Plaid écossais tropical (Denise Vella-Chemla, 25.9.2019)

1. Le maillage Goldbach

En 2005 (cf. [5]), au tout début de ces recherches que l'on mène sur la conjecture de Goldbach, on avait choisi de représenter les décompositions de Goldbach sur un maillage tel que celui-ci :

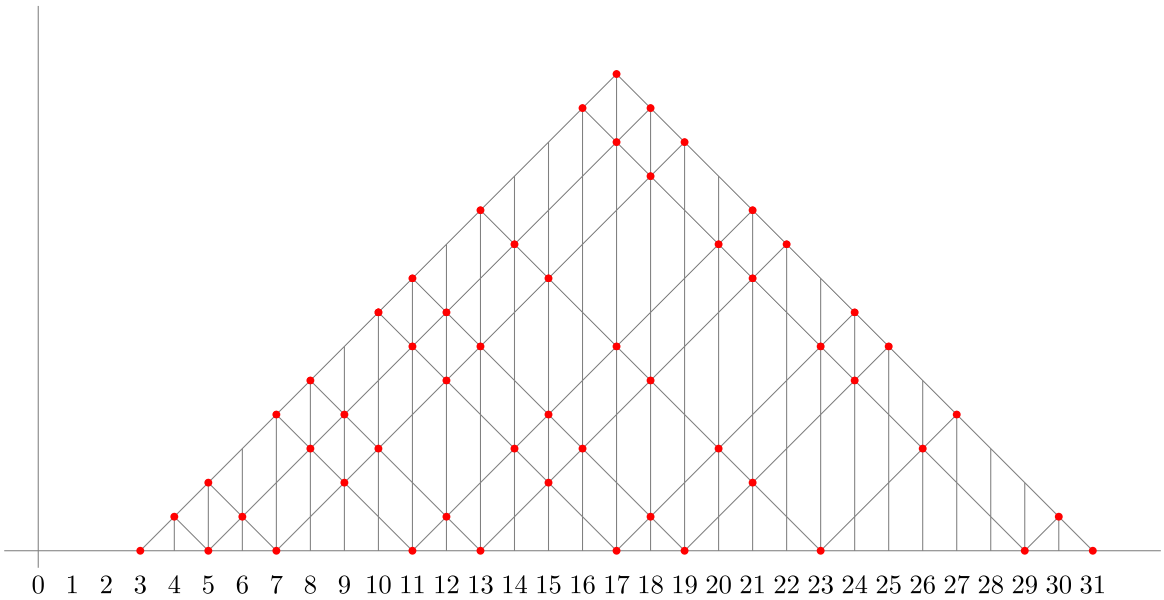

FIGURE 1 : Le treillis Goldbach

2. Les décompositions additives

Chaque point marqué d'un symbole • correspond à une décomposition additive dont les deux sommants sont des nombres premiers.

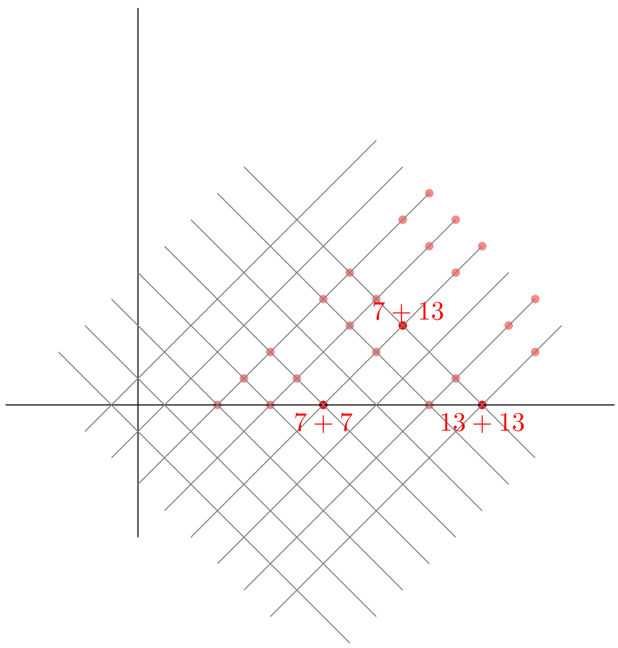

FIGURE 2 : Décompositions additives

Les décompositions additives qui sont sur l'axe des abscisses correspondent aux doubles de nombres premiers ; les nombres premiers vérifient trivialement la conjecture de Goldbach car pour eux, $2p = p + p$ est une décomposition de Goldbach, i.e. une décomposition d'un nombre pair, leur double, en somme de deux nombres premiers, identiques.

