

Démonstration de la conjecture de Goldbach via les centres de graphes triangulaires épointés¹, Denise Vella-Chemla, mai 2026

1. Introduction

La conjecture de Goldbach, énoncée en 1742, stipule que tout entier pair $n \geq 4$ est la somme de deux nombres premiers. Malgré des vérifications massives par ordinateur, aucune preuve générale n'a encore été acceptée par la communauté mathématique.

Dans cette note, nous proposons une approche par la théorie des graphes : nous modélisons les décompositions de Goldbach comme les centres d'un graphe triangulaire épointé T . Nous montrons que l'existence de ces centres implique la validité de la conjecture, en réduisant le problème à la propriété suivante d'un graphe : *tout graphe connexe fini possède au moins un centre.*

La preuve repose sur deux éléments essentiels :

- la préservation des centres du graphe triangulaire initial lorsqu'on supprime un point particulier de ce graphe ;
- le fait que les centres d'un graphe aient tous la même excentricité.

2. Définitions et construction du graphe

2.1 Ensembles X_n et Y_n .

Soit n un entier pair ≥ 6 . Définissons :

$$X_n = \{p_k \mid 3 \leq p_k \leq n - 3, p_k \text{ un nombre premier}\} \cup \{0, n\},$$
$$Y_n = \{n - p_k \mid p_k \in X_n\} \cup \{0, n\}.$$

Exemple :

Pour $n = 16$,

$$X_{16} = \{0, 3, 5, 7, 11, 13, 16\} \quad Y_{16} = \{16, 13, 11, 9, 5, 3, 0\}$$

2.2 Graphe grille G et graphe triangulaire épointé T

- Le graphe grille $G = (S, A)$ est défini par :
 - son ensemble de sommets S :

$$S = \{(x, y) \mid x \in X_n, y \in Y_n\}.$$

1. J'avais mal raisonné : je pensais qu'il suffisait d'enlever le coin (qui était un centre trivial) pour que ça marche (pensant que les autres centres resteraient, mais qui dit qu'il y en a forcément d'autres : il eût fallu pour que ça marche être capable de prouver qu'il y avait au moins deux centres dans le triangle non épointé, et ça, c'est ce qu'on appelle une démonstration circulaire sur CG, retour à la case départ), donc on s'en moque de cette histoire d'épointé : il faudrait maintenant être capable de raisonner sur les deux premières valeurs propres de la matrice d'adjacence et on peut laisser le coin, il ne gêne pas, oublions cet adjectif épointé.

- son ensemble d'arêtes, constitué d'arêtes horizontales et verticales entre sommets adjacents (séparés par une distance de Manhattan égale à 1).
- La fonction de numérotation f , qui énumère les sommets du premier au dernier dans l'ordre de lecture habituel, c'est-à-dire ligne par ligne, et dans chaque ligne, colonne par colonne.
- Le graphe triangulaire épointé T :
 - Soit T' le sous-graphe de G restreint aux sommets (x, y) avec $x \geq y$ (il contient les sommets situés sous la diagonale principale).
 - On procède à l'épointage de T' pour obtenir le graphe triangulaire épointé T : on supprime le sommet $(|X_n| - 1, 0)$ (ce sommet sera appelé la "pointe du triangle" et il correspond au coin bas-gauche du triangle).

Le graphe T est donc défini ainsi : $T = (S_T, A_T)$ avec

$$S_T = \{s_i | (f^{-1}(s_i) = (x_i, y_i) \in S) \wedge (x_i \geq y_i)\} \setminus \{(\text{Card}(X_n) - 1, 0)\},$$

$$A_T = \{a_i | (a_i = (s_i, s_j)) \wedge (a_i \in A) \wedge (s_i \in S_T) \wedge (s_j \in S_T)\}$$

Les arêtes sont orientées de haut en bas et de gauche à droite.

