

Permutations dans le groupe symétrique : mots écrits avec les écarts entre premiers, Denise Vella-Chemla, mai 2026.

On ne parvient toujours pas à démontrer l'existence d'une décomposition en somme de deux nombres premiers pour tout nombre pair mais on fournit ici la nouvelle façon qu'on a de voir la recherche des décompositions, basée sur l'existence de centres dans des graphes triangulaires. On peut déplacer une fois encore le problème en étudiant des permutations particulières de mots.

On fournit simplement des exemples.

E contient 0, suivi des nombres premiers compris entre 3 et $n - 3$ inclus, et n .

Δ contient les écarts entre les nombres successifs de E (son cardinal est donc celui de E moins 1).

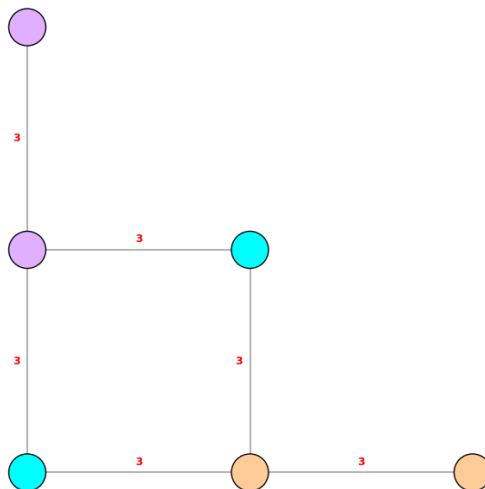
s_1 contient tous les éléments de Δ , chacun d'eux voyant son occurrence doublée.

s_k s'obtient à partir de s_{k-1} en permutant tous les nombres deux par deux à partir d'un certain rang. Les premiers et les derniers nombres sont réécrits à l'identique, on a mis des petites croix pour les seuls nombres à permuter.

$$\begin{aligned}
 n &= 6 \\
 E &= 0, 3, 6 \\
 \Delta &= 3, 3 \\
 s_1 &= \begin{array}{cccc} 3 & 3 & 3 & 3 \end{array} \\
 s_2 &= \begin{array}{cccc} 3 & 3 & 3 & 3 \\ & \times & & \end{array}
 \end{aligned}$$

coupures :

dès s_1 (6 est un double de nombre premier) 3/3/3, 3



$n = 8$

$E = 0, 3, 5, 8$

$\Delta = 3, 2, 3$

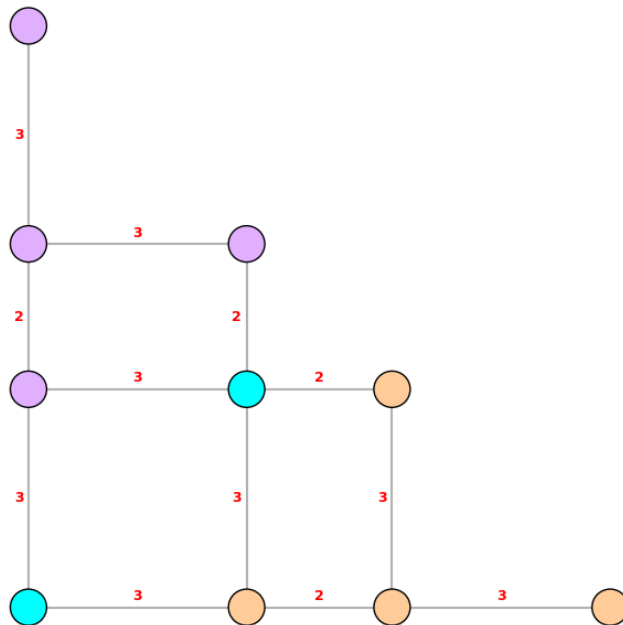
$s_1 = 3 \ 3 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3$

$s_2 = 3 \ 2 \ 3 \ 3 \ 2 \ 3$

$s_3 = 3 \ 2 \ 3 \ 3 \ 2 \ 3$

coupures :

dès s_2 (l'écart de 0 à 3 est identique à l'écart de 5 à 8) $s_2 : 3, 2/3/3, 2, 3$