On souhaiterait voir ces décompositions triviales comme se trouvant à l'intersection de deux droites tropicales qui correspondraient à un dessin légèrement similaire à celui que l'on trouve à la page 21 de [2].

En algèbre tropicale ([1], [3]), les deux éléments ci-dessous sont deux droites, dans une algèbre max-plus, par exemple. Dans une telle algèbre, on dispose de deux opérations : l'addition (qui remplace la multiplication de l'algèbre telle qu'on la pratique habituellement) et le maximum entre deux nombres (qui remplace l'addition de l'algèbre usuelle). Comme le remplacement des signes + par $\otimes$ et $\times$ par $\odot$ ne facilite pas la lecture, on conserve le mot *max*.

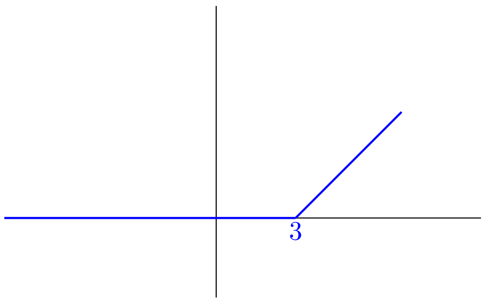

FIGURE 3 : Une droite tropicale d'équation $y = max(x - 3, 0)$

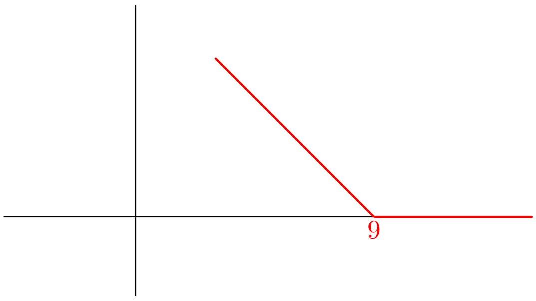

FIGURE 4 : Une autre droite tropicale d'équation $y = max(9 - x, 0)$

Les décompositions triviales de la forme $p + p$ se trouvent à l'intersection de la droite tropicale sur la partie non horizontale * de laquelle se trouvent toutes les décompositions de la forme $x + p$ et de la droite tropicale sur la partie non-horizontale de laquelle se trouvent les décompositions de la forme $p + y$ (cf. [6]).

On aimerait interpréter ces décompositions triviales comme des limites : de même que le *pgcd* et le *ppcm* de deux nombres sont égaux lorsque ces deux nombres sont égaux (cf [7]), on aimerait ici voir les nombres premiers comme présentant la propriété d'être égaux à la fois au plus petit nombre premier qui leur est supérieur et au plus grand nombre premier qui leur est inférieur, propriété que ne partagent pas les nombres composés.

On n'a cependant pas trouvé le moyen de distinguer les décompositions qui font intervenir deux nombres premiers de celles qui ont pour sommants un, voire deux, nombres composés. Il faudrait trouver un moyen de faire que les nombres premiers se projettent sur 0 tandis que les nombres composés se projetteraient sur 1.

Comme on n'a pas avancé d'un pouce, on se cache derrière une phrase de Max Karoubi, que son maître lui aurait dite : "Ce n'est pas comme ça qu'on écrit des maths !" (cf. video [4]).

*. qui ne coïncide pas avec l'axe des abscisses.

Bibliographie

[1] E. Brugallé, Un peu de géométrie tropicale, 2009.
https://arxiv.org/abs/0911.2203

[2] A. Connes, C. Consani, On Absolute Algebraic Geometry, the affine case, 2019.
https://arxiv.org/abs/1909.09796

[3] S. Gaubert, Max-plus algebra... a guided tour, SIAM Conference on Control and its applications, 2009.
http://www.cmap.polytechnique.fr/ gaubert/siamct09/slidesgaubertsiamct09.pdf

[4] M. Karoubi, sur le site de Leila Schneps, Grothendieck circle, 2008.
https://webusers.imj-prg.fr/ leila.schneps/grothendieckcircle/Karoubi2008.mp4

[5] D. Vella-Chemla, Vers une preuve de la conjecture de Goldbach, 2005.
http://denisevellachemla.eu/octobre2005.pdf

[6] D. Vella-Chemla, Etudier Ritz-Rydberg, 2012.
http://denisevellachemla.eu/j2042012.pdf

[7] D. Vella-Chemla, Pgcd, ppcm représentés sur diagrammes commutatifs, 2019.
http://denisevellachemla.eu/pgcd-ppcm-categ.pdf