2.3 Étiquetage des arêtes

Les arêtes de T sont étiquetées par les écarts entre nombres premiers successifs, qui sont éléments de la suite ordonnée $\Delta_n = [s_1, s_2, \dots, s_k]$, où :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = 3 \text{ (premier saut de 0 au premier nombre premier impair 3),} \\ s_i = p_{i+1} - p_i \text{ pour } 2 \leq i \leq k - 1 \text{ (sauts entre nombres premiers consécutifs),} \\ s_k = n - \max\{p \in X_n \mid 3 \leq p \leq n - 3\} \\ \text{(dernier saut entre le plus grand nombre premier } \leq n - 3, \text{ et } n\text{).} \end{array} \right.$$

La fonction d'étiquetage des arêtes du graphe est alors :

$$\begin{array}{rcl} g : & A_T & \rightarrow \mathbb{N}^2 \\ & ((x_i, y_i), (x_i, y_i + 1)) & \mapsto s_i \\ & ((x_i, y_i), (x_i + 1, y_i)) & \mapsto s_i \end{array}$$

2.4 Distance et excentricité

Définissons les notions utilisés dans la démonstration : la notion de *distance entre 2 sommets*, la notion d'*excentricité d'un sommet*, et la notion de *centre d'un graphe*.

- *Distance entre 2 sommets* : dans T , la distance entre deux sommets est la longueur du plus court chemin, un ensemble d'arêtes orientées successives, reliant ces sommets ; la longueur d'un chemin est la somme des poids des arêtes constituant ce chemin ; les arêtes étant étiquetées par des écarts entre nombres premiers, la longueur d'un chemin de la source du graphe S (en

haut à gauche) vers tout point du graphe qui n'est pas sur le bord gauche du triangle est la somme de deux nombres premiers $p + q$, avec le nombre premier p qui est égal à la somme des étiquettes des arêtes verticales du chemin et le nombre premier q qui est égal à la somme des étiquettes des arêtes horizontales du chemin.

- *Excentricité* $e(s)$ d'un sommet s : elle est définie ainsi :

$$e(s) = \max\{d(s, s') \mid s' \in S_T\}.$$

- *Centre du graphe* T : Un sommet s est un centre du graphe T si

$$e(s) = \min\{e(s') \mid s' \in S_T\}.$$

Exemple : pour $n = 16$, $\Delta_{16} = [3, 2, 2, 4, 2, 3]$ (qui sont les écarts entre 0 et 3, 3 et 5, 5 et 7, 7 et 11, 11 et 13 et enfin, 13 et 16).

