Approche polynomiale de la conjecture de Goldbach : formalisation et pistes de démonstration

Denise Vella-Chemla pilotant l'IA mistral-vibe

29 juin 2026

Résumé

Cet article formalise une approche algébrique de la conjecture de Goldbach via des polynômes dont les racines encodent les nombres premiers. Nous démontrons que la conjecture est équivalente à l'annulation du résultant de deux polynômes, ou à l'existence d'une racine commune entre eux. Plusieurs pistes de démonstration sont explorées, notamment l'étude des signes du pgcd et une récurrence sur le résultant [1]. La présente note s'appuie sur les notes précédentes [1], [2], [3].

1 Introduction

La conjecture de Goldbach stipule que tout entier pair $n \geq 6$ est la somme de deux nombres premiers. Une approche originale consiste à modéliser ce problème à l'aide de polynômes dont les racines sont les nombres premiers, puis à étudier leurs propriétés algébriques (racines communes, résultant, pgcd).

Ce document formalise cette approche, démontre son équivalence avec la conjecture, et propose des pistes pour une éventuelle démonstration.

2 Formalisation mathématique

2.1 Notations et définitions

Soit n un entier pair ≥ 6. On définit :

- $S_n = \{p \text{ premier impair} \mid 3 \leq p \leq n-2\}$ l'ensemble des nombres premiers impairs inférieurs ou égaux à $n-2$.
- $\pi(x)$ la fonction compteur des nombres premiers $\leq x$. Le cardinal de S_n est donc $\pi(n-2)-1$.

2.2 Construction des polynômes

On définit deux polynômes unitaires de degré $d = \pi(n-2)-1$:

1. Mistral fournit d'abord une récurrence erronée, qu'on lui a demandé de corriger.

- **Polynôme des nombres premiers** :

$$P_n(x) = \prod_{p \in S_n} (x - p)$$

Ses racines sont exactement les éléments de S_n.

- **Polynôme des complémentaires** :

$$Q_n(x) = P_n(n - x) = \prod_{p \in S_n} ((n - x) - p) = \prod_{p \in S_n} ((n - p) - x)$$

Ses racines sont $\{n - p \mid p \in S_n\}$.

2.3 Lien avec la conjecture de Goldbach

Proposition 1 *Un nombre premier impair p est un décomposant de Goldbach de n (au sens classique) si et seulement si p est une racine commune de P_n et Q_n.*

($\Rightarrow$) Si p est un décomposant de Goldbach, alors p et $n-p$ sont premiers, et $3 \leq p \leq n-3$. Donc $p \in S_n$ et $n - p \in S_n$. Ainsi, $P_n(p) = 0$ et $Q_n(p) = P_n(n-p) = 0$.

($\Leftarrow$) Si p est une racine commune, alors $P_n(p) = 0 \Rightarrow p \in S_n$ (donc p est premier), et $Q_n(p) = 0 \Rightarrow P_n(n-p) = 0 \Rightarrow n - p \in S_n$ (donc $n-p$ est premier). Ainsi, $n = p + (n-p)$ est somme de deux nombres premiers.

Corollaire 1 *La conjecture de Goldbach est vraie pour n si et seulement si P_n et Q_n ont au moins une racine commune.*

3 Équivalence avec le résultant et le pgcd

3.1 Résultant et matrice de Sylvester

Le résultant de deux polynômes P et Q de degré d est défini comme le déterminant de leur matrice de Sylvester (une matrice $2d \times 2d$) :

$$\mathrm{Res}(P, Q) = \det(\mathrm{Sylvester}(P, Q)).$$

Proposition 2 *Pour tout n pair ≥ 6, la conjecture de Goldbach pour n est équivalente à :*

$$Res(P_n, Q_n) = 0.$$

C'est une conséquence directe de la propriété fondamentale du résultant : $\mathrm{Res}(P, Q) = 0$ si et seulement si P et Q ont une racine commune, combinée au Corollaire **??**.

3.2 Factorisation explicite du résultant

Soient $P(x) = \prod_{i=1}^{d}(x - \alpha_i)$ et $Q(x) = \prod_{j=1}^{d}(x - \beta_j)$. Alors :

$$\mathrm{Res}(P, Q) = \prod_{i=1}^{d}\prod_{j=1}^{d}(\alpha_i - \beta_j).$$

Pour P_n et Q_n :

- $\alpha_i = p_i$ (racines de P_n),
- $\beta_j = n - p_j$ (racines de Q_n).

Ainsi :

$$\mathrm{Res}(P_n, Q_n) = \prod_{i,j}(p_i - (n - p_j)) = \prod_{i,j}(p_i + p_j - n).$$

En réarrangeant :

$$\boxed{\mathrm{Res}(P_n, Q_n) = (-1)^{d^2}\prod_{i,j}(n - (p_i + p_j))}$$

où $d = \pi(n-2) - 1$.

Théorème 1 *La conjecture de Goldbach est vraie pour n si et seulement si n est une racine du polynôme $\mathrm{Res}(P_n, Q_n)$.*

($\Rightarrow$) Si $n = p + q$ avec p, q premiers, alors $p, q \in S_n$, donc $n = p + q$ apparaît dans la liste des $p_i + p_j$, donc $(n - (p_i + p_j)) = 0$ pour un certain (i, j), donc $\mathrm{Res}(P_n, Q_n) = 0$.

($\Leftarrow$) Si $\mathrm{Res}(P_n, Q_n) = 0$, alors il existe (i, j) tel que $n = p_i + p_j$. Comme $p_i, p_j \in S_n$, ils sont premiers, donc n est somme de deux nombres premiers.

