme purement négatifs.

Un sujet technique, la théorie de la preuve, a émergé, avec, comme but particulier, de comprendre précisément l'improuvabilité de la consistance. Pour une théorie donnée, nous disposons d'un principe combinatoire qui est naturel et qui nous autorise à prouver la consistance. "Les premiers, et toujours très surprenants résultats sont ceux de Gentzen (1969), qui a analysé "la force de la consistance de la théorie élémentaire des nombres" (l'arithmétique de Peano du premier ordre). Puisque la théorie élémentaire des nombres semble nécessiter de toute manière de l'analyse combinatoire, il peut sembler stupide d'utiliser la théorie des nombres pour prouver que la théorie des nombres est consistante. Pourtant, le travail élégant de Gentzen n'est pas circulaire, et il peut être formulé de façon à fournir une information précise au sujet des preuves en théorie élémentaire des nombres. Laissez-moi brosser l'idée de sa preuve, dans ma propre version que j'ai l'intention de publier un jour.

Considérons (en théorie des nombres) une preuve P d'une contradiction. Dans notre exposé des règles de déduction, nous avons dit qu'il y avait des possibilités variées, toutes équivalentes. Maintenant nous devons rendre les choses précises. C'est plus naturel de regarder la preuve comme constituée de différents cas comme A et $nonA$, et de voir la démonstration comme un arbre, qui commence au sommet de l'arbre, citant les axiomes de la théorie des nombres, et autorisant la division en branches, nous arrivons à une situation dans laquelle, en autorisant l'invention et la substitution de constantes comme on l'a décrit, nous aboutissons à une contradiction dans toutes les branches, parmi les assertions n'impliquant que des constantes. Nous autorisons également des manipulations booléennes comme on les fait habituellement. Ainsi une preuve de contradiction devient un arbre, avec une contradiction dans chaque branche. Maintenant, la structure à branches est importante, à cause de la structure des axiomes de la théorie des nombres. L'axiome clef est l'axiome d'induction. C'est vraiment un ensemble dénombrable d'axiomes, avec une instance pour chaque propriété $A(n)$ ne contenant qu'une variable libre n. Une telle instance établit qu'une des trois possibilités est vérifiée :

- soit $A(0)$ est faux ;
- ou pour un certain n, $A(n)$ est vrai et $A(n+1)$ est faux ;
- ou $A(n)$ est vrai pour tout n.

De façon évidente, ce branchement est une caractéristique essentielle de l'induction. L'idée derrière la preuve de Gentzen est d'aller de P à une autre preuve P' de la contradiction, avec une structure d'arbre plus simple.

Comment simplifier la preuve ? Bien, dans tout branchement inductif comme dans celui ci-dessus, la branche la plus aisée à étudier est la troisième, puisqu'elle dit que quelque chose est vrai pour tout n et n'affirme pas l'existence d'une constante particulière. Brièvement, on descend dans l'arbre et on attend jusqu'à rencontrer un entier particulier, disons 5, pour lequel $A(5)$ est vrai. Mais l'induction jusqu'à 5 est évidente et peut être remplacée par cinq cas de l'hypothèse d'induction. Cela doit être fait avec précaution. Pourtant, on voit que dans une branche au moins, aucune constante n'est créée, excepté pour des numéaux particuliers comme 5 ou 7. De cette manière, l'utilisation de l'axiome d'induction peut être éliminé au moins dans un cas.

Maintenant, assumons que la réduction de P à P' est définie, la question est "est-ce que la nouvelle preuve de la contradiction est plus simple à obtenir ?". L'ensemble de tous les arbres finis peut être ordonné de manière simple, notamment, en commençant depuis le premier nœud d'un arbre, on compare deux arbres en comparant leurs branches, en assumant par induction que les arbres de profondeur un ou moins ont déjà été ordonnés. Maintenant, si nous définissons les choses correctement, nous pouvons montrer qu'en effet, l'ordre d'un arbre diminue à chaque fois qu'on élimine une utilisation unique de l'induction. Cet ordre est un bon ordre, et il correspond à l'ordinal ϵ_0, qui peut aussi être défini comme la limite de ω_n, quand n tend vers ω où ω_1 est ω et ω_{n+1} est ω^{ω_n}. Grâce au théorème de Gödel, il s'ensuit que soit nous ne pouvons pas formuler ce genre d'induction dans le système, soit nous pouvons le faire, mais nous ne pouvons pas le prouver. Si on est dans ce dernier cas, on atteint un principe combinatoire plausible juste hors d'atteinte de la théorie des nombres, et un pour lequel on peut prouver la consistance de la théorie élémentaire des nombres de manière élémentaire. La théorie de la preuve a continué à chercher des principes analogues pour des systèmes plus compliqués, e.g. des fragments de la théorie des ensembles.

Théorie des ensembles, la frontière ultime

A peu près au même moment, Frege était en train de développer le premier système formel universel, Cantor développait les fondements des mathématiques basées sur la théorie des ensembles. Plus précisément, on peut dire que Cantor réalisa que la théorie des ensembles était un domaine légitime d'étude, ne réalisant peut-être pas qu'elle était la base de toutes les mathématiques. En tout cas, Frege fit une tentative d'axiomatiser la "théorie des ensembles", et il fit une erreur en autorisant l'ensemble de tous les ensembles, parvenant par cela à une contradiction. On attribue habituellement à Zermelo la première axiomatisation de la théorie des ensembles, plus ou moins dans la forme que l'on considère aujourd'hui. Pourtant, le système était encore vaguement défini, et à nouveau, c'est Skolem qui en pointa les déficiences (Fraenkel le fit aussi, de façon moins précise). Cela donne le système connu aujourd'hui comme la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel.

Le développement de la théorie des ensembles a été largement séparé de celui du reste des mathématiques, excepté peut-être pour des considérations autour de l'axiome du choix. Néanmoins, les mathématiciens ont comme d'habitude regardé les problèmes de la théorie des ensembles comme des questions mathématiques légitimes. L'hypothèse du continu, malgré les résultats d'indépendance, reste un objet de spéculation pour les théoriciens des ensembles.

C'est dans la théorie des ensembles que l'on trouve la plus grande diversité d'opinions au sujet des fondements. Cela est dû au fait que même les plus dévoués aux nouveaux axiomes n'argumenteront pas sur le fait que ces axiomes soient justifiés par une quelconque "intuition" à propos des ensembles. Laissez-moi donner quelques exemples de ce que visent de tels axiomes.

On peut faire varier le domaine des ensembles autorisés. Les mathématiques conventionnelles ont rarement besoin de considérer plus de quatre ou cinq itérations d'un axiome de la théorie des ensembles à l'ensemble des entiers. Plus d'itérations diminuent notre sens de la réalité des objets impliqués.

On peut tenter de faire varier les propriétés autorisées dans l'axiome de compréhension, pendant qu'on esquive le problème de Frege.

Les axiomes d'infinité affirment l'existence de grands cardinaux, cette existence ne pouvant être prouvée dans le système de Zermelo-Fraenkel. L'exemple le plus flagrant est celui des cardinaux inaccessibles, et plus récemment, on a considéré des cardinaux beaucoup plus grands, dont l'existence a de remarquables conséquences même pour l'analyse réelle. Ces sortes d'axiomes peuvent être étendus indéfiniment, il semblerait, et, malgré l'intérêt de leurs conséquences, la réalité des cardinaux impliqués devient de plus en plus douteuse. La même chose peut être dite pour des axiomes plus exotiques, de type détermination, malgré les remarquables connexions maintenant connues entre la force de leur consistance et celle des grands cardinaux.

Du coup, nous arrivons maintenant à la question la plus basique. Est-ce que la théorie des ensembles, une fois qu'on parvient au-delà des entiers, fait référence à une réalité existante, ou doit-elle être regardée, comme les formalistes la regardent, comme un intéressant jeu formel ? Dans ce sens, nous allons au-delà du champ de cette conférence, qui concerne la preuve. Nous questionnons plutôt le véritable sens de certaines choses qui sont prouvées. Je pense que pour la plupart des mathématiciens, la théorie des ensembles est attractive, mais elle manque l'objectif de base qu'est l'arithmétique. Il y a presque un continuum de croyances à propos de l'étendue réelle sur le monde de la théorie des ensembles.

Un argument typique pour la réalité objective de la théorie des ensembles est qu'elle est obtenue par extrapolation à partir de nos intuitions des objets finis, et les gens ne voient pas de raison pour laquelle cela diminuerait sa validité. De plus, la théorie des ensembles a été étudiée pendant longtemps sans qu'il y ait la moindre allusion à une contradiction. On suggère que cela ne peut pas être un accident, et ainsi que la théorie des ensembles reflète une réalité existante. En particulier, l'hypothèse du continu et les assertions qui lui sont liées sont vraies ou fausses, et notre tâche est de les résoudre.

Un contre-argument est que l'extrapolation n'a pas de base dans la réalité. Nous ne pouvons chercher parmi tous les ensembles de réels pour décider de l'hypothèse du continu. Nous n'avons pas de raison du tout de croire que ces ensembles existent. C'est simplement un fait empirique qu'aucune contradiction n'ait été découverte.

Clairement les deux points de vue ont leurs forces et leurs faiblesses. Au fil des années, je me suis rangé de plus en plus fermement vers la position formelle. Ce choix est tempéré par un certain respect pour toutes les mathématiques qui ont utilisé la théorie des ensembles comme base, et je n'attaque le travail qui a été fait en théorie des ensembles en aucune manière. Pourtant, quand des systèmes d'axiomes impliquent de larges cardinaux ou quand de la détermination est utilisée, je ressens une perte de réalité, même si la recherche est ingénieuse et cohérente. En particulier, un gros défaut de la première manière de penser, selon moi, est l'idée que si les mathématiques font référence à la réalité alors la pensée humaine devrait résoudre toutes les questions mathématiques. J'en arrive à ma dernière section, sur le pessimisme ultime.

Le pessimisme ultime découlant des idées de Skolem

Skolem, dans ses papiers, était si frappé par le fait que certains modèles ne soient pas isomorphes si ce n'est les systèmes d'axiomes les plus triviaux que cela l'avait amené à douter de la pertinence d'un quelconque système d'axiomes que ce soit à adresser les questions concernant les fondements des mathématiques. Par exemple, il releva l'existence de modèles calculables pour la théorie des ensembles. Il semble avoir été le premier à clairement mettre l'accent sur les modèles plutôt que sur les méthodes de preuve. S'il a ou non cru en un modèle absolu de la théorie des ensembles, qui ait été au-delà de toutes les tentatives à le décrire par des axiomes, n'est pas clair pour moi. Mais il connaissait certainement les limitations de ce qui pourrait être prouvé. Dans un passage remarquable, il discute même de la manière dont pourraient être construits des nouveaux modèles de la théorie des ensembles, en ajoutant des ensembles ayant des propriétés spéciales, même s'il dit qu'il n'a pas idée de la manière dont cela pourrait être fait. Ca a été exactement le point de démarrage de mon propre travail sur les questions d'indépendance, même si je n'étais pas au courant du tout du fait que Skolem avait considéré la même possibilité. Il me semble toujours que c'était futile d'adopter une approche "preuve théorique" et d'analyser la structure des preuves. Même si la position formaliste est adoptée, dans la pensée actuelle au sujet des mathématiques, on peut n'avoir aucune intuition à moins que l'on n'assume que les modèles existent et que les structures sont réelles.

Du coup, laissez-moi dire que j'attribuerai cette vision à Skolem, même si elle n'a pas été explicitement énoncée par lui, qu'il y a une réalité mathématique, mais que les axiomes ne peuvent la décrire. En effet, on peut aller plus loin et dire qu'il n'y a pas de raison de penser que tout système axiomatique peut la décrire de façon adéquate.

D'où vient la connaissance, exprimée si vivement par Hilbert, que toutes les questions devraient être résolues ? Une chose qui me frappe, même depuis mes premières rencontres avec les mathématiques, prend son origine chez les Grecs, et chez Euclide en particulier. Ici pour la première fois, nous voyons le pouvoir de l'intelligence humaine amenée à s'appuyer non seulement sur les mathématiques, mais également sur la physique ou l'astronomie. Quel fantastique frisson cela a dû être que de vivre à cette époque et d'apprécier l'échappatoire des superstitions et des premières croyances, et la naissance soudaine du triomphe de la raison seule ! Nous avons tous ressenti ce frisson, en rencontrant, jeune, Euclide et la merveilleuse beauté et complétude de son système géométrique. Il y a encore seulement une centaine d'années, le théorème de Pythagore était regardé comme une merveille de raisonnement déductif, et des livres ont été publiés en contenant de nombreuses preuves.