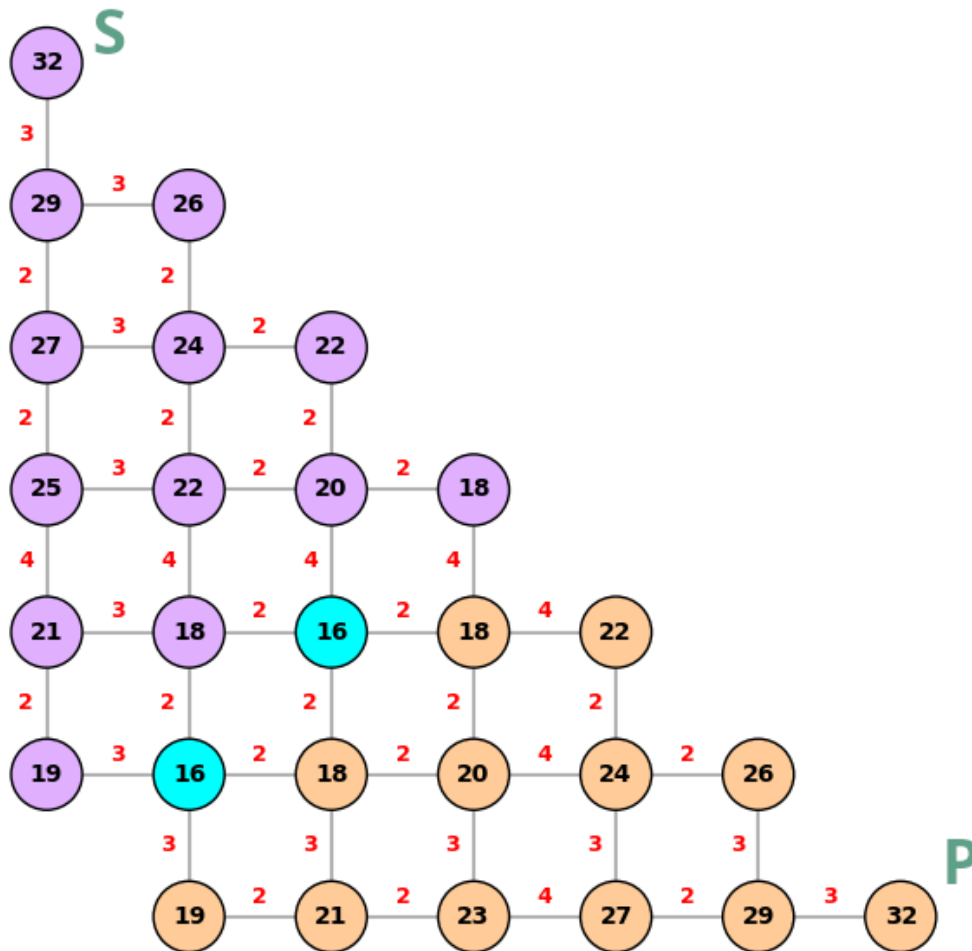


FIGURE 1 : graphe triangulaire épointé T pour $n = 16$.

3. Propriétés clés du graphe T

3.1 Connexité de T

Lemme 1 : T est connexe.

Preuve :

- T contient les sommets $(0, n)$ (dit “source” S) et $(n, 0)$ (dit “puits” P);
- Il existe un chemin monotone (dans lequel x ou y augmente lors de la traversée de chaque arête du chemin) entre tout sommet S et (x, y) d’une part, et entre (x, y) et P d’autre part;
- L’épointage du graphe triangulaire T' ne supprime qu’un seul sommet (la pointe), qui n’est pas nécessaire pour que la propriété de connexité de T soit vérifiée.

3.2 Excentricité des sommets

Lemme 2 : Pour tout sommet $s = (p, q)$ de T , son excentricité est donnée par :

$$e(s) = \max(d(s, S), d(s, P)), \text{ avec } S = (0, n) \text{ et } P = (n, 0).$$

Preuve :

- Dans un graphe grille, les distances les plus grandes depuis s sont celles de s vers les coins S et P .
- Les autres sommets s' sont “plus proches” de s que ne le sont S ou P , donc leur distance à s est inférieure ou égale à $\max(d(s, S), d(s, P))$. Trois preuves visuelles de ces distances qui sont maximales entre un point et S ou un point et P sont fournies en annexe.
- Calcul des excentricités : on peut remplacer $d(s, P)$ par $2n - p - q$ et $d(s, S)$ par $p + q$ dans le calcul de l’excentricité par calcul du maximum ci-dessus car ces valeurs sont celles qui nous ont servi à définir les coordonnées des sommets du graphe, et qu’on peut remplacer la longueur d’un chemin dans le graphe par la distance de Manhattan séparant dans le plan euclidien les points correspondants aux deux sommets :

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

On a donc, pour tout sommet s son excentricité qui est égale à :

$$e(s) = \max(2n - p - q, p + q).$$

3.3 Centres et décompositions de Goldbach

Théorème 1 : Les centres de T correspondent aux décompositions de Goldbach de n , c’est-à-dire aux sommets (p, q) avec $p + q = n$ et p et q premiers.