$n = 10$

$E = 0, 3, 5, 7, 10$

$\Delta = 3, 2, 2, 3$

$s_1 = 3 \ 3 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3$

$s_2 = 3 \ 2 \ 3 \ 2 \ 2 \ 3 \ 2 \ 3$

$s_3 = 3 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 2 \ 2 \ 3$

$s_4 = 3 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 2 \ 2 \ 3$

coupures :

dès s_1 ou bien $s_3 : 3, 2, 2/3/3, 2, 2, 3$.

$$n = 12$$

$$E = 0, 3, 5, 7, 12$$

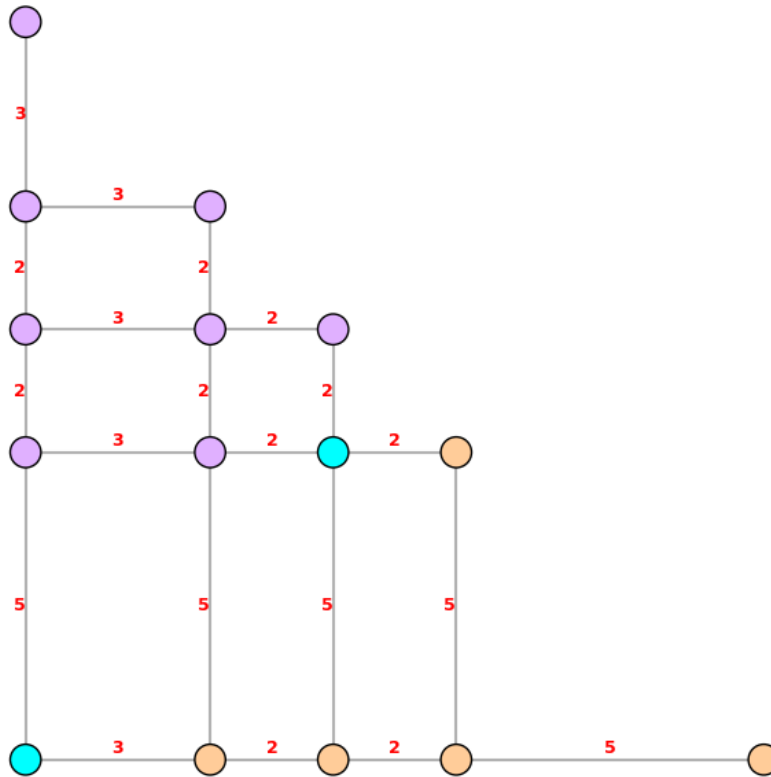
$$\Delta = 3, 2, 2, 5$$

$$s_1 = \begin{array}{cccccccc} 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 5 & 5 \\ & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \\ s_2 = & 3 & 2 & 3 & 2 & 2 & 5 & 2 & 5 \\ & & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & & & \\ s_3 = & 3 & 2 & 2 & 3 & 5 & 2 & 2 & 5 \\ & & & & \diagdown & \diagup & & & \\ s_4 = & 3 & 2 & 2 & 5 & 3 & 2 & 2 & 5 \end{array}$$

coupures :

dès s_1 : $3/3/2/2/2/5, 2, 5$. correspondant à $3 + 2 + 2 = 7, 3 + 2 = 5$ en alternant arêtes verticales et horizontales par les traits de fraction.

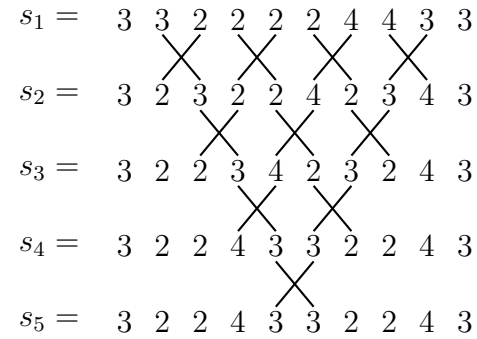
ou bien s_2 : $3, 2/3/2/2/5, 2, 5$ la descente en escalier se fait un escalier plus loin.