Mais rappelons le théorème de Skolem. Comment quelqu'un procède-t-il dans une preuve ? Après un nombre fini d'étapes, on invente des symboles pour les objets dont on sait qu'ils existent sous certaines suppositions. On réalise un nombre fini de substitutions des constantes intervenant dans les assertions universelles, et on répète cela en boucle. Alors on voit s'il y a une contradiction propositionnelle, selon le principe d'induction présenté précédemment. Mais, par essence, tout ce que quelqu'un peut faire, c'est de vérifier sur un nombre fini d'entiers dérivés de l'hypothèse. Avec Inck, nous sommes parvenus à une contradiction, et ainsi, nous avons pu prouver un truc. Mais supposons que quelqu'un demande si une assertion pas du tout naturelle à propos des nombres premiers est vérifiée, par exemple la question des nombres premiers jumeaux. Peut-être que sur la base de considérations statistiques, nous nous attendons à ce que les nombres premiers vérifient la loi en question. Mais les nombres premiers semblent complètement aléatoires, et dans le but de prouver que l'hypothèse statistique est vraie, nous devons trouver des lois logiques qui l'impliquent. N'est-ce pas un peu comme si, simplement comme un ensemble de nombres pris au hasard, les nombres premiers satisfaisaient l'hypothèse ? Vu du point de vue de la construction de Skolem, il semblerait que nous puissions faire des tests, mais il se pourrait également que de tels tests soient sans espoir de déterminer la vérité.

Maintenant, on peut se demander comment l'introduction d'axiomes plus élevés sur l'infini (ayant peut-être des implications analytiques) pourrait affecter le fait qu'une assertion puisse être prouvée. En effet, le théorème d'incomplétude de Gödel ne montre-t-il pas exactement que la consistance d'un système donné, que ce soit une assertion combinatoire, ou de théorie des nombres, sera résolue en passant à une autre infinité ? L'utilisation d'axiomes de théories des ensembles de plus en plus compliquées permet-elle de résoudre des assertions de plus en plus arithmétiques ?

Ma réponse a deux aspects. Selon son premier aspect, ce qui a été énoncé ci-dessus est un espoir plutôt idéaliste. Les seuls assertions d'arithmétique, résolues par une théorie des ensembles de niveau supérieur, qui sont connues aujourd'hui, sont de manière basique des assertions de consistance ou avoisinant. Dans un sens, les systèmes de plus haut niveau supposent des principes que nous souhaitons prouver. Il n'y a pas d'intuition sur la manière dont une plus grande considération de l'infini pourrait nous rapprocher de la résolution de questions à propos des nombres premiers. Selon un second aspect, jusqu'où pouvons-nous aller en étendant les axiomes de la théorie des ensembles ? Comme dit précédemment, on s'éloigne très vite de l'intuition, et nous n'avons pas la moindre idée du début d'une façon de relier les axiomes aux nombres premiers.

Par conséquent, ma conclusion est la suivante. Je crois que la vaste majorité des assertions à propos des entiers est totalement et de façon permanente au delà de la preuve dans tout système raisonnable. Ici, j'utilise la preuve au sens où les mathématiciens utilisent ce mot. L'évidence statistique peut-elle être regardée comme une preuve ? J'aimerais avoir l'esprit ouvert, et dire "Pourquoi pas ?". Si les dix premiers billions de zéros de la fonction zeta sont sur la ligne de partie réelle 1/2, quelle conclusion en tirer ? Je me sens incompétent même pour spéculer à propos de la manière dont les générations futures regarderont une évidence numérique de cette sorte.

Dans cette esprit pessimiste, je pourrai conclure en demandant si nous ne sommes pas en train d'être témoins de la fin de l'ère de la preuve pure, si glorieusement initiée par les Grecs. J'espère que les mathématiques vivront longtemps, et que nous n'atteindrons pas cette fin de mort pour de nombreuses générations à venir.

Bibliographie

[1] Cohen, P. J., *Set theory and the continuum hypothesis*, ed. New York : Addison-Wesley, 1966.

[2] Gentzen, G., *Collected papers of Gerhard Gentzen*, ed. M. E. Szabo., Amsterdam : North-Holland, 1969.

[3] Gödel, K., *Kurt Gödel : collected works*, ed. 8. Feferman et al, vol. 1. Oxford : Oxford University Press, 1986.

[4] Skolem, Th., *Selected works in logic by Th. Skolem*, ed. J.B. Fenstak, Oslo : Scandinavian University Books, 1970.

[5] van Heijenoort, J. (ed.), *From Frege to Gödel*, Cambridge, MA : Harvard University Press, Phil. Trans. R. Soe. A (25), 1971.

Department of Mathematics, Stanford University, Bldg. 380,
450 Serra Mall, Stanford, CA 94305-2125, USA

Histoire des mathématiques : pourquoi et comment
André Weil

Mon premier point sera un point évident. Contrairement à certaines sciences dont l'histoire complète consiste en l'assemblage de souvenirs de quelques-uns de nos contemporains, les mathématiques ont non seulement une histoire, mais elles ont même une histoire longue, qui a été écrite au moins depuis Eudemos (un élève d'Aristote). En effet, la question "Pourquoi ?" est peut-être superflue, ou serait mieux reformulée en "Pour qui ?"

Pour qui quelqu'un écrit-il une histoire générale ? Pour le profane éduqué, comme Hérodote l'a fait ? Pour les hommes d'état et les philosophes, comme Thucydides ? Pour quelques historiens, comme cela se fait la plupart du temps de nos jours ? Quelle est l'audience d'un historien de l'art ? Ses collègues, ou bien un public amateur d'art, ou encore les artistes (qui semblent n'en avoir que peu d'utilité) ? Qu'en est-il d'une histoire de la musique ? Concerne-t-elle principalement des amoureux de la musique, ou des compositeurs, ou des artistes en exercice, ou des historiens, ou est-elle une discipline totalement indépendante dont l'appréciation ne peut être que restreinte à ceux qui la pratiquent ? Des questions similaires ont été chaudement débattues pendant de nombreuses années parmi les historiens éminents des mathématiques, Moritz Cantor, Gustav Enestrém, Paul Tannery. Même Leibniz avait quelque chose à dire à ce propos, comme à propos de nombreux autres sujets :

> *"Son utilité n'est pas seulement que l'Histoire peut donner à chacun son dû et que d'autres pourraient souhaiter recevoir de telles louanges, mais également que l'art de la découverte doit être promu et que ces méthodes doivent être connues à travers des exemples illustres[1]."*

Que l'humanité puisse être aiguillée vers de plus hautes réalisations par la perspective d'une renommée éternelle est bien sûr un thème classique, hérité de l'antiquité ; il semblerait que nous y soyons devenus moins sensibles que nos aïeux ne l'étaient, même si cette idée n'a peut-être pas perdu toute sa force. Comme l'indique la dernière phrase de Leibniz, son objectif est clair. Il souhaite que l'historien des sciences écrive

Exposé au Congrès international des informaticiens en 1978 à Helsinki.

1. Utilissimum est cognosci veras inventionum memorabilium origines, praesertim earum, quae non casu, sed vi meditandi innotuere. Id enim non eo tantum prodest, ut Historia literaria suum cuique tribuat et alii ad pares laudes invitentur, sed etiam ut augeatur ars inveniendi, cognita methodo illustribus exemplis. Inter nobiliora hujus temporis inventa habetur novum Analyseos Mathematicae genus, Calculi differentialis nomine notum..." (Math, Schr., ed. C. I. Gerhardt, t. V, p. 392).

en premier lieu pour les scientifiques créatifs, ou potentiellement créatifs. C'était l'audience qu'il avait en tête en écrivant rétrospectivement à propos de son "invention la plus noble" du calcul différentiel.

D'un autre côté, comme l'a observé Moritz Cantor, on peut traiter l'histoire mathématique en la considérant comme une discipline auxiliaire, destinée à fournir aux vrais historiens des catalogues fiables de faits mathématiques, arrangés par dates, pays, sujets et auteurs. L'histoire mathématique serait alors une portion, et une portion pas vraiment significative, de l'histoire des techniques et des technologies, et il serait juste de la regarder alors complètement de l'extérieur. L'historien du XIX$^{\text{ème}}$ siècle a besoin d'avoir quelques connaissances sur les progrès qui ont été fait sur les moteurs de trains. Il dépend de spécialistes pour obtenir cette information, mais il se moque de la façon dont fonctionne un moteur, ou bien de l'immense effort intellectuel qu'il a fallu pour créer la thermodynamique. De manière similaire, le développement des tables nautiques et d'autres aides à la navigation est de peu d'importance pour l'historien du XVII$^{\text{ème}}$ siècle en Angleterre, mais l'importance de Newton dans ce domaine lui fournira au mieux une note de bas de page ; le fait que Newton ait été un "gardien de la Menthe" (une position honorifique anglaise de représentation de la Royauté) ou l'oncle de la maîtresse d'un grand gentilhomme, l'intéressera davantage historiquement que Newton le mathématicien.

D'un autre point de vue, les mathématiques peuvent occasionnellement fournir à l'historien de la culture une sorte de "traceur" pour étudier l'interaction entre différentes cultures. Avec cela, nous approchons d'éléments présentant un véritable intérêt pour nous les mathématiciens ; mais même là, nos attitudes diffèrent largement de celles des historiens professionnels. Pour eux, une pièce romaine, trouvée quelque part en Inde, a une signification précise ; c'est rarement le cas d'une théorie mathématique.

Cela ne signifie pas pour autant qu'il n'est pas possible qu'un théorème ne soit pas redécouvert de temps à autre, voire même dans des environnements culturels assez différents. Quelques séries de puissances semblent avoir été découvertes indépendamment en Inde, au Japon et en Europe. Des méthodes pour la solution de l'équation de Pell ont été exposées en Inde par Bhaskara au XX$^{\text{ème}}$ siècle, et ensuite à nouveau, à la suite d'un défi de Fermat, par Wallis et Brouncker en 1657. On peut même ajouter des arguments au sujet du fait que des méthodes similaires aient été connues des Grecs, peut-être par Archimède lui-même ; comme l'a suggéré Tannery, la solution indienne pourrait être d'origine grecque ; jusque là, cela reste une spéculation peu suivie. Il est certain que personne ne suggèrerait de connexion entre Bhaskara et nos auteurs du XVII$^{\text{ème}}$ siècle.

D'un autre côté, quand les équations quadratiques, résolues algébriquement dans des textes cunéiformes, refont surface chez Euclide, habillées d'un costume géométrique sans aucune motivation géométrique du tout, le mathématicien trouvera approprié de décrire ce dernier traitement comme étant de l'"algèbre géométrique" et il sera enclin à assumer la connexion avec Babylone, même en l'absence d'une évidence "historique" concrète. Personne ne demande de documents pour attester de l'origine commune du grec, du russe et du sanskrit, ou ne fait d'objection à leur désignation comme langages indo-européens.

Maintenant, laissant de côté les vues et souhaits des profanes et des spécialistes des autres disciplines, il est temps de revenir à Leibniz, et de considérer la valeur de l'histoire mathématique, à la fois intrinsèquement et de notre propre point de vue en tant que mathématiciens. En modifiant très légèrement le point de vue de Leibniz, nous pouvons dire que sa première utilité pour nous est de mettre ou de garder devant nos yeux des "exemples illustres" d'un travail mathématique de premier ordre.

Cela rend-il les historiens nécessaires ? Peut-être que non. Eisenstein est tombé amoureux des mathématiques très jeune en lisant Euler et Lagrange ; aucun historien ne lui a dit de le faire ou ne l'a aidé à les lire. Mais à son époque, les mathématiques progressaient d'une manière moins trépidante qu'aujourd'hui. Il ne fait aucun doute qu'un jeune homme peut de nos jours chercher des modèles et une inspiration dans le travail de ses contemporains ; mais cela se montrera rapidement comme étant une sévère imitation. D'un autre côté, s'il souhaite aller plus loin en arrière, il peut ressentir le besoin d'être quelque peu guidé ; c'est la fonction de l'historien, ou à tout niveau du mathématicien qui a un certain sens de l'histoire, de lui fournir une telle aide.

L'historien peut aussi aider d'une autre manière. Nous connaissons tous d'expérience ce qui peut être gagné à travers les connaissances personnelles quand nous souhaitons étudier le travail contemporain ; nos rencontres et conférences n'ont en fait aucun autre but. Les vies des grands mathématiciens du passé peuvent souvent avoir été ternes et peu excitantes, ou peuvent le sembler au profane ; pour nous, les biographies présentent moins de valeur pour nous rendre vivantes les personnes et leur environnement que leurs écrits. Quel mathématicien ne souhaiterait pas en savoir davantage sur Archimède que sa contribution supposée à la défense de Syracuse ? Notre compréhension de la théorie des nombres d'Euler serait-elle la même si nous n'avions pas ses publications à notre disposition ? L'histoire n'est-elle pas plus intéressante quand nous lisons son emménagement en Russie, ses échanges de lettres avec Goldbach, l'amenant presque accidentellement au contact du travail de Fermat, puis, plus tard dans sa vie, le début de sa correspondance avec Lagrange sur la théorie des nombres et les intégrales elliptiques ? Ne serions-nous pas ravis, qu'à travers ses lettres, un tel homme ne soit pas devenu pour nous comme un proche qui nous est plus intimement connu ?

Jusque là, pourtant, je n'ai fait qu'aborder la surface de mon thème. Leibniz suggérait l'étude d'"exemples illustres", non pour le plaisir esthétique que cela pourrait procurer, mais principalement de telle manière à "promouvoir l'art de la découverte". Ici, il est nécessaire de clarifier la distinction, dans les matières scientifiques, entre la tactique et la stratégie.