Preuve : a) les excentricités des sommets restent inchangées par l’épointage du graphe triangulaire : si l’excentricité d’un sommet était la longueur d’un chemin incluant la pointe $P = (n, 0)$, il existe dans le graphe épointé T (ne contenant pas P) un chemin qui évite P : il suffit de remplacer dans ce chemin les arêtes entrante (resp. sortante) de P par les arêtes de même longueur que ces deux arêtes

et qui sont l'une l'arête entrant dans le successeur de P dans le chemin passant par P (resp. l'arête sortant du prédécesseur de P dans le chemin passant par P). Les sommets dont l'excentricité ne dépendait pas du point P n'ont pas de raison de voir leur excentricité affectée par l'élimination de P .

b) les centres (autres que le centre trivial P) restent inchangés par l'épointage (la suppression du sommet P) du graphe triangulaire T' pour obtenir le graphe triangulaire épointé T qu'on a choisi d'utiliser :

- Les centres de T' ont une excentricité minimale n .
- Dans T , leur excentricité reste n , et elle est toujours minimale (car $e_T(s) \geq n$ pour tout $s \in T$).
- Donc les centres de T' sont aussi des centres de T .

En conclusion, l'épointage du graphe triangulaire ne modifie pas les centres ni leur excentricité. Les centres du graphe épointé T correspondent toujours aux décompositions de Goldbach de n .

Preuve que l'excentricité minimale est n :

- Dans le graphe épointé, l'excentricité minimale est n , car les centres du graphe non épointé avaient une excentricité égale à n , et que l'excentricité est conservée lors de l'épointage.

Ici, il manque un élément à la démonstration qui est que la pointe n'est pas le seul élément d'excentricité n dans le graphe triangulaire non épointé T' , mais elle en est un centre trivial. Nous pourrions compléter cette partie lorsque sera étudié l'algorithme de Roy-Floyd-Warshall, qui assure l'existence d'un autre centre au moins dans le graphe triangulaire épointé ; la preuve découlera d'une façon syntaxique très particulière de lire les étiquettes des arêtes, qui fait trouver toute une série de palindromes successifs dans des chemins en escalier, et qui fait que tout chemin en escalier centré par rapport à la diagonale principale a la suite de ses étiquettes qui est un mot palindromique. C'est vraisemblablement cette propriété qui fait qu'on a toujours dans le graphe épointé un sommet d'excentricité n quand la longueur du chemin maximum du graphe T rejoignant le point source S et le point puits P est de longueur $2n$.

- Les sommets avec $e(s) = n$ sont exactement ceux pour lesquels $\max(2n - p - q, p + q) = n$, c'est-à-dire ceux pour lesquels $p + q = n$ avec p et q premiers.

Tout point s a son excentricité qui est égale à $\max(d(s, S), d(s, P))$.

Si ce point est plus proche de S que de P , son excentricité est égale à $2n - p - q$: le maximum entre la distance qui le sépare de S et la distance qui le sépare de P , c'est la distance qui le sépare de P).

Si ce point est plus proche de P que de S , son excentricité est égale à $p + q$: le maximum entre la distance qui le sépare de S et la distance qui le sépare de P , c'est la distance qui le sépare de S .

Si un point s est d'excentricité minimale parmi toutes les excentricités possibles, il est d'excentricité n , $e(s) = \max(2n - pq, p + q) = n$. Deux cas sont possibles :

- soit $2n - p - q > p + q$, alors $\max(2n - p - q, p + q) = 2n - p - q$ mais si $2n - p - q = n$ alors $n = p + q$;
- soit $2n - p - q \leq p + q$, alors $\max(2n - p - q, p + q) = p + q$ mais si $p + q = n$, la conclusion est obtenue directement.

Théorème 2 : T contient au moins un centre.

Preuve : Tout graphe connexe fini non vide dont les arêtes sont orientées et étiquetées possède au moins un centre : c'est une propriété standard en théorie des graphes, pour un graphe non étiqueté, et l'extension de cette propriété à un graphe dont les arêtes sont orientées et étiquetées découlent de l'existence d'éléments maximaux et minimaux d'ensembles non vides.

Théorème 3 (Conjecture de Goldbach) : Tout entier pair $n \geq 6$ admet au moins une décomposition $n = p + q$ avec p et q premiers.

Preuve : Découle des Théorèmes 1 et 2 :

- T contient au moins un centre (Théorème 2).
- Ce centre correspond à une décomposition $n = p + q$ (Théorème 1).

