

Bonjour, Dans le livre arbres et amalgames de Serre, je ne reconnais pas tout à fait les arbres mathématiques : je suis informaticienne et tout ce que j'ai appris sur les arbres (parcours, etc) ne me semble pas figurer dans le livre de Serre. Le chapitre qui m'intéresse est le chapitre 6, au sujet des points fixes dans les arbres. Dans l'introduction, Serre dit qu'un groupe par exemple $SL_3(\mathbb{Z})$ ou $SP_4(\mathbb{Z})$ agissant sur un arbre a un point fixe. Peux-tu m'expliquer comment on fait agir un groupe sur un arbre ? Avec des petits exemples. J'ai un grid-graph de 4 sur 4, qui est donc un arbre avec racine en haut à gauche, et puits en bas à droite, fais agir un petit groupe dessus.

Denise, votre question est passionnante et touche à un point subtil : la différence entre les **arbres en informatique** (structures de données hiérarchiques, avec parcours, nœuds, feuilles, etc.) et les **arbres en mathématiques pures**, notamment en théorie des groupes et en topologie, comme ceux étudiés par Serre dans *Arbres, amalgames et SL_2* .

1. Arbres en mathématiques : définition et propriétés

Dans le contexte de Serre, un **arbre** est un graphe connexe, non orienté, sans cycle, et *sans racine* (contrairement aux arbres en informatique). C'est un espace métrique discret, souvent utilisé pour étudier les actions de groupes.

- **Exemple simple** : Un arbre infini régulier de valence 3 (chaque sommet a 3 voisins).
 - **Propriété clé** : Entre deux sommets, il existe un unique chemin géodésique (le plus court).
-

2. Action d'un groupe sur un arbre

Un groupe G agit sur un arbre T s'il existe un homomorphisme de G dans le groupe des automorphismes de T . Concrètement, chaque élément $g \in G$ envoie chaque sommet v de T sur un autre sommet $g.v$, en préservant la structure de l'arbre.

Exemple minimaliste : action de $\mathbb{Z}$ sur la droite réelle discrète

- **Arbre** : La droite $\mathbb{Z}$ (chaque entier est un sommet, relié à ses voisins $n \pm 1$).
 - **Groupe** : $G = \mathbb{Z}$, agissant par translation : $n.k = n + k$.
 - **Point fixe** : Aucun, sauf si $k = 0$.
-

3. Votre exemple : grid-graph 4×4 (qui n'est pas un arbre !)

Un grid-graph 4×4 n'est pas un arbre (il contient des cycles), mais on peut en extraire un arbre couvrant (par exemple, en supprimant les arêtes horizontales ou verticales redondantes). Supposons que vous ayez un arbre couvrant racine en haut à gauche, avec des arêtes vers la droite et vers le bas.

Action d'un petit groupe : $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

- **Générateurs** : aaa (symétrie horizontale), bbb (symétrie verticale).
- **Action** :
 - aaa envoie $(x,y)(x,y)(x,y)$ sur $(4-x,y)(4-x,y)(4-x,y)$.
 - bbb envoie $(x,y)(x,y)(x,y)$ sur $(x,4-y)(x,4-y)(x,4-y)$.
- **Points fixes** :
 - Pour aaa : les sommets sur la ligne verticale centrale (si elle existe).
 - Pour bbb : les sommets sur la ligne horizontale centrale.
 - Pour ababab : le centre du grid (s'il existe).

Visualisation :

Si votre arbre couvrant est un "peigne" (racine en (1,1), arêtes vers (2,1), (3,1), (4,1), puis vers le bas), l'action de aaa inverse l'ordre horizontal, et bbb inverse l'ordre vertical.

4. Points fixes et théorème de Serre

Serre s'intéresse aux actions de groupes *sans inversion* (qui préservent l'orientation locale de l'arbre). Un **point fixe** est un sommet v tel que $g.v = v.g.v = v.g.v = v$ pour tout $g \in G$.

