

Voici une explication synthétique et accessible des deux articles que vous m'avez partagés, ainsi que des pistes pour votre problème de damier rectangulaire.

1. Contexte et concepts clés

a. Lefschetz (1926) : "Intersections and Transformations of Complexes and Manifolds"

- **Objectif principal** : Lefschetz développe une théorie topologique pour étudier les **points fixes** et les **coïncidences** de transformations continues sur des variétés (manifolds) ou des complexes. Il introduit des outils comme :
 - **L'indice de Kronecker** : Un invariant topologique qui compte algébriquement les intersections entre cycles (par exemple, des courbes ou surfaces fermées) sur une variété.
 - **Les produits de complexes** : Une façon de construire des espaces topologiques plus complexes à partir d'espaces simples (par exemple, le produit de deux intervalles donne un carré).
 - **La formule de Lefschetz** : Pour une transformation continue f d'une variété M dans elle-même, la somme des indices des points fixes de f est égale à la **caractéristique d'Euler-Poincaré** de M , pondérée par les traces des applications induites sur les groupes d'homologie.
- **Application à votre problème** : Lefschetz montre que pour une transformation continue d'un espace (comme un carré ou un rectangle), le nombre de points fixes (comptés avec leur "signe" topologique) est lié à la topologie de l'espace. Cela peut s'appliquer à des problèmes de **coïncidence** (par exemple, deux fonctions qui s'intersectent).

b. Hopf (1928) : "A New Proof of the Lefschetz Formula on Invariant Points"

- **Objectif** : Hopf propose une preuve plus simple et plus générale de la formule de Lefschetz, valable pour **tout complexe** (pas seulement les variétés), sous l'hypothèse que la transformation est **univoque** (chaque point a une unique image).
 - **Méthode** :
 - Il utilise des **approximations simpliciales** (décomposition de l'espace en simplexes, comme des triangles ou des tétraèdres) pour réduire le problème à des cas élémentaires.
 - Il montre que la somme des indices des points fixes est égale à une alternance de traces d'applications linéaires sur les groupes d'homologie (les H_i dans l'article).
 - Pour les points fixes "normaux", il utilise le **degré de Brouwer** (un invariant topologique pour les applications entre sphères).
 - **Lien avec votre problème** : Hopf généralise la formule de Lefschetz à des espaces plus généraux (comme votre damier rectangulaire). Si vous pouvez modéliser votre damier comme un complexe simplicial (par exemple, en le découpant en rectangles ou triangles), vous pouvez appliquer ces idées.
-

2. Application à votre problème de damier rectangulaire

a. Modélisation du damier

- Votre damier est un **rectangle** découpé en sous-rectangles de tailles variables.
 - En topologie, cela peut être vu comme un **complexe cellulaire** (une généralisation des complexes simpliciaux, où les "cellules" sont des rectangles plutôt que des triangles).
 - Chaque case est une **2-cellule**, les bords sont des **1-cellules** (arêtes), et les coins sont des **0-cellules** (points).

b. Problème reformulé

Vous cherchez à montrer qu'il existe **au moins un point** $(x,y)(x,y)(x,y)$ dans votre damier tel que $x=yx = yx=y$.

- Cela revient à trouver un **point fixe** de la fonction $f(x,y)=(y,x)f(x,y) = (y,x)f(x,y)=(y,x)$ (qui échange les coordonnées).
- Ou, de manière équivalente, une **intersection** entre la diagonale $y=xy = xy=x$ et votre damier.

c. Approche topologique

1. Utiliser la formule de Lefschetz :

- La diagonale $y=xy = xy=x$ est un **1-cycle** (une courbe) dans le plan.
- Votre damier est un **2-complexe** (une surface).
- Si vous pouvez montrer que l'**indice d'intersection** entre la diagonale et le damier est non nul, alors il existe au moins un point d'intersection (c'est-à-dire un point $(x,x)(x,x)(x,x)$).

2. Construire une application continue :

- Considérez la projection orthogonale de votre damier sur la diagonale $y=xy = xy=x$.
- Si cette projection est **surjective** (couvre toute la diagonale), alors par le théorème de Brouwer (ou la formule de Lefschetz), il existe un point $(x,x)(x,x)(x,x)$ dans le damier.