Par tactique, j'entends la gestion des outils quotidiens à la disposition des scientifiques ou des étudiants à un moment donné ; ils sont mieux appris d'un enseignant compétent et de l'étude du travail contemporain. Pour le mathématicien, cela peut inclure l'utilisation du calcul différenciel à un moment donné, ou de l'algèbre homologique à un autre moment. Pour l'historien des mathématiques, la tactique a beaucoup en commun avec celle des historiens. Il doit chercher sa documentation à sa source, ou aussi près d'elle que possible ; l'information de seconde main est de peu de valeur. Dans certains domaines de recherche, on doit partir à la chasse et lire des manuscrits ; dans d'autres, on peut se contenter des textes publiés, mais alors la question de leur fiabilité ou manque de fiabilité au contraire doit toujours être gardée à l'esprit. Une exigence indispensable est une connaissance adéquate de la langue des sources ; c'est un principe basique et sensé de toute recherche historique qu'une traduction ne peut jamais remplacer une œuvre originale quand cette dernière est disponible. Par chance, l'histoire des mathématiques occidentales après le XV$^{\text{ème}}$ siècle ne nécessite aucune connaissance en plus du latin et des langages modernes d'Europe de l'ouest ; pour de nombreux objectifs, le français et l'allemand, et parfois l'anglais, peuvent même être suffisants.

En contraste avec cela, la stratégie signifie l'art de reconnaître les problèmes principaux, de les attaquer sur leurs points faibles, de mettre en place les futures lignes à l'avance. La stratégie mathématique est concernée par les objectifs à long terme ; elle nécessite une profonde compréhension des grandes tendances et de l'évolution des idées sur de longues périodes. Elle est presque indiscernable de ce que Gustav Enestrém avait l'habitude de décrire comme l'objet principal de l'histoire mathématique, à savoir "les idées mathématiques, considérées historiquement" [2], ou, comme l'a noté Paul Tannery, "la filiation des idées et l'enchaînement des découvertes" [3]. Là nous sommes au cœur de la discipline dont nous discutons, et c'est un fait heureux que l'aspect vers lequel, selon Enestrém et Tannery, l'historien mathématique doit diriger principalement son attention est aussi celui de la plus grande importance pour tout mathématicien qui veut regarder au-delà de la pratique journalière de son métier.

La conclusion à laquelle nous sommes amenés a peu de substance, c'est vrai, à moins que nous soyons d'accord sur ce qui est et ce qui n'est pas une idée mathématique.

2. Die mathematischen Ideen in historischer Behandlung (Bibl. Math. 2 (1901), p.1).
3. cf. *La filiation des idées et l'enchaînement des découvertes* (P. Tannery, Œuvres, vol. X, p. 166).

A ce sujet, le mathématicien est très enclin à consulter les autres. Selon les mots de Housman (lorsqu'on lui demanda de définir la poésie), il est possible qu'il ne soit pas capable de définir ce qu'est une idée mathématique, mais il aime à penser que quand il en sent une, il la reconnaît. Il est susceptible de ne pas en voir une, par exemple, dans les spéculations d'Aristote à propos de l'infini, ou bien chez un certain nombre de penseurs médiévaux sur le même sujet, même si certains d'entre eux étaient plus intéressés par les mathématiques qu'Aristote ne l'était ; l'infini est devenu une idée mathématique après que Cantor ait défini les ensembles équipotents et prouvé quelques théorèmes à leur propos. Les idées des philosophes grecs à propos de l'infini peuvent être d'un grand intérêt en tant que telles ; mais sommes-nous prêts à croire qu'elles ont eu une grande influence sur le travail des mathématiciens grecs ? A cause d'elles, Euclide aurait dû s'abstenir de dire qu'il y a une infinité de nombres premiers, et aurait dû énoncer ce fait différemment.

Comment se fait-il alors que, quelques pages plus loin, il établisse qu'"il y a une infinité de segments"[4] incommensurables à un segment donné ? Certaines universités ont créé des chaires d'"histoire et philosophie des mathématiques" ; il est difficile pour moi d'imaginer ce que ces deux sujets peuvent avoir en commun.

Il est difficile de déterminer où ces "notions communes" (pour utiliser l'expression d'Euclide) s'arrêtent et où commencent les mathématiques. La formule pour la somme des n premiers entiers, liée de façon proche au concept "Pythagoréen" de nombres triangulaires, mériterait certainement d'être appelée idée mathématique ; mais que devrions-nous dire à propos de l'arithmétique commerciale élémentaire, comme elle apparaît dans tant et tant de livres depuis l'antiquité jusqu'au livre de recettes d'Euler sur le même sujet ? Le concept d'icosaèdre régulier appartient clairement aux mathématiques ; devrions-nous dire la même chose à propos du concept de cube, ou de celui de rectangle, ou de celui de cercle (qui ne doit peut-être pas être séparé de l'invention de la roue) ? Ici nous avons une zone de crépuscule entre l'histoire culturelle et l'histoire mathématique ; cela n'a pas trop d'importance de savoir où l'on place la frontière. Tout ce que le mathématicien peut dire est que plus son intérêt tend à fléchir, plus il se met à traverser cette frontière.

Cependant, une fois qu'on s'est mis d'accord sur le fait que les idées mathématiques sont les objets réels de l'histoire mathématique, il est possible d'en tirer des conséquences utiles ; l'une a été formulée ainsi par Tannery (*loc. cit.* note 3, p. 164). Il n'y a aucun doute, dit-il, sur le fait qu'un scientifique peut posséder ou acquérir toutes les qualités nécessaires pour faire un excellent travail sur l'histoire des sciences ; plus grand est son talent en tant que scientifique, meilleur sera son travail historique. Comme exemples, il mentionne Chasles pour la géométrie ; ainsi que Laplace pour l'astronomie, Berthelot pour la chimie ; peut-être pensait-il également à son ami Zeu-

4. traduction de la phrase en grec ancien (Bk. X, Def. 3).

then. Il aurait pu également mentionner Jacobi, si Jacobi avait suffisamment vécu pour publier son travail historique [5].

Mais les exemples sont grandement nécessaires. En effet, il est évident que la capacité à reconnaître les idées mathématiques sous une forme obscure et fruste, et d'en poursuivre la trace sous les nombreux déguisements qu'elles sont capables de prendre avant de sortir en pleine lumière, doit être associée à une compétence mathématique plus que moyenne. De plus, elle est la composante essentielle du talent mathématique en question, puisque pour une large part, la découverte consiste à saisir fermement les idées vagues qui sont "dans l'air", quelques-unes d'entre elles volant tout autour de nous, quelques-autres (pour citer Platon) flottant dans nos propres cerveaux.

Combien de connaissances mathématiques doit-on posséder pour traiter l'histoire mathématique ? Selon certains, on doit en connaître aussi peu que ce qui était connu des auteurs que l'on souhaite étudier [6] ; d'autres vont même jusqu'à penser que moins l'on en sait, mieux on est préparé à lire ces auteurs avec un esprit ouvert et à éviter les anachronismes. C'est plutôt l'opposé qui est vrai. Une compréhension en profondeur des mathématiques à une période donnée ne peut être obtenue sans une connaissance étendue bien au-delà de son sujet visible. Plus souvent que le contraire, ce qui rend une telle étude intéressante, c'est précisément l'occurrence tôt dans l'histoire de concepts et méthodes destinés à émerger seulement plus tard dans l'esprit conscient des mathématiciens ; la tâche de l'historien est de s'en désengager et de tracer leur influence ou leur manque d'influence sur les développements ultérieurs. L'anachronisme consiste à attribuer à un auteur une telle connaissance consciente qu'il n'a jamais eue ; il y a une grande différence entre le fait de reconnaître Archimède comme le précurseur du calcul différentiel et intégral, dont l'influence sur les découvreurs du calcul ne peut être sous-estimée, et avoir la fantaisie de le voir, comme cela a pu parfois être fait, comme un praticien ancien de tels calculs. D'un autre côté, il n'y a aucun anachronisme dans le fait de considérer Desargues comme le découvreur de la géométrie projective des sections coniques ; mais l'historien doit souligner que son travail, et celui de Pascal, seraient sûrement tombés dans l'oubli le plus total, et n'ont pu être sauvés de cet oubli qu'après que Poncelet et Chasles aient indépendamment redécouvert le sujet dans son ensemble.

De manière similaire, considérons l'assertion suivante : les logarithmes établissent

5. Jacobi, comme étudiant, avait hésité entre la philologie classique et les mathématiques ; il en a toujours gardé un profond intérêt pour les mathématiques grecques et l'histoire mathématique ; des extraits de ses écrits à ce sujet ont été publié par Koenigsberger dans sa biographie de Jacobi (incidemment, un bon modèle de biographie orientée vers les mathématiques d'un grand mathématicien) : voir L. Koenigsberger, *Carl Gustav Jacob Jacobi*, Teubner, 1904. pp. 385-395 et 413-414.

6. Cela semble être l'avis de Loria : "Per comprendere e giudicare gli scritti appartenenti alle età passate, basta di essere esperto in quelle parti delle scienze che trattano dei numeri e delle figure e che si considerano attualmente come parte della cultura generale dell'uomo civile" (G. Loria, *Guida allo Studio della Storia delle Matematiche*, U. Hoepli, Milano, 1946, p. 271).

un isomorphisme entre le semi-groupe multiplicatif des nombres entre 0 et 1 et le semi-groupe additif des nombres réels positifs. Cela aurait pu ne pas faire sens jusqu'à assez récemment. Si, pourtant, nous laissons les mots de côté, et regardons les faits derrière une telle assertion, il n'y a aucun doute qu'elle était bien comprise par Neper quand il a inventé les logarithmes, excepté que sa conception des nombres réels n'était pas aussi claire que la nôtre ; c'est pourquoi il dût utiliser les concepts cinématiques pour clarifier sa signification, de la même façon qu'Archimède l'avait fait, pour des raisons similaires, dans sa définition de la spirale [7]. Allons encore plus loin ; le fait que la théorie des rapports de grandeurs et des rapports d'entiers, telle que développée par Euclide dans les livres V et VII des Eléments, doive être regardée comme un chapitre du début de la théorie des groupes est mise hors de doute par l'expression "double ratio" qu'il utilise pour ce qu'il appelle le carré d'un rapport. Historiquement, il est plausible que la théorie musicale ait fourni la motivation originale de la théorie grecque des groupes de rapports d'entiers, en net contraste avec le traitement purement additif des fractions en Egypte ; si tel est le cas, nous avons là un exemple ancien de l'interaction mutuelle entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées. En tous cas, il est impossible pour nous d'analyser correctement le contenu des livres V et VII d'Euclide sans le concept de groupe et même sans celui des groupes d'opérateurs, puisque les rapports de grandeurs sont traités comme des groupes multiplicatifs agissant sur le groupe additif des grandeurs elles-mêmes [8]. Une fois que ce point de vue est adopté, ces livres d'Euclide perdent leur caractère mystérieux, et il devient facile de suivre la ligne qui amène directement d'eux à Oresme et Chuquet, puis à Neper et aux logarithmes (cf. NB, pp. 154-159 et 167-168). Ce faisant, nous ne sommes bien sûr pas en train d'attribuer le concept de groupe à l'un de ces auteurs ; on ne devrait pas non plus l'attribuer à Lagrange, même quand il faisait ce que nous appelons maintenant de la théorie de Galois. D'un autre côté, quand Gauss n'avait pas le terme, il avait certainement le concept clair de groupe commutatif fini, et avait bien été préparé à cela par son étude de la théorie des nombres d'Euler.

Laissez-moi citer quelques exemples de plus. Les écrits de Fermat indiquent qu'il connaissait la théorie des formes quadratiques X^2+nY^2 pour $n=1,2,3$, en utilisant des démonstrations par "descente infinie". Il n'a pas conservé ces preuves ; mais plus tard, Euler a développé cette théorie, en utilisant également la descente infinie, ce qui nous permet de supposer que les démonstrations de Fermat ne différaient pas beaucoup de celles d'Euler. Pourquoi la descente infinie réussit-elle dans ces cas-là ? C'est aisément expliqué par les historiens qui savent que les corps quadratiques ont un algorithme d'Euclide ; ce dernier, transcrit dans le langage et les notations de Fer-

7. cf. N. Bourbaki, *Eléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, 1960, pp. 167-168 et 174 ; cette collection d'essais historiques, extraites du livre *Eléments de mathématique* du même auteur sous un titre fallacieux, sera désormais dénotée NB.

8. Qu'Euclide ait cru ou non que le groupe des rapports de grandeurs soit indépendant du type des grandeurs étudiées reste un point discutable ; cf. O, Becker, Quellen u, Studien **2** (1933), 369-387.

mat et Euler, donne-t-il précisément leurs preuves par descentes infinies, exactement comme la démonstration de Hurwitz pour l'arithmétique des quaternions, transcrite de la même manière, fournit la preuve d'Euler (qui était peut-être aussi celle de Fermat) de la représentation des entiers en sommes de quatre carrés.