4. Utilisation du calcul matriciel dans l'algèbre (min, plus) pour le calcul de plus court chemin par l'algorithme de Roy-Floyd-Warshall

Le calcul des plus courts chemins de tout sommet vers tout sommet d'un graphe (et donc en particulier vers les deux sommets source S et puits P) est effectué en suivant l'algorithme de Roy-Floyd-Warshall et en effectuant les calculs matriciels dans l'algèbre dite (min, plus). Dans cette algèbre, l'addition est remplacée par le calcul du minimum, et la multiplication est remplacée par l'addition. Le calcul des excentricités s'effectue en utilisant une matrice d'adjacence entre les sommets du graphe triangulaire épointé, qui sont au nombre de $\frac{k(k+1)}{2} + k$ en posant $k = \pi(n-3)$ (ce nombre $\pi(n-3)$ est le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à $n-3$. La valeur est correcte car si l'on observe bien le graphe triangulaire épointé, sa dernière ligne de sommets contient autant de sommets que son avant-dernière ligne, qui compte $\pi(n-3)$ sommets, dans la mesure où parmi les nombres premiers inférieurs ou égaux à $n-3$, on a omis le nombre premier 2, mais on a remplacé ce 2 par le nombre 0, utilisé dans les calculs des distances, et parce que le nombre d'intervalles séparant 2 nombres successifs d'une suite de k nombres est $k-1$). La présentation de l'algorithme de calcul de plus court chemin par cet algorithme se trouve dans l'article de Bernard Roy par aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences en 1959, "''"².

Ci-dessous est fournie la matrice initiale des distances entre sommets pour $n = 10$. Tous les éléments de la matrice sont initialisés à la valeur $+\infty$ (noté ∞) car on cherche un chemin le plus court possible et que $\min(x, +\infty) = x$. Les éléments de la diagonale de la matrice sont initialisés à 0 (car

². Roy, B., "''". C. R. Acad. Sci., Paris, vol. 249, 1959, p. 216-218. Voir <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3201c/f222.item>.

la distance de tout sommet à lui-même est nulle) et les écarts entre nombres premiers successifs (ou bien 3 ou bien l'écart entre le plus grand nombre premier inférieur ou égal à $n - 3$ et le nombre n) sont positionnés aux éléments adéquats de la matrice, du fait de la numérotation des sommets.

On rappelle que pour $n = 10$, $d = \pi(n - 3) = \pi(7) = 4$. Il y a $\frac{d(d + 1)}{2} + d = 14$ sommets dans le graphe.

Ci-dessous la numérotation des sommets et l'étiquetage des arêtes.

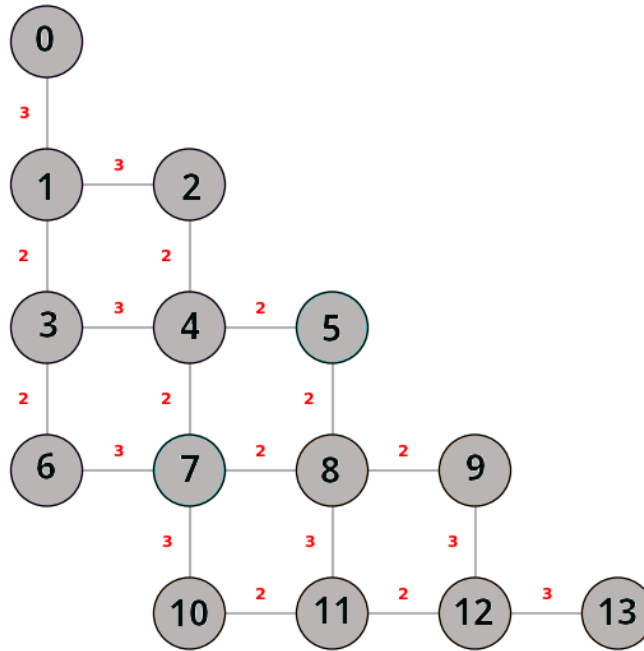


FIGURE 2 : numérotation des sommets de 0 à 13

Matrice initiale pour $n = 10$: La matrice M d'adjacence contenant les étiquettes des arêtes liant

les sommets entre eux est de taille 14×14 , c'est une matrice très creuse et symétrique.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 3 & 0 & 3 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 3 & 0 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 2 & \infty & 0 & 3 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 3 & 0 & 2 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 0 & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 3 & 0 & 2 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & 0 & 2 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & \infty & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 0 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & 2 & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & 2 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice ci-dessous fournit les excentricités calculées par l'algorithme de Dijkstra sur la matrice initiale M .

