Où l'on trouve un passage entre l'espace des matrices, qui comptent les décompositions de Goldbach, et l'espace des pavages de Penrose

I. Introduction

On souhaite, dans cette note, établir un passage (un isomorphisme) entre l'espace des matrices booléennes triangulaires inférieures, qu'on a utilisées pour dénombrer les décompositions de Goldbach [1], et qui seront précisément redéfinies ici, et l'espace des pavages de Penrose.

II.1. Définition de l'espace des matrices

II.1.1. *Des matrices booléennes triangulaires inférieures qui comptent les décompositions de Goldbach des nombres pairs (≥ 6)*

Voyons les caractéristiques de la matrice M_n qui compte les décompositions de Goldbach de n [2] :

1) Cette matrice est une matrice booléenne, triangulaire inférieure ;

2) elle est de taille $(n-1) \times (n-1)$;

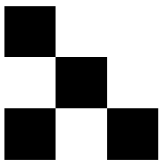
3) Ses éléments diagonaux sont tous égaux à 1.

4) Concernant ses sous-diagonales, seule une sous-diagonale sur deux contient des booléens potentiellement égaux à 1, tandis qu'une sous-diagonale sur deux ne contient que des booléens égaux à 0, ainsi : la première sous-diagonale est vide, la seconde contient un élément sur deux égal à 1, en partant d'un premier booléen, toujours en bas sur les visualisations des matrices ci-après, qui vaut 1 ; la troisième sous-diagonale est vide, la quatrième sous-diagnale contient un élément sur trois égal à 1 (en partant du bas), etc., la $(2k+1)^{\text{ème}}$ sous-diagonale est vide, la suivante, la $2k^{\text{ième}}$ contient un élément tous les $2k$ égal à 1 (avec le premier élément en partant du bas égal à 1 lui aussi), etc.

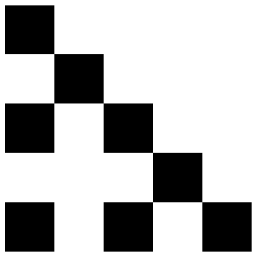
Pour illustrer les idées, fournissons ci-dessous les matrices M_4, M_6, M_8, M_{26} et M_{28}.

[1] dans trois précédentes notes note 1 : Conjecture de Goldbach, matrices booléennes, symétries, note 2 : Une matrice qui grandit et fournit des décompositions de Goldbach et note 3 : Matrices de booléens de divisibilité, invariance, symétrie.

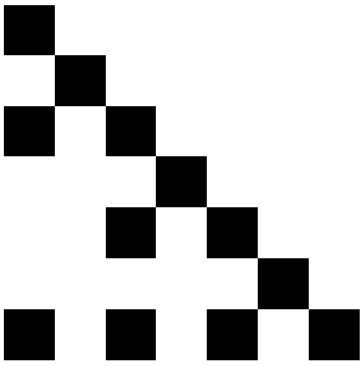
[2] On rappelle qu'un nombre pair $n \geq 6$ admet comme décomposition de Goldbach toute somme de deux nombres premiers impairs. Par exemple, 98 a trois décompositions de Goldbach qui sont $19+79$, $31+67$ et $37+61$.



M_4



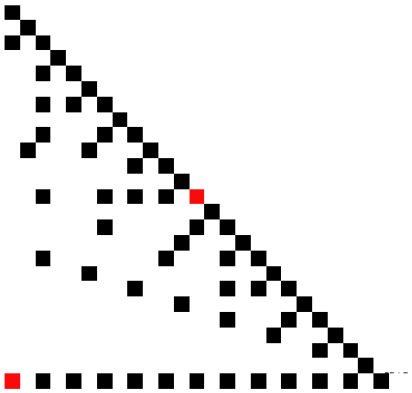
M_6



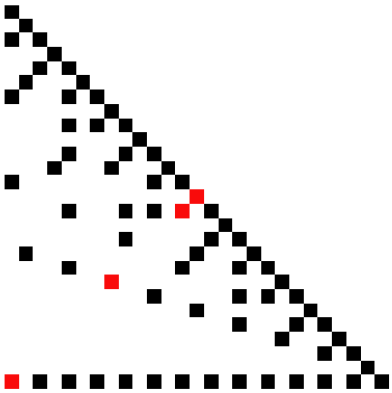
M_8

Un nombre pair double d'un nombre premier vérifie trivialement la conjecture de Goldbach.

Ce qui différencie un tel double d'un nombre premier $2p$, d'un double de nombre composé $2c$, c'est le fait que sa diagonale ascendante [3] "centrale" contienne exactement deux booléens à 1.



M_{26}



M_{28}

À l'inverse, $2c$, un nombre pair double d'un nombre composé, aura plus de deux booléens égaux à 1 sur sa diagonale ascendante centrale. On a coloré les éléments diagonaux en question en rouge, dans les matrices M_{26} et M_{28} ci-dessus, pour que cette distinction triviale soit claire.

Invariant : Du fait de la forme qui a été choisie pour les matrices, tout booléen égal à 1 est positionné sur une case dont la somme des indices de ligne et colonne est paire.

[3] Par diagonale ascendante, on entendra dans toute la suite, la diagonale qui va du sud-ouest au nord-est de la matrice.

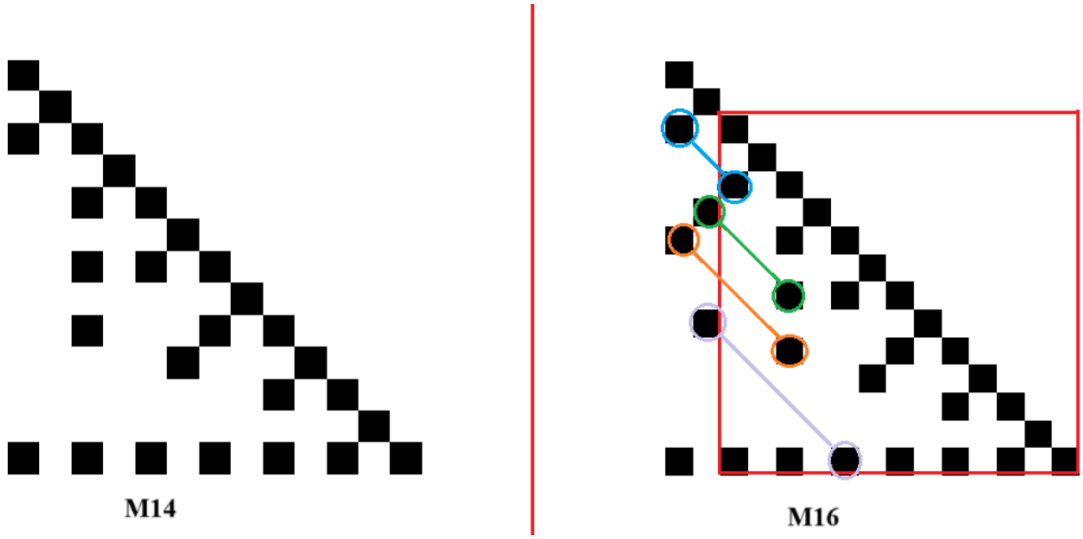
II.I.2. Deux opérations de transformation des matrices : l'expansion et la symétrisation

Étudions maintenant les deux seules opérations définies dans cette algèbre de matrices, et qu'on nommera l'*expansion* et la *symétrisation*.

a) Détaillons d'abord l'"expansion matricielle" [4]
Le passage de la matrice M_n à la matrice M_{n+2} s'effectue en ajoutant deux nouvelles colonnes et deux nouvelles lignes à M_n et en affectant à 1 les bits sur les diagonales descendantes [5] qui sont à certaines distances des bits existant déjà, pour respecter la contrainte suivante :

> *contrainte :* dans toute diagonale *descendante*, la suite de bits à partir du bas est une suite de la forme $(0^{k-1}1)^{k'}$. Cette écriture est à lire comme on le fait en théorie des langages (informatiques notamment). On considère ce qui s'appelle en termes de structures de données une chaîne de caractères (string en anglais). L'opération de concaténation, représentée ici par un signe multiplicatif, est l'opération principale utilisée dans un "monoïde libre", ici le langage basé sur l'alphabet à deux lettres, "0", et "1".

Le dessin ci-après illustre de manière locale les règles à respecter sur chaque diagonale descendante. Ces règles s'énoncent très simplement : un booléen, tous les k booléens successifs, est égal à 1 dans la $2k^{\text{ième}}$ sous-diagonale descendante. Cette contrainte a pour conséquence que sur chaque diagonale descendante, *tout 1 est toujours suivi d'un 0*, et une telle contrainte sera également respectée par les chaînes de bits associées aux processus d'expansion dans le cas des pavages de Penrose, qui seront étudiés dans un paragraphe ultérieur.

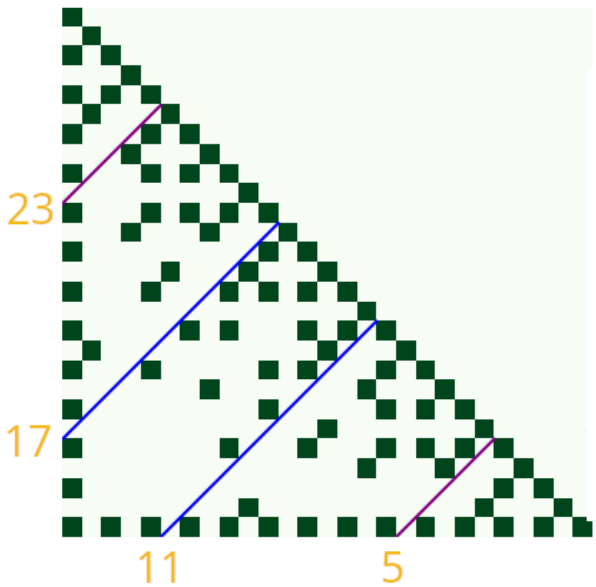


b) Voyons maintenant l'opération de symétrisation : pour voir les décompositions de Goldbach d'un nombre pair n, on symétrise sa matrice M_n, obtenant ainsi une nouvelle matrice, qu'on dénotera M'_n dans la suite. Cette opération de symétrisation, qui s'effectue par une opération `max`, sur les booléens, et qui correspond à un calcul du $\vee$ logique, mélange (au sens de amalgame) en quelque sorte les caractères de divisibilité de x et de $n - x$, son complémentaire à n, et les affecte d'office

[4] Ce mot d'expansion sera à rapprocher du mot *inflation* utilisé pour les pavages de Penrose.
[5] Une diagonale descendante est orientée du nord-ouest, au sud-est.

aux deux nombres complémentaires.

Il suffit alors de compter dans la matrice symétrique M'_n le nombre de booléens égaux à 1 qui est associé à chaque décomposant de n, de les compter par diagonale ascendante donc, et, de façon directe, les décomposants de Goldbach seront les nombres correspondant aux diagonales vides. On montre ceci sur l'exemple du nombre pair $n = 28$.



Il est important de remarquer que sur la diagonale correspondant à un décomposant de Goldbach de n, tous les booléens égaux à 0 (non colorés donc, puisqu'un nombre premier n'est pas divisible par des nombres qui lui sont strictement inférieurs sauf 1) ont la somme de leurs indices de ligne et colonne qui est impaire.

La symétrisation est une opération qui ajoute des bits égaux à 1 dans la matrice résultante M_{n+2} mais elle n'affecte pas la parité, qui est donc invariante, de la somme des indices pour les éléments matriciels égaux à 1.