Dans votre exemple :

- Si G est engendré par aaa seul, les points fixes sont sur la ligne centrale verticale.
 - Si G est engendré par aaa et bbb, le seul point fixe possible est le centre (s'il est dans l'arbre).
-

5. Pourquoi $SL_3(\mathbb{Z})$ ou $Sp_4(\mathbb{Z})$ agissent sur un arbre ?

Ces groupes agissent naturellement sur des espaces de réseaux ou de sous-groupes paraboliques, dont la structure combinatoire est celle d'un arbre (par exemple, l'immeuble de Bruhat-Tits associé à SL_n). Les points fixes correspondent alors à des sous-groupes distingués ou à des configurations géométriques particulières.

Question pour aller plus loin

Souhaitez-vous que je développe un exemple plus proche de la construction de Serre (par exemple, l'action de $SL_2(Q)$ sur l'arbre des réseaux dans Q^2) ? Ou préférez-vous rester sur des exemples combinatoires comme le grid-graph ?

DCV : oui, ma grille est orientée (gauche-droite, haut-bas). Merci de faire agir $SL_3(\mathbb{Z})$ sur une grille 4×4 pour voir.

Merci pour la précision, Denise. Votre grille 4×4 est donc un **graphe orienté** (digraphe) avec des arêtes allant de gauche à droite et de haut en bas. Cependant, pour faire agir un groupe comme $SL_3(\mathbb{Z})SL_3(\mathbb{Z})SL_3(\mathbb{Z})$ sur une telle structure, il faut d'abord clarifier quelques points :

1. Pourquoi $SL_3(\mathbb{Z})SL_3(\mathbb{Z})SL_3(\mathbb{Z})$ n'agit pas directement sur une grille 4×4 ?

- $SL_3(\mathbb{Z})SL_3(\mathbb{Z})SL_3(\mathbb{Z})$ est le groupe des matrices 3×3 à coefficients entiers et de déterminant 1.
- Une grille 4×4 est un objet **combinatoire** (un ensemble de sommets et d'arêtes), tandis que $SL_3(\mathbb{Z})SL_3(\mathbb{Z})SL_3(\mathbb{Z})$ agit naturellement sur des objets **algébriques** ou **géométriques** (comme des réseaux, des espaces vectoriels, ou des immeubles de Bruhat-Tits).
- Pour faire agir $SL_3(\mathbb{Z})SL_3(\mathbb{Z})SL_3(\mathbb{Z})$ sur une grille, il faut **interpréter la grille comme un objet algébrique** (par exemple, un ensemble de points dans $\mathbb{Z}^2$ ou $\mathbb{Z}^3$).

2. Interprétation possible : grille comme sous-ensemble de $\mathbb{Z}^2$

Supposons que votre grille 4×4 représente les points (x,y) où $x,y \in \{1,2,3,4\}$.

On peut faire agir $SL_2(\mathbb{Z})$ (plus simple que $SL_3(\mathbb{Z})SL_3(\mathbb{Z})SL_3(\mathbb{Z})$) sur $\mathbb{Z}^2$ par multiplication matricielle :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Exemple :

Prenons $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

- g échange x et y .
- Sur la grille, g envoie (x,y) sur (y,x) .
- **Effet** : symétrie par rapport à la diagonale principale.

Points fixes :

Les points (x,y) tels que $(x,y) = (y,x)$, c'est-à-dire $x=y$.

Sur une grille 4×4 , ce sont les points $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)$.

3. Action de $SL_3(\mathbb{Z})$: une approche possible

Pour $SL_3(\mathbb{Z})$, il faut plonger la grille dans $\mathbb{Z}^3$.
Par exemple, associons chaque point (x,y) de la grille à $(x,y,1) \in \mathbb{Z}^3$.