Prenons à nouveau la notation de Leibniz $\int y\, dx$ dans le calcul. Il insiste de manière répétée sur son caractère invariant, d'abord dans sa correspondance avec Tschirnhaus (qui n'en a pas montré sa compréhension), puis dans le *Acta Eruditorum* de 1686 ; il avait même un mot pour cela ("*universalitas*"). Les historiens se sont âprement opposés à lui notamment sur le résultat comparativement moins important que Leibniz avait découvert et qui, dans certains livres, est appelé "le théorème fondamental du calcul". Mais l'importance de la découverte par Leibniz de l'invariance de la notation ydx n'a pu être pleinement appréciée avant qu'Elie Cartan n'introduise le calcul des formes extérieures des différentielles et montre l'invariance des notations $ydx_1 \ldots dx_m$, non seulement sous les changements de variables indépendantes (ou de coordonnées locales), mais même sous "pull-back" [9].

Considérons maintenant le débat qui eut lieu entre Descartes et Fermat à propos des tangentes (Cf. NB, p. 192). Descartes, ayant décidé, une fois pour toutes, que seules les courbes algébriques étaient un sujet valable pour les géomètres, inventa une méthode pour trouver leurs tangentes, basée sur l'idée qu'une courbe variable, intersectant une courbe C en un certain point P, devient tangente à C en P quand l'équation de leurs intersections a une racine double correspondant à P. Bientôt, Fermat, ayant trouvé la tangente de la cycloïde par une méthode infinitésimale, posa le défi à Descartes de faire de même avec sa propre méthode. Bien sûr, celui-ci ne put le faire ; étant l'homme qu'il était, il trouva la réponse (Œuvres, I, p. 308), en donna une démonstration ("plutôt courte et plutôt simple", en utilisant le centre de rotation instantané qu'il avait inventé pour l'occasion) et il ajouta qu'il aurait pu fournir une autre preuve "plus à son goût et plus géométrique" qu'il avait omise "pour se préserver de la fatigue de l'écrire" ; cependant, dit-il, "de telles lignes sont mécaniques" et il les excluait de la géométrie. Ceci, bien sûr, était ce que Fermat essayait de faire ; il savait, aussi bien que Descartes, ce qu'est une courbe algébrique, mais restreindre la géométrie à ces courbes était assez étranger à sa manière de penser et à celle de la plupart des géomètres du XVII$^{\text{ème}}$ siècle.

Acquérir des idées sur le caractère d'un grand mathématicien et sur ses faiblesses est un plaisir innocent que même les historiens sérieux ne peuvent nier eux-mêmes. Mais que pouvons-nous conclure d'autre de cet épisode ? Très peu, dans la mesure où la distinction entre la géométrie différentielle et la géométrie algébrique doit être clarifiée. La méthode de Fermat appartenait à la première ; elle dépendait des premiers termes de l'expansion en séries entières locales ; elle fournit le point de départ

9. Cf. NB, p. 208, et A. Weil, Bull. Amer. Math. Soc. **81** (1975), 683.

de tous les développements ultérieurs en géométrie différentielle et calcul différentiel. D'un autre côté, la méthode de Descartes appartient à la géométrie algébrique, mais, si on l'y restreint, elle reste une curiosité jusqu'à ce que le besoin se fasse sentir de méthodes valides sur les corps de base arbitraires.

En effet, le point en litige ne pouvait être et ne fut pas perçu correctement jusqu'à ce que la géométrie algébrique ne lui donne son sens complet.

Il y a également une autre raison pour laquelle le métier d'historien des mathématiques peut être mieux exercé par ceux qui sont ou ont été des mathématiciens actifs, ou au moins qui sont au contact proche de mathématiciens actifs ; il y a plusieurs types d'incompréhensions fréquentes dont notre propre expérience peut nous aider à nous préserver. Nous ne savons que trop bien, par exemple, que nous ne devrions pas supposer systématiquement qu'un mathématicien est toujours complètement au courant des travaux de ses prédécesseurs, même quand il inclut les travaux en question dans ses références bibliographiques ; lequel d'entre nous a-t-il lu tous les livres qu'il a listés dans les bibliographies de ses propres écrits ? Nous savons que les mathématiciens sont rarement influencés dans leur travail par des considérations philosophiques, même quand ils prétendent les prendre très au sérieux ; nous savons qu'ils ont leur propre manière de gérer les matériaux sur lesquels ils appuient leurs travaux, qui vont du mépris téméraire à l'attention critique la plus douloureuse. Par dessus tout, nous avons appris la différence entre une pensée originale et la sorte de raisonnement routinier qu'un mathématicien met souvent en œuvre lorsqu'il doit "faire tourner la machine" dans le but de satisfaire ses pairs, ou peut-être seulement de se satisfaire lui-même. Une démonstration fastidieusement laborieuse peut être un signe de ce que son rédacteur a été moins heureux à s'exprimer ; mais plus souvent que le contraire, comme nous le savons, elle indique qu'il a travaillé sous des contraintes qui l'ont empêché de traduire directement en mots ou en formules quelques idées très simples. Un nombre incalculable de tels exemples peuvent être fournis de cela, allant de la géométrie grecque (qui a peut-être été finalement étouffée par de telles limitations) jusqu'à ce qu'on appelle "epsilontic" et jusqu'à Nicolas Bourbaki, qui a même jugé pertinent d'utiliser un signe spécial dans la marge pour mettre en garde le lecteur de preuves de cette sorte. Une tâche importante d'un historien sérieux des mathématiques, et parfois l'une des tâches les plus difficiles qu'il ait à effectuer, consiste précisément à passer au crible de telles habitudes pour trouver ce qui était réellement nouveau dans le travail des grands mathématiciens du passé.

Bien sûr, le talent et l'expérience mathématique ne suffisent pas pour qualifier une personne d'historien des mathématiques. Pour citer à nouveau Tannery (loc. cit. note 3, p. 165), "ce qui est nécessaire par-dessus tout, c'est un goût pour l'histoire ; on doit développer un certain sens historique". En d'autres termes, une qualité de sympathie intellectuelle est requise, qui embrasse les époques passées aussi bien que l'époque actuelle. Même des mathématiciens très reconnus peuvent manquer de l'une et l'autre de ces qualités ; chacun d'entre nous pourrait peut-être nommer certains d'entre nous qui refusent résolument de se familiariser avec tout autre travail que le leur propre. Il est nécessaire de ne pas céder à la tentation (naturelle pour un mathématicien) de se concentrer sur les plus grands mathématiciens connus du passé et négliger le travail de valeur seulement subsidiaire. Même du point de vue du plaisir esthétique, on risque de perdre beaucoup par une telle attitude, comme le sait tout amateur d'art ; cela peut être historiquement fatal, car la rareté du génie prospère en l'absence d'un environnement adéquat et parce qu'une certaine familiarité avec le second est un prérequis essentiel pour une véritable compréhension et appréciation du premier. Même les livres en usage à chaque étape du développement mathématique devraient être examinés attentivement de manière à trouver, quand c'est possible, ce qui était et ce qui n'était pas, la connaissance commune à un moment donné.

Les notations aussi ont leur importance. Même lorsqu'elles semblent ne pas en avoir du tout, elles peuvent fournir des pointeurs utiles pour l'historien ; par exemple, quand il trouve que pendant longtemps, et également de nos jours, la lettre K a été utilisée pour dénoter les corps et les lettres allemandes pour dénoter les idéaux, il fait partie de sa tâche d'expliquer pourquoi. D'un autre côté, il arrive souvent que ces notations soient inséparables des avancées théoriques majeures. Cela a été le cas avec le lent développement des notations algébriques, amenées finalement à leur terme dans les mains de Viète et Descartes. Cela a également été le cas à nouveau avec la création hautement individuelle des notations pour le calcul par Leibniz (peut-être le plus grand maître du langage symbolique qui ait jamais existé) ; comme nous l'avons vu, ces notations incarnaient les découvertes de Leibniz si magnifiquement que les historiens après lui, déçus par la simplicité de ces notations, n'ont pas vu certaines des découvertes correspondantes.

Ainsi, l'historien a ses propres tâches, même si elles chevauchent celles du mathématicien et peuvent parfois coïncider avec elles. Ainsi, au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, il arrivait que quelques-uns des meilleurs mathématiciens, en l'absence de prédécesseurs immédiats dans tous les champs des mathématiques sauf en algèbre avaient beaucoup de travail à faire qui, selon nous, étaient plutôt du ressort des historiens, de l'édition, de la publication, de la reconstruction du travail des Grecs, d'Archimède, Apollonios, Pappos, Diophante. Même de nos jours, l'historien et le mathématicien se rencontreront fréquemment sur des terrains communs en étudiant les productions mathématiques des XIX$^{\text{ème}}$ et XX$^{\text{ème}}$ siècles, sans parler de quoi que ce soit de plus ancien. De ma propre expérience, je peux attester de la valeur des suggestions trouvées chez Gauss et chez Eisenstein, et du fait que les congruences de Kummer pour les nombres de Bernoulli, après avoir été regardées comme pas grand chose de plus que des curiosités pendant de nombreuses années, ont trouvé une nouvelle vie dans la théorie des L-fonctions p-adiques, tandis que les idées de Fermat sur l'utilité de la descente infinie dans l'étude des équations Diophantiennes de genre 1 ont prouvé leur valeur dans le travail contemporain sur ce même sujet.

Qu'est-ce qui sépare, alors, l'historien du mathématicien quand tous deux étudient les travaux du passé ? En partie, sans aucun doute, leurs techniques, ou comme je l'ai proposé, leurs tactiques ; mais principalement, peut-être, leurs attitudes et motivations. L'historien tend à diriger son attention vers un passé plus lointain et vers une plus grande variété de cultures ; le mathématicien peut tirer moins de profit de telles études, si ce n'est la satisfaction esthétique qui en découle et le plaisir de découvertes vicariantes. Le mathématicien quant à lui, tend à choisir ses lectures en fonction d'un objectif précis, ou du moins avec l'espoir que des suggestions fructueuses en émergeront. Ici nous pouvons citer les mots de Jacobi dans ses jeunes années à propos d'un livre qu'il venait de lire : "Jusqu'à maintenant, dit-il, à chaque fois que j'ai étudié des travaux d'une certaine valeur, ils ont suscité en moi des pensées originales ; cette fois-ci, je me suis retrouvé un peu les mains vides" [10]. Comme cela a été remarqué par Dirichlet, à qui j'ai emprunté cette citation, il est ironique que le livre en question n'ait été autre que le livre de Legendre *Exercices de calcul intégral*, contenant son travail sur les intégrales elliptiques, source qui fournirait très vite à Jacobi l'inspiration pour ses plus grandes découvertes ; mais ces mots sont typiques. Le mathématicien choisit ses lectures la plupart du temps dans le but de stimuler des pensées originales (ou, pourrais-je ajouter, parfois pas si originales) ; il n'y a pas d'injustice, je pense, à dire que son but est plus directement utilitaire que celui de l'historien. Cependant, le travail essentiel de l'un comme de l'autre est d'étudier les idées mathématiques, celles du passé, celles du présent, et quand ils le peuvent, celles du futur. Tous peuvent trouver des apports de grande valeur et des éclaircissements dans le travail des autres. Ainsi ma question originale "Pourquoi une histoire des mathématiques ?" se réduit finalement à la question "Pourquoi les mathématiques ?", question à laquelle je ne me sens pas appelé à répondre.

10. "Wenn ich sonst ein bedeutendes Werk studiert habe, hat es mich immer zu eignen Gedanken angeregt... Diesmal bin ich ganz leer ausgegangen und nicht zum geringsten Einfall inspiriert worden". (Dirichlet, *Werke*, Bd, II, S. 231).

De la métaphysique aux mathématiques
André Weil

(à propos d'un colloque récent)

Les mathématiciens du XVI^{ème} siècle avaient coutume de parler de la "métaphysique du calcul infinitésimal", de la "métaphysique de la théorie des équations". Ils entendaient par là un ensemble d'analogies vagues, difficilement saisissables et difficilement formulables, qui néanmoins leur semblaient jouer un rôle important à un moment donné dans la recherche et la découverte mathématiques. Calomniaient-ils la "vraie" métaphysique en empruntant son nom pour désigner ce qui, dans leur science, était le moins clair ? Je ne chercherai pas à élucider ce point. En tout cas, le mot devra être entendu ici en leur sens ; à la "vraie" métaphysique, je me garderai bien de toucher.

Rien n'est plus fécond, tous les mathématiciens le savent, que ces obscures analogies, ces troubles reflets d'une théorie à une autre, ces furtives caresses, ces brouilleries inexplicables ; rien aussi ne donne plus de plaisir au chercheur. Un jour vient où l'illusion se dissipe, le pressentiment se change en certitude ; les théories jumelles révèlent leur source commune avant de disparaître ; comme l'enseigne la Gita, on atteint à la connaissance et à l'indifférence en même temps. La métaphysique est devenue mathématique, prête à former la matière d'un traité dont la beauté froide ne saurait plus nous émouvoir.

Ainsi nous savons, nous, ce que cherchait à deviner Lagrange, quand il parlait de métaphysique à propos de ses travaux d'algèbre ; c'est la théorie de Galois, qu'il touche presque du doigt, à travers un écran qu'il n'arrive pas à percer. Là où Lagrange voyait des analogies, nous voyons des théorèmes. Mais ceux-ci ne peuvent s'énoncer qu'au moyen de notions et de "structures" qui pour Lagrange n'étaient pas encore des objets mathématiques : groupes, corps, isomorphismes, automorphismes, tout cela avait besoin d'être conçu et défini. Tant que Lagrange ne fait que pressentir ces notions, tant qu'il s'efforce en vain d'atteindre à leur unité substantielle à travers la multiplicité de leurs incarnations changeantes, il reste pris dans la métaphysique. Du moins y trouve-t-il le fil conducteur qui lui permet de passer d'un problème à un autre, d'amener les matériaux à pied d'œuvre, de tout mettre en ordre en vue de la théorie générale future. Grâce à la notion décisive de groupe, tout cela devient mathématique chez Galois.