Remarque 1 : les décomposants de Goldbach trouvés par cette méthode matricielle sont ceux qui sont supérieurs à $\sqrt{n}$.

Remarque 2 : l'expansion et la symétrisation sont des opérations qui ne commutent pas.

Si M_n ne contient aucun élément égal à 1 et dont la somme des indices est impaire, les deux opérations ci-dessus (l'expansion d'une matrice lors du passage de n à $n+2$ d'une part, la symétrisation d'autre part) ne permettent pas d'obtenir dans la matrice M_{n+2} d'éléments qui seraient égaux à 1 et dont la somme des indices serait impaire, du fait de l'invariance de parité.

La condition qui vient d'être énoncée, i.e. l'invariance de la parité de la somme des indices des éléments matriciels égaux à 1, garantit que si on a une diagonale (ascendante) au moins, "quelque

part" dans la matrice M_n, dont tous les éléments (tous de parités des sommes des indices identiques) sont égaux à 0 sauf les deux extrémités de la diagonale, alors on aura une diagonale de même caractéristique, on ne sait où, dans la matrice M_{n+2}.

On qualifie de non constructive cette méthode qui assure qu'on a un décomposant de Goldbach de $n+2$, trouvable dans M_{n+2}, par les deux simples faits qu'il y a un décomposant de Goldbach de n, trouvable dans M_n d'une part, et d'autre part, qu'on n'a pas ajouté de booléens égaux à 1 dans les diagonales ascendantes critiques, i.e. les diagonales ascendantes dans lesquelles il est impératif de ne pas positionner de bits égaux à 1, au risque de perdre tous les décomposants de Goldbach potentiels (on rappelle que certains mathématiciens refusent d'utiliser des démonstrations non constructives).

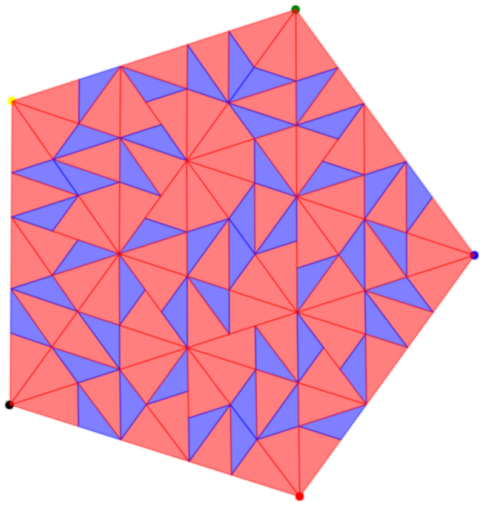
III. Description du type de pavage de Penrose [6]

III.1. Définition

Un pavage de Penrose :

- est un pavage (un ensemble de tuiles) :
    - qui couvre complètement le plan et
    - qui le fait sans chevauchement entre deux ou plusieurs tuiles..
- a pour caractéristique d'être apériodique.

Lorsqu'il a découvert les pavages qui portent son nom, Penrose a découvert des pavages apériodiques dont le nombre de tuiles était alors minimal (deux tuiles triangulaires que nous utiliserons ici ; il y a aussi le pavage à deux tuiles dites cerfs-volants et fléchettes ; ou bien le pavage à deux losanges, l'un à angles aigus, l'autre à angles plus grands) . En 2024, une tuile unique (on parle de mono-tuile) permettant de couvrir le plan de manière apériodique a été découverte : une portion de ce pavage, montrant cette tuile, est fournie en annexe 3.

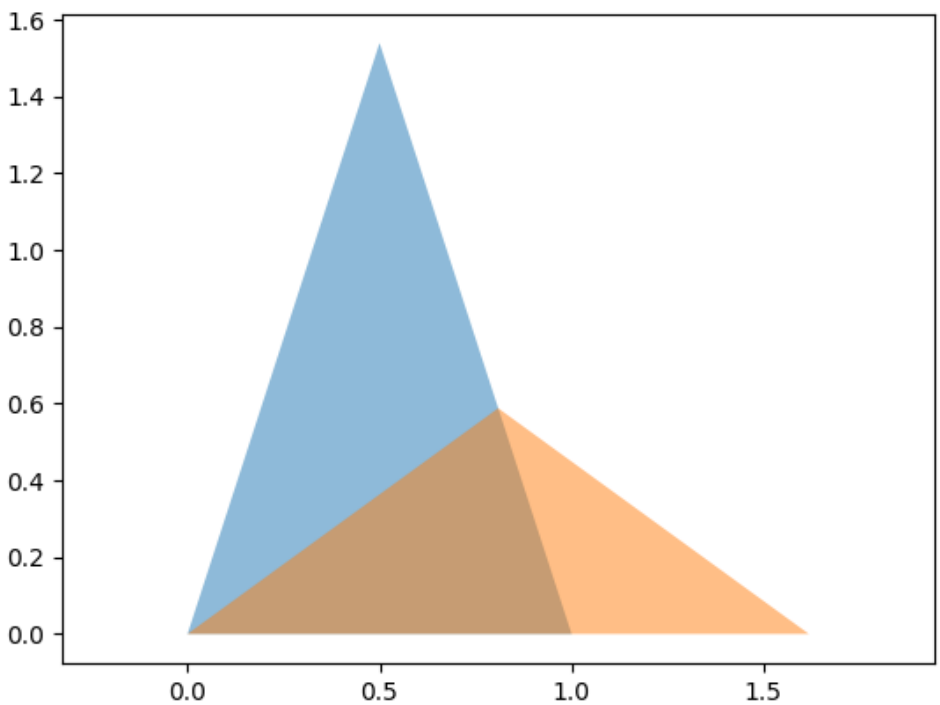


[6] où l'on appréciera que $3 \times 108 < 360$

Dans un pavage de Penrose, toute configuration de couleur peut être rencontrée quelque part, même si on ne sait pas localiser à quel endroit du pavage on la trouve (voir à ce propos en annexe 2 la combinatoire possible des angles en chaque point).

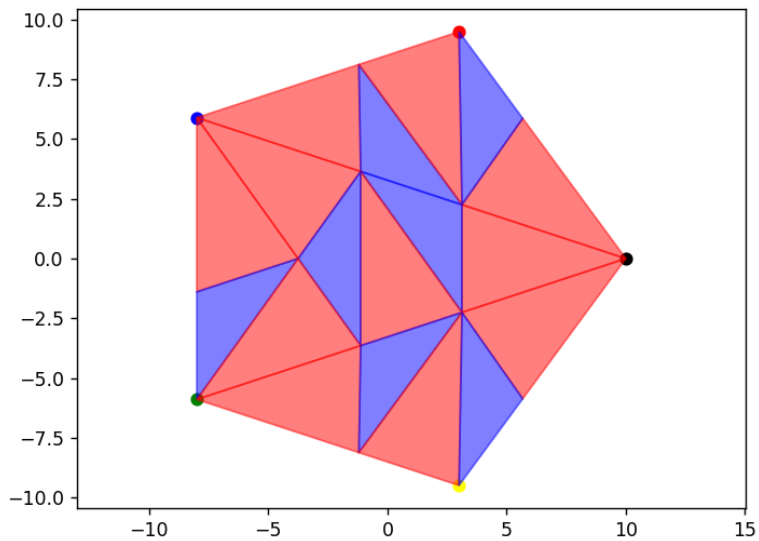
III.2. Le pavage pentagonal

Il est à base de chapeaux chinois et de chapeaux de clowns (on appelle aussi poétiquement ces pièces triangle d'or et triangle d'argent, ou bien triangle d'or et gnomon d'or). Les angles de ces triangles sont toujours (36,72,72) pour le premier et (36,36,108) pour le second. Les côtés de ces triangles sont de longueurs $(a, a, 1)$ pour le premier, avec a multiple de $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ pour le chapeau de clown, et $(1, 1, a)$ pour le chapeau chinois. φ est appelé le nombre d'or.

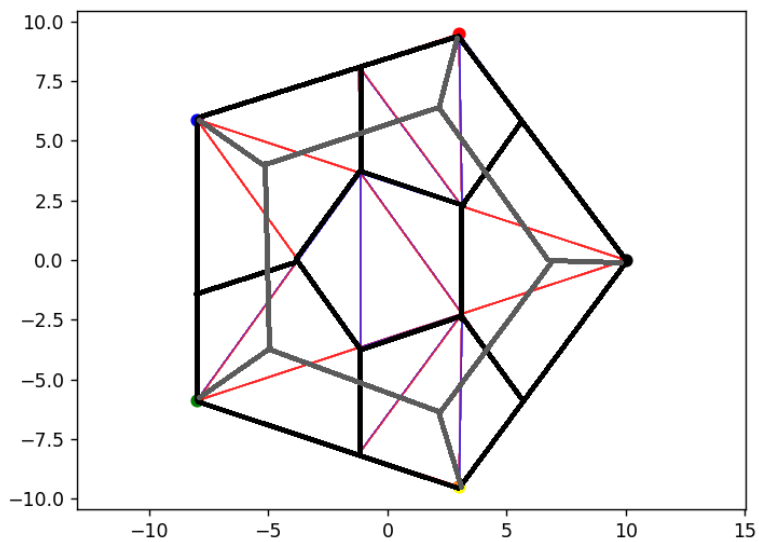


Les tuiles choisies ayant ce ratio de proportionnalité entre les longueurs de leurs côtés, lorsque deux pièces se jouxtent par un côté commun dans le pavage, le côté commun est de la même longueur

pour les deux pièces, i.e. les côtés coïncident toujours exactement.



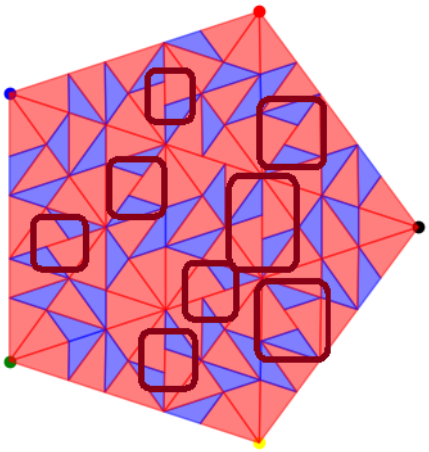
Remarque : on peut faire un lien avec le jeu de l'icosion de Hamilton : on peut suivre les arêtes dans chaque pentagone du pavage de Penrose selon un circuit (cycle) hamiltonien [7]



