

1. Énoncé du mystère

Dans son édition des *Manuscripts de Évariste Galois* (Gauthier-Villars, 1908, p. 5), Jules Tannery écrit, à propos du texte de Galois :

“Le point le plus intéressant est que le théorème de Legendre (page 30, ligne 31),

$$FE' + EF' - FF' = \frac{\pi}{2},$$

est écrit par Galois non sous la forme qui précède, mais comme il suit :

$$E'F'' - E''F' = \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}.”$$

La question initiale : que sont F, E, F', E', F'', E'' , et pourquoi Galois réécrit-il l'identité réelle de Legendre sous une forme faisant intervenir $\sqrt{-1}$?

2. Ce qui est établi : le théorème de Legendre

Il s'agit de l'*identité de Legendre* (ou relation de Legendre), énoncée par Adrien-Marie Legendre en 1811 puis détaillée dans son *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes* (1825, chapitre XII). Avec les notations de Legendre, pour un module c et son complémentaire $b = \sqrt{1 - c^2}$:

- $F = F_1(c)$, $E = E_1(c)$: intégrales elliptiques complètes de première et deuxième espèce au module c ;
- $F' = F_1(b)$, $E' = E_1(b)$: les mêmes, au module complémentaire b .

La relation :

$$FE' + EF' - FF' = \frac{\pi}{2}$$

exprime, sous une formulation moderne, que le *Wronskien* des deux solutions indépendantes F, F' d'une même équation différentielle linéaire du second ordre (l'équation hypergéométrique associée à l'intégrale elliptique de première espèce) est constant.

Cette identité admet une seconde forme, équivalente, en termes des *périodes* et *quasi-périodes* de la fonction elliptique de Weierstrass : si ω_1, ω_2 sont les périodes de $\wp$ et η_1, η_2 les quasi-périodes de la fonction zêta de Weierstrass associée,

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2i\pi \quad (\text{à une normalisation près}).$$

C'est cette seconde forme qui contient nativement un facteur i .

3. Le contexte réel : la lettre-testament à Auguste Chevalier

La référence “page 30, ligne 31” renvoie à la pagination des *Œuvres mathématiques d’Évariste Galois* (Liouville, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, t. 11, 1846, p. 381-444). À cet endroit se trouve la fin de la **lettre à Auguste Chevalier du 29 mai 1832**, écrite par Galois la nuit précédant son duel.

Dans le passage concerné, Galois :

1. rappelle qu’une somme de termes d’une même fonction elliptique se réduit toujours à un seul terme plus des quantités algébriques ou logarithmiques (théorème d’addition d’Abel), et affirme qu’une propriété analogue vaut pour *toute* intégrale d’une fonction algébrique ;
2. énonce que le nombre de périodes distinctes de l’intégrale la plus générale associée à une irrationalité donnée est toujours pair - soit $2n$ ce nombre - et qu’une somme quelconque de termes se réduit à n termes plus des quantités algébriques et logarithmiques. (En langage moderne : n est le *genre* de la courbe algébrique sous-jacente, et $2n$ le nombre de périodes indépendantes de ses différentielles — soit, vingt ans avant Riemann, une anticipation de la théorie des intégrales abéliennes sur une courbe de genre n .)
3. ajoute immédiatement : “On peut en déduire aussi des théorèmes analogues au théorème de Legendre”, et donne, à titre d’illustration (cas $n = 1$, le cas elliptique), la formule

$$E'F'' - E''F' = \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}.$$

Des historiens des mathématiques ont noté ce même passage comme la trace d’une généralisation, par Galois, de l’équation de Legendre aux périodes des intégrales abéliennes - généralisation qui préfigure une relation établie rigoureusement plus tard par Weierstrass et Fuchs (cf. *Looking backward : From Euler to Riemann*, préface aux œuvres complètes de Galois).

4. Lecture proposée (plausible, non confirmée mot à mot par Tannery)

Le contexte - Galois vient de parler explicitement de *périodes*, non de modules complémentaires - suggère que F, E, F', E' ne désignent plus ici les intégrales complètes “au module k ” / “au module complémentaire k' ” comme chez Legendre, mais des **périodes obtenues par intégration le long de cycles fermés distincts** dans le plan complexe (en langage moderne, les cycles a et b d’un tore). La formule de Galois serait alors une instance particulière ($n = 1$) de la forme “périodes/quasi-périodes” de l’identité de Legendre — celle qui contient nativement un $\sqrt{-1}$ - plutôt qu’une transformation à module imaginaire (hypothèse initiale, abandonnée faute de correspondre au contexte).

Point resté ouvert : Tannery lui-même ne commente pas la signification précise de F'', E'' - il signale le fait sans l’expliquer. L’identification exacte entre la notation de Galois et les périodes/quasi-périodes au sens de Weierstrass reste donc une lecture reconstruite, cohérente avec le contexte et avec la littérature historique, mais non vérifiée mot à mot dans le texte source.

5. Piste ouverte : un lien avec l'équation de Chazy ?

Aucune dérivation formule-à-formule n'a été établie ici. La parenté est thématique :

- la relation de Legendre, sous sa forme périodes/quasi-périodes ($\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2i\pi$), mesure le défaut de modularité de la série d'Eisenstein quasi-modulaire E_2 ;
- ce défaut de modularité est précisément ce qui donne naissance à l'équation de Chazy, satisfaite par la combinaison adéquate de E_2, E_4, E_6 ;
- E_2 a pour coefficients de Fourier $\sigma(n)$, la somme des diviseurs.

La chaîne

$$\begin{aligned} \text{relation de Legendre (périodes)} &\rightarrow \text{quasi-modularité de } E_2 \\ &\rightarrow \text{équation de Chazy} \rightarrow \text{coefficients } \sigma(n) \end{aligned}$$

est réelle et documentée dans la littérature sur les formes quasi-modulaires.

6. Références

- [1] A.-M. Legendre, *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes*, t. 1, Paris, 1825, chap. XII.
- [2] É. Galois, *Œuvres mathématiques, Journal de mathématiques pures et appliquées*, sér. 1, t. 11, 1846, p. 381-444 (Lettre à Auguste Chevalier, 29 mai 1832, p. 408-415).
- [3] J. Tannery (éd.), *Manuscrits de Évariste Galois*, Gauthier-Villars, Paris, 1908, p. 4-5.
- [4] R. Bourgne, J.-P. Azra (éd.), *Écrits et mémoires mathématiques d'Évariste Galois*, Gauthier-Villars, 1962/1976.
- [5] Article “Identité de Legendre”, Wikipédia (fr).
- [6] “Looking backward : From Euler to Riemann” (préface historique aux Œuvres complètes de Galois), arXiv :1710.03982.