De même encore, nous voyons les analogies entre le calcul des différences finies et le calcul différentiel servir de guide à Leibniz, à Taylor, à Euler, au cours de la période

texte de 1960, p. 408 du volume II des Œuvres complètes d'André Weil, Hermann, éditeurs des sciences et des arts.

héroïque durant laquelle Berkeley pouvait dire, avec autant d'humour que d'à-propos, que les "croyants" du calcul infinitésimal étaient peu qualifiés pour critiquer l'obscurité des mystères de la religion chrétienne, celui-là étant pour le moins aussi plein de mystères que celle-ci. Un peu plus tard, d'Alembert, ennemi de toute métaphysique en mathématique comme ailleurs, soutint dans ses articles de l'Encyclopédie que la vraie métaphysique du calcul infinitésimal n'était pas autre chose que la notion de limite. S'il ne tira pas lui-même de cette idée tout le parti dont elle était susceptible, les développements du siècle suivant devaient lui donner raison ; et rien ne saurait être plus clair aujourd'hui, ni, il faut bien le dire, plus ennuyeux, qu'un exposé correct des éléments du calcul différentiel et intégral.

Heureusement pour les chercheurs, à mesure que les brouillards se dissipent sur un point, c'est pour se reformer sur un autre. Une grande partie du colloque de Tokyo s'est déroulée sous le signe des analogies entre la théorie des nombres et la théorie des fonctions algébriques. Là, nous sommes encore en pleine métaphysique. C'est de ces analogies, parce que j'en ai quelque expérience personnelle, que je voudrais parler ici, avec l'espoir, vain peut-être, de donner aux lecteurs "honnêtes gens" de cette revue quelque idée des méthodes de travail en mathématique.

Dès l'enseignement élémentaire, on fait voir aux élèves que la division des polynômes (à une variable) ressemble beaucoup à la division des entiers et conduit, à des lois toutes semblables. Pour les uns comme pour les autres, il y a un plus grand commun diviseur, dont la détermination se fait par division successive. A la décomposition des nombres entiers en facteurs premiers correspond la décomposition des polynômes en facteurs irréductibles ; aux nombres rationnels correspondent les fonctions rationnelles, qui, elles aussi, peuvent toujours se mettre sous forme de fractions irréductibles ; celles-ci s'ajoutent par réduction au plus petit commun dénominateur, etc. Il est donc tout naturel de penser qu'il y a analogie entre les nombres algébriques (racines d'équations dont les coefficients sont des nombres entiers) et les fonctions algébriques d'une variable (racines d'équations dont les coefficients sont des polynômes à une variable).

Le fondateur de la théorie des fonctions algébriques d'une variable aurait sans doute été Galois s'il avait vécu ; c'est ce que permettent de penser les indications qu'on trouve sur ce sujet dans sa célèbre lettre-testament, écrite à la veille de sa mort, d'où on peut conclure qu'il touchait déjà à quelques-unes des principales découvertes de Riemann. Peut-être aurait-il donné à cette théorie une allure algébrique, conforme à l'esprit des travaux contemporains d'Abel et de ses propres recherches d'algèbre pure. Au contraire, Riemann, l'un des moins algébristes sans doute parmi les grands mathématiciens du XIX^ème^ siècle, mit la théorie sous le signe du "transcendant" (mot qui, pour le mathématicien, s'oppose à "algébrique", et désigne tout ce qui appartient en propre au continu). Les méthodes très puissantes mises en œuvre par Riemann amenèrent presque du premier coup la théorie à un degré d'achèvement qui n'a guère été dépassé. Mais elles ne tiennent aucun compte des analogies avec les nombres algébriques, et ne peuvent être transposées telles quelles en vue de l'étude de ceux-ci, étude qui relève traditionnellement de l'arithmétique ou de la théorie des nombres, et qui, du vivant déjà de Riemann, était, en voie de développement rapide.

C'est Dedekind, ami intime de Riemann, mais algébriste consommé, qui devait le premier tirer parti des analogies en question et en faire un instrument de recherche. Il appliqua avec succès, aux problèmes traités par Riemann par voie transcendante, les méthodes qu'il avait lui-même créées et mises au point en vue de l'étude arithmétique des nombres algébriques ; et il fit voir qu'on peut retrouver ainsi la partie proprement algébrique de l'œuvre de Riemann.

A première vue, les analogies ainsi mises en évidence restaient superficielles, et ne paraissaient pas pouvoir porter sur les problèmes les plus profonds de l'une ni de l'autre théorie. Hilbert alla plus loin dans cette voie, à ce qu'il semble ; mais, s'il est probable que ses élèves subirent l'influence de ses idées sur ce sujet, il n'en est resté quelque trace que dans un compte rendu obscur qui n'a même pas été reproduit dans ses Œuvres complètes. Les lois non écrites de la mathématique moderne interdisent, en effet, de publier des vues métaphysiques de cette espèce. Sans doute est-ce mieux ainsi ; autrement on serait accablé d'articles encore plus stupides, sinon plus inutiles, que tous ceux qui encombrent à présent nos périodiques. Mais il est dommage que les idées de Hilbert n'aient été développées par lui nulle part. Il y avait loin encore, cependant, de l'arithmétique, où règne le discontinu, à la théorie des fonctions au sens classique. Or, en disant que les fonctions algébriques sont racines d'équations dont les coefficients sont des polynômes, j'ai volontairement omis un point important : ces polynômes eux-mêmes ont des coefficients mais ceux-ci, quels sont-ils ? Lorsqu'on traite de la division des polynômes dans l'enseignement élémentaire, il va sans dire que les coefficients sont des "nombres" : nombres "réels" (rationnels ou non, mais donnés en tout cas, si on veut, par un développement décimal), ou, à un niveau un peu plus élevé, nombres "réels ou imaginaires", ou, comme on dit, "nombres complexes". C'est exclusivement de nombres complexes qu'il s'agit dans la théorie riemannienne.

Mais, du point de vue de l'algébriste pur, tout ce qu'on demande aux "nombres" en question, c'est qu'ils se laissent combiner entre eux au moyen des quatre opérations (ce que l'algébriste exprime en disant qu'ils forment un "corps"). Si on n'en suppose pas plus sur leur compte, on obtient une théorie des fonctions algébriques, fort riche déjà (comme en témoigne le volume récent et déjà classique qu'a publié Chevalley sur ce sujet), mais qui ne l'est pas assez, pour que les analogies avec les nombres algébriques puissent être poursuivies jusqu'au bout.

Heureusement il s'est trouvé un domaine intermédiaire entre l'arithmétique et la théorie riemannienne, et qui possède, avec chacune de ces deux dernières théories, des ressemblances beaucoup plus étroites qu'elles n'en ont entre elles ; il s'agit des fonctions algébriques "sur un corps fini". Comme on le savait depuis Gauss, s'il ne s'agit que de pouvoir faire les quatre opérations, il suffit d'un nombre fini d'éléments. Il suffit par exemple d'en avoir deux, qu'on nommera 0 et 1, et pour lesquels on posera par convention la table d'addition et la table de multiplication que voici :

$$\begin{array}{lll} 0+0=0 & 0+1=1+0=1 & 1+1=0 \\ 0\times 0=0 & 0\times 1=1\times 0=0 & 1\times 1=1 \end{array}$$

Quelque paradoxale que puisse paraître au profane la règle $1+1=0$, quelque tentant qu'il soit de dire que c'est là un pur jeu de l'esprit qui ne répond à aucune "réalité", un tel système est monnaie courante pour le mathématicien ; et Galois en étendit beaucoup l'usage en construisant les "imaginaires de Galois".

Prenant donc les coefficients de nos polynômes dans un "corps de Galois", on construit des fonctions algébriques dont la théorie remonte à Dedekind mais s'est particulièrement développée depuis la thèse d'Artin. Pour dire en quoi elle consiste, il faudrait entrer dans des détails beaucoup trop techniques qui n'auraient pas leur place ici. Mais on peut, je crois, en donner une idée imagée en disant que le mathématicien qui étudie ces problèmes a l'impression de déchiffrer une inscription trilingue. Dans la première colonne se trouve la théorie riemannienne des fonctions algébriques au sens classique. La troisième colonne, c'est la théorie arithmétique des nombres algébriques. La colonne du milieu est celle dont la découverte est la plus récente ; elle contient la théorie des fonctions algébriques sur un corps de Galois.

Ces textes sont l'unique source de nos connaissances sur les langues dans lesquels ils sont écrits ; de chaque colonne, nous n'avons bien entendu que des fragments ; la plus complète et celle que nous lisons le mieux, encore à présent, c'est la première. Nous savons qu'il y a de grandes différences de sens d'une colonne à l'autre, mais rien ne nous en avertit à l'avance. A l'usage, on se fait des bouts de dictionnaire, qui permettent de passer assez souvent d'une colonne à la colonne voisine.

C'est ainsi qu'on avait déchiffré depuis longtemps, dans la dernière colonne, le début d'un paragraphe intitulé "fonction zéta". Vers la fin de ce paragraphe, on croit lire une phrase très mystérieuse ; elle dit que tous les zéros de la fonction se trouvent sur une certaine droite. Jamais on n'a pu savoir s'il en est bien ainsi, ou s'il y a eu erreur de lecture. C'est le célèbre problème de l'"hypothèse de Riemann", qui dans quelques mois sera tout juste centenaire.

La principale découverte d'Artin, dans sa thèse, c'est qu'il y a, dans la seconde colonne, un paragraphe intitulé aussi "fonction zéta", et qui est à peu de chose près une traduction de celui qu'on connaissait déjà ; notre dictionnaire s'en est trouvé beaucoup enrichi. Artin aperçut aussi, dans cette colonne, la phrase sur l'hypothèse de

Riemann ; elle lui parut tout aussi mystérieuse que l'autre. Ce nouveau problème, à première vue, ne semblait pas plus facile que le précédent. En réalité, nous savons maintenant que la première colonne contenait déjà tous les éléments de sa solution. Il n'était que de traduire, d'abord en théorie "abstraite" des fonctions algébriques, puis dans le langage "galoisien" de la seconde colonne, des résultats obtenus depuis longtemps par Hurwitz en "riemannien", et que les géomètres italiens avaient ensuite traduits dans leur propre langage. Mais les meilleurs spécialistes des théories arithmétique et "galoisienne" ne savaient plus lire le riemannien, ni à plus forte raison l'italien ; et il fallut vingt ans de recherches avant que la traduction fut mise au point et que la démonstration de l'hypothèse de Riemann dans la seconde colonne fut complètement déchiffrée.

Si notre dictionnaire était suffisamment complet, nous passerions aussitôt de là à la troisième colonne, et l'hypothèse de Riemann, la vraie, se trouverait démontrée, elle aussi. Mais nos connaissances n'atteignent pas jusque là ; bien des déchiffrements patients seront encore nécessaires avant que la traduction puisse être faite. Au cours du colloque auquel il a été fait allusion plus haut, il a été beaucoup discuté de "métaphysique" à propos de ces problèmes ; un jour celle-ci fera place à une théorie mathématique dans le cadre de laquelle ils trouveront leur solution. Peut-être, comme c'était le cas pour Lagrange, ne nous manque-t-il, pour franchir ce pas décisif, qu'une notion, un concept, une "structure". D'ingénieux philologues ont bien trouvé le secret des archives de Nestor et de celles de Minos. Combien de temps faudra-t-il encore pour que notre pierre de Rosette, à nous autres arithméticiens, rencontre son Champollion ?

“Science française”
André Weil

J’en ai assez. J’aime voyager à l’étranger ; mes amis savent que mon amour-propre national n’est pas chatouilleux à l’excès, et j’ai pris dès longtemps l’habitude d’entendre, sans trop m’émouvoir, qu’on discute, parfois sans bienveillance, de mon pays, de ses hôtels, de ses femmes, de ses politiciens. Qu’y ferais-je, si tout cela, est vrai ? Que m’importe, si tout cela est faux ? Mais j’en ai assez, quand je rencontre un chimiste, qu’il me demande invariablement : “Pourquoi la chimie francaise est-elle tombée si bas ?” ; si c’est un biologiste : “Pourquoi la biologie française va-t-elle si mal ?” ; si c’est un physicien : “Pourquoi la physique française...” mais je n’achève pas, c’est toujours la même question dont on me rebat les oreilles, et j’en suis encore à chercher la réponse. Bien sûr, quand je demande des précisions, il arrive qu’on reconnaisse qu’il existe encore chez nous, dans tel ou tel domaine, quelques savants fort distingués. Quant à moi, mathématicien tout à fait ignorant de toute science sinon de la mienne, je ne puis discuter ; souvent je me risque, en réponse à l’éternelle question, à suggérer “Mais un tel ... ?” et je cite un nom, illustre chez nous ; mais j’ai fini par y renoncer, car pour une fois qu’on m’avoue “En effet, il y a tout de même un tel,” trop souvent l’illustre collègue est assommé aussitôt d’un mot dédaigneux, d’un sourire, ou simplement d’un haussement d’épaule...

Entendons-nous : les mœurs de la gent universitaire, depuis quelque douze ans que je la fréquente, me sont un peu connues, et qu’on ne vienne pas me parler ici de jalousie, d’ignorance ou de préjugé : on n’expliquera pas ainsi que tous ces collègues étrangers, et surtout les jeunes, me posent toujours, à peu près dans les mêmes termes, la même question. Ils reconnaissent sans se gêner, de quelque pays qu’ils soient, l’importance des centres scientifiques anglais, américains, russes, allemands ; ils savent apprécier aussi, parfois avec beaucoup de chaleur, les mérites de tel savant français. Ce ne peut être la jalousie qui les fait tous parler, il y a autre chose ; il y a, faut-il le dire, un fait : ils doivent avoir raison. Cela est fâcheux ; expliquons-le comme nous pouvons, mais mieux vaut le reconnaître ; mieux vaut même, comme je le fais ici à dessein, s’exagérer peut-être l’étendue du mal que de sottement fermer les yeux. Assez parlé (avec des majuscules) de Science Francaise, assez invoquer les mânes de Pasteur, de Poincaré, de Lavoisier : qu’ils se reposent en paix, car ils l’ont bien mérité, ce repos qu’on ne veut pas accorder à leurs ombres ; la Science Française, après tout, c’est nous, c’est les vivants et leurs noms ne sont pas une mine dont on nous ait octroyé la concession à perpétuité ; si nous ne savons pas nous examiner avec sévérité, sans complaisance facile, d’autres le font pour nous. Quelques-uns diront “Qu’importe ?” : je ne parle pas pour ceux-là. Quant à moi, je l’ai dit, une question cent fois répétée est venue à bout de mes nerfs ; j’en ai assez, il faut que je parle, ça n’y changera peut-être rien,

texte de 1938, p. 232 du volume I des Œuvres complètes d’André Weil.

mais ça me soulagera.

Elle va donc si mal, cette pauvre science française, dont on a tant rebattu les oreilles au badaud public ? au nom de laquelle on a organisé des souscriptions ? pour laquelle on a créé un ministère ? Est-ce manque de talents ? Il se pourrait, et il faudrait alors en rechercher les causes ; réorganisation de notre enseignement, de nos Facultés, de nos grandes écoles, on ne guide peut-être pas toujours nos jeunes gens les mieux doués vers les voies qui leur conviendraient le mieux. Universitaire moi-même, je n'ai pas la naïveté de croire, ou de vouloir faire croire (malgré nombre d'assentiments trop faciles) que la science, et la science universitaire, possède une vertu si éminente qu'il y faille acheminer bon gré mal gré la fleur de nos écoles et la crème de nos universités ; mais enfin, le recrutement de nos institutions scientifiques est un problème qu'il ne serait peut-être pas inutile d'examiner sans trop de délais ; on ne fabriquera pas à volonté des génies, mais qui sait, il s'en trouve peut-être qui manquent leur voie, et, si ce sont la des spéculations vaines, en tout cas on peut, par une organisation méthodique, former pour les maîtres éventuels un terrain favorable.

Mais voilà : où sont-ils à présent ces maîtres, et s'ils ne sont pas là, vont-ils nous tomber du ciel ? Car comprenons-le bien : si les étrangers nous disent que dans trop de domaines, la France, en tant que centre d'études, n'existe plus, ils veulent dire qu'elle manque de maîtres ; non qu'il s'agisse d'âge : je parle de ces hommes, parvenus au premier rang, qui s'y maintiennent ; de ces hommes, peu nommés des journaux, insoucieux des diversions de la publicité et de la politique, autour desquels se forment les écoles et se groupent, avides d'idées plutôt que de places, les jeunes gens ; pour tout dire, des maîtres, non des pontifes. Nous en avons, certes je veux le croire, nous en avons, je ne veux pas désespérer, nous en avons, j'en pourrais nommer bien un ou deux parmi ceux de ma spécialité, et en dehors de celle-ci j'ai déjà dit que je n'y entends rien. Il y en a ; mais enfin je soupçonne, malgré des bonimenteurs pas toujours désintéressés, que ce ne sont pas ceux qu'on nous dit, et qu'il n'y en a pas tant qu'on ne nous le fait croire. Oui, je sais bien : les prix Nobel, les membres de l'Institut, les professeurs à la Sorbonne... les dictateurs au placement des jeunes et à la distribution des vivres : car il faut bien vivre.

Oui, je me trompe, mon Cher Collègue, je l'avoue ; il y a X et Y devant qui tout le monde s'incline, et puisque je n'entends rien à leurs travaux, je puis bien m'incliner aussi. Mais admettez un instant, voulez-vous, que pour telle autre spécialité j'aie raison ; examinons ensemble les conséquences. Supposons que dans tel ou tel domaine, disons la Théorie des Nombres (il ne me coûte rien d'en parler, elle n'est pas enseignée dans les universités françaises), les maîtres véritables soient venus à faire défaut ; que les chaires les plus en vue et les positions dominantes se trouvent occupées par des hommes, non pas ignorants ou sans compétence, mais sans éclat, ou, chose peut-être plus grave encore, par de ces savants (ils sont nombreux, et, pour des raisons qu'il faudrait bien examiner, ils le sont tout particulièrement dans les universités françaises) à qui quelques travaux brillants ont valu au début de leur carrière une réputation qu'ils n'ont pu ou ne se sont pas souciés de soutenir. Que va-t'il se passer, si de tels hommes (chargés d'honneur, sans doute, et de titres) sont installés au pouvoir ? Car, reconnaissons-le, c'est un pouvoir véritable qu'ils détiennent ; pouvoir de distribuer les places ; pouvoir, plus important encore lorsqu'il s'agit de science expérimentale (c'est pourquoi chaque matin en me levant je remercie Dieu de m'avoir fait mathématicien) d'allouer les crédits de laboratoire et les moyens de recherche ; pouvoir, de par les positions qu'ils occupent, d'attirer à soi les jeunes, et de conserver pour soi des collaborateurs qui à d'autres sont refusés. De ces jeunes, que va-t-il arriver ? Quel est avenir d'une science dont l'enseignement est une fois tombé entre les mains de pontifes de cette espèce ? Maints exemples, que j'ai pu étudier (et non pas seulement en France, qu'on le croie bien ; je ne crois pas tout parfait ailleurs, et j'ai observé en d'autres pays des phénomènes tout semblables), permettent de donner de ce qui doit se passer une description assez précise : le tableau clinique de la maladie (comme disent, je crois, les médecins) est bien connu. De tels hommes ne tardent pas à tomber en dehors des grands courants de la science ; non pas de la Science Française, mais de la science (sans majuscule) qui est universelle ; ils travaillent, souvent honnêtement, de très bonne foi et non sans talent, ou d'autres fois ils font semblant de travailler, mais en tout cas ils sont étrangers aux grands problèmes, aux idées vivantes de la science de leur époque ; et à leur suite, c'est toute leur école qui se trouve égarée dans des eaux stagnantes (parfois bourbeuses, mais cela c'est une autre histoire) ; des jeunes gens bien doués passent les années les plus importantes de leur carrière scientifique, les premières, à travailler à des problèmes sans portée et dans des voies sans issue. Il faudrait les envoyer à l'étranger, ces jeunes gens, les initier à toutes les méthodes, à toutes les idées car, quand bien même il s'agirait du maître le plus éminent, qu'est-ce que l'éléve d'un seul maître ? Mais quoi ? L'on a trop peur de perdre des collaborateurs et des disciples, et, à leur place, de voir revenir des juges, des juges sévères. Qu'il est préférable de les garder auprès de soi, de s'en faire aider, de les maintenir autant qu'il se peut dans des voies tracées ! Qu'ils aient du talent, c'est bien ; qu'ils soient sages de plus, et (sans nuire à la hiérarchie ni à l'ordre d'ancienneté) toutes les voies leur sont ouvertes ; et s'ils sont sages, le talent même après tout n'est pas indispensable, ume bonne petite chaire les récompensera.

Bien sûr, le génie perce quand même ; le génie se fait toujours sa place, à travers tous les obstacles ; bien sûr... (je n'en suis pas si sûr que ça). Oui, mais pour le génie même que d'années perdues ; quel retard, quelles sordides difficultés ; et tous les autres, ceux qui auraient pu faire œuvre utile, maintenir, en attendant la venue du génie, une tradition honorable et parfois glorieuse, tous ces autres, quoi d'eux ? Souvent ils s'aperçoivent des années perdues ; un peu trop tard, ils se remettent à l'école ; ils tentent de se refaire une place dans la colonne en marche, quand leur esprit a perdu sa souplesse et sa plasticité ; ils se hissent avec difficultés à un échelon où d'autres avant eux parvinrent, puis, effort fourni, ils y restent, ils sont dépassés. Ils y restent, et l'histoire recommence... Une fois provincialisé, une fois tombé dans l'ornière, on y reste. Sauf miracle, bien sûr : car l'esprit, c'est le miracle ; mais n'y comptons pas trop, ou plutôt, le miracle arrive à qui aura su le mériter.

Mériter le miracle : c'est tout le travail du savant, pour qui le miracle c'est l'idée. Et quand le miracle c'est le génie, ne croyons pas qu'il ne faille le mériter aussi. Un tas de savants éminents crient au public "De l'argent ! De l'argent ! La science coûte cher !". C'est vrai, la science coûte cher ; bibliothèques, laboratoires modernes, instruments de travail indispensables, ne s'obtiennent pas à peu de frais ; et si autrefois, et même quoi qu'on nous dise aujourd'hui, l'on a pu faire avec des moyens très modestes d'importantes découvertes, l'on n'imagine guère que la science dans son ensemble puisse avancer de même. Je vous ferai de bonne chère, disait maître Jacques, si vous me donnez bien de l'argent. Il avait raison. Mais est-ce tout, quand la nation, désireuse qu'on lui fasse de bonne science, a donné de l'argent à maître Jacques ? Maître Jacques est membre de l'Institut, prix Nobel peut-être ; il occupe un rang distingué dans la Légion d'Honneur. Va-t-il nous donner de bonne science ? En dehors de ma spécialité je l'ai dit, je suis Français moyen, désireux qu'on fasse de l'argent que je verse chaque année à l'Etat le meilleur usage ; de ma spécialité je ne parle pas, car là c'est par mes travaux que je puis agir, mieux que par des paroles sans doute vaines. J'ai voulu décharger ma bile. Je n'ai pas tout dit ; je n'ai pas parlé de la rigidité de notre système universitaire ; des occasions manquées, lorsque tant de savants éminents, chassés d'Allemagne, étaient prêts à accepter n'importe où la place la plus modeste : l'Angleterre, l Amérique les ont recueillis tandis que nos universités, retranchées derriére de commodes règlements, les laissaient partir ; je n'ai rien dit de la dispersion d'efforts dans des universités provinciales trop nombreuses, où s'enlisent, faute d'un milieu où is se sentiraient encouragés, tant de jeunes savants. Le système est médiocre, ou mauvais ; mais un système meilleur, ce ne serait tout au plus qu'une machine mieux graissée. Qu'importe le système ? Ce sont les hommes qui importent.

Science française ?
André Weil

L'an dernier, un homme politique assez connu déjà, et qui l'est encore plus à présent, s'étonnait que, depuis, fort longtemps, aucun savant français n'ait reçu de prix Nobel. L'occasion était solennelle ; il exposait son programme de gouvernement. S'il faisait cette constatation, ce n'était pas seulement, sans doute, pour s'attrister d'une situation si humiliante pour notre amour-propre national. C'est qu'il entendait que la prise du pouvoir lui donnerait la faculté d'y porter remède.

Où sont-ils, ces remèdes ? Sont-ils fort cachés ? Et ce qui est pour nos hommes politiques un sujet d'étonnement en est-il un pour les initiés ? Ici, je demande la permission de raconter mon histoire, ou plutôt de copier quelques passages d'un article que j'écrivis, fort jeune encore, à mon retour d'un voyage en Amérique, il y a près de vingt ans. Ce voyage faisait suite à beaucoup d'autres, en Allemagne, en Angleterre, en Italie, en Russie même (est-il prudent de l'avouer ?), et jusqu'en Asie. Mon article fut soumis à quelques revues, qui le jugèrent impubliable ; il y a des vérités qui ne sont pas bonnes à dire ; on ne se priva pas de me le faire savoir ; je ne profitai guère de la leçon...

> *"J'en ai assez J'en ai assez. J'aime voyager à l'étranger ; mes amis savent que mon amour-propre national n'est pas chatouilleux à l'excès, et j'ai pris dès longtemps l'habitude d'entendre, sans trop m'émouvoir, qu'on discute, parfois sans bienveillance, de mon pays, de ses hôtels, de ses femmes, de ses politiciens. Qu'y ferais-je, si tout cela, est vrai ? Que m'importe, si tout cela est faux ? Mais j'en ai assez, quand je rencontre un chimiste, qu'il me demande invariablement : "Pourquoi la chimie francaise est-elle tombée si bas ?" ; si c'est un biologiste : "Pourquoi la biologie française va-t-elle si mal ?" ; si c'est un physicien : "Pourquoi la physique française..." mais je n'achève pas, c'est toujours la même question dont on me rebat les oreilles, et j'en suis encore à chercher la réponse. Bien sûr, quand je demande des précisions, il arrive qu'on reconnaisse qu'il existe encore chez nous, dans tel ou tel domaine, quelques savants fort distingués. Quant à moi, mathématicien tout à fait ignorant de toute science sinon de la mienne, je ne puis discuter ; souvent je me risque, en réponse à l'éternelle question, à suggérer "Mais un tel... ?" et je cite un nom, illustre chez nous ; mais j'ai fini par y renoncer, car pour une fois qu'on m'avoue "En effet, il y a tout de même un tel," trop souvent l'illustre collègue est assommé aussitôt d'un mot dédaigneux, d'un sourire, ou simplement d'un*

texte de 1955, p. 277 du volume II des Œuvres complètes d'André Weil. qui est une réimpression de La Nouvelle N.R.F., Paris, Imp. Crété, Corbeil-Essonnes (Seine-et-Oise), 3$^{\text{ème}}$ année, n$^{\text{o}}$ 25, p. 97-108.

haussement d'épaule...

> *Entendons-nous : les mœurs de la gent universitaire, depuis quelque douze ans que je la fréquente, me sont un peu connues, et qu'on ne vienne pas me parler ici de jalousie, d'ignorance ou de préjugé : on n'expliquera pas ainsi que tous ces collègues étrangers, et surtout les jeunes, me posent toujours, à peu près dans les mêmes termes, la même question. Ils reconnaissent sans se gêner, de quelque pays qu'ils soient, l'importance des centres scientifiques anglais, américains, russes, allemands ; ils savent apprécier aussi, parfois avec beaucoup de chaleur, les mérites de tel savant français. Ce ne peut être la jalousie qui les fait tous parler, il y a autre chose ; il y a, faut-il le dire, un fait : ils doivent avoir raison. Cela est fâcheux ; expliquons-le comme nous pouvons, mais mieux vaut le reconnaître ; mieux vaut même, comme je le fais ici à dessein, s'exagérer peut-être l'étendue du mal que de sottement fermer les yeux. Assez parlé (avec des majuscules) de Science Francaise, assez invoquer les mânes de Pasteur, de Poincaré, de Lavoisier : qu'ils se reposent en paix, car ils l'ont bien mérité, ce repos qu'on ne veut pas accorder à leurs ombres ; la Science Française, après tout, c'est nous, c'est les vivants et leurs noms ne sont pas une mine dont on nous ait octroyé la concession à perpétuité ; si nous ne savons pas nous examiner avec sévérité, sans complaisance facile, d'autres le font pour nous. Quelques-uns diront "Qu'importe ?" : je ne parle pas pour ceux-là. Quant à moi, je l'ai dit, une question cent fois répétée est venue à bout de mes nerfs ; j'en ai assez, il faut que je parle, ça n'y changera peut-être rien, mais ça me soulagera."*

Ainsi s'exprimait, naïvement sans doute, mon indignation juvénile.

> *"Où sont les maîtres, disais-je, dont nous avons besoin ? Où sont ces hommes, peu nommés des journaux, insoucieux des diversions de la publicité et de la politique, autour desquels se forment les écoles et se groupent, avides d'idées plutôt que de places, les jeunes gens ; pour tout dire, des maîtres, non des pontifes. Nous en avons, certes je veux le croire, nous en avons, je ne veux pas désespérer, nous en avons, j'en pourrais nommer bien un ou deux parmi ceux de ma spécialité, et en dehors de celle-ci j'ai déjà dit que je n'y entends rien. Il y en a ; mais enfin je soupçonne, malgré des bonimenteurs pas toujours désintéressés, que ce ne sont pas ceux qu'on nous dit, et qu'il n'y en a pas tant qu'on ne nous le fait croire.".*

Ici, il vaut mieux interrompre la citation ; j'aperçois le mot de "pontifes".

> *"Oui, je sais bien : les prix Nobel, les membres de l'Institut, les professeurs à la Sorbonne... les dictateurs au placement des jeunes et à la distribution des rations de soupe."*

Il n'y a qu'un esprit aigri, ne manquera-t-on pas de dire, qui ait pu proférer de si horribles blasphèmes contre tout ce qu'il y a au monde de plus respectable. A qui ferai-je comprendre que je ne me croyais victime d'aucune injustice, que j'étais fort satisfait de mon sort et de ma position dans l'Université française, que des maîtres parisiens pour qui j'avais une profonde admiration voulaient bien me témoigner de la bienveillance ? Aussi n'était-ce pas de ma spécialité que j'entendais parler ; je savais bien que, là, c'était par mes travaux que je pouvais agir, bien mieux que par de vaines paroles. Sur toutes les autres, j'étais fort ignorant, et je le suis encore ; mais je n'avais pas fermé mes oreilles à ce qui s'en était dit autour de moi à l'étranger ; j'en ai entendu bien plus depuis lors, et de la bouche des savants les plus capables d'en juger avec impartialité et compétence. Je soupçonnais alors, je sais maintenant, qu'il y a des chercheurs et des laboratoires français dont on ne parle dans le monde qu'avec estime, parfois avec respect. Je sais qu'on les compte sur les doigts, et que leur éminence ne rend que plus sensible la platitude de la contrée environnante. Pourquoi n'y en a-t-il pas plus ? Dès 1937, j'avais cru en apercevoir les raisons :

> *"Supposons que dans tel ou tel domaine, disons la Théorie des Nombres (il ne me coûte rien d'en parler, elle n'est pas enseignée dans les universités françaises), les maîtres véritables soient venus à faire défaut ; que les chaires les plus en vue et les positions dominantes se trouvent occupées par des hommes, non pas ignorants ou sans compétence, mais sans éclat, ou, chose peut-être plus grave encore, par de ces savants (ils sont nombreux, et, pour des raisons qu'il faudrait bien examiner, ils le sont tout particulièrement dans les universités françaises) à qui quelques travaux brillants ont valu au début de leur carrière une réputation qu'ils n'ont pu ou ne se sont pas souciés de soutenir. Que va-t'il se passer, si de tels hommes (chargés d'honneur, sans doute, et de titres) sont installés au pouvoir ? Car, reconnaissons-le, c'est un pouvoir véritable qu'ils détiennent ; pouvoir de distribuer les places ; pouvoir, plus important encore lorsqu'il s'agit de science expérimentale (c'est pourquoi chaque matin en me levant je remercie Dieu de m'avoir fait mathématicien) d'allouer les crédits de laboratoire et les moyens de recherche ; pouvoir, de par les positions qu'ils occupent, d'attirer à soi les jeunes, et de conserver pour soi des collaborateurs qui à d'autres sont refusés. De ces jeunes, que va-t-il arriver ? Quel est avenir d'une science dont l'enseignement est une fois tombé entre les mains de pontifes de cette espèce ? Maints exemples, que j'ai pu étudier (et non pas seulement en France, qu'on le croie bien ; je ne crois pas tout parfait ailleurs, et j'ai observé en d'autres pays des phénomènes tout semblables), permettent de donner de ce qui doit se passer une description assez précise : le tableau clinique de la maladie (comme disent, je crois, les médecins) est bien connu. De tels hommes ne tardent pas à tomber en dehors des grands courants de la science ; non pas de la Science Française, mais de la science (sans majuscule) qui est universelle ; ils travaillent, souvent honnêtement, de très bonne foi et non sans talent,*

> *ou d'autres fois ils font semblant de travailler, mais en tout cas ils sont étrangers aux grands problèmes, aux idées vivantes de la science de leur époque ; et à leur suite, c'est toute leur école qui se trouve égarée dans des eaux stagnantes (parfois bourbeuses, mais cela c'est une autre histoire) ; des jeunes gens bien doués passent les années les plus importantes de leur carrière scientifique, les premières, à travailler à des problèmes sans portée et dans des voies sans issue. Il faudrait les envoyer à l'étranger, ces jeunes gens, les initier à toutes les méthodes, à toutes les idées car, quand bien même il s'agirait du maître le plus éminent, qu'est-ce que l'éléve d'un seul maître ? Mais quoi ? L'on a trop peur de perdre des collaborateurs et des disciples, et, à leur place, de voir revenir des juges, des juges sévères. Qu'il est préférable de les garder auprès de soi, de s'en faire aider, de les maintenir autant qu'il se peut dans des voies tracées ! Qu'ils aient du talent, c'est bien ; qu'ils soient sages de plus, et (sans nuire à la hiérarchie ni à l'ordre d'ancienneté) toutes les voies leur sont ouvertes ; et s'ils sont sages, le talent même après tout n'est pas indispensable, ume bonne petite chaire les récompensera."*

J'ai copié mot pour mot, et mon manuscrit de 1937 est là pour le prouver. J'avais bien écrit "théorie des nombres" ; je n'avais pour cela d'autre raison que celle que j'en donnais, c'est-à-dire qu'il n'existait alors aucune chaire de ce titre. J'étais assez naïf pour espérer ainsi ne blesser personne, dans cet article où je blessais tout le monde. Je ne prévoyais pas qu'un jour serait créée à la Sorbonne une chaire de théorie des nombres, ni que ce serait au profit d'un administrateur chevronné, ancien recteur et directeur de ministère ; encore moins pouvais-je prévoir que la nomination de son successeur serait l'occasion d'un épisode qu'il vaut la peine de raconter ici, car il complète, fort heureusement du point de vue du clinicien, fort fâcheusement de tout autre point de vue, le "tableau clinique" que j'esquissais en 1937. Pour plus de clarté, j'y joindrai le récit d'une nomination universitaire récente en Allemagne ; la comparaison sera instructive.

Parmi les nombreux savants européens émigrés aux Etats-Unis, on comptait, vers la fin de la guerre, deux des plus grands mathématiciens contemporains, l'un allemand, l'autre français. Nous les appellerons A et B. Tous deux se sont particulièrement distingués en théorie des nombres.

A était resté en Allemagne jusqu'au début de 1940. Il n'était pas juif. Ses sentiments d'hostilité au régime étaient bien connus de ses collègues et n'étaient pas ignorés des autorités universitaires ; mais il n'avait jamais eu aucune activité politique et n'avait pas été inquiété. Peut-être aurait-il quitté son pays plus tôt s'il n'avait pas pensé, par sa présence, renforcer ce qui restait alors en Allemagne de pensée libre ; il est vrai aussi qu'un voyage en Amérique l'avait convaincu que le climat intellectuel de ce pays lui convenait mal. S'il se décida à émigrer en 1940, ce qui n'alla pas sans difficultés ni risques, ce fut sans doute qu'alors il désespéra de l'avenir de l'Europe. Pendant la guerre, il fut traité par les Américains en réfugié, c'est-à-dire assez mal. Du moins y trouva-t-il de quoi vivre et poursuivre ses travaux, tandis que la plupart et les meilleurs des savants allemands qui avaient cherché un asile en France à la suite des premières persécutions hitlériennes avaient dû en repartir faute de possibilités de travail. Vers la fin de la guerre, l'une des chaires si enviées de l'Institute for Advanced Study, de Princeton, lui fut offerte ; il l'accepta, et se fit citoyen américain.

Mais l'Allemagne se relevait de ses ruines matérielles et intellectuelles plus vite qu'on n'avait pu s'y attendre ; le travail scientifique y redevenait possible. Malgré la longueur de son séjour en Amérique, A n'avait pu s'accoutumer à bien des aspects de la vie américaine qui lui avaient déplu dès l'abord ; quelques-uns de ses amis restés en Allemagne s'en aperçurent. Il n'en fallut pas plus. Bientôt, la plus célèbre des universités d'Allemagne occidentale lui offrit une chaire. Il ne pouvait être question là d'une situation matérielle comparable à celle qu'il avait à Princeton ; mais on sait que les universités allemandes peuvent, dans une certaine mesure, proportionner le traitement à la valeur et à la réputation scientifiques ; on lui en offrit un fort supérieur à celui de la plupart de ses collègues allemands ; pour l'attirer, on lui offrit le remboursement de tous ses frais de déménagement. Suivant la loi allemande, la nomination d'un étranger à une chaire universitaire lui confère de plein droit la naturalisation ; on offrit au professeur A, à son choix, de reprendre la nationalité allemande ou de conserver la nationalité américaine. Et tout cela fut fait sans qu'il eût rien demandé, sans qu'il eût eu à rien demander. Il accepta ; et sa présence et son enseignement n'ont pas peu contribué à rendre à l'Université dont il s'agit une partie du lustre qu'elle avait eu autrefois.

Quant au Francais, la déclaration de guerre l'avait surpris à Princeton ; mobilisable, il prit l'avis de l'ambassade de France, qui lui recommanda de rester où il était ; un professeur francais à l'étranger, pensait-on alors assez raisonnablement, était plus utile à la France qu'un soldat de plus sous l'uniforme. Il passa donc la guerre aux Etats-Unis. Celle-ci finie, les postes les plus brillants lui furent bientôt offerts ; Princeton, Harvard, Columbia se le disputèrent. C'est dans cette dernière université qu'il se fixa, dans l'une des meilleures chaires qu'elle eût à offrir ; quelque temps auparavant, il s'était fait naturaliser américain. Mais lui aussi se lassa des Etats-Unis, et désira rentrer en France. C'est ici que son histoire cesse de ressembler à la précédente.