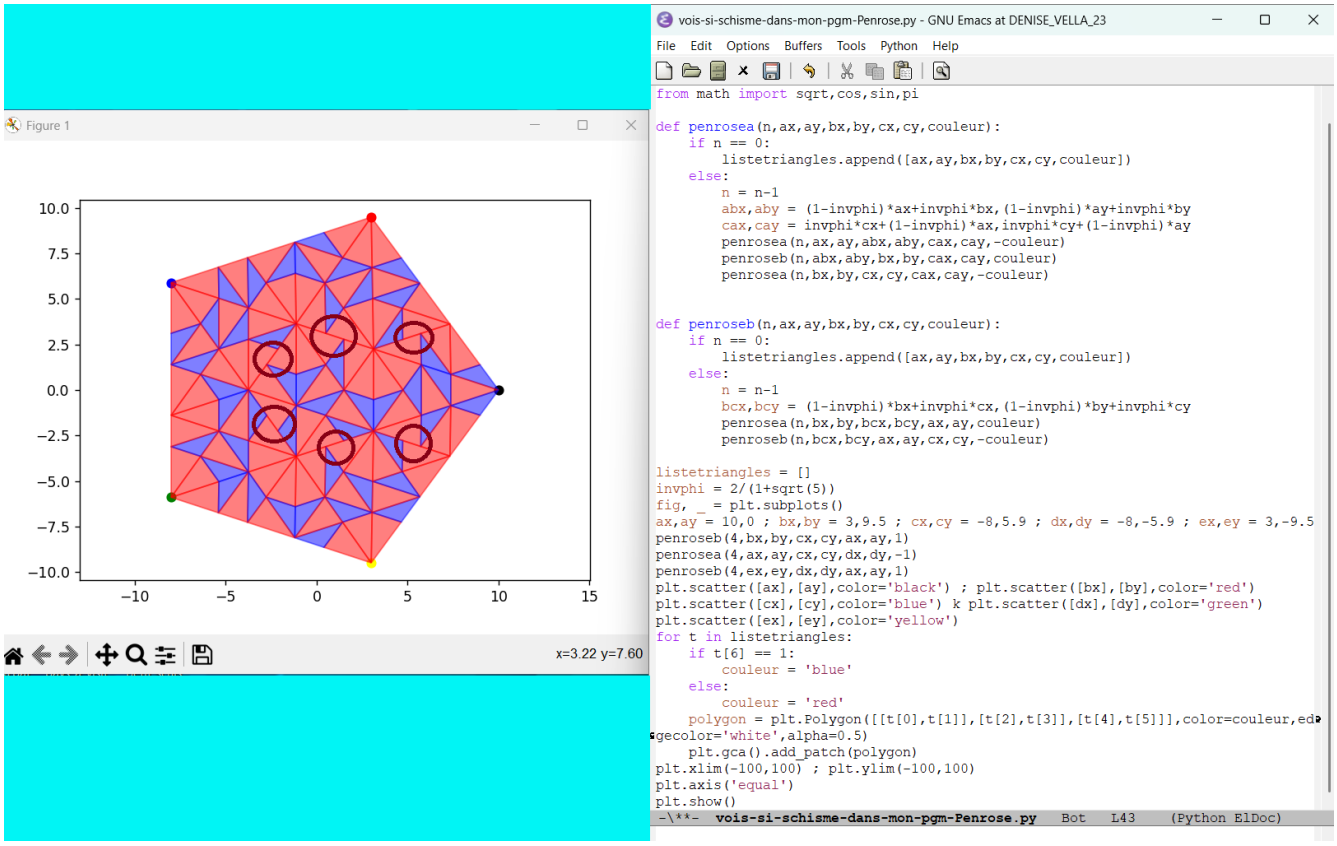
Remarque : la lectrice observatrice aura remarqué qu'il y a des petits "bugs" dans le pavage en page 5, qu'on présente en les entourant en marron, ci-dessous. Il nous faut corriger le programme pour que ces bugs disparaissent ; on ne reprendra cependant pas tous les dessins apparaissant dans

[7] unique, à orientation du parcours, et ordre cyclique des nœuds près, voir Olivier Cogis et Claudine Robert, *Théorie des graphes Problèmes, théorèmes, algorithmes*, Vuibert, 2003, p. 179.

la suite de ce document.



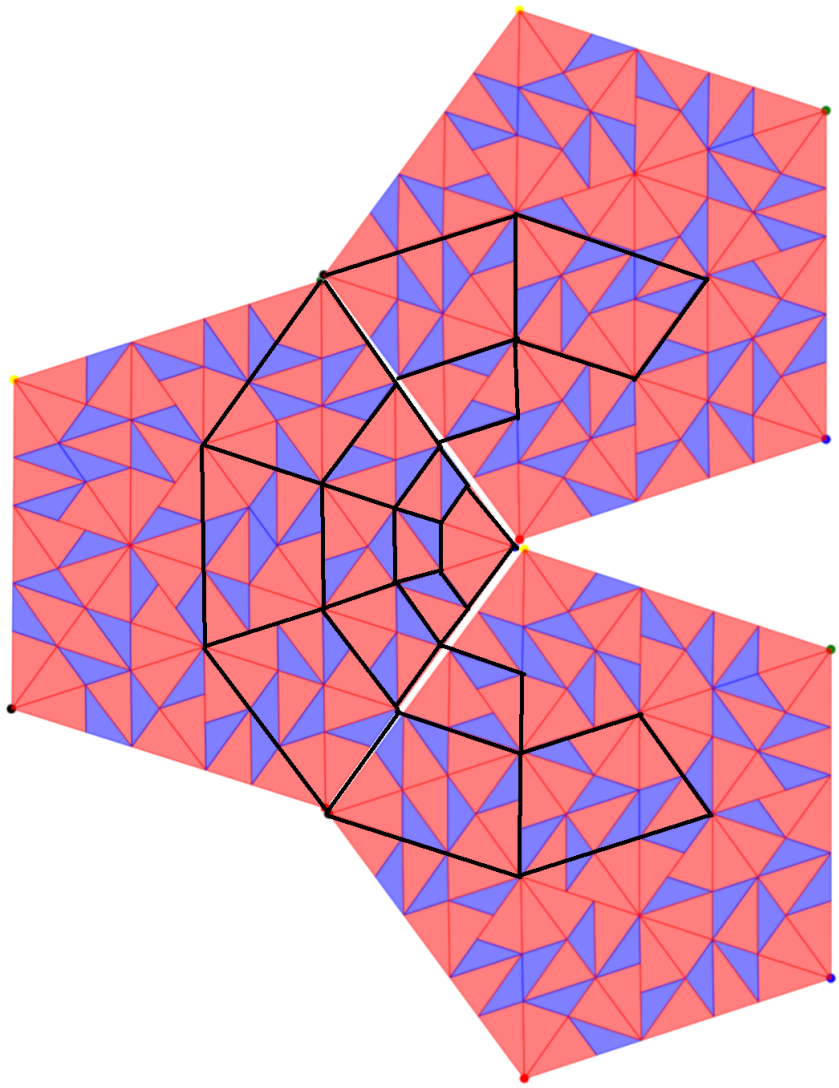
Essai en modifiant les appels récursifs, en intervertissant certains sens de parcours



En fait, les bugs ont changé d'endroit, je ne parviens pas à avoir un pentagone totalement et correctement rempli sur toute sa surface ; je n'arrive pas à corriger pour avoir toujours des côtés communs à deux triangles contigus exactement de la même longueur. Peut-être que plutôt que l'idée qui sera proposée ci-après, vaudrait-il mieux prendre des pentagones complets dans le pavage, plutôt que des trapèzes, à mettre en bijection avec les cases des matrices (et ceci, en ne couvrant pas la totalité du pavage du plan).

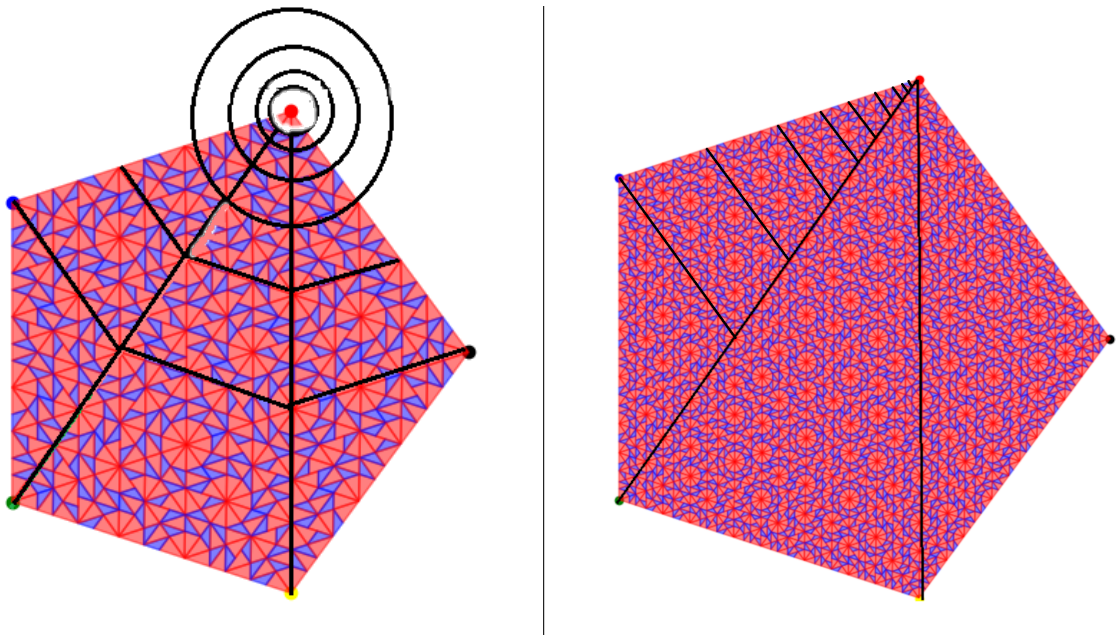
III.3. Les trapèzes dans 3 pavages pentagonaux accolés par un côté
Voici, sur le graphique ci-dessous, les nombres impairs de trapèzes qu'on va considérer dans le pavage de Penrose, pour les mettre en correspondance avec chacun des éléments des matrices de taille $(2k+1) \times (2k+1)$ qu'on a étudiées dans la section précédente.

Il est difficile de décrire cela littéralement par le langage écrit : montrons simplement ci-dessous les couronnes de trapèzes : à part au centre où tant pis, où on n'aura pas un trapèze mais 3 chapeaux de clowns accolés, on aura ensuite des "couronnes" (ou anneaux) de trapèzes, on en prendra 3 dans la première couronne, 5 dans la seconde couronne, 7 dans la troisième, etc. $2k+1$ trapèzes dans la couronne k.



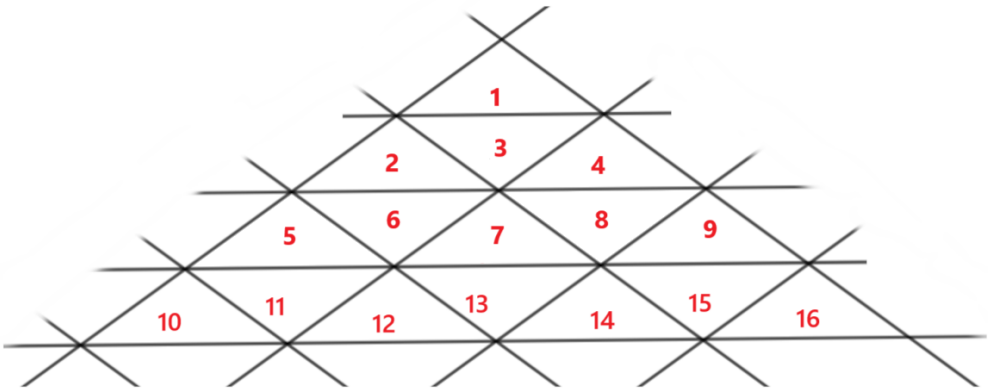
Quand on passe à des niveaux supérieurs, on réalise qu'il y a plein de lignes suivables pour délimiter les trapèzes, on imagine qu'on trouve toujours des délimitations possibles de trapèzes en respectant bien la contrainte récursive de la suite de Fibonacci. Ci-dessous, les niveaux 6 et 8 pour se faire

une idée.



