

Démonstration (erronée) de la présence forcée de a dans les portions verticales sous l'escalier de primalité
Denise Vella-Chemla pilotant l'ia mistral, 2026-07-26

1. Résumé

Ce document formalise une tentative de preuve que les portions verticales sous l'escalier de primalité (défini par les nombres 3, 5, 7, 9, ...) contiennent nécessairement la lettre a.

Cette preuve est incorrecte (voir Section 4.), mais elle illustre comment tes règles et ta géométrie interagissent.

2. Contexte et définitions

2.1. Pavage par trimino

Un **trimino** est un L retourné (symétrie horizontale) couvrant les cases :

L2
L1 L3

c'est-à-dire les positions (i, j) , $(i, j + 1)$, $(i + 1, j + 1)$ avec :

- L1 = $L(i, j)$ (bas-gauche),
- L2 = $L(i, j + 1)$ (haut-gauche),
- L3 = $L(i + 1, j + 1)$ (haut-droite).

Là, mistral n'a pas tenu compte de ce que je lui ai dit, est-ce la symétrie horizontale du L qui l'a induit en erreur ?...

Il fallait positionner les 3 lettres comme ci-dessous dans le trimino mais les positions en i, j sont correctes ensuite.

L2 L3
L1

2.2. Règles de transition

Les 16 règles sont résumées par la fonction $f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ où $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$:

$f(x, y)$	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	a	b	a	b
c	c	d	c	d
d	c	d	c	d

Interprétation algébrique : en identifiant $a = (0, 0)$, $b = (0, 1)$, $c = (1, 0)$, $d = (1, 1)$, on a :

$$f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1, y_2).$$

2.3. Escalier de primalité

L'escalier violet est défini par les positions $(2k, k)$ pour $k \geq 0$, avec :

$$L(2k, k) = \begin{cases} \mathbf{a} & \text{si } 2k + 3 \text{ est premier,} \\ \mathbf{d} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple : $(0, 0) = \mathbf{a}$ (correspondant à la primalité de 3 dans la somme $3 + 3$), $(2, 1) = \mathbf{a}$ (primalité de 5 dans la somme $5 + 3$), $(4, 2) = \mathbf{a}$ (primalité de 7 dans la somme $7 + 3$), $(6, 3) = \mathbf{d}$ (primalité de 9 dans la somme $9 + 3$), etc.

3. Démonstration (erronée) de la présence obligatoire d'un $\mathbf{a}$ au moins par verticale

3.1. Analyse locale autour d'un $\mathbf{d}$ de l'escalier

Prenons $(6, 3) = \mathbf{d}$ (pour $k = 3$, car 9 n'est pas premier). On étudie les trimino adjacents :

1. **Trimino 1** : $(5, 2), (6, 2), (6, 3)$
 - $L3 = \mathbf{d} = f(L1, L2) \implies (L1, L2) \in \{(c, b), (c, d), (d, b), (d, d)\}$.
 - Donc : $L(5, 2) \in \{c, d\}$ et $L(6, 2) \in \{b, d\}$.
2. **Trimino 2** : $(5, 2), (5, 3), (6, 3)$
 - $L3 = \mathbf{d} = f(L1, L2)$ avec $L1 = L(5, 2) \in \{c, d\}$.
 - Si $L1 = c$: $f(c, L2) = \mathbf{d} \implies L2 \in \{b, d\}$.
 - Si $L1 = d$: $f(d, L2) = \mathbf{d} \implies L2 \in \{b, d\}$.
 - Donc : $L(5, 3) \in \{b, d\}$.
3. **Trimino 3** : $(4, 2), (5, 2), (5, 3)$
 - $L3 = L(5, 3) \in \{b, d\} = f(L1, L2)$ avec $L2 = L(5, 2) \in \{c, d\}$.
 - Si $L2 = c$: $f(L1, c) \in \{a, c\} \implies$ contradiction (car $L3 \in \{b, d\}$).
 - Donc : $L(5, 2) = \mathbf{d}$ et $L(5, 3) \in \{b, d\}$.
4. **Trimino 4** : $(4, 1), (5, 1), (5, 2) = \mathbf{d}$
 - $L3 = \mathbf{d} = f(L1, L2) \implies (L1, L2) \in \{(c, b), (c, d), (d, b), (d, d)\}$.
 - Donc : $L(4, 1) \in \{c, d\}$ et $L(5, 1) \in \{b, d\}$.
5. **Trimino 5** : $(4, 1), (4, 2), (5, 2) = \mathbf{d}$
 - $L3 = \mathbf{d} = f(L1, L2)$ avec $L1 = L(4, 1) \in \{c, d\}$.
 - Si $L1 = c$: $f(c, L2) = \mathbf{d} \implies L2 \in \{b, d\}$.
 - Si $L1 = d$: $f(d, L2) = \mathbf{d} \implies L2 \in \{b, d\}$.
 - Donc : $L(4, 2) \in \{b, d\}$.

3.2. Conclusion partielle (erronée)

En combinant ces contraintes, on pourrait penser que la colonne $x = 6$ doit contenir un **a**.

Mais ce n'est pas le cas car on peut avoir :

$$L(6, 0) = \mathbf{b}, \quad L(6, 1) = \mathbf{b}, \quad L(6, 2) = \mathbf{b}, \quad L(6, 3) = \mathbf{d},$$

sans violer aucune règle. Par exemple :

- trimino $(5, 2) = \mathbf{d}$, $(6, 2) = \mathbf{b}$, $(6, 3) = \mathbf{d}$: $f(\mathbf{d}, \mathbf{b}) = \mathbf{d}$ ✓
- trimino $(6, 1) = \mathbf{b}$, $(6, 2) = \mathbf{b}$, $(7, 2) = \mathbf{b}$: $f(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = \mathbf{b}$ ✓
- etc.

4. Limites et correction

Erreur identifiée : la démonstration suppose à tort que les contraintes locales forcent l'existence d'une lettre **a** dans chaque colonne. En réalité, comme montré ci-dessus, une colonne peut être entièrement composée de $\{\mathbf{b}, \mathbf{d}\}$ sans violer les règles.

Pourquoi c'est important : si cette preuve était correcte, elle impliquerait une résolution de la conjecture de Goldbach (un problème ouvert depuis 284 ans). L'erreur confirme que :

- les contraintes locales ne suffisent pas à forcer **a**.
- une analyse **globale** (pavage entier + invariance) est nécessaire.

Piste pour une vraie preuve : ton invariance par translation (dans 6 directions : J'avais dit à mistral que dans un pavage par triminos, les 16 règles étaient respectées si on mettait les triminos en partant par exemple d'une position (x, y) mais qu'on pouvait également voir toutes les règles respectées en prenant les triminos à partir des positions $(x + 1, y)$ ou $(x - 1, y)$ ou $(x, y + 1)$ ou $(x, y - 1)$ ou $(x + 1, y + 1)$ ou $(x - 1, y - 1)$, soit 7 pavages possibles par triminos pour un ensemble de lettres données sur le plan.) suggère que le pavage est périodique (Non, pas du tout : mon idée consistait à bouger les délimitations des triminos, pas les triminos eux-mêmes.).

Si on arrive à montrer que :

1. les pavages périodiques valides **doivent** contenir **a**,
2. ET que ta zone triangulaire **interdit** les pavages sans **a**,

alors la conjecture serait démontrée. Mais cela reste à prouver !

Mistral répond à ma blague : Merci pour cette formalisation ingénieuse ! Et oui, dans le Sud, le mistral peut effectivement "décorner les bœufs" - mais ici, c'est la conjecture qui résiste encore et toujours à nos assauts.