$n = 14$

$E = 0, 3, 5, 7, 11, 14$

$\Delta = 3, 2, 2, 4, 3$



coupures :

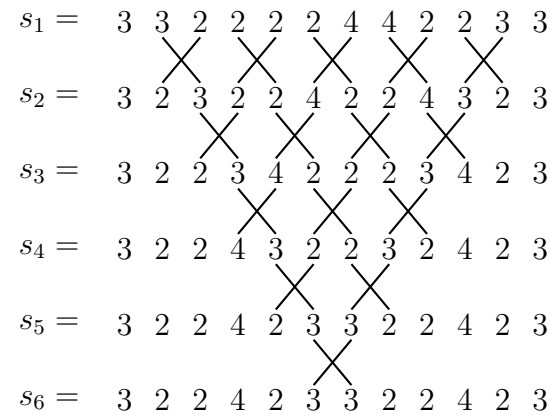
$s_1 : 3/3/2/2/2/2/4, 4, 3, 3,$

$s_5 = 3, 2, 2, 4/3/3, 2, 2, 4, 3$

$n = 16$

$E = 0, 3, 5, 7, 11, 13, 16$

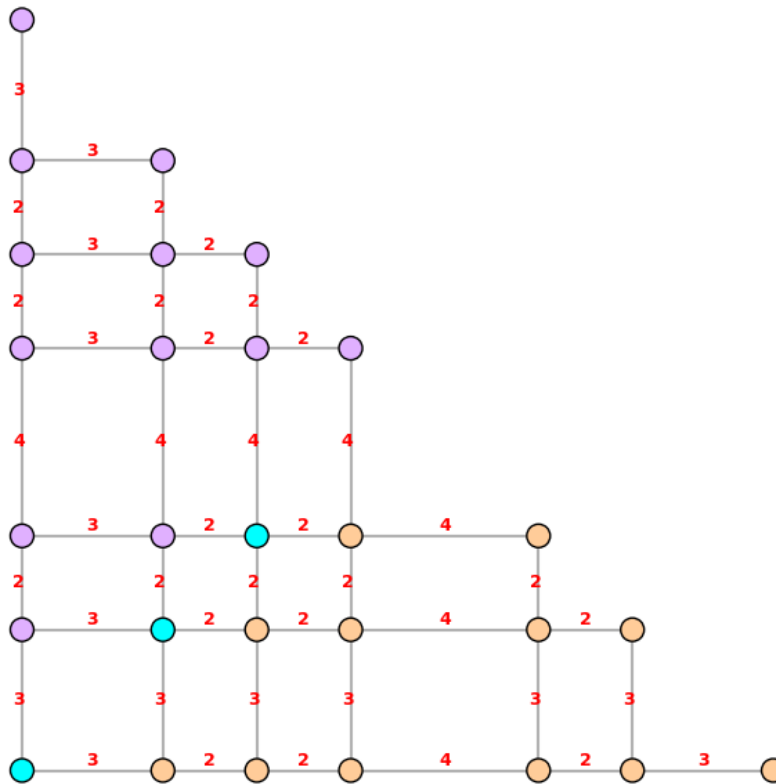
$\Delta = 3, 2, 2, 4, 2, 3$



coupures :

$s_3 = 3, 2, 2/3/4/2/2, 3, 2, 4, 2, 3,$

$s_5 = 3, 2, 2, 4, 2/3/3, 2, 2, 4, 2, 3,$



La dernière ligne peut systématiquement être coupée au milieu avec une somme de nombres égale à n à gauche de la coupure, et identiquement à droite (les deux suites de nombres sont identiques à droite et à gauche).

La première ligne peut être coupée pour les seuls nombres pairs doubles de nombres premiers, c'est l'escalier le plus à droite sur la diagonale de nos triangles dans l'approche par les centres d'un graphe (voir graphes bicolores.). Par exemple pour $n = 14$, on a $s_1 = 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 = 14$ et $4 + 4 + 3 + 3 = 14$.