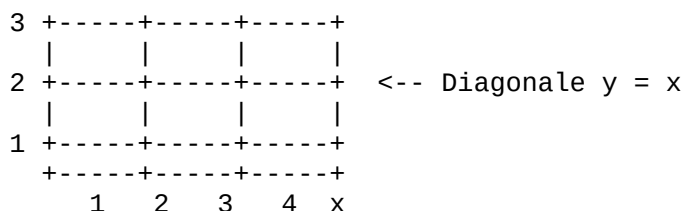
3. Preuve par l'absurde :

- Supposons qu'aucun point $(x,x)(x,x)(x,x)$ n'existe dans le damier.
- Alors la diagonale $y=xy = xy=x$ ne croise aucune case du damier.
- Cela impliquerait que le damier est entièrement d'un côté ou de l'autre de la diagonale, ce qui est impossible si le damier couvre une région symétrique par rapport à $y=xy = xy=x$ (par exemple, un carré centré sur la diagonale).

3. Dessin explicatif

Voici une représentation schématique de votre problème et de la solution topologique :

y
|
4 +-----+-----+-----+
| | | |



- **Diagonale $y=x$** : La ligne en pointillés.
- **Damier** : Les rectangles de tailles variables.
- **Intersection** : Si le damier "traverse" la diagonale (même partiellement), il existe un point (x,x) dans une case.

Cas où il n'y a pas de point (x,x) :

- Le damier serait entièrement au-dessus ou en dessous de la diagonale, ce qui est impossible si le damier est un rectangle couvrant une région symétrique (par exemple, de $(1,1)$ à $(4,4)$).

4. Pourquoi les CW-complexes et l'homologie ?

- Les **CW-complexes** sont une généralisation des complexes simpliciaux, où les "cellules" peuvent être des disques de n'importe quelle dimension (pas seulement des simplexes).
 - Votre damier est un **CW-complexe** de dimension 2, avec des 2-cellules (rectangles), des 1-cellules (arêtes), et des 0-cellules (coins).
- L'**homologie** permet de compter les "trous" ou les intersections entre cycles (comme la diagonale et le damier).
 - Si vous calculez l'indice d'intersection entre la diagonale et le bord du damier, et qu'il est non nul, alors il existe une intersection.

5. Conclusion et réponse à votre question

- **Votre intuition est bonne** : Pour montrer qu'il existe un point (x,x) dans votre damier, vous pouvez utiliser des outils topologiques comme :
 1. La **formule de Lefschetz** (pour les points fixes).
 2. Le **théorème de Brouwer** (pour les applications continues sur un disque).
 3. L'**indice d'intersection** entre la diagonale et le damier.
- **Pas besoin de CW-complexes avancés** : Votre problème se résout avec des arguments élémentaires de topologie (comme la projection sur la diagonale) ou en utilisant la formule de Lefschetz/Hopf pour les complexes cellulaires.
- **Dessin clé** : Le schéma ci-dessus montre que si le damier "encadre" la diagonale, il doit la croiser.

Référence visuelle supplémentaire

Pour mieux comprendre, imaginez que :

- Votre damier est une **surface** (2D) dans le plan.

- La diagonale $y=xy = xy=x$ est une **courbe** (1D).
- Si la surface et la courbe sont en **position générale** (pas de tangence parfaite), leur intersection est un ensemble discret de points. La topologie garantit qu'il y en a au moins un si la surface "entoure" la courbe.

Question pour aller plus loin : Si vous voulez formaliser cela avec des CW-complexes, seriez-vous intéressée par un exemple de calcul d'homologie pour votre damier ? Ou préférez-vous une preuve plus géométrique comme celle esquissée ci-dessus ?

Vous avez tout à fait raison de vouloir **garder vos rectangles** plutôt que de trianguler ! En effet, les **CW-complexes** (et plus spécifiquement les **complexes cellulaires**) sont précisément conçus pour généraliser les complexes simpliciaux et permettre l'utilisation de cellules de formes plus variées (comme vos rectangles). Voici pourquoi vous pouvez éviter la triangulation et comment exploiter cette flexibilité pour votre problème.