Matrice terminale des excentricités, calculée par l'algorithme de Roy-Floyd-Warshall de calcul du plus court chemin.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 5 & 8 & 10 & 7 & 10 & 12 & 14 & 13 & 15 & 17 & 20 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 5 & 7 & 4 & 7 & 9 & 11 & 10 & 12 & 14 & 17 \\ 6 & 3 & 0 & 5 & 2 & 4 & 7 & 4 & 6 & 8 & 7 & 9 & 11 & 14 \\ 5 & 2 & 5 & 0 & 3 & 5 & 2 & 5 & 7 & 9 & 8 & 10 & 12 & 15 \\ 8 & 5 & 2 & 3 & 0 & 2 & 5 & 2 & 4 & 6 & 5 & 7 & 9 & 12 \\ 10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 0 & 7 & 4 & 2 & 4 & 7 & 5 & 7 & 10 \\ 7 & 4 & 7 & 2 & 5 & 7 & 0 & 3 & 5 & 7 & 6 & 8 & 10 & 13 \\ 10 & 7 & 4 & 5 & 2 & 4 & 3 & 0 & 2 & 4 & 3 & 5 & 7 & 10 \\ 12 & 9 & 6 & 7 & 4 & 2 & 5 & 2 & 0 & 2 & 5 & 3 & 5 & 8 \\ 14 & 11 & 8 & 9 & 6 & 4 & 7 & 4 & 2 & 0 & 7 & 5 & 3 & 6 \\ 13 & 10 & 7 & 8 & 5 & 7 & 6 & 3 & 5 & 7 & 0 & 2 & 4 & 7 \\ 15 & 12 & 9 & 10 & 7 & 5 & 8 & 5 & 3 & 5 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 17 & 14 & 11 & 12 & 9 & 7 & 10 & 7 & 5 & 3 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 20 & 17 & 14 & 15 & 12 & 10 & 13 & 10 & 8 & 6 & 7 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Un petit opérateur syntaxique qui engendre les étiquettes des arêtes des chemins en escalier de façon automatique

Traitons deux exemples pour fixer les idées : $n = 10$, $X_{10} = [0,3,5,7,10]$ et $s_{10} = [3, 2, 2, 3]$. Trouvons les étiquettes des arêtes des chemins ainsi suivis :

chemin 1 : on double les uns à la suite des autres les éléments successifs de $s_{10} : [3,3,2,2,2,2,3,3]$.

chemin $k+1$ à partir du chemin k : pour trouver les étiquettes des arêtes du chemin s_{k+1} à partir des arêtes du chemin s_k : barrer les deux arêtes aux extrémités. Pour les arêtes restantes, les intervertir

dans chaque couple d'étiquettes d'arêtes successives, et ce jusqu'à ne plus avoir que 4 étiquettes en tout (on dispose alors des étiquettes des arêtes du chemin le plus court, en bas à gauche du graphe triangulaire épointé.

- On initialise une suite de nombres qui contient les écarts, chacun étant doublé, ainsi :

$$s_0 = [3, 3, 2, 2, 3, 3]$$

- On passe d'une séquence à la suivante ainsi :
 - a. on oublie le premier élément et le dernier élément de la séquence du niveau précédent : ici on oublie le 3 au tout début et le 5 à la toute fin de la suite s_0 , on réécrit les nombres restant (qui sont forcément en nombre pair car on était parti d'un nombre pair d'éléments dans s_0 en doublant le nombre d'éléments de X_n) en les permutant 2 à 2 ainsi :

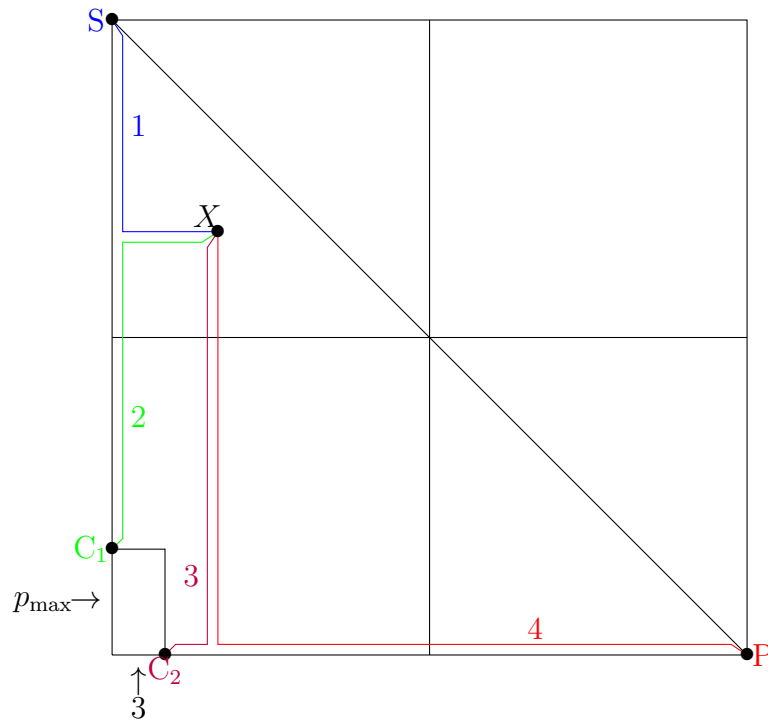
$$(3) \quad \begin{array}{ccc} 3 & & 2 \\ & \times & \\ 2 & & 3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 2 & & 3 \\ & \times & \\ 3 & & 2 \end{array} \quad (3)$$

7. Conclusion

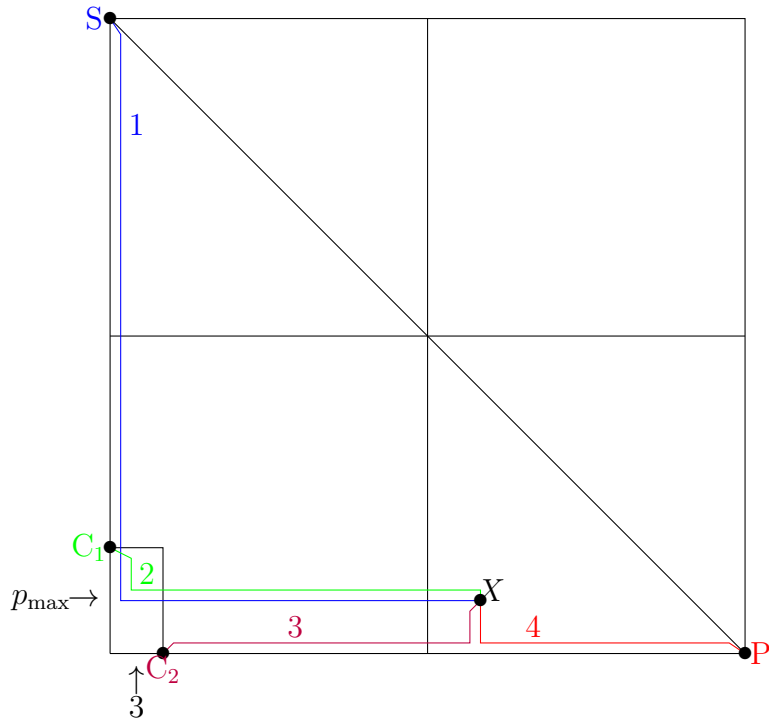
L'approche présentée ici, si elle s'avérait justifiée, aurait les avantages suivants : elle réduirait la conjecture de Goldbach à un fait de la théorie des graphes, qui est l'existence de centres dans un graphe connexe non vide dont les arêtes sont orientées et étiquetées (et l'existence de tels centres découle simplement de l'existence du minimum et du maximum de tout ensemble de nombres fini et non vide). Cette approche s'appuie sur une interprétation visuelle des décompositions de Goldbach. C'est une approche constructive : un programme permet de trouver explicitement les décompositions par calcul matriciel dans l'algèbre min-plus implémentant le calcul du plus court chemin de Dijkstra. L'un des arguments essentiels de la démonstration repose sur le fait que les centres ne sont pas affectés par la suppression de la pointe du graphe triangulaire utilisé, car des chemins de même longueur que ceux qui passent par la pointe dans le graphe triangulaire complet existent toujours. Le second argument important est l'unicité de l'excentricité des centres : tous les centres du graphe non épointé ont la même excentricité n , et cette propriété est conservée après épointage du graphe triangulaire. Si cette preuve s'avérait correcte et complète, on pourrait affirmer que tout nombre pair (sauf 2) est la somme de deux nombres premiers.

Annexe : il suffit de considérer les distances à la source S et au puits P dans le graphe triangulaire épointé T

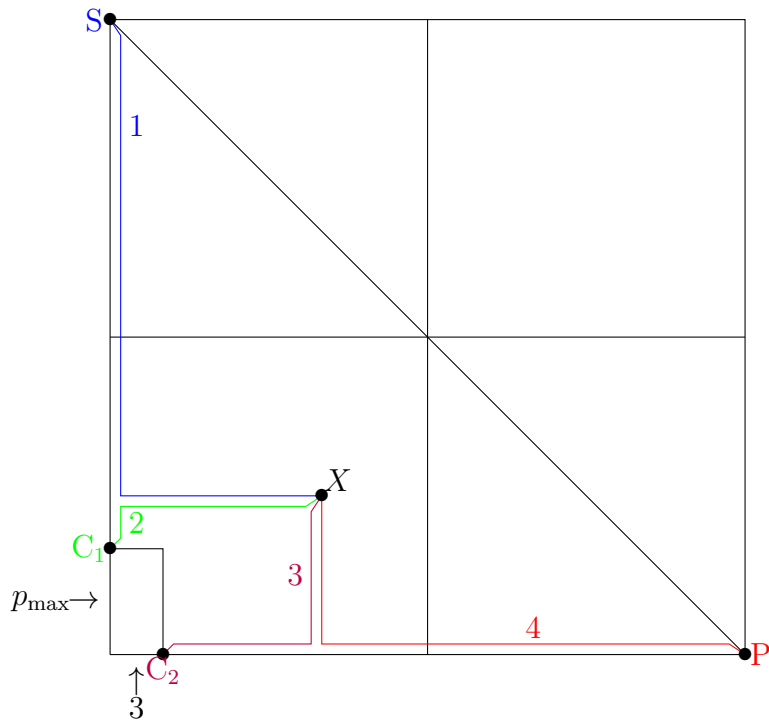
Preuves sans mots du fait qu'on peut ne tenir compte que des seules longueurs des chemins d'un point X vers S et de ce point X vers P pour calculer son excentricité (on a dessiné au mieux les chemins dont les longueurs sont des distances de Manhattan dans le plan euclidien, les chemins partent des points et aboutissent aux points, les petits détours en diagonale sont utiles pour écarter un peu les chemins des bords pour qu'ils soient plus visibles ; la notation $\ell(k)$ désigne la longueur du chemin k , les numéros des chemins étant indiqués en couleur) :



$$\begin{aligned} \ell(2) &\leq \ell(4) \\ \ell(3) &\leq \ell(4) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \ell(2) &\leq \ell(1) \\ \ell(3) &\leq \ell(1) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \ell(2) &\leq \ell(1) \\ \ell(3) &\leq \ell(4) \end{aligned}$$