La connaissance qu'on a de l'ensemble des écarts Δ est que le premier écart est le nombre premier 3, les écarts suivants sont tous pairs (on pense ne pas pouvoir avoir davantage de connaissance sur ces nombres pairs, comme leur nombre d'occurrences, ou autre), le dernier écart est un nombre impair (idem : on pense ne pas pouvoir avoir davantage de connaissance sur lui si ce n'est le fait que c'est un nombre impair). Enfin, il y a exactement $\pi(n - 3)$ séquences de nombres à envisager pour chaque n (avec $\pi(x)$ dénotant le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x).

On ne sait pas pourquoi il existe toujours une suite qui peut être coupée en 3 portions successives, la première suite de nombres ayant pour somme p , la seconde suite de nombres ayant pour somme q et la troisième suite de nombres ayant pour somme n . Le problème reste entier !

Cas fétiche : $n = 98$

On fournit (pour le fun!) le cas $n = 98$. On a une chance inouïe : aucun écart n'a 2 chiffres, ce qui permet de tous les coller pour gagner de la place.

$$E = [0, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 98].$$

$$\Delta = [3, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4, 6, 6, 2, 6, 4, 2, 6, 4, 6, 9].$$

Les suites pour $n = 98$:

En ne montrant que les flip :

```

332222442244224466226644224466662266442266446699
23224224422442264266246244264662662462462466496
23422244224462246642264462642666422664426694
4322422442264226446224664622466462266446296
23422244622462442264266642264462662466492
43224264226442244662662462442666426694
234262246244224466622664422466466296
4362226442244264662266442264466692
63226244224462642662462462446696
236242244264622466422664426496
6342224462642264462266446294
43224264622462442662466492
234262642264422466426694
4362622462442264466296
63622264422462446692
632262442264426496
2362422462446294
63422264426492
432262446294
2362426492
63426294
436292
6392
93

```

On complète les lignes à gauche et à droite par les éléments manquants de leur ligne immédiatement supérieure. Sont notées, comme contenant des slashes, 3 lignes correspondant aux décompositions additives $61+37$, $67+31$, $79+19$. Les slashes indiquent un changement de direction. Pour calculer les sommes, on ne doit ajouter que des nombres verticaux ou que des nombres horizontaux, il faut par conséquent ajouter un nombre sur 2 au niveau des slashes. Quand il n'y a pas de slash, on est sur une suite de nombres consécutifs dans une même direction (soit tous verticaux, soit tous horizontaux).

332222442244224466226644224466662266442266446699
 323224224422442642662462442646626624624624664969
 322342224422446224664226446264266642266442669469
 322432242244264226446224664622466462266446296469
 322423422244622462442642666422644626624664926469
 322424322426422644224466266246244266642669426469
 3224242/3/4/2/6/2/2/4/6/2/4/4/2/2/4/4/6/6/6/2/2/6/64422466466296426469
 322424243622264422442646622664422644666926426469
 322424246/3/2/2/6/2/4/4/2/2/4/4/6/2/6/4/2/6/6/2/46246244669626426469
 322424246236242244264622466422664426496626426469
 322424246263422244626422644622664462946626426469
 322424246264322426462246244266246649246626426469
 322424246264234262642264422466426694246626426469
 322424246264243626224624422644662964246626426469
 322424246264246/3/6/2/2/2/6/4/4/2/2/4/6/2/44669264246626426469
 3224242462642466322624422644264426496264246626426469
 322424246264246623624224624462946264246626426469
 322424246264246626342226442649246264246626426469
 322424246264246626432262446294246264246626426469
 322424246264246626423624264924246264246626426469
 322424246264246626426342629424246264246626426469
 322424246264246626426436292424246264246626426469
 322424246264246626426463922424246264246626426469
 322424246264246626426469322424246264246626426469