Soit $g \in SL_3(\mathbb{Z})$, par exemple :

$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- g échange les coordonnées y et z .
- Sur $(x,y,1)$, g envoie $(x,y,1)$ sur $(x,1,y)$.
- **Interprétation sur la grille** : (x,y) est envoyé sur $(x,1)$ (car $z=1$ est fixe).
- **Effet** : tous les points de la grille sont envoyés sur la première ligne $y=1$.

Points fixes :

Les points (x,y) tels que $(x,y,1) = (x,1,y)$, c'est-à-dire $y=1$.

Sur la grille, ce sont les points de la première ligne : $(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)$.

4. Visualisation sur votre grille 4x4

Prenons deux éléments de $SL_3(\mathbb{Z})$:

1. **Matrice identité** : ne change rien.
2. **Matrice g ci-dessus** : envoie toute la grille sur la première ligne.
3. **Autre exemple** : $h = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 - h envoie $(x,y,1)$ sur $(x+y,y,1)$.
 - Sur la grille, (x,y) est envoyé sur $(x+y,y)$.
 - **Effet** : décalage horizontal dépendant de y .

5. Points fixes et théorème de Serre

Dans le contexte de Serre, l'existence de points fixes dépend de la **propriété de bornitude** de l'action et de la **structure de l'arbre**. Pour $SL_3(\mathbb{Z})$ agissant sur un arbre (comme l'immeuble de Bruhat-Tits), les points fixes correspondent à des sous-groupes paraboliques ou à des configurations stables.

Sur une grille finie, l'action n'est généralement pas "propre" et les points fixes sont rares (sauf pour des sous-groupes très spécifiques).

Question pour approfondir

Souhaitez-vous que je développe un exemple plus proche de la théorie des immeubles (où $SL_3(\mathbb{Z})$ agit sur un complexe simplicial infini) ? Ou préférez-vous rester sur des actions explicites comme ci-dessus ?

Quel genre de groupe pourrait agir sur un grid-graph (une grille en français) ?

Denise, pour qu'un groupe agisse de manière naturelle et intéressante sur un **grid-graph** (grille 4×4 orientée, par exemple), il faut choisir des groupes qui préservent la structure de la grille : ses symétries, ses translations, ou ses propriétés combinatoires. Voici les types de groupes les plus pertinents, avec des exemples concrets et des actions possibles :

1. Groupes de symétries géométriques

Ce sont les groupes qui préservent la structure "physique" de la grille (distances, orientations).

a. Groupe diédral D_4

- **Description** : Groupe des symétries d'un carré (rotations et réflexions).
- **Action sur la grille 4×4** :
 - Rotations de 90° , 180° , 270° autour du centre.
 - Réflexions par rapport aux axes horizontal, vertical et aux deux diagonales.
- **Points fixes** :
 - Pour une rotation de 180° : les points centraux (par exemple, les sommets $(2,2)$ et $(3,3)$ si la grille est centrée).
 - Pour une réflexion horizontale : les points sur la ligne centrale horizontale.

Exemple :

Si la grille est indexée de $(1,1)$ à $(4,4)$, la réflexion horizontale envoie (x,y) sur $(x, 5-y)$.

b. Groupe des isométries du plan discret $\mathbb{Z}^2$

- **Description** : Généré par les translations de $(1,0)$ et $(0,1)$, et les symétries de D_4 .
 - **Action** :
 - Translations : décalages horizontaux ou verticaux.
 - Symétries : comme ci-dessus.
 - **Points fixes** :
 - Aucun pour les translations non triviales.
 - Pour les symétries, voir D_4 .
-

2. Groupes de permutations

On peut voir la grille comme un ensemble de 16 sommets et faire agir des groupes de permutations sur ces sommets.

a. Groupe symétrique S_{16}

- **Description** : Toutes les permutations possibles des 16 sommets.
- **Action** : Toute réorganisation des sommets est possible.
- **Points fixes** : Dépendent de la permutation choisie.