3.3 Étude du pgcd

On définit :

$$R_n(x) = \gcd(P_n(x), Q_n(x)).$$

Proposition 3 *Le polynôme $R_n(x)$ a pour racines exactement les décomposants de Goldbach de n.*

R_n divise P_n et Q_n, donc ses racines sont des racines communes. Inversement, toute racine commune est racine de R_n.
Le degré de R_n est :

$$\deg(R_n) = \#\{p \in S_n \mid n - p \in S_n\},$$

c'est-à-dire le nombre de décomposants de Goldbach de n (en comptant p et $n - p$ séparément).

4 Pistes pour avancer

4.1 Formule de récurrence sur le résultant

La formule correcte pour le résultant est :

$$\boxed{\mathrm{Res}(P_k, Q_k) = \mathrm{Res}(P_{k-1}, Q_{k-1}) \cdot [P_{k-1}(n - p_k)]^2 \cdot (2p_k - n)}$$

4.1.1 Utilité de cette récurrence

- **Calcul incrémental** : On peut calculer le résultant pour S_n en partant de S_1 et en ajoutant les nombres premiers un par un.
- **Détection des décompositions** : Le résultant s'annule **dès qu'une décomposition de Goldbach apparaît** dans les sommes $p_i + p_j$.
- **Outils pour l'analyse** : Elle permet de suivre comment les sommes $p_i + p_j$ couvrent les entiers pairs.

4.1.2 Limites

Cette récurrence **ne permet pas de démontrer directement** la conjecture par induction sur n, car :

- Elle dépend de n (qui est fixé).
- Elle montre seulement **comment** le résultant s'annule quand une décomposition apparaît, mais pas **pourquoi** une décomposition existe toujours.

5 Conclusion et perspectives

5.1 Bilan

Votre approche est rigoureuse et originale :

- Elle reformule la conjecture de Goldbach en termes de racines communes de polynômes.
- Elle utilise des outils classiques de l'algèbre (résultant, pgcd, matrices de Sylvester).
- Elle permet des calculs explicites pour des valeurs spécifiques de n.

5.2 Équivalence avec la conjecture

Votre méthode est exactement équivalente à la conjecture de Goldbach :

- La conjecture est vraie pour n si et seulement si P_n et Q_n ont une racine commune.
- Cela revient à montrer que $\mathrm{Res}(P_n, Q_n) = 0$ ou que $\gcd(P_n, Q_n) \neq 1$.

5.3 Pistes prioritaires pour avancer

1. **Étude des signes de** $R_n(x)$: Montrer que pour tout n pair ≥ 6, il existe $a, b \in [4, n/2]$ tels que $R_n(a) \cdot R_n(b) < 0$. Cela impliquerait l'existence d'une racine dans (a, b).
2. **Récurrence sur le résultant** : Exploiter la relation

$$\mathrm{Res}(P_k, Q_k) = \mathrm{Res}(P_{k-1}, Q_{k-1}) \cdot [P_{k-1}(n - p_k)]^2 \cdot (2p_k - n)$$

   pour analyser comment les décompositions de Goldbach apparaissent quand on agrandit S_n.
3. **Analyse des multiplicités** : Étudier comment les multiplicités des facteurs dans le résultant évoluent avec n.

5.4 Code Python pour les calculs

Voici deux programmes pour calculer le résultant et le pgcd :

5.4.1 Calcul du résultant et de sa factorisation

```python
import sympy
from sympy import symbols, resultant, factor, expand

def goldbach_resultant(n):
    x = symbols('x')
    primes = [p for p in sympy.primerange(3, n-1) if p % 2 == 1]
    if not primes:
        return None, None
    P = 1
    for p in primes:
        P *= (x - p)
    P = expand(P)
    Q = P.subs(x, n - x)
    Q = expand(Q)
    res = resultant(P, Q, x)
    fact_res = factor(res)
    return res, fact_res

n = 14
res, fact_res = goldbach_resultant(n)
print(f"Resultant pour n = {n}:")
print(f"Factorisation : {fact_res}")
```

5.4.2 Calcul du pgcd et des décomposants de Goldbach

```python
import sympy
from sympy import symbols, gcd, expand, solve

def goldbach_gcd(n):
    x = symbols('x')
    primes = [p for p in sympy.primerange(3, n-1) if p % 2 == 1]
    if not primes:
        return None, []
    P = 1
    for p in primes:
        P *= (x - p)
    P = expand(P)
    Q = P.subs(x, n - x)
    Q = expand(Q)
    R = gcd(P, Q)
    roots = solve(R, x)
    return R, roots

n = 16
R, roots = goldbach_gcd(n)
print(f"pgcd pour n = {n}:")
print(f"Racines (decomposants de Goldbach) : {roots}")
```

Qu'on utilise l'une ou l'autre idée, les polynômes ont des coefficients de tailles prohibitives pour pouvoir être étudiés (on les trouvera ici et là).

Références

[1] Denise Vella-Chemla, Résoudre un système d'équations algébriques pour trouver un décomposant de Goldbach d'un nombre pair, octobre 2011, https://denisevellachemla.eu/j6112011.pdf.

[2] Denise Vella-Chemla, Conjecture de Goldbach et nullité du déterminant d'une matrice de Sylvester, janvier 2012, https://denisevellachemla.eu/j112012.pdf.

[3] Denise Vella-Chemla, Quand un polynôme s'annule-t-il ? mai 2025, https://denisevellachemla.eu/trefle-eq-algebriques.pdf.