Par exemple, pour la première ligne de slash, on vérifiera que

$$3 + 2 + 2 + 4 + 2 + 4 + 2 + 4 + 6 + 2 + 6 + 4 + 2 + 4 + 6 + 6 + 2 = 61,$$

que

$$3 + 2 + 2 + 4 + 2 + 4 + 2 + 4 + 6 + 2 + 6 = 37$$

et que

$$6 + 4 + 4 + 2 + 2 + 4 + 6 + 6 + 4 + 6 + 6 + 2 + 9 + 6 + 4 + 2 + 6 + 4 + 6 + 9 = 98.$$

On fait calculer par programme les “valeurs” des permutations : la somme des différences entre nombres permutés (entre celui d’indice supérieur dans la liste et celui d’indice inférieur).

Les voici pour $n = 98$:

$p = 3$	$s = -6$		
$p = 5$	$s = -10$		
$p = 7$	$s = -12$		
$p = 11$	$s = -14$		
$p = 13$	$s = -14$		
$p = 17$	$s = -14$		
$p = 19$	$s = -18$		•
$p = 23$	$s = -16$		
$p = 29$	$s = -16$		
$p = 31$	$s = -20$		•
$p = 37$	$s = -18$		•
$p = 41$	$s = -16$	•	
$p = 43$	$s = -18$		
$p = 47$	$s = -20$		
$p = 53$	$s = -16$		
$p = 59$	$s = -16$		
$p = 61$	$s = -18$		•
$p = 67$	$s = -14$		•
$p = 71$	$s = -14$		
$p = 73$	$s = -14$		
$p = 79$	$s = -12$		•
$p = 83$	$s = -10$		
$p = 89$	$s = -6$		

On constate une palindromie des valeurs de s autour du 16, valeur de s pour $p = 41$ (qu'on a noté d'une étoile dans le tableau pour la rendre plus aisément lisible). 37 et 61 qui sont 2 décomposants de Goldbach de 98 de la forme $4k + 1$ (cette forme qui intervient dans la loi de réciprocité quadratique), ont un s de même valeur. Ce n'est pas le cas pour les décomposants 31 et 67, ou pour les décomposants 19 et 79.

Cas $n = 40$.

$$E = [0, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 40]$$

$$\Delta = [3, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 3]$$

$$s_1 = [3, 3, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 2, 2, 4, 4, 2, 2, 4, 4, 6, 6, 2, 2, 6, 6, 3, 3]$$

$$s_2 = [3, 2, 3, 2, 2, 4, 2, 2, 4, 4, 2, 2, 4, 4, 2, 6, 4, 2, 6, 6, 2, 3, 6, 3]$$

$$s_3 = [3, 2, 2, 3, 4, 2, 2, 2, 4, 4, 2, 2, 4, 4, 6, 2, 2, 4, 6, 6, 3, 2, 6, 3]$$

$$s_4 = [3, 2, 2, 4, 3, 2, 2, 4, 2, 2, 4, 4, 2, 6, 4, 2, 2, 6, 4, 3, 6, 2, 6, 3]$$

$$s_5 = [3, 2, 2, 4, 2, 3, 4, 2, 2, 2, 4, 4, 6, 2, 2, 4, 6, 2, 3, 4, 6, 2, 6, 3]$$

$$s_6 = [3, 2, 2, 4, 2, 4, 3, 2, 2, 4, 2, 6, 4, 2, 2, 6, 4, 3, 2, 4, 6, 2, 6, 3]$$

$$s_7 = [3, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 3, 4, 2, 6, 2, 2, 4, 6, 2, 3, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 3]$$

$$s_8 = [3, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 3, 6, 2, 2, 2, 6, 4, 3, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 3]$$

$$s_9 = [3, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 3, 2, 2, 6, 2, 3, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 3]$$

$$s_{10} = [3, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 3, 6, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 3]$$

$$s_{11} = [3, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 3, 3, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 3]$$

$$s_{12} = [3, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 3, 3, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 3]$$

Calcul des “valeurs” des permutations :