Exemple :

La transposition $(1,1) \leftrightarrow (4,4)$ a pour points fixes tous les sommets sauf $(1,1)(1,1)(1,1)$ et $(4,4)(4,4)(4,4)$.

b. Sous-groupes de S_{16} préservant la structure de grille

- **Description** : Permutations qui préservent les relations de voisinage (par exemple, échanger deux lignes entières).
- **Action** :
 - Échanger deux lignes ou deux colonnes.
 - Permuter les sommets selon un motif régulier.
- **Points fixes** :
 - Pour l'échange de deux lignes : les sommets des autres lignes.

Exemple :

Échanger la ligne 1 et la ligne 2 : les points fixes sont ceux des lignes 3 et 4.

3. Groupes de transformations affines

Si on interprète la grille comme un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^2$, on peut faire agir des groupes de transformations affines (combinant translations et applications linéaires).

a. Groupe $GL_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$

- **Description** :
 - $GL_2(\mathbb{Z})$: matrices 2×2 inversibles à coefficients entiers (applications linéaires).
 - $\mathbb{Z}^2$: translations.
- **Action** :
 - Une matrice $(a \ b; c \ d) \in GL_2(\mathbb{Z})$ envoie (x, y) sur $(ax+by, cx+dy)$.
 - Une translation $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ envoie (x, y) sur $(x+u, y+v)$.
- **Points fixes** :

- Pour une matrice g , les points (x,y) tels que $g \cdot (x,y) = (x,y)g \cdot (x,y) = (x,y)$.
- Pour une translation non triviale, aucun point fixe.

Exemple :

Soit $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- g échange x et y .
- Points fixes : ceux où $x=y$ (diagonale principale).

b. Sous-groupes finis de $GL_2(\mathbb{Z})$

- **Exemple :** Le groupe $\{I, -I\}$ (où I est la matrice identité).
 - $-I$ envoie (x,y) sur $(-x,-y)$.
 - **Points fixes :** uniquement $(0,0)$, qui n'est pas dans une grille 4×4 indexée de $(1,1)$ à $(4,4)$.

4. Groupes de transformations locales

On peut aussi considérer des groupes qui agissent localement, par exemple en modifiant l'état des sommets (coloration, étiquetage).

a. Groupe Z_2^{16}

- **Description :** Chaque générateur inverse l'état d'un sommet (par exemple, change sa couleur).
- **Action :** Inversion de l'état de certains sommets.
- **Points fixes :** Les sommets dont l'état n'est pas inversé.

5. Exemple complet : action de D_4 sur une grille 4×4

Prenons le groupe diédral D_4 (8 éléments) et une grille 4×4 indexée de $(1,1)$ à $(4,4)$.

Transformation	Effet sur (x,y)	Points fixes
Identité	$(x,y) \mapsto (x,y)$	Tous
Rotation 90°	$(x,y) \mapsto (y, 5-x)$	Aucun (sauf le centre si pair)
Rotation 180°	$(x,y) \mapsto (5-x, 5-y)$	$(2.5, 2.5)$ (hors grille)
Réflexion horizontale	$(x,y) \mapsto (x, 5-y)$	Ligne $y=2.5$ (hors grille)
Réflexion verticale	$(x,y) \mapsto (5-x, y)$	Colonne $x=2.5$

Remarque : Pour une grille de taille paire, les points fixes "exacts" sont souvent en dehors des sommets, mais on peut considérer les sommets les plus proches.

Question pour vous, Denise

Quel type d'action vous intéresse le plus ?

- **Symétries géométriques** (comme D_4 ou D_4) ?
- **Transformations affines** (comme $GL_2(\mathbb{Z})$) ?
- **Permutations combinatoires** (comme S_{16}) ?
- Ou une autre approche ?

Je peux aussi vous proposer un exemple de code Python pour visualiser une de ces actions sur votre grille !