Petit pont entre grilles de divisibilité et D_4 (Denise Vella-Chemla, 26.6.2016)

On voudrait présenter ici le lien qu'on peut faire entre certains critères de primalité (dont on a étudié précisément le comportement dans ce qu'on avait appelé des grilles de divisibilité) et le groupe diédral D_4.

On a longuement observé, dans le cadre d'une étude de la conjecture de Goldbach, ce qu'on appelait des grilles de divisibilité des nombres pairs vus comme sommes de deux nombres impairs[1].

Ces grilles semblaient intéressantes car les doubles de nombres premiers ainsi que les doubles de nombres pairs compris entre deux nombres premiers étaient caractérisés par des grilles semblables du point de vue de leur dernière colonne.

Puis on a trouvé des éléments intéressants en écrasant l'information, i.e. en ne considérant plus la divisibilité d'un nombre par tous les nombres premiers inférieurs à sa racine mais en ne le représentant que très succinctement par un booléen qu'on a fixé à 0 si le nombre est premier et à 1 s'il est composé.

On met en oeuvre dans la présente approche ces deux idées : on se focalise sur les première et dernière colonnes des grilles, et on ne garde que des booléens succincts d'information. Cela va nous permettre d'établir un petit pont entre la modélisation choisie et D_4, le groupe diédral à 8 éléments.

On s'intéresse d'une part aux nombres $n-3$ intervenant dans la première colonne des grilles, celle-ci contenant les décompositions de la forme $n = 3 + (n-3)$ car le caractère de primalité de $n-3$ est le seul caractère de primalité supplémentaire (le seul élément d'information ajouté, qu'on note $b_1(n)$), quand on passe de la grille de divisibilité de n à celle de $n+2$. Le décomposant 3 ne voit pas son caractère de primalité changé, on s'en désintéresse ici. On s'intéresse d'autre part pour un nombre pair n aux caractères de primalité (qu'on note $b_2(n)b_3(n)$) des nombres de la décomposition dite médiane de n (cette décomposition médiane (notée $dm(n)$ est égale à $\frac{n}{2} + \frac{n}{2}$ si n est un $4k+2$ ou à $\frac{n-2}{2} + \frac{n+2}{2}$ si n est un $4k$ (les nombres de la dernière colonne des grilles).

Notons dans un tableau les booléens $b_1(n)b_2(n)b_3(n)$ pour les nombres pairs de 6 à 100.

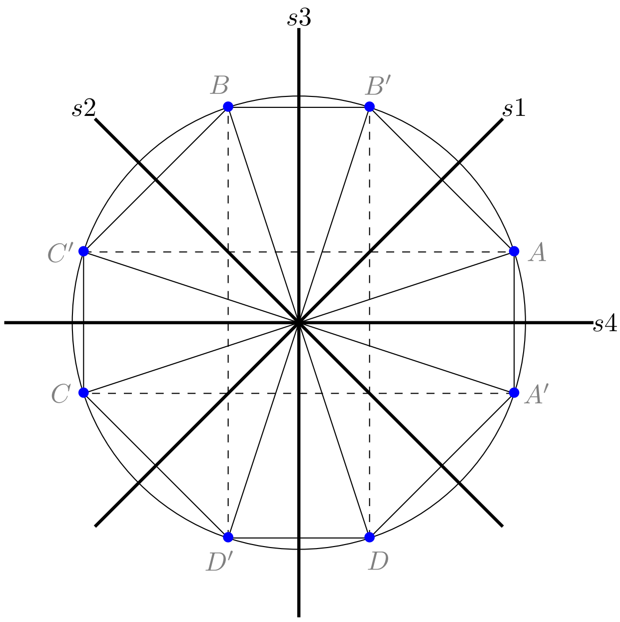
n	$n-3$	$dm(n)$	$b_1(n)b_2(n)b_3(n)$	n	$n-3$	$dm(n)$	$b_1(n)b_2(n)b_3(n)$
6	3	$3+3$	000	54	51	$27+27$	111
8	5	$3+5$	000	56	53	$27+29$	010
10	7	$5+5$	000	58	55	$29+29$	100
12	9	$5+7$	100	60	57	$29+31$	100
14	11	$7+7$	000	62	59	$31+31$	000
16	13	$7+9$	001	64	61	$31+33$	001
18	15	$9+9$	111	66	63	$33+33$	111
20	17	$9+11$	010	68	65	$33+35$	111
22	19	$11+11$	000	70	67	$35+35$	011
24	21	$11+13$	100	72	69	$35+37$	110
26	23	$13+13$	000	74	71	$37+37$	000
28	25	$13+15$	101	76	73	$37+39$	001
30	27	$15+15$	111	78	75	$39+39$	111
32	29	$15+17$	010	80	77	$39+41$	110
34	31	$17+17$	000	82	79	$41+41$	000
36	33	$17+19$	100	84	81	$41+43$	100
38	35	$19+19$	100	86	83	$43+43$	000
40	37	$19+21$	001	88	85	$43+45$	101
42	39	$21+21$	111	90	87	$45+45$	111
44	41	$21+23$	010	92	89	$45+47$	010
46	43	$23+23$	000	94	91	$47+47$	100
48	45	$23+25$	101	96	93	$47+49$	001
50	47	$25+25$	111	98	95	$49+49$	011
52	49	$25+27$	111	100	97	$49+51$	111

On constate bien-sûr des invariances dans ce tableau, dûes au fait que les nombres “avancent” progressivement dans les colonnes des grilles, mais il y a de toute façon une incertitude sur $b_1(n)$ qui empêche d'avancer.

[1] cf http://denise.vella.chemla.free.fr/grilles.pdf.

Les relations invariantes entre les valeurs des 3 booléens sont : $b_1(i) = b_2(2i), b_1(i) = b_3(2i-2), b_3(i) = b_2(i+1)$ et $(b_2(i) = b_2(i+1))$ ou exclusif $(b_3(i) = b_3(i+1))$. Bref, tout ça ne sert à rien : en ne se préoccupant que de la primalité de 3 nombres seulement, on ne bénéficie pas des effets du positionnemeent de l'espace et sa copie tête-bêche.

Le groupe D_4 est bien connu. On le représente graphiquement comme le groupe des transformations qui opèrent sur les points du graphique ci-dessous :



Si on note r_0, r_1, r_2, r_3 les rotations de 0 tour, 1/4 de tour, 1/2 tour, 3/4 de tour, et s_1, s_2 les symétries par rapport aux diagonales, s_3 la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et s_4 la symétrie par rapport à l'axe des abscisses, alors la table de Cayley du groupe D_4 est :

	r_0	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3	s_4
r_0	r_0	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3	s_4
r_1	r_1	r_2	r_3	r_0	s_4	s_3	s_1	s_2
r_2	r_2	r_3	r_0	r_1	s_2	s_1	s_4	s_3
r_3	r_3	r_0	r_1	r_2	s_3	s_4	s_2	s_1
s_1	s_1	s_3	s_2	s_4	r_0	r_2	r_1	r_3
s_2	s_2	s_4	s_1	s_3	r_2	r_0	r_3	r_1
s_3	s_3	s_2	s_4	s_1	r_3	r_1	r_0	r_2
s_4	s_4	s_1	s_3	s_2	r_1	r_3	r_2	r_0

On constate que par exemple $r_1 s_2 \neq s_2 r_1$.

La correspondance entre nos triplets de booléens et les points du plan complexe présentés ci-dessus peut par exemple associer aux nombres n tels que $b1(n) = 0$ l'un des points A, B, C ou D selon les valeurs de $b2(n)$ et $b3(n)$ et associer aux nombres n tels que $b1(n) = 1$ l'un des points A', B', C', D' à nouveau selon les valeurs de $b2(n)$ et $b3(n)$.