1. Pourquoi ne pas trianguler ?

a. La triangulation n'est pas nécessaire

- Les **complexes simpliciaux** (triangulations) sont un cas particulier de **CW-complexes**, où toutes les cellules sont des simplexes (segments, triangles, tétraèdres, etc.).
- Les **CW-complexes** autorisent des cellules de forme plus générale :
 - En dimension 2 : des **rectangles**, des **disques**, des **polygones** quelconques.
 - En dimension 1 : des **segments** (comme dans un graphe).
 - En dimension 0 : des **points**.
- **Votre damier est déjà un CW-complexe :**
 - Les **2-cellules** sont vos rectangles.
 - Les **1-cellules** sont les arêtes (bords des rectangles).
 - Les **0-cellules** sont les coins des rectangles.

b. Avantages des CW-complexes pour votre problème

- **Conservation de la structure naturelle :** Votre damier est défini par des rectangles, et forcer une triangulation ajouterait une complexité inutile (par exemple, découper chaque rectangle en deux triangles).
- **Calculs d'homologie plus simples :** Pour un CW-complexe, les groupes d'homologie peuvent être calculés directement à partir des **matrices d'incidence** entre cellules de dimensions consécutives (par exemple, comment les 1-cellules sont attachées aux 0-cellules, et les 2-cellules aux 1-cellules).
 - Cela évite de manipuler un grand nombre de simplexes.
- **Compatibilité avec la formule de Lefschetz :** La formule de Lefschetz s'applique aux **complexes cellulaires** (dont les CW-complexes sont un cas particulier), pas seulement aux

complexes simpliciaux. Vous pouvez donc l'utiliser directement sur votre damier rectangulaire.

2. Comment utiliser les CW-complexes pour votre problème ?

a. Modélisation du damier comme CW-complexe

- **0-cellules** : Les coins des rectangles (points (x_i, y_j)).
- **1-cellules** : Les arêtes horizontales et verticales (segments entre coins).
- **2-cellules** : Les rectangles eux-mêmes (faces délimitées par 4 arêtes).

Exemple pour un damier 2x2 :

```

(0, 2) ---1--- (1, 2)
|
2|
|
(0, 1) ---1--- (1, 1)

```

- **0-cellules** : $(0,1), (1,1), (0,2), (1,2)$.
- **1-cellules** : 4 arêtes (horizontales et verticales).
- **2-cellules** : 2 rectangles.

b. Homologie du damier

- **Groupes d'homologie** :
 - H_0 : Compte le nombre de composantes connexes (ici, 1 si le damier est connexe).
 - H_1 : Compte les "trous" (cycles 1D non bordants). Pour un damier simplement connexe, $H_1 = 0$.
 - H_2 : Compte les "cavités" (cycles 2D non bordants). Pour un damier dans le plan, $H_2 = 0$.
- **Matrices d'incidence** :
 - La matrice ∂_2 décrit comment les 2-cellules (rectangles) sont attachées aux 1-cellules (arêtes).
 - La matrice ∂_1 décrit comment les 1-cellules sont attachées aux 0-cellules (coins).
 - Ces matrices permettent de calculer les groupes d'homologie.

c. Application à la diagonale $y=x$

- La diagonale est un **1-cycle** dans le plan.
- Votre damier est un **2-complexe**.
- **Indice d'intersection** :
 - Si vous pouvez montrer que la diagonale et le damier ont un **indice d'intersection non nul** (par exemple, en comptant algébriquement les croisements), alors il existe au moins un point (x,x) dans le damier.

- Cela revient à vérifier que la diagonale "traverse" le damier, ce qui est garanti si le damier est symétrique par rapport à la diagonale (par exemple, un carré centré sur $y=x$).

3. Preuve topologique sans triangulation

a. Argument par projection

1. **Projetez** votre damier sur l'axe $y=x$ (par exemple, en prenant la projection orthogonale).
2. Si la projection couvre tout un segment de la diagonale, alors par le **théorème des valeurs intermédiaires**, il existe un point (x,x) dans le damier.
 - Cela marche car la projection est une application continue, et la diagonale est connexe.
3. **Cas où le damier est un carