Pourquoi ne perd-on pas les décompositions de Goldbach ? Étude géométrique (Denise Vella-Chemla, 2.5.2025)

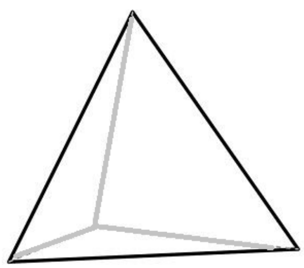
On a étudié cette semaine le problème du jeu de l'Icosion d'Hamilton. Cela amène aux graphes des polyèdres de Platon, et à une possibilité d'étudier géométriquement la conjecture de Goldbach.

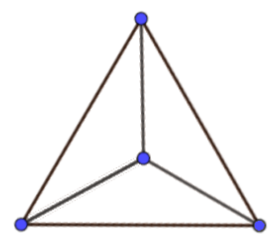
1) Les 5 solides de Platon et leur représentation par des réseaux (graphes)

Les cinq solides de Platon sont : le tétraèdre (à 4 sommets et 6 arêtes), l'octaèdre (à 6 sommets et 12 arêtes), le cube (à 8 sommets et 12 arêtes), le dodécaèdre (à 12 sommets et 30 arêtes) et l'icosaèdre (à 15 sommets et 30 arêtes) [1].

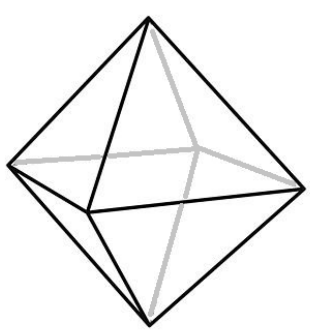
Ci-dessous les 5 solides de Platon et leur graphe, qui contient toutes les arêtes d'adjacence d'un sommet aux sommets qui en sont voisins (on a choisi de présenter deux graphes pour l'octaèdre, du fait de leur jolie symétrie).

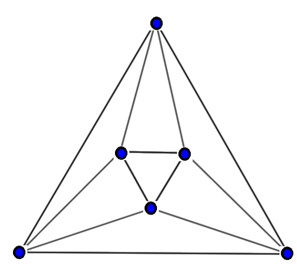
a) Le tétraèdre et son graphe





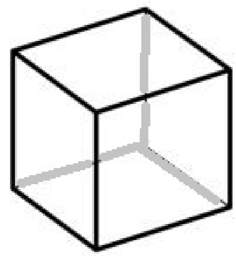
b) L'octaèdre et son graphe

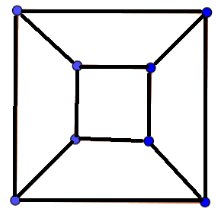




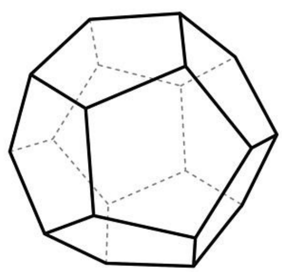
1. On peut jouer au jeu de l'icosion de Hamilton sur le graphe du dodécaèdre.

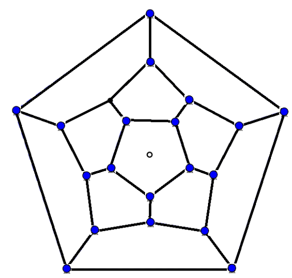
c) Le cube et son graphe



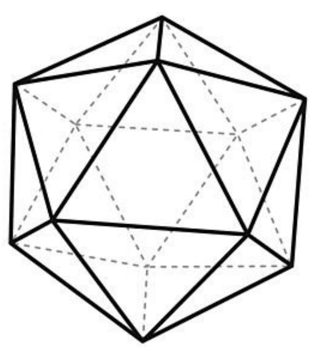


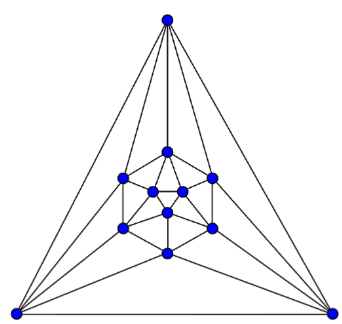
d) Le dodécaaèdre et son graphe





e) L'icosaèdre et son graphe

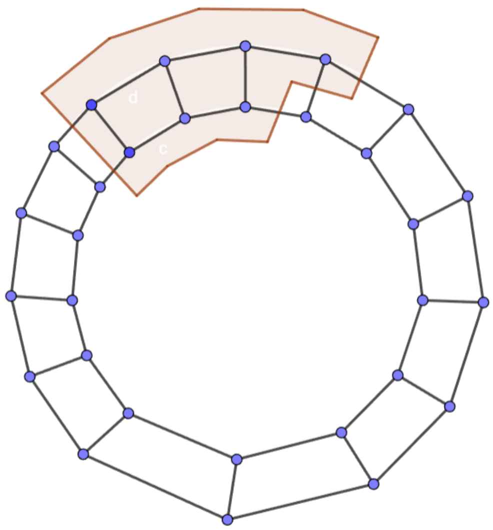




2) Solides de Goldbach et leur graphe

On rappelle que la conjecture de Goldbach stipule que tout nombre pair (supérieur à 2) est décomposable en somme de deux nombres premiers.

Qu'est-ce qui caractérise un nombre pair ? Le fait qu'il est le double d'un nombre. On choisit donc de représenter un nombre pair par un petit rail de train pour enfants, un rail qui se referme sur lui même, comme sur le dessin ci-dessous. On a choisi de représenter le rail du nombre pair 30, ainsi que la décomposition de 30 en 7+23.

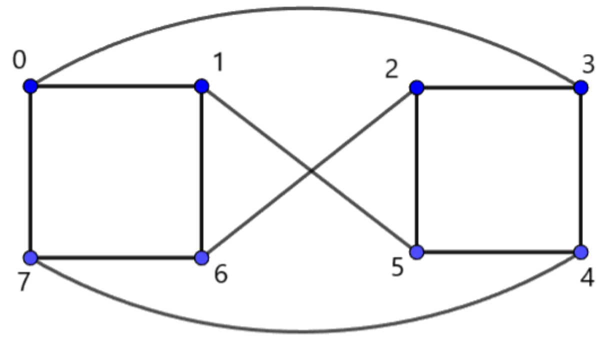


Enlever (resp. d'ajouter) un "barreau d'échelle" [2] à notre rail équivaut à enlever (resp.ajouter) au graphe 3 arêtes et 2 sommets. Le fait d'ôter (resp. ajouter) 2 barreaux retirera (resp. ajoutera) 6 arêtes et 4 sommets. En généralisant, enlever (resp. ajouter) k barreaux d'échelle retirera (resp. ajoutere) $3k$ sommets et $2k$ arêtes. Cela garantit-il pour autant qu'une décomposition de Goldbach n'est jamais perdue, au fur et à mesure de l'ajout de barreaux d'échelle...

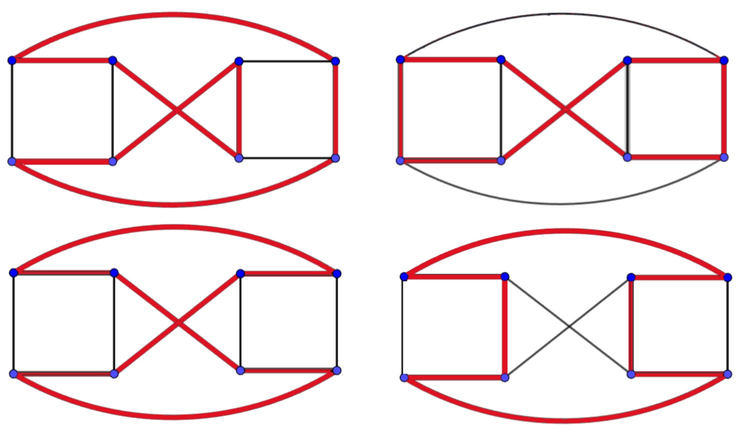
	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1	1	0
2	0	0	0	1	0	1	1	0
3	1	0	1	0	1	0	0	0
4	0	0	0	1	0	1	0	1
5	0	1	1	0	1	0	0	0
6	0	1	1	0	0	0	0	1
7	1	0	0	0	1	0	1	0

On trouve sur la toile la notion d'échelle de Möbius, dont on fournit la table d'adjacence (ci-dessus) et le graphe (ci-dessous), pour une échelle à 8 sommets. On peut imaginer une telle bande de Möbius à 8 sommets comme un cube, dont on aurait remplacé deux arêtes opposées d'une même face par les deux diagonales de la face en question (cela correspond au demi-tour qu'on fait effectuer à la bande de Möbius, avant de la raccorder à elle-même, en la faisant "perdre une face").

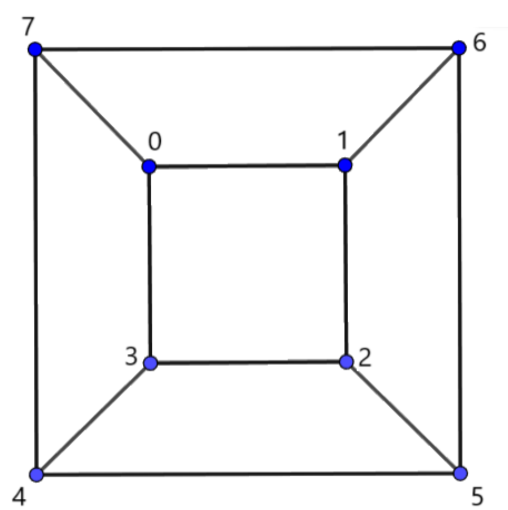
2. En langage de cheminot, cela s'appelle une traverse.



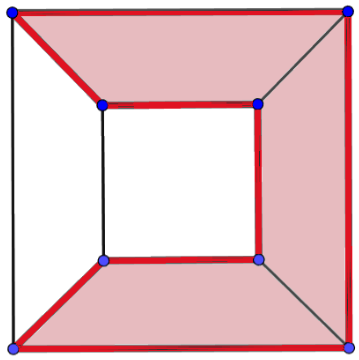
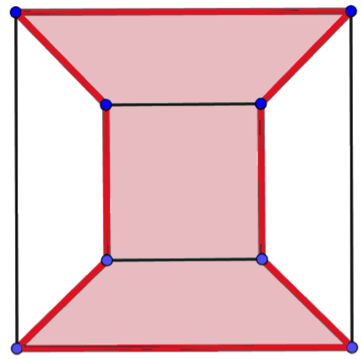
Le programme de calcul des cycles, après élimination des redondances, trouve 4 cycles différents. La décomposition de Goldbach $8 = 3 + 5$ est une façon de briser complètement la symétrie des différents dessins ; certains des circuits présentent une symétrie verticale, une symétrie horizontale, sont égaux à leur image par une rotation.



Bien qu'ayant lui aussi 8 sommets, le cube a un graphe cubique, dont on fixe la numérotation :

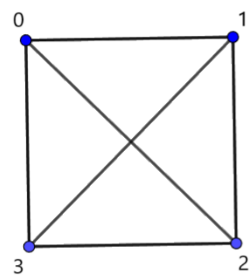


ses deux cycles (le premier qu'on considèrera comme équivalent à ses images par des rotations d'1, 2 ou 3 quart(s) de tour, et le second qu'on considèrera comme équivalent à son image par des rotations d'1 ou 2 quart(s) de tour) sont les suivants (on a coloré l'un des deux demi-cubes, privé d'une face, selon la méthode qu'avait utilisé Hermary pour le dodécaèdre du jeu de l'Icosion de Hamilton) :

Les graphes du cube, du tétraèdre, du dodécaèdre sont cubiques : chacun de leurs sommets est de degré 3.

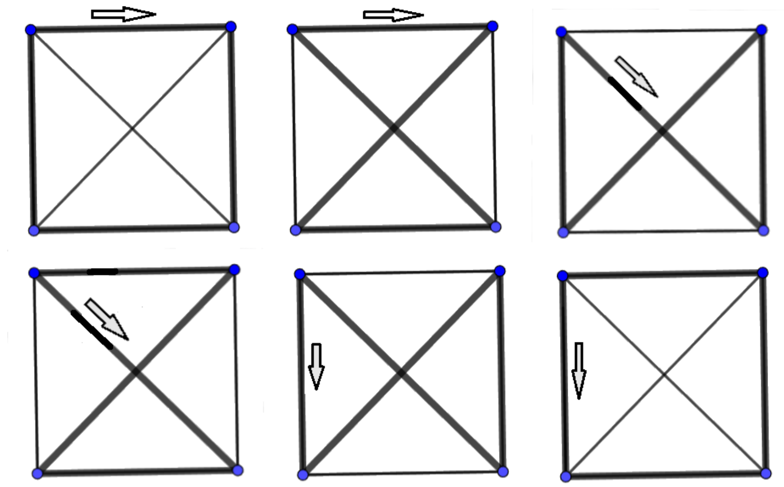
Le plus petit graphe cubique ci-dessous est :



Sa table d'adjacence est :

	0	1	2	3
0	0	1	1	1
1	1	0	1	1
2	1	1	0	1
3	1	1	1	0

Il a 6 cycles hamiltoniens différents, si le sens dans lequel on tourne (horaire ou antihoraire) n'est pas indifférent.



Les beaux polyèdres retrouvés dans un livre d'Edouard Lucas.