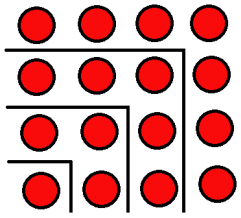
En fait, en y réfléchissant bien, cette idée des trapèzes semble saugrenue : puisqu'on dispose de triangles, il vaut mieux les utiliser. En se fixant par exemple sur le chapeau chinois, on peut utiliser la numérotation de triangles ci-dessous, à mettre en correspondance avec les éléments des matrices. On n'utilise du coup qu'une partie définie par un angle de 108° dans le pavage de Penrose classique si on se fixe sur les chapeaux chinois et à 36° si on se fixe sur les chapeaux de clowns.

Après vérification, dans tous les cas, que l'on prenne comme cela est proposé ici une partie de l'espace du pavage de Penrose plutôt que l'espace complet, ce sous-espace est de même dimension que l'espace total des pavages de Penrose, car il en contient localement toute la complexité dimensionnelle, i.e. on peut le mettre, comme l'espace du pavage de Penrose complet, en correspondance avec $\mathbb{Z} + \varphi\mathbb{Z}$, qui est le découpage discret de la droite réelle par des intervalles de longueurs φ ou 1. Il est noté dans cette page dimension de Hausdorff des espaces, que l'espace de Penrose serait de dimension 1.974



III.4. La numérotation des éléments des matrices

Tout d'abord, faisons la remarque que tout carré est une somme d'impairs (selon le dessin bien connu des nombres dits "figurés", dans lequel un carré de points est découpé en gnomons contenant chacun un nombre impair de points).



$$1 + 3 + ... + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Il s'agit ici de numéroter les éléments des matrices d'une part, les différents trapèzes d'autre part, pour établir une bijection entre eux.

Concernant les matrices, on pourrait utiliser les numérotations des éléments des matrices carrées qu'on pourrait qualifier comme étant "les plus naturelles" ainsi :

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

FIGURE 1 : *Une numérotation possible et naturelle des éléments dans les matrices de taille* 3×3 *et* 5×5.

Mais cette numérotation ne nous convient pas parce qu'elle n'est pas "incrémentale" [8] : d'un nombre pair au suivant, un grand nombre de cases des matrices voient leur numéro changer, ce qui est difficile à appréhender, et qui ne facilite pas la mise en bijection avec les trapèzes du pavage de Penrose, choisis "quelque part".

On se souvient alors d'un dessin de Alexander Grothendieck, photographié lors des 2 journées qui ont été consacrées au mathématicien en janvier 2025 à la Bibliothèque nationale de France, et qui est fourni en annexe 1 [9], et dans lequel le placement des entiers successifs, en commençant au bas gauche du dessin, et en parcourant des sortes de spirales, qui leur permet de bien se suivre, même si le dessin est tortueux, est très intrigant.

On choisit ici une numérotation simple, qui est conservée par chaque élément matriciel au fur et à mesure de l'agrandissement des matrices, selon la possibilité présentée ci-dessous.

[8] au sens informatique.

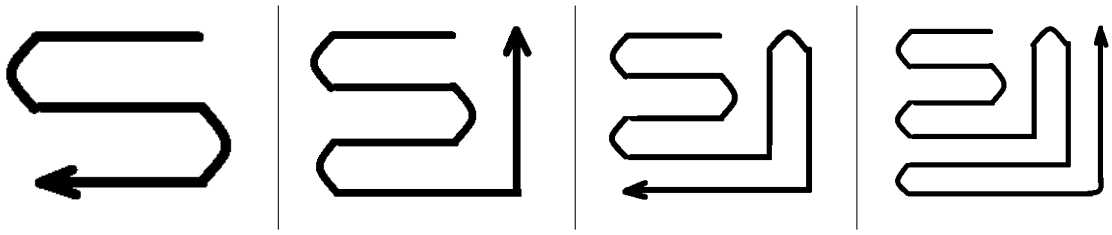
[9] On aurait pu également numéroter les éléments des matrices selon la numérotation proposée par Georg Cantor pour montrer que l'ensemble des couples d'entiers $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (et par extension, le carré, ou même le plan) peut être mis en bijection avec l'ensemble des entiers (et par extension, le côté du carré, ou bien une droite dans le plan).

3	2	1
4	5	6
9	8	7

3	2	1	16	17
4	5	6	15	18
9	8	7	14	19
10	11	12	13	20
25	24	23	22	21

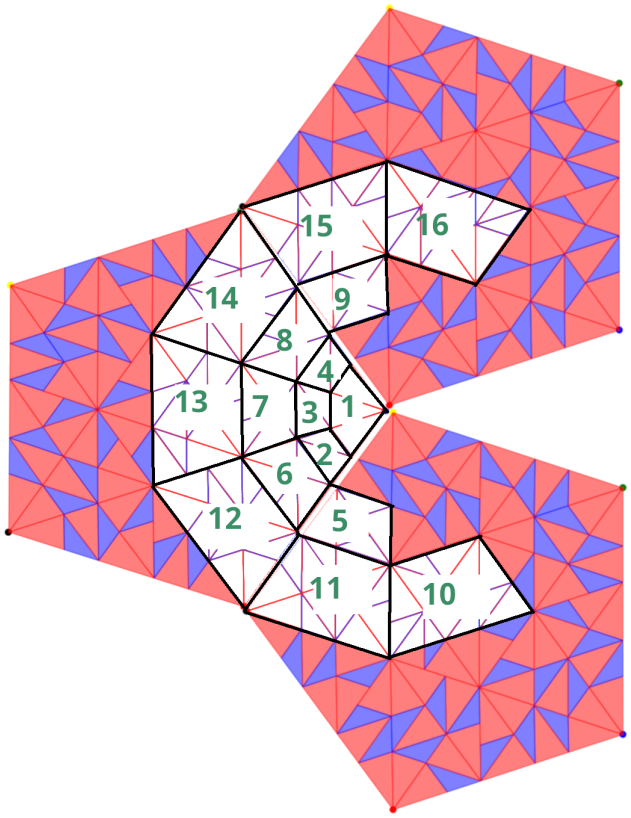
FIGURE 2 : *Une autre numérotation, qui permet de conserver les éléments matriciels aux mêmes indices, lors du passage de la matrice M_n (de taille $(n-1)\times(n-1)$ à la matrice M_{n+2} de taille $(n+1)\times(n+1)$.*

Regardons les parcours successifs stylisés, pour ne pas se perdre à lire les nombres.



III.5. La numérotation des trapèzes

La numérotation des trapèzes à mettre en correspondance avec la numérotation des éléments des matrices, on fait au plus simple aussi : une numérotation centrifuge, niveau par niveau, et dans le sens horaire, comme illustré ci-dessous.



III.6. Explicitation de l'isomorphisme entre les éléments des matrices et les trapèzes des pavages, lors du processus d'"inflation"

Dans ce paragraphe, on se propose de trouver un passage entre les matrices et les pavages : un moyen d'associer à chaque matrice un chemin (une suite d'arêtes à parcourir) dans un pavage de Penrose.

On fixe la couleur : les chapeaux de clowns seront toujours rouges et les chapeaux chinois seront toujours bleus. L'inflation du nombre de chapeaux de chaque sorte dans nos trapèzes, par niveau (ou couronne) suit la loi ci-dessous :

nombre de chapeaux de clown	nombre de chapeaux chinois
$a_1 = 0$	$b_1 = 0$
$a_2 = 1$	$b_2 = 1$
$a_3 = 3$	$b_3 = 2$
$a_4 = 8$	$b_4 = 5$
$a_5 = 21$	$b_5 = 13$

Là, on voit ressurgir la difficulté associée aux pavages de penrose et au nombre d'or : il y a deux récurrences entrecroisées, qu'on peut noter ci-dessous en utilisant les lettres indiquées ainsi : pour obtenir les éléments de la colonne de gauche d'abord :

$$\begin{array}{l} a_1 + b_2 \text{ donne } a_2 \\ a_2 + b_3 \text{ donne } a_3 \\ a_3 + b_4 \text{ donne } a_4 \\ a_4 + b_5 \text{ donne } a_5 \\ \vdots \\ a_k + b_{k+1} \text{ donne } a_{k+1} \end{array}$$

Pour obtenir les éléments de la colonne de droite, il faut commencer par la deuxième ligne :

$$\begin{array}{l} b_2 + a_2 \text{ donne } b_3 \\ b_3 + a_3 \text{ donne } b_4 \\ b_4 + a_4 \text{ donne } b_5 \\ \vdots \\ b_k + a_k \text{ donne } b_{k+1} \end{array}$$

Quel enchevêtrement, et que de surprises !

On trouve que la séquence des a_i est la séquence `A001906` de l'OEIS [10], où elle est dénommée bisection de la séquence de Fibonacci, la séquence des b_i est la séquence `A001519` de l'OEIS [11]. Deux éléments semblent vraiment intéressants concernant la suite de Fibonacci et le nombre d'or : la première est qu'on a toute une série d'égalités reliant entre elles trois puissances de φ de la

[10] lien vers A001906 de l'OEIS.
[11] lien vers A001519 de l'OEIS.

forme $\varphi^k = \varphi^{k-1} + \varphi^{k-2}$ (φ vérifie la définition récurrente de la suite de Fibonacci). Cette propriété est telle que toute puissance de φ peut être linéarisée et est donc égale à la somme d'un entier et d'un multiple de φ, ce qui est assez extraordinaire. Et la seconde propriété intéressante de la suite de Fibonacci est qu'à un certain rang, on a quasi-égalité avec un rang précédent, ce qui permet de boucler, un peu comme pour les notes de la gamme, avec $3^{12} = 2^{19}$. Dans le cas de la suite de Fibonacci, on a $\dfrac{F_{20}}{F_{19}} = \dfrac{6765}{4181} = 1.618033963$ qui diffère de $\varphi = 1,618033988$ seulement d'un facteur de $0.000000025 = 25 \times 10^{-9}$. Les éléments ci-dessus et les expressions linéaires des puissances de φ sont fournies par un internaute à cette adresse table des puissances de φ et recopiées en annexe 5.

Pour que la correspondance entre les éléments dans les matrices et les trapèzes correspondant soit toujours vérifiée du point de vue des couleurs (ou formes, c'est pareil, puisqu'on a décidé qu'une forme serait toujours de la même couleur), on se mettra dans un endroit du pavage de Penrose qui est tel, par exemple, que si la couleur dominante du trapèze (la couleur des tuiles dont l'ensemble est de plus grand cardinal) est rouge, le booléen de l'élément correspondant dans la matrice vaudra 1. Cette convention sera fixée une fois pour toutes. Ceci, c'est la convention pour la mise en correspondance d'un élément matriciel, et d'un trapèze du pavage de Penrose considéré.

On se placera dans la portion du pavage de Penrose qui fait que tous les booléens dans les matrices successives seront en correspondance exacte avec les ratios de couleurs dans les trapèzes correspondants (i.e. la correspondance des couleurs s'effectue entre l'élément numéro k de la matrice de n et l'élément numéro k **de l'ensemble** de trapèzes correspondant au nombre pair n (il y a $(n-1) \times (n-1)$ tels trapèzes, on l'a vu, autant que d'éléments dans la matrice M_n).

On aura ainsi pu établir une correspondance bijective entre l'espace des matrices qui comptent les décompositions de Goldbach des entiers, et l'espace des pavages de Penrose. On ne sait pas si cette correspondance bijective peut apporter des connaissances supplémentaires sur l'ensemble des nombres premiers (le calcul de dimension est rendu difficile parce qu'il semble qu'il y ait, en quelque sorte, deux récurrences emboîtées, l'une pour le pavage (faisant intervenir le nombre d'or), et dont la dimension est étudiable par ceux qui maîtrisent la géométrie non commutative de l'espace quantique, i.e. non commutatif, des pavages de Penrose, et l'autre récurrence pour les trapèze disposés en couronnes dans le pavage. Il y a un petit problème aussi : quand on délimite les trapèzes en couronne, parfois, on n'est pas sur un trapèze bien délimité par des pièces, on doit couper certaines pièces, on les découpe toujours en maintenant les formes, heureusement, mais pour des calculs de densité de telle ou telle forme de pièces, il faudrait savoir quelle densité on attribut à une demi-pièce, par exempe, et ça pourrait poser des problèmes supplémentaires.

On a ainsi vu qu'il est possible d'associer à chaque matrice un chemin dans un pavage de Penrose. Comme on a vu d'autre part qu'un chemin dans un pavage peut être mis en correspondance avec un parcours de l'icosion, on peut voir la promenade dans un pavage comme le parcours d'icosion successifs, qui seraient reliés par un point les uns aux autres à chaque fois (ce parcours de fait ne passerait qu'une fois par chaque sommet du pavage ; pour que chaque circuit hamiltonien soit un cycle, on en coupe la dernière arête, pour pouvoir "partir ailleurs"). On a, pour illustrer cela, fait dessiner un collier de dodécaèdres à un outil d'IA (`Dall-e`, via `Chap-gpt`), voici le résultat :

On trouve une idée similaire dans un article de David P. Shoemaker et Clara B. Shoemaker (dans *Introduction to Quasicrystals*, Vol. I, coll. Aperiodicity and order, éd. Marko V. Jarić, Academic Press, 1988, p. 48):

48 **David P. Shoemaker and Clara B. Shoemaker**

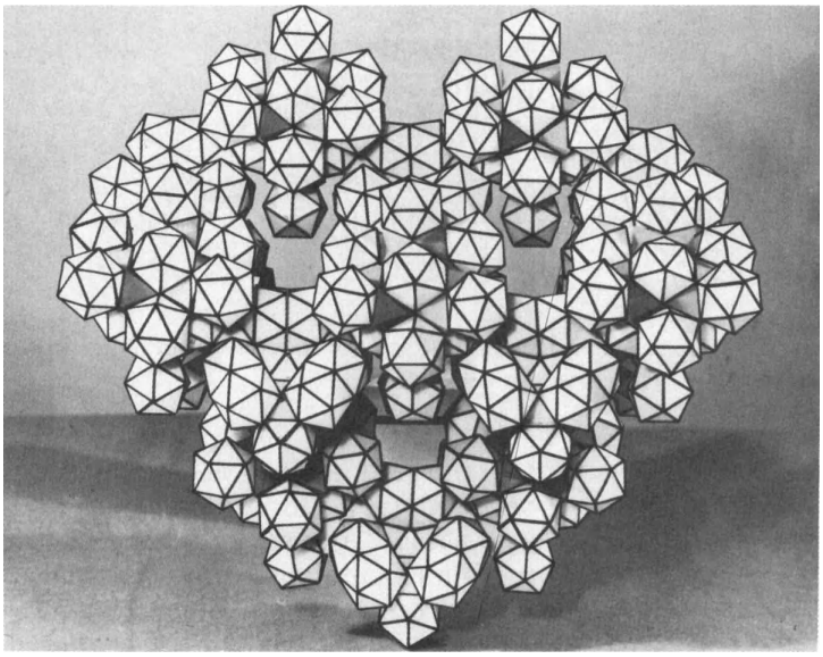


Figure 30. **Part of the Cu_4Cd_3 crystal structure: the arrangement of icosahedra. From Samson (1968).**

IV. Liens à d'autres découvertes effectuées lors des recherches autour de la conjecture de Goldbach

IV.1. Lien vers l'espace des polyômes à une variable, dans lequel la symétrie se manifeste autrement

On rappelle qu'on essaie à nouveau ici d'établir des passages entre différentes modélisations de la conjecture de Goldbach, qui enrichiraient notre compréhension de ce problème, et font bien appréhender la notion de topos (voir annexe 1).

En 2011, on avait essayé d'utiliser des polynômes s'annulant sur les nombres premiers, ainsi que leur polynôme-miroir par changement de variable $x \mapsto n - x$ et les décomposants de Goldbach s'avéraient être les zéros du polynôme PGCD. Explicitons cela plus précisément, en étudiant un exemple : $n = 98$, $P(x)$ est le polynôme qui s'annule pour tous les nombres premiers compris entre 3 et $n-3$. Cette opération de miroir pour trouver le polynôme $Q(x)$ en fonction du polynôme $P(x)$ est à mettre en parallèle avec l'opération de symétrisation des matrices présentées précédemment, bien sûr. Le polynôme $R(x)$, PGCD des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ doit, s'ils existent, s'annuler sur les nombres premiers p dont le complémentaire $n - p$ à n est premier, i.e. les décomposants de Goldbach de n.

Les polynômes développés pour $n = 98$ sont :

$$\begin{aligned}
P(x) = {} & x^{23} - 961\,x^{22} + 433569\,x^{21} - 122086505\,x^{20} + 24060819455\,x^{19} - 3527654916975\,x^{18} \\
& + 399244091652375\,x^{17} - 35722039058460735\,x^{16} + 2567182444872716970\,x^{15} \\
& - 149731151523742390890\,x^{14} + 7133002304131130888010\,x^{13} \\
& - 278430843454743874763610\,x^{12} + 8908950330009357843604350\,x^{11} \\
& - 233160533438404234289091870\,x^{10} + 4967258492477987049494094030\,x^{9} \\
& - 85481785882191578643934783710\,x^{8} + 1175191534903580239565345282565\,x^{7} \\
& - 12709587412796751485945036250885\,x^{6} + 105853618079702755150694788450565\,x^{5} \\
& - 658970309775507226675846638026285\,x^{4} + 2935402347654917581889232719176659\,x^{3} \\
& - 8736523288279774997723546938148419\,x^{2} + 15360643606799479140185671512081451\,x \\
& - 11884370948172775385325268800679155
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(x) = {} & -x^{23} + 1293\,x^{22} - 791465\,x^{21} + 305047965\,x^{20} - 83059888815\,x^{19} + 16992126722067\,x^{18} \\
& - 2711768859018111\,x^{17} + 345998711254529115\,x^{16} - 35885783120344705770\,x^{15} \\
& + 3059689295314689332770\,x^{14} - 216032930761623920225754\,x^{13} \\
& + 12684991577715241797493922\,x^{12} - 620417604923281048268952990\,x^{11} \\
& + 25254565419125196360505917990\,x^{10} - 852771344099371990477895941470\,x^{9} \\
& + 23745304227119972634668538464598\,x^{8} - 540284452035177607266536456839749\,x^{7} \\
& + 9914545224704565848720774814835905\,x^{6} - 144028489344666498251521652333782125\,x^{5} \\
& + 1612613815437287736026737738298960625\,x^{4} - 13370392834403754515061927199080031875\,x^{3} \\
& + 76972350064336732391585059505298684375\,x^{2} - 273338283883157469366079111139277421875\,x \\
& + 448386603607691302191520590573099609375
\end{aligned}$$

$$R(x) = x^{6} - 294\,x^{5} + 34647\,x^{4} - 2084852\,x^{3} + 67232463\,x^{2} - 1096926054\,x + 7036371289$$

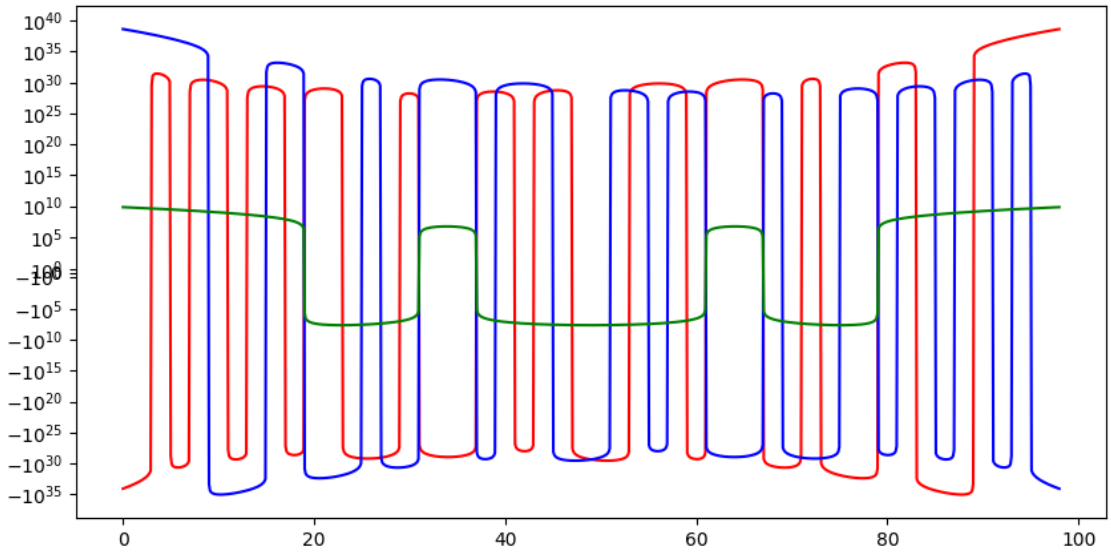
Leur factorisation sont :

$$\begin{aligned}P(x) = &(x-3)(x-5)(x-7)(x-11)(x-13)(x-17)(x-19)(x-23)(x-29)(x-31)(x-37)\\ &(x-41)(x-43)(x-47)(x-53)(x-59)(x-61)(x-67)(x-71)(x-73)\\ &(x-79)(x-83)(x-89)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q(x) = &(95-x)(93-x)(91-x)(87-x)(85-x)(81-x)(79-x)(75-x)(69-x)(67-x)(61-x)\\ &(57-x)(55-x)(51-x)(45-x)(39-x)(37-x)(31-x)(27-x)(25-x)\\ &(19-x)(15-x)(9-x)\end{aligned}$$

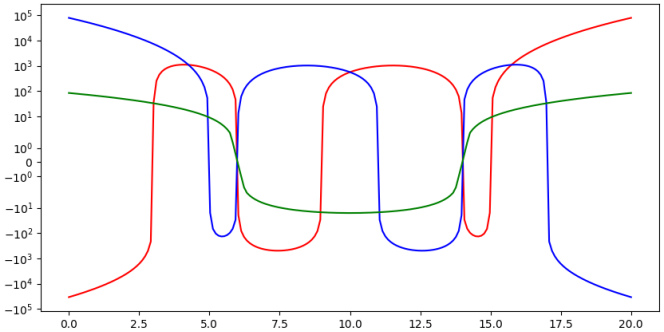
$$R(x) = PGCD(P(x), Q(x)) = (x-19)(x-31)(x-37)(x-67)(x-61)(x-79)$$

On utilise pour représenter les polynômes une représentation qui amplifie les variations (dite 'symlog' en python) pour que les courbes polynomiales ne soient pas toutes écrasées sur l'axe des ordonnées.