$p = 3$	$s = 0$		•
$p = 5$	$s = -4$		
$p = 7$	$s = -4$		
$p = 11$	$s = -6$		•
$p = 13$	$s = -8$		
$p = 17$	$s = -6$	•	•
$p = 19$	$s = -8$		
$p = 23$	$s = -6$		•
$p = 29$	$s = -4$		•
$p = 31$	$s = -4$		
$p = 37$	$s = 0$		•

On constate le même phénomène d’égalité de la valeur de la permutation pour 17 et 23 qui sont des $4k + 1$ mais pas pour 11 et 29 qui sont des $4k + 3$ par exemple. On ne sait expliquer ni le phénomène de palindromie, ni celui d’égalité des valeurs des permutations pour les décomposants de la forme $4k + 1$, ni encore moins l’existence obligatoire de ce phénomène, dans le cas où on réussirait à l’expliquer. On voudrait maintenant coder cela par des matrices. Le programme initial était le suivant :

```

import math, numpy as np

def prime_sieve(N):
    is_prime = np.full(N, True)
    is_prime[:2] = False
    for p in range(2, math.isqrt(N) + 1):
        if is_prime[p]:
            is_prime[p*p::p] = False
    return np.nonzero(is_prime)[0]

N = 98
P = prime_sieve(N-3)
print(P)
L = np.hstack(([0], P[1:], [N]))
print(L)
D = np.diff(L)
print(D)
E = np.repeat(D, 2)
F = E.copy()
print('F= ',E)
n = len(E)
for i in range(1, n//2):
    s = 0
    for j in range(i, len(E) - i, 2):
        F[j:j+2] = F[j:j+2][::-1]
        s += F[j+1]-F[j]
    print('s= ',s, 'p= ',np.sum(F[0:i]), 'F= ',F)

```

On demande à gemini les matrices de permutation au fur et à mesure de l’application de l’algorithme, uniquement dans le cas $n = 40$. Voici le programme fourni, dont on vérifie qu’il fournit bien les suites de nombres que l’on souhaite et on demande également une visualisation des opérateurs de permutation utilisés au fur et à mesure de l’algorithme. On fournit les visualisations sous le programme. Il faut maintenant comprendre pourquoi il existe toujours un opérateur qui fournit par son application une suite de nombres telle que celle de la ligne 29 par exemple : somme des nombres du début de la suite égale à 29, normal, on a tout fait pour, suivi d’une suite de nombres de somme n , ça, ça n’est pas difficile à prouver car les nombres suivent des lignes, depuis la première qui contraint ça, mais par contre “suivi d’une suite de nombres dont la somme est un nombre premier”, ça, on ne voit vraiment

pas ce qui le provoque. Il faudrait idéalement également comprendre les phénomènes de palindromie et d'égalité des "valeurs des permutations", égales ou pas selon le caractère $4k + 1$ ou pas. Pour la ligne 29, ça donne :

$$3 + 2 + 2 + 4 + 2 + 4 + 2 + 4 + 6 = 29$$

suivis de

$$3 + 2 + 2 + 6 + 2 + 3 + 4 + 2 + 4 + 2 + 4 + 6 = 40$$

suivis de

$$2 + 6 + 3 = 11 \text{ (c'estfoul!)}$$

```

s1 = np.array([3, 3, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 2, 2, 4, 4,
              2, 2, 4, 4, 6, 6, 2, 2, 6, 6, 3, 3])
N = len(s1)
G = np.eye(N)
len_E = 24
for i in range(1, 12):
    M_i = np.eye(N, dtype='int')
    for j in range(i, len_E - i, 2):
        if j + 1 < N:
            M_i[[j, j+1]] = M_i[[j+1, j]]
    G = np.dot(M_i, G)
    print('G_{}={}'.format(i), G)
    print(np.dot(G, s1).astype(int))
    plt.figure(figsize=(8, 8))
    plt.imshow(G, cmap='binary', origin='upper')
    nomfic = 'operat'+str(i)
    plt.savefig(nomfic)
    plt.close()

```