Tout d'abord, en France, on n'offre pas une chaire à un savant, si distingué soit-il ; il faut qu'il fasse acte de candidature ; il faut le plus souvent qu'il fasse ses visites de candidature, formalité destinée principalement à permettre à ceux dont il postule les suffrages de juger de la souplesse de son échine. Les amis du professeur B, mis au courant de ses intentions, attendirent longtemps une occasion favorable. Plusieurs chaires devinrent vacantes, mais chaque fois les jeux étaient faits. Enfin le titulaire de la chaire de théorie des nombres prit sa retraite ; les amis de B pensèrent qu'il ne convenait pas de différer plus longtemps. Pour cette chaire, B était si éminemment qualifié qu'il ne semblait pas que quiconque, en France ou ailleurs, put la lui disputer sans ridicule.

Mais il fallait d'abord que cette candidature fût recevable. La loi française n'admet plus, depuis longtemps déjà, que nos universités puissent s'enrichir par des nominations de savants étrangers, comme c'est l'usage dans presque tous les autres pays ; il en est ainsi, quand bien même l'étranger ne serait tel que par naturalisation. Mais, par hasard, B n'avait pas perdu sa nationalité française en acquérant la nationalité américaine. Force fut à la Sorbonne d'enregistrer sa candidature.

Alors se déclencha une campagne d'une violence extraordinaire. On vit un membre de l'Institut monter en personne sur la brèche pour défendre la citadelle menacée. On feignit de mettre en doute la valeur mathématique du candidat. Parmi les éloges que la critique avait décernés à ses ouvrages, on rechercha les réserves et les objections de détail ; par un montage habile de citations tronquées, on composa un texte qui put impressionner défavorablement les incompétents ; or, comme c'est l'ensemble d'une Faculté qui vote sur chaque nomination, toutes spécialités réunies (depuis les mathématiques jusqu'à la botanique), c'est nécessairement, en chaque cas, une majorité d'incompétents qui décide. On reprocha à B de n'être pas rentré endosser un uniforme en 1939 ; on mobilisa contre lui les "anciens combattants" et "anciens résistants" professionnels ; il n'en manque pas dans l'Université, dont toute la carrière ne se fonde que là-dessus ; et je ne parle pas de ces patriotes tardifs, toujours cherchant à faire oublier qu'ils se sont déshonorés, et obligeant par là même, quoi qu'on en ait, à s'en souvenir toujours. On gonfla les mérites du suppléant du précédent titulaire de la chaire. On fit si bien que ce suppléant l'emporta. La seule consolation de B fut que son éloignement l'avait préservé de participer à cette mêlée sordide. Ses amis s'étaient chargés pour lui des visites de candidature ; cétaient des savants fort distingués, eux aussi ; le résultat a prouvé qu'ils auraient pu mieux employer leur temps.

Mais l'histoire ne finit pas là. A tort ou à raison, le bruit se répandit que la direction de l'enseignement supérieur désirait récupérer pour la France un mathématicien si éminent et ne se refuserait pas à une création de chaire en sa faveur pour peu que la Sorbonne la demandât. N'était-ce pas occasion pour ces Messieurs de réparer leur erreur sans chagriner personne ? Si le ministère n'avait pas les intentions qu'on lui prêtait, du moins l'honneur de la Sorbonne serait sauf, ou presque. Mais non : c'était bien le talent trop distingué du candidat qui l'excluait. Nouveau vote, nouvel échec. Et le professeur B est toujours à l'Université Columbia, qui s'en félicite et eût été bien en peine de le remplacer.

Ainsi joue la loi de la cooptation des médiocres, que je m'imaginais découvrir en 1937 ; loi d'autant plus fatale qu'il faut à un homme des qualités de premier ordre pour qu'il désire attirer auprès de lui ses égaux, au risque qu'ils lui soient supérieurs. Un homme médiocre, au contraire, cherchera toujours à s'entourer non pas seulement de médiocres, mais de plus médiocres que lui ; il le faut bien, pour faire briller ses minces mérites. Ce n'est pas d'hier que la plupart de nos institutions scientifiques sont prises dans les rouages de ce mécanisme inexorable.

La situation est-elle sans remède ? Peut-on imaginer des réformes qui en amèneraient le redressement ? Ce n'est pas douteux. Il reste assez d'éléments sains dans le monde scientifique francais, il y a assez de talent parmi les jeunes pour permettre les plus sérieux espoirs si on se décidait faire le nécessaire. J'en ai assez dit pour faire comprendre qu'une telle réforme ne peut partir que d'en haut. Il y faudrait un acte d'autorité ; et elle se heurterait à la plus violente résistance de la part de la majorité des universitaires francais, de l'Institut, du Collège de France, de corps constitués et de personnalités dont il est d'usage de ne parler en public que sur un ton de profond respect. Peut-être, après tout, n'y faudrait-il qu'encore un peu plus de courage que pour s'attaquer aux intérêts des viticulteurs ou au privilège des bouilleurs de cru. La politique, dit-on, est l'art du possible ; où, en pareille matière, est le possible ? Je ne suis pas politicien ; ce n'est pas mon métier de le savoir. Rien de ce que je vais dire n'est impossible en soi, puisque tout cela se pratique sous nos yeux dans les pays qui sont à la tête du mouvement scientifique moderne. Sommes-nous encore capables de nous instruire à leur exemple ? Je n'en sais rien ; si nous ne le sommes pas, tant pis pour nous.

Quelles sont donc ces réformes qui pourraient nous tirer de la profonde ornière où nous sommes ? Il n'y a pas là grand mystère ; tous ceux qui y ont quelque peu réfléchi sans préjugé et de bonne foi savent bien à quoi s'en tenir là-dessus. Il suffira ici d'indiquer brièvement quelques points essentiels.

D'abord, il faut s'attaquer à une organisation vicieuse, qui fait de l'Université de France un monstre hydrocéphale, dont la Sorbonne est la tête difforme et les universités de province sont les membres exsangues. Lors de la réforme de Liard, il est notoire que celui-ci céda à des pressions électorales en acceptant beaucoup plus d'universités qu'il ne le jugeait souhaitable. Il disait, paraît-il, que cela n'avait pas d'importance, parce que la plupart mourraient d'elles-mêmes. Il n'avait pas prévu que les autorités locales, municipalités, chambres de commerce, fières du prestige qui en rejaillissait sur elles, leur accorderaient tout juste le soutien nécessaire pour les faire subsister et en tirer quelques menus services, sans bien entendu leur donner les ressources qui en auraient fait de vrais centres intellectuels. Là où par hasard se forme en province un noyau scientifique intéressant, il végète faute d'étudiants ; les bons étudiants se dirigent sur Paris où ils se trouvent noyés dans la foule et ne peuvent que rarement tirer profit de l'enseignement de maîtres débordés de tous côtés.

Même dans les quelques domaines où la France tient encore son rang, il ne saurait être question de trouver assez de maîtres et de chercheurs pour monter plus de quatre ou cinq grands centres. Donc, la première réforme doit consister à rabaisser la plupart de nos universités au rang de centres propédeutiques intermédiaires entre le secondaire et le supérieur ; à créer, en province, environ quatre grands centres scientifiques bien dotés en hommes et en moyens, dans des localités bien choisies qui ne seraient pas nécessairement des grandes villes ; à décharger Paris de son trop-plein sur ces centres par des mesures appropriées, dont le détail ne serait pas difficile à formuler.

En second lieu, il faut changer radicalement le mode de nomination des professeurs. Le mieux serait de s'inspirer du système anglais et de mettre toutes les nominations importantes entre les mains de comités restreints offrant un minimum de garanties d'impartialité et de compétence, comités qui devraient obligatoirement (comme il se fait en Angleterre, avec d'autant plus de soin qu'il s'agit d'une chaire plus importante) consulter largement l'opinion scientifique internationale et en tenir le plus grand compte. Dans ces comités devraient entrer pour une large part des savants désignés par le ministre et choisis eux-mêmes en tenant compte de l'opinion internationale. Notons en passant qu'en Angleterre une visite de candidature serait suffisante pour disqualifier aussitôt un candidat.

En troisième lieu, mais en troisième lieu seulement, il faudrait donner, non aux universités actuelles, mais aux quatre ou cinq grands centres qu'il s'agit de constituer, non seulement des ressources, mais aussi une autonomie financière qui les mit sur le même plan que les grandes universités anglaises, allemandes, américaines, et que notre Haut Commissariat de l'Energie Atomique. Je ne veux pas me donner le ridicule ici de répéter, après tant d'autres qui le crient bien fort depuis vingt ans, que la science coûte cher. C'est vrai, encore qu'on ait pu assez souvent autrefois, et qu'on puisse peut-être encore (mais exceptionnellement) aujourd'hui faire avec des moyens modestes d'importantes découvertes. Je ne veux pas rappeler les statistiques humiliantes qu'on a publiées à maintes reprises sur le budget de la recherche scientifique en France comparé à celui qu'on y consacre ailleurs, "Je vous ferai de bonne chère, disait Maître Jacques, si vous me donnez bien de l'argent.". Il avait raison ; et, quand même il aurait été un fripon, cela n'aurait pas suffi à lui donner tort sur ce point. Il faudra donc de l'argent, bien de l'argent, pour les laboratoires, les bibliothèques, le personnel subalterne. Il faudra bien aussi se décider à payer décemment le personnel scientifique proprement dit. Il faudra permettre à nos grands centres scientifiques de recruter celui-ci par contrats individuels, comme le fait le Haut Commissariat de l'Energie Atomique et comme le font les grandes Universités étrangères. Il faudra qu'on puisse, le cas échéant, nommer à nos grandes chaires et à la direction de nos grands laboratoires des étrangers qualifiés. Les Anglais, dont les traditions scientifiques valent bien les nôtres, le font parfois et s'en trouvent bien ; la France l'a fait autrefois ; pourquoi faut-il que notre amour-propre national en soit arrivé à emporter sur notre intérêt bien compris ? Il faudra que les contrats que nos grands centres seront en mesure d'offrir leur permettent d'entrer en concurrence, avec quelque chance de succès, avec les institutions similaires à l'étranger.

Bien entendu, lorsqu'on se sera résolu à traiter convenablement nos savants, on sera en droit d'attendre d'eux qu'ils se consacrent honnêtement à leur enseignement et leurs recherches. Mais il ne sera pas besoin pour cela de règlements draconiens. Ce n'est pas de gaieté de cœur que tant d'universitaires, chez nous, cherchent un supplément à de maigres ressources dans des pratiques variées où se consume leur temps et leur énergie, cumul d'enseignements de bas étage, trust des examens et concours, et trop souvent mise à la disposition de l'industrie privée de laboratoires officiellement consacrés à la science pure. En Angleterre, en Amérique, en Allemagne, l'industrie privée a ses propres laboratoires de recherche, souvent si largement conçus qu'il s'y fait de nombreux travaux scientifiques de grande valeur. En France, les industriels, quand ils ne travaillent pas sur licences étrangères, trouvent trop souvent plus économique de faire travailler à leur compte un laboratoire universitaire en échange d'un supplément de traitement dérisoire accordé au professeur qui le dirige. Bien entendu, la liaison entre science pure et science appliquée est chose hautement souhaitable ou plutôt indispensable, mais qui ne s'obtient pas en étouffant celle-là au profit de celle-ci par des arrangements qui constituent de véritables escroqueries aux dépenses de l'Etat.

Assurément, bien d'autres questions se posent : recrutement des jeunes, rôle des "grandes écoles", liaison entre l'enseignement et la recherche. Je ne crois pas utile d'en discuter ici. Je ne pense pas qu'aucune d'elles puisse offrir de difficulté sérieuse dans un climat redevenu favorable.

Le redeviendra-t-il ? Se trouvera-t-il un chirurgien pour mettre sur la table d'opération un malade qui prétend qu'il ne s'est jamais mieux porté ? S'il ne s'en rencontre pas, faut-il désespérer ? ou attendre le salut de l'intervention miraculeuse du génie ?

> *"Bien sûr, le génie perce quand même ; le génie se fait toujours sa place, à travers tous les obstacles ; bien sûr... (je n'en suis pas si sûr que ça). Oui, mais pour le génie même que d'années perdues ; quel retard, quelles sordides difficultés ; et tous les autres, ceux qui auraient pu faire œuvre utile, maintenir, en attendant la venue du génie, une tradition honorable et parfois glorieuse, tous ces autres, quoi d'eux ? Souvent ils s'aperçoivent des années perdues ; un peu trop tard, ils se remettent à l'école ; ils tentent de se refaire une place dans la colonne en marche, quand leur esprit a perdu sa souplesse et sa plasticité ; ils se hissent avec difficultés à un échelon où d'autres avant eux parvinrent, puis, effort fourni, ils y restent, ils sont dépassés. Ils y restent, et l'histoire recommence... Une fois provincialisé, une fois tombé dans l'ornière, on y reste. Sauf miracle, bien sûr : car*

l'esprit, c'est le miracle ; mais n'y comptons pas trop, ou plutôt, le miracle arrive à qui aura su le mériter."

Je nétais guère optimiste en 1937. Je ne le suis pas plus à présent.

André Weil
Professeur à l'Université de Chicago.