Vers une preuve de la conjecture de Goldbach

Denise Vella

Novembre 2005

1 Introduction

Dans une lettre à Euler du 7 juin 1742, Goldbach énonce *"il semble que tout nombre supérieur à* 2 *soit la somme de trois nombres premiers"*. Euler reformule cette conjecture en une forme équivalente qui est *"tout nombre entier naturel pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers"*[1].

2 Tentative de preuve de la conjecture

On prouve la conjecture par récurrence :
1) elle est vraie pour les petits nombres pairs (en fait, elle a été vérifiée par Oliveira et Silva jusqu'à 2×10^{17} en février 2005).

2) il s'agit de prouver que si la conjecture est vérifiée par tous les nombres pairs jusqu'à un nombre premier p_i, elle est vérifiée par tous les nombres pairs compris entre p_i et p_{i+1}.
On va trouver les décompositions Goldbach des nombres pairs compris entre p_i et p_{i+1}, à partir de celles des nombres pairs inférieurs à p_{i-1}.

Construisons un tableau de deux lignes (que l'on appellera tableau du nombre premier p_{i-1}) de la façon suivante :
- la première ligne contient les nombres de p_{i-1} à $(p_{i-1}+1)/2$ dans l'ordre décroissant,
- la deuxième ligne contient les nombres de 0 à $(p_{i-1}-1)/2$ dans l'ordre croissant.

Définissons une relation $sym_{p_{i-1}}$ entre deux couples de colonnes $(c1, c2)$ et $(c3, c4)$ contenant chacune un nombre premier. Nous dirons que :

[1] Les recherches présentées ici ont été déclenchées par la lecture du roman de Doxiadis "Oncle Pétros et la Conjecture de Goldbach".

$$(c1,c2)sym(c3,c4) \iff \begin{cases} c1 \text{ contient } p1 \text{ premier et } np1 \text{ composé} \\ c2 \text{ contient } p2 \text{ premier et } np2 \text{ composé} \\ c3 \text{ contient } p3 \text{ premier et } np3 \text{ composé} \\ c4 \text{ contient } p4 \text{ premier et } np4 \text{ composé} \\ (p1+p2)+(p3+p4)+(np1+np2)+(np3+np4)=4p_{i-1} \\ p1+p2+p3+p4=2p_{i-1} \\ p1+p2=np3+np4 \\ p3+p4=np1+np2 \end{cases}$$

Reste alors à démontrer que quel que soit p_{i-1} premier, il existe toujours deux couples de colonnes dans le tableau de p_{i-1} en relation selon $sym_{p_{i-1}}$.

Une fois cela démontré, l'hypothèse de récurrence nous garantit l'existence de $p3$ et $p4$ comme constituant une des décompositions Goldbach de $2b$ inférieur à p_{i-1}. La relation $sym_{p_{i-1}}$ garantit quant à elle l'existence de couples de colonnes reliés par $sym_{p_{i-1}}$ qui nous fournissent une décomposition Goldbach pour $2a$ compris entre p_{i-1} et p_i qui est "symétrique" d'une décomposition Goldbach de $2b$ inférieur à p_{i-1}. Donc, quel que soit $2a$ compris entre p_{i-1} et p_i, il existe p_1 et p_2 premiers tels que $2a = p_1 + p_2$.

3 Voyons un exemple

Il s'agit de trouver les décompositions Goldbach des nombres pairs compris entre 23 et 29, soient 24, 26 et 28.

29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Nous allons trouver ces décompositions à partir des décompositions de leur symétrique par rapport au nombre premier précédent 23, dans le tableau correspondant à 23, par le principe de symétrie découlant de la loi de réciprocité.

23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$24 = 17 + 7$ car $(19 + 3) + (20 + 4) + (17 + 7) + (16 + 6) = 4 \times 23$.
$26 = 19 + 7$ car $(17 + 3) + (20 + 6) + (19 + 7) + (16 + 4) = 4 \times 23$.
$28 = 17 + 11$ car $(13 + 5) + (18 + 10) + (17 + 11) + (12 + 6) = 4 \times 23$.

4 Conclusion

Quand pourra-t-on utiliser la formulation *"tout entier naturel supérieur à 2 est le milieu de deux nombres premiers"* ?[2].

[2] According to Hardy, "It is comparatively easy to make clever guesses ; indeed there are theorems, like "Goldbach's Theorem", which have never been proved and which any fool could have guessed."

References

[1] C.F. Gauss. *Recherches arithmétiques*. Éd. Jacques Gabay, 1989.

[2] F. Casiro. *La conjecture de Goldbach, un défi en or*. Éd. Tangente n°78, décembre 2000, janvier 2001.

[3] A. Doxiadis. *Oncle Pétros et la conjecture de Goldbach*. Éd. Points Seuil 2003.

[4] M. Du Sautoy. *The music of the primes*. Éd. Fourth Estate, 2003.

[5] D. Vella-Chemla, D. Diaz. *"Using clp(FD) to Support Air Traffic Flow Management"*. Éd. Proceedings of International Logic Programming Symposium, 1994.