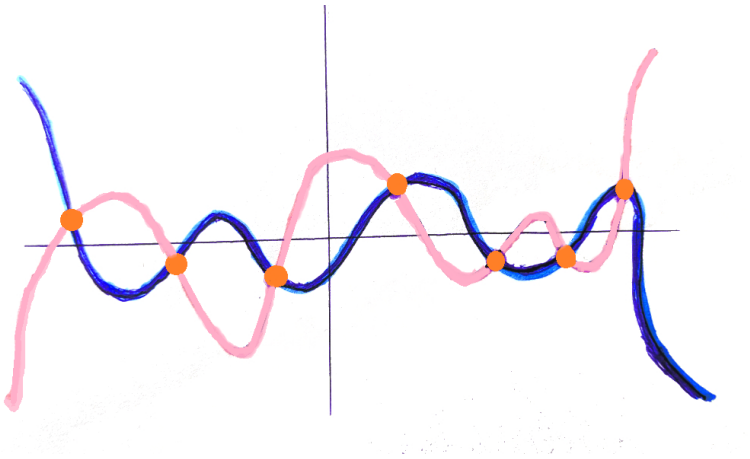


On a le parallèle entre les doubles de nombres premiers avec ce qu'on avait dit dans la section I (dessin des bits rouges dans la diagonale ascendante principale) : ici les polynômes pgcd pour les nombres pairs doubles de nombres premiers sont impairs (si on déplace l'origine en $n/2$, tandis que les polynômes pgcd pour les nombres pairs doubles de nombres composés sont pairs.

Observons le schéma : pourquoi est-on forcé d'avoir une annulation commune au moins des polynômes $P(x)$, $Q(x)$, et donc de leur PGCD (et l'annulation symétrique par rapport à $n/2$). Pour le dire autrement, supposons que les deux polynômes ne s'annulent jamais au même endroit alors qu'ils doivent respecter la contrainte d'être symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe vertical passant en $x = n/2$.



On dessine à la main ci-dessous l'idée qu'on avait de ce poynôme (qui est en fait impossible à obtenir avec des nombres premiers et leur complémentaire à n en réalité) pour montrer ce qu'on a en tête. Il nous est quasiment impossible de dessiner à main levée un polynôme bien symétrique par rapport à l'axe vertical central et ne s'annulant jamais sur l'axe des ordonnées, bien que ça soit tout à fait possible, c'est un problème de dextérité.



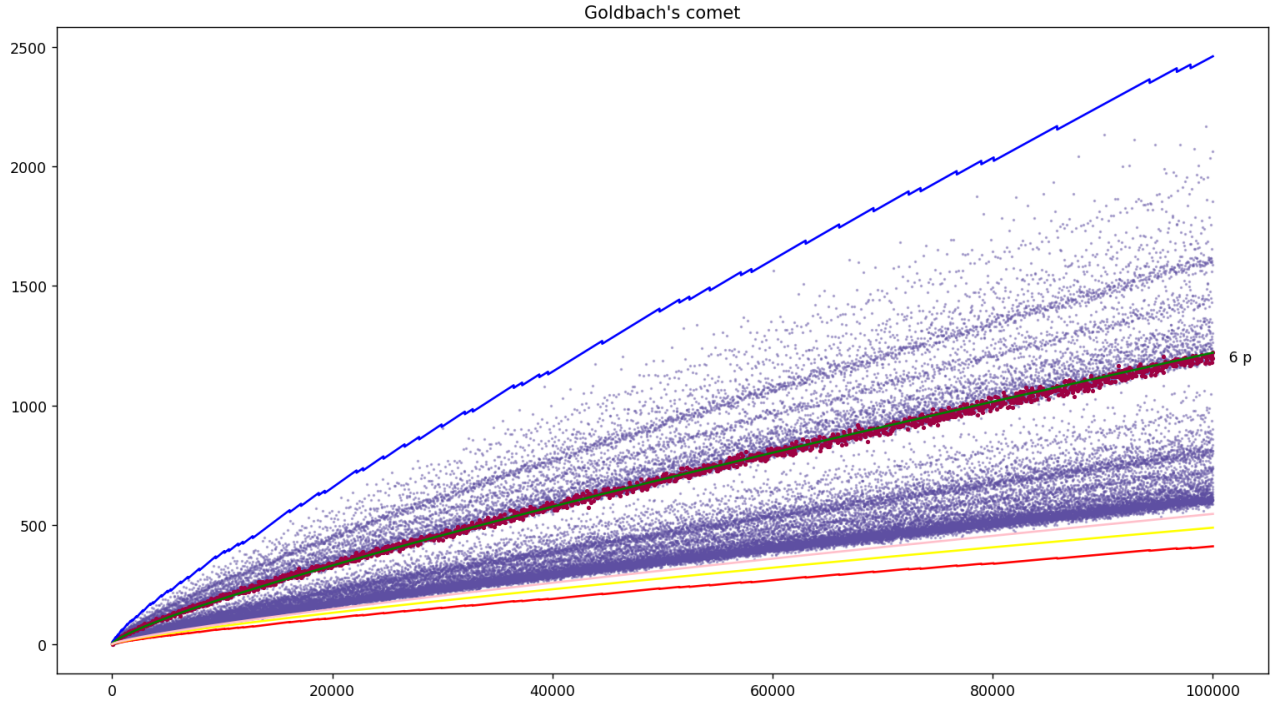
Admettons qu'il n'y ait ainsi aucune annulation commune, donc ; on aurait, plutôt que la visualisation qui a été fournie pour 98, une sorte de tresses à deux brins, dont tous les croisements s'effectueraient soit au-dessus, soit au-dessous de l'axe des ordonnées, sans jamais le faire *sur* l'axe des ordonnées. Mais alors, les courbes étant symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe central vertical, elles seraient forcées d'avoir autant de zéros dans l'intervalle inférieur $[3, n/2]$ et dans l'intervalle supérieur $[n/2, n-3]$. Mais puisque $P(x)$ est la courbe du polynôme dont toutes les racines sont des nombres premiers, cela voudrait dire qu'il y a autant de nombres premiers entre 3 et $n/2$, qu'entre $n/2$ et $n-3$, ce qui est impossible. En effet, on trouve page 235 de Handbook of Number theory I, de József Sándor, Dragoslav S. Mitrinović et Borislav Crstici, que Rosser et Schoenfeld ont démontré dans *Abstracts of scientific communications*, Congrès international des mathématiciens, Moscou, 1966, section 3, Théorie des nombres que $\pi(2x) < 2\pi(x)\ \forall x > 2$. Cette idée de démonstration, comme celle obtenue de la modélisation par des matrices booléennes triangulaires inférieures, n'est pas une idée constructive non plus.

IV.2. Courbe d'équation semblant être liée elle-aussi au nombre d'or φ d'une part, et semblant minorer les points de la comète des nombres de décompositions de Goldbach

On a d'autre part constaté par programme que la courbe

$$f \ : \ x \mapsto \frac{\varphi\, x}{\sqrt{5}\, \ln x\, \ln x}$$

avec $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ semblait minorer la comète qui compte les décompositions de Goldbach, voir le graphique ci-dessous, la fonction f est représentée en rose pâle et est quasiment accolée à la comète par le dessous (attention : elle est au-dessus de la courbe jaune $g(x) = \dfrac{2\,\varphi\, x}{5\, \ln x\, \ln x}$, elle-même au-dessus de la courbe rouge de la fonction $h(x) = \displaystyle\prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p<\sqrt{x}}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \left(\frac{x}{6}\right)$:



IV.3. Un passage entre l'arithmétique et la logique propositionnelle à une variable.

On se situe dans la logique propositionnelle des propositions à une variable (du premier ordre). On a des énoncés vrais et des énoncés faux. Si la variable $b1$ représente l'énoncé `3+9=10`, elle prend la valeur de vérité 0 (`faux`). Si la variable x représente l'énoncé `3+35=38`, elle prend la valeur de vérité 1 (`vrai`). On ne s'intèresse qu'aux énoncés qui sont vrais, de la forme `n=p+q` avec n un nombre pair, et p et q deux nombres impairs.

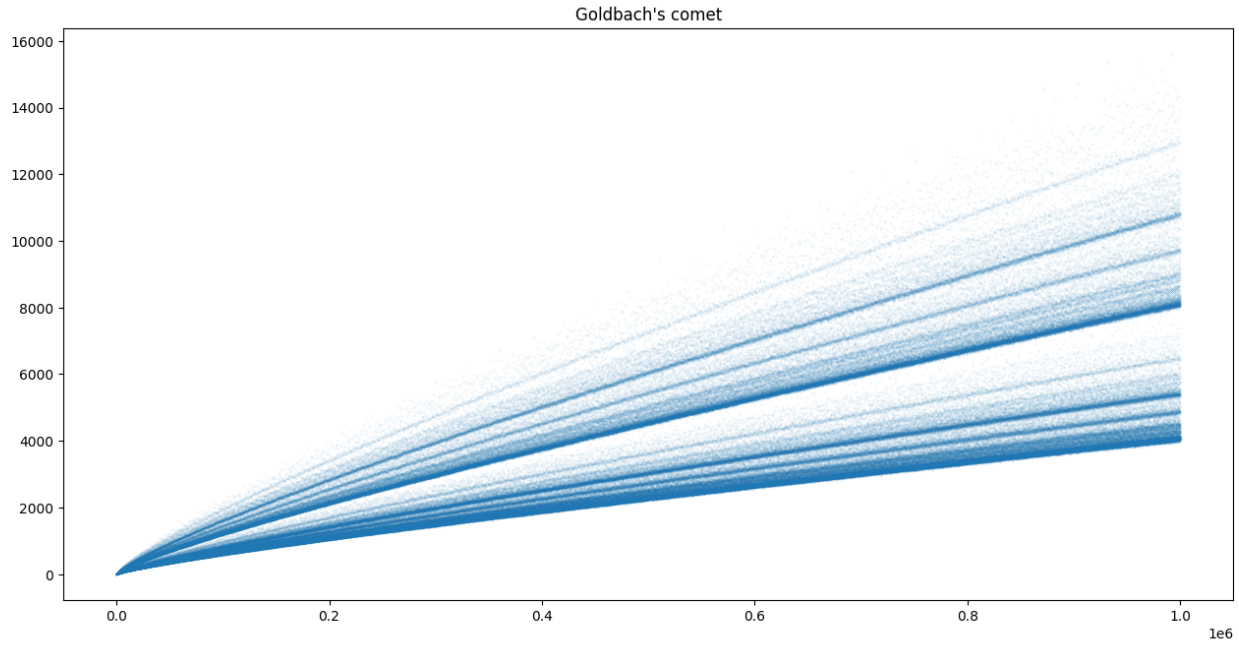
Parmi ces énoncés, un certain nombre font intervenir deux nombres premiers en place de p et q (les décompositions de Goldbach des nombres pairs).

Intéressons-nous maintenant à la conjecture de Goldbach. Quand on représente la comète des décompositions, que représentent les points de la comète ? (admettons qu'ils soient positionnés

eux-aussi aux points entiers d'un maillage $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$).

Un point (x, y) bleu de la comète représente qu'on a y énoncés vrais de la forme `x=p+q` avec x pair, p et q deux nombres premiers (et $p \leqslant q$ en l'occurrence). Par exemple, pour le nombre 98, qui a 3 décompositions de Goldbach 19+79, 31+67 et 37+61, le point de la comète $(98, 3)$ représente le fait que parmi les multiples possibilités d'énoncés en logique propositionnelle représentant les décompositions de 98 en une somme de deux impairs, les 3 énoncés `98=19+79`, `98=31+67` et `98=37+61` sont vrais, contiennent des nombres premiers en partie droite (comme sommants), que 98 est pair sont vrais et tous les autres énoncés de la forme `98=?+?` soit sont faux, soit contiennent comme sommants des nombres qui ne sont pas des nombres premiers.

Il faut avoir à l'esprit que le point $(98, 3)$ représente les décompositions de Goldbach de 98 parmi une multitude d'autres points de la verticale $x = 98$, sur laquelle on pourrait positionner une multitude d'autres points qui pourraient signifier par exemple "98 a 10 décompositions de Goldbach", voire "98 a $\sqrt{2}$ décompositions de Goldbach" (si l'on se place dans $\mathbb{R}^2$ plutôt que dans $\mathbb{N}^2$).



L'article [1] fournit une limite asymptotique à la proportion des tautologies à une variable parmi l'ensemble des propositions à une variable. Une reformulation d'un extrait du résumé de cet article est :

> "*On démontre que la limite de la densité (ou bien la probabilité asymptotique) des formules propositionnelles intuitionnistes prouvables parmi l'ensemble de toutes les formules existe et qu'elle est égale, pour les types avec un type de base (les formules avec une seule variable propositionnelle), à $\varphi/srqt5$, qui est approximativement égal à 72%. Cela signifie qu'un type aléatoire (en terme de formule) d'une grande taille a environ 72% de chance d'être une tautologie.*"

Si l'on se dit que les points de la comète représentent un certain nombre de tautologies parmi de multiples propositions possibles, le ratio en question devrait minorer la comète. On a vu précédemment que c'est ce que l'on avait découvert, par tâtonnement, en essayant de trouver une constante mathématique un peu "magique" qui aurait minoré la comète.

Note : on a déposé dans un fichier tableur de 25 méga les nombres de décompositions de Goldbach des nombres pairs de 6 à 10^6 ainsi que la valeur de la fonction minorante rouge, à l'adresse lien vers le fichier de comptage des décompositions de Goldbach jusqu'à 1 million [12].

IV.5. Fonctions récursives : la valuation p-adique, le pgcd

On rappelle ici un petit algorithme qu'on avait utilisé pour calculer le nombre de nombres premiers $\pi(n)$ en effectuant des sommes de valuations p-adiques, seulement pour les nombres inférieurs à la racine carrée de n.

L'algorithme $vp(a, b)$ de calcul de la valuation p-adique de a est

```
fonction vp(a, p) :
     si p = 1:
          renvoie(1)
     si p ne divise pas n:
          renvoie(0)
     sinon:
          renvoie(vp(n/p,p)+1)
```

et

$$\pi(n) = \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{\sqrt{n}} vp(n, k)}.$$

Cet exemple est un nouvel exemple d'une fonction dites "récursive" : c'est une fonction qui est définie pour un nombre à partir de la valeur qu'elle prend elle-même pour un autre nombre inférieur au premier (penser à la définition de la fonction factorielle, par exemple).

Montrons comment la fonction récursive basée sur les valuations p-adiques peut être calculée uniquement par des "mots", i.e. des suites de lettres, du monoïde $\mathbb{N}^{**}$ (on met deux étoiles ici pour distinguer ce monoïde de l'ensemble des entiers privé de 0). Le monoïde N^{**} contient les mots que l'on peut fabriquer avec des lettres qui sont des entiers naturels. Il faut se dire que compter par des lettres, c'est un peu comme faire de l'arithmétique à base de bâtons (à l'école maternelle, par exemple). L'arithmétique des bâtons est à rapprocher de la manière dont von Neumann a proposé de représenter les entiers, ou bien Russell. Elle a été complètement théorisée (voir par exemple les articles *Équations dans les monoïdes libres*, d'André Lentin [13], *L'arithmétique dans les algèbres*

[12] Il y a 32 exceptions à la minoration pour les pairs inférieurs à 10^6. Ces exceptions concernent les nombres : $6 = 2\cdot 3, 8 = 2^3, 12 = 2^2\cdot 3, 38 = 2\cdot 19, 68 = 2^2\cdot 17, 98 = 2\cdot 7^2, 128 = 2^7, 152 = 2^3\cdot 19, 326 = 2\cdot 163, 332 = 2^2\cdot 183, 398 = 2\cdot 199, 488 = 2^3\cdot 61, 632 = 2^3\cdot 79, 668 = 2^2\cdot 167, 692 = 2^2\cdot 173, 992 = 2^5\cdot 31, 1112 = 2^3\cdot 139, 1412 = 2^2\cdot 353, 1718 = 2\cdot 859, 2048 = 2^{11}, 2252 = 2^2\cdot 563, 2642 = 2\cdot 1321, 2672 = 2^4\cdot 167, 2936 = 2^3\cdot 367, 4412 = 2^2\cdot 1103, 5468 = 2^2\cdot 1367, 5948 = 2^2\cdot 1487, 7508 = 2^2\cdot 1877, 8042 = 2\cdot 4021, 8048 = 2^4\cdot 503, 8552 = 2^3\cdot 1069, 9602 = 2\cdot 4801$.

[13] M.S.H. (8e année, no 31, 1970, p. 5-16).

simples de Claude Chevalley [14], *Concatenation as a basis for arithmetic* de W. Quine [15]).

Pour calculer la valuation 2-adique, on écrit, c'est-à-dire qu'on commence, avec le mot 01, qui exprime que 2 a pour valuation 2-adique 1. Puis à chaque étape, on concatène deux (resp. k) suites de lettres identiques à celle qu'on a trouvée jusque-là, et on change simplement sa dernière lettre en le succ (au sens de Peano) de cette lettre terminale.

On obtient aux étapes successives :

01
0102
01020103
0102010301020104
010201030102010401020103010201 05
...

La chaîne de caractères double (ou multiplie par k) sa taille à chaque étape.

Voyons avec les valuations 3-adiques :

001
001001002
001001002001001002001001003
001001002001001002001001003001001002001001002001001003001001002001001002001001004
...

La chaîne triple sa longueur à chaque étape.

Mettons les nombres calculés par cette méthode syntaxique pure en regard des nombres entiers, pour vérifier qu'on a bien calculé les valuations 2-adiques et 3-adiques.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	0	2	0	1	0	4	0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	0	2
0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	1	0	0	3	0

Il est plus simple plutôt que d'utiliser cette approche syntaxique pure, d'utiliser l'approche sémantique présentée précédemment, qui définit que pour trouver à quelle puissance le nombre x est élevé dans le nombre y, il faut diviser autant de fois que possible y par x jusqu'à ne plus pouvoir le faire. Cela correspondant davantage à ce que l'on pense à faire, pour trouver la valuation p-adique, on n'a pas envie d'écrire toutes les valeurs que la fonction a prises jusque là pour trouver la nouvelle valeur qu'elle va prendre.

Prenons un autre exemple de calcul récursif d'une fonction : la fonction de calcul du PGCD d'Euclide :

```
def euclide(a, b):
     if b == 0:
          return(max(a,b))
     else:
          return(euclide(min(a,b),max(a,b)-min(a,b)))
```

[14] Séminaire de mathématiques, Première année 1933-1934, Théorie des Groupes et des Algèbres, exposé du 30 avril 1934.

[15] The Journal of Symbolic Logic, Volume 11. Numéro 4. Déc. 1946.

Ces exemples nous montrent la similitude entre le calcul de la valuation p-adique et le calcul du pgcd.

Remerciements : Je remercie Alain Connes, qui m'a reçue quelquefois à l'IHES et m'a encouragée à poursuivre ces recherches autour de la conjecture de Goldbach. Je remercie Paul Gaborit qui, en fournissant son source `TikZ` de dessin de pavages de Penrose, m'a fait gagner un temps précieux dans la programmation en python de ces dessins, qui m'ont aidée à "voir" l'idée de passage proposée ici. Je remercie Roger Penrose, pour sa conférence superbe, et pour la beauté de ses dessins et pavages. Et merci à J.C.

Bibliographie

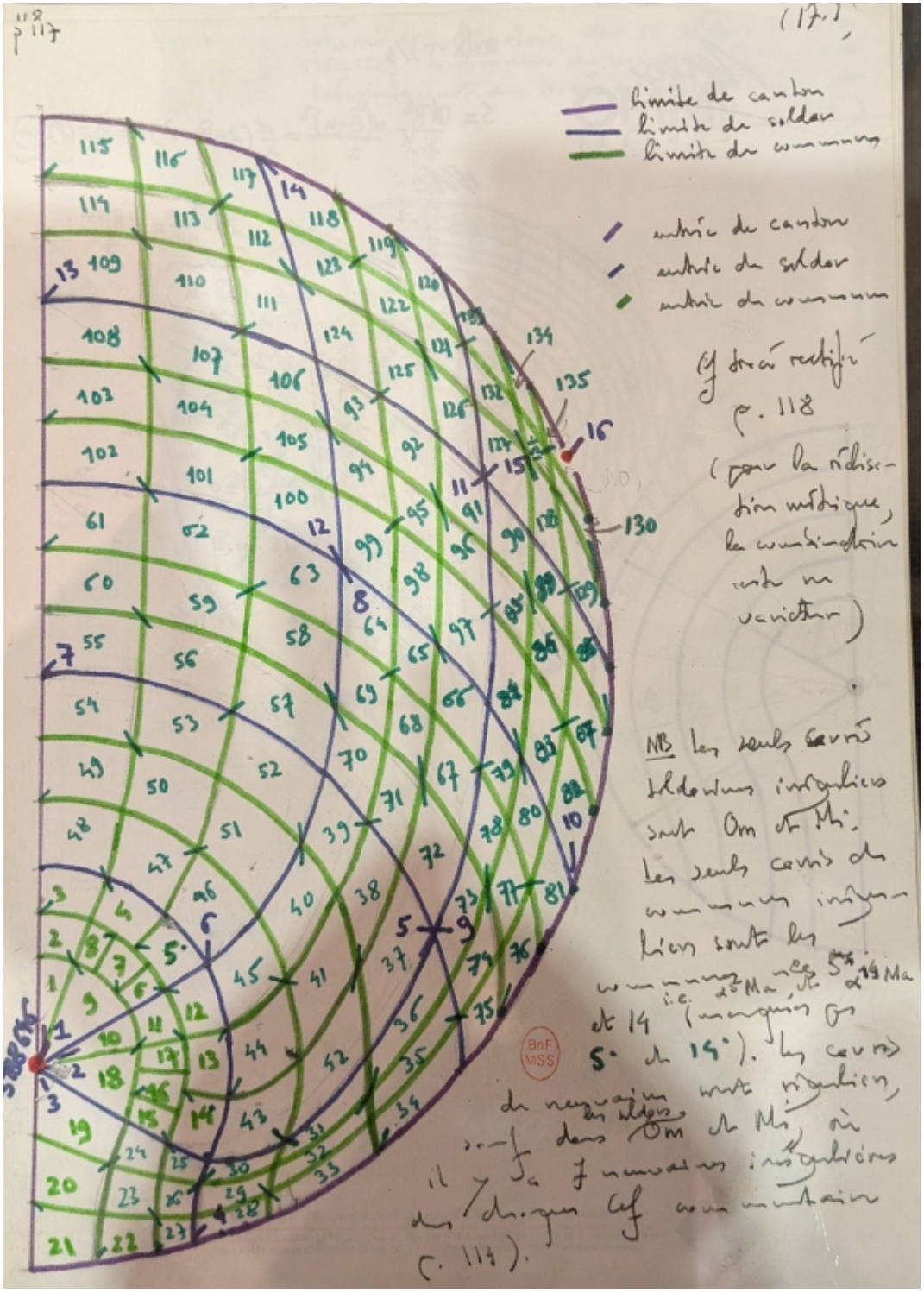
[1] Alain Connes, Noncommutative geometry, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994, ISBN: 0-12-185860-X. 1994. lien vers le livre numérique.

[2] Branko Grünbaum, G. C. Shepard, *Tilings and patterns*, éd. W. H. Freeman, 1986.

[3] Penrose U.S. Patent 4 133 152 *Set of tiles for covering a surface*, 1979. Vidéo Forbidden crystal symmetry in mathematics and architecture. Traduction de la transcription de la vidéo partie 1partie 2 partie 3.

[4] Malgorzata Moczurad, Jerzy Tyszkiewicz, Marek Zaionc, *Statistical properties of simple types.* Math. Struct. Comput. Sci. 10(5): 575-594 (2000). Traduction en français : proportion de tautologies. L'article original au format pdf (le fichier au format postscript est téléchargeable sur la page de M. Zaionk). article référence [4].

Annexe 1 : le dessin de Grothendieck d'un parcours étrange des entiers



On a le souhait que toutes les manières différentes de "voir" la conjecture de Goldbach qui ont été proposées ici éclairent ce que l'on pense qu'il faut entendre dans le terme de "topos" : il s'agit d'établir un isomorphisme entre différentes façons de spécifier un problème, dans différents champs

mathématiques, et d'utiliser les résultats connus dans l'un des domaines, pour les transporter et les appliquer (s'en servir pour déduire) dans les autres domaines.

C'est exactement ce que l'on fait en informatique théorique, lorsqu'on souhaite démontrer la NP-complétude d'un problème, on trouve un isomorphisme entre ce problème et un problème NP-complet connu (voir le livre de M. R. Garey et D. S. Johnson *Computers and intractability*, W.H. Freeman éds, 1979, qui fournit une foultitude de tels exemples d'isomorphismes).

Annexe 2 : tout est dans tout, et réciproquement

La combinatoire simple des possibles en chaque point d'un pavage à base de triangles d'or et d'argent, ou bien de cerfs-volants (kites) et flèches (darts) est la suivante : on peut totaliser 360 degrés en chaque point par toutes les combinaisons suivantes, avec les seuls angles possibles que sont 36, 72 et 108, de 14 façons différentes possibles (2 points, 14^2, 3 points 14^3, ça va vite.

On peut imaginer un programme qui, à partir d'un point donné, remplit aléatoirement les 360 degrés en ce point des pièces qu'il souhaite, puis considère le point comme traité, et passe à l'un des points non traités jusque-là pour réitérer le remplissage. De temps en temps (peut-être très souvent), informatiquement il faut "backtracker", revenir en arrière, parce que les remplissages effectués sur divers points ont abouti à une contradiction en un point, i.e à un chevauchement de pièces. Et l'on continue ainsi de proche en proche en traitant-oubliant les sommets.

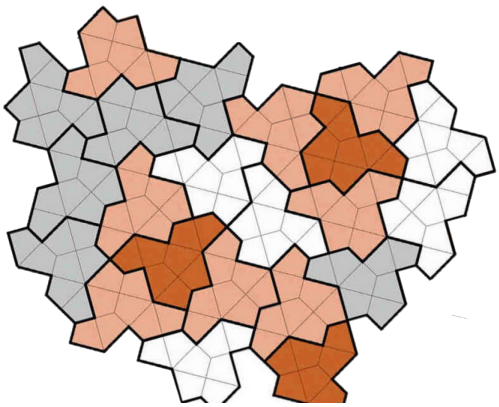
Pour les rhombus (losanges, fats ou maigres), il y a un angle de plus ; les angles sont 36, 72, 108 et 144, ce qui fait monter à 20 le nombre des possibles en chaque point (même s'il faudra sûrement backtracker en certains points de l'arborescence du traitement), on les détaille [16]) :

Combinatoire pour un pavage par des triangles	Combinatoire pour un pavage par des losanges
	$360 = 2 \times 108 + 1 \times 144$
	$= 2 \times 72 + 2 \times 108$
	$= 3 \times 72 + 1 \times 144$
$360 = 2 \times 72 + 2 \times 108$	$= 5 \times 72$
$= 5 \times 72$	$= 1 \times 36 + 1 \times 72 + 1 \times 108 + 1 \times 144$
$= 1 \times 36 + 3 \times 108$	$= 1 \times 36 + 3 \times 72 + 1 \times 108$
$= 1 \times 36 + 3 \times 72 + 1 \times 108$	$= 2 \times 36 + 1 \times 72 + 2 \times 108$
$= 2 \times 36 + 1 \times 72 + 2 \times 108$	$= 2 \times 36 + 2 \times 72 + 1 \times 144$
$= 2 \times 36 + 4 \times 72$	$= 2 \times 36 + 4 \times 72$
$= 3 \times 36 + 2 \times 72 + 1 \times 108$	$= 3 \times 36 + 1 \times 108 + 1 \times 144$
$= 4 \times 36 + 2 \times 108$	$= 3 \times 36 + 2 \times 72 + 1 \times 108$
$= 4 \times 36 + 3 \times 72$	$= 4 \times 36 + 2 \times 108$
$= 5 \times 36 + 1 \times 72 + 1 \times 108$	$= 4 \times 36 + 1 \times 72 + 1 \times 144$
$= 6 \times 36 + 2 \times 72$	$= 4 \times 36 + 3 \times 72$
$= 7 \times 36 + 1 \times 108$	$= 5 \times 36 + 1 \times 72 + 1 \times 108$
$= 8 \times 36 + 1 \times 72$	$= 6 \times 36 + 1 \times 144$
$= 10 \times 36$	$= 6 \times 36 + 2 \times 72$
	$= 7 \times 36 + 1 \times 108$
	$= 8 \times 36 + 1 \times 72$
	$= 10 \times 36$

[16] Les angles sont ceux-ci car on rappelle que la somme des angles internes d'un quadrilatère est égale à 360 degrés.

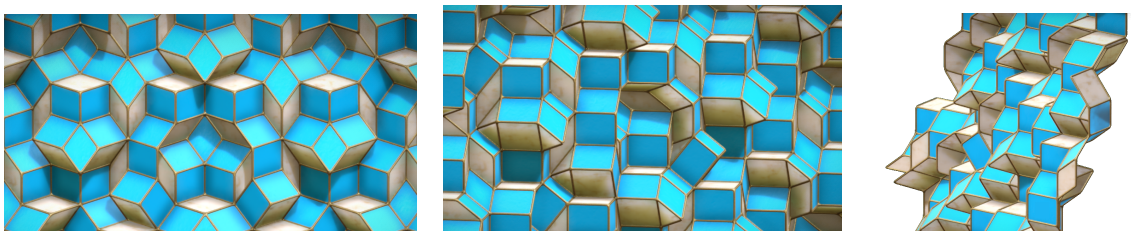
Annexe 3 : la tuile “chapeau” qui permet de produire un pavage apériodique mono-tuile

L’article de référence pour cette belle découverte est lisible sur arxiv à cette adresse : Chapeau !.



Annexe 4 : Projection d’hypercubes en dimension 4 sur le plan

Ci-dessous sont reproduits 3 graphiques captures d’écran de la jolie animation ici
Penrose-rhombus-3D.png [17]



Ces illustrations sont destinées à faire percevoir qu’un pavage de Penrose, à base de losanges, peut être considéré comme une projection sur le plan d’un hypercube en dimension 4, i.e. d’un certain nombre de cubes reliés entre eux deux à deux par une face commune (donc des objets à 4 dimensions). Il vaut mieux voir l’animation, qui fait mieux saisir le passage à la 3D (puisqu’on ne peut pas faire mieux), pour ensuite imaginer le passage à la 4D. On remarque en faisant tourner l’hypercube dans tous les sens qu’il semblerait qu’on ne couvre pas tout l’espace 4D mais seulement une sorte de bande à quelques étages dedans.

[17] On trouve également l’idée de la projection de l’hypercube en fin d’un article consultable ici :
lien vers le fichier du Palais de la découverte.

Annexe 5 : Puissances de φ exprimées linéairement

-10	φ^{-10}	$= -55\,\varphi + 89$	$= \varphi^{-11} + \varphi^{-12}$
-9	φ^{-9}	$= 34\,\varphi - 55$	$= \varphi^{-10} + \varphi^{-11}$
-8	φ^{-8}	$= -21\,\varphi + 34$	$= \varphi^{-9} + \varphi^{-10}$
-7	φ^{-7}	$= 13\,\varphi - 21$	$= \varphi^{-8} + \varphi^{-9}$
-6	φ^{-6}	$= -8\,\varphi + 13$	$= \varphi^{-7} + \varphi^{-8}$
-5	φ^{-5}	$= 5\,\varphi - 8$	$= \varphi^{-6} + \varphi^{-7}$
-4	φ^{-4}	$= -3\,\varphi + 5$	$= \varphi^{-5} + \varphi^{-6}$
-3	φ^{-3}	$= 2\,\varphi - 3$	$= \varphi^{-4} + \varphi^{-5}$
-2	φ^{-2}	$= -\,\varphi + 2$	$= \varphi^{-3} + \varphi^{-4}$
-1	φ^{-1}	$= \varphi - 1$	$= \varphi^{-2} + \varphi^{-3}$
0	φ^{0}	$= 0 + 1$	$= \varphi^{-1} + \varphi^{-2}$
1	φ^{1}	$= \varphi + 0$	$= \varphi^{0} + \varphi^{-1}$
2	φ^{2}	$= \varphi + 1$	$= \varphi^{1} + \varphi^{0}$
3	φ^{3}	$= 2\,\varphi + 1$	$= \varphi^{2} + \varphi 1$
4	φ^{4}	$= 3\,\varphi + 2$	$= \varphi^{3} + \varphi 2$
5	φ^{5}	$= 5\,\varphi + 3$	$= \varphi^{4} + \varphi 3$
6	φ^{6}	$= 8\,\varphi + 5$	$= \varphi^{5} + \varphi 4$
7	φ^{7}	$= 13\,\varphi + 8$	$= \varphi^{6} + \varphi 5$
8	φ^{8}	$= 21\,\varphi + 13$	$= \varphi^{7} + \varphi 6$
9	φ^{9}	$= 34\,\varphi + 21$	$= \varphi^{8} + \varphi 7$
10	φ^{10}	$= 55\,\varphi + 34$	$= \varphi^{9} + \varphi^{8}$
11	φ^{11}	$= 89\,\varphi + 55$	$= \varphi^{10} + \varphi^{9}$
12	φ^{12}	$= 144\,\varphi + 89$	$= \varphi^{11} + \varphi^{10}$
13	φ^{13}	$= 233\,\varphi + 144$	$= \varphi^{12} + \varphi^{11}$
14	φ^{14}	$= 377\,\varphi + 233$	$= \varphi^{13} + \varphi^{12}$
15	φ^{15}	$= 610\,\varphi + 377$	$= \varphi^{14} + \varphi^{13}$
16	φ^{16}	$= 987\,\varphi + 610$	$= \varphi^{15} + \varphi^{14}$
17	φ^{17}	$= 1597\,\varphi + 987$	$= \varphi^{16} - \varphi^{15}$
18	φ^{18}	$= 2584\,\varphi + 1597$	$= \varphi^{17} + \varphi^{16}$
19	φ^{19}	$= 4181\,\varphi + 2584$	$= \varphi^{18} + \varphi^{17}$
20	φ^{20}	$= 6765\,\varphi + 4181$	$= \varphi^{19} + \varphi^{18}$

Observer la relation entre φ^{-10} et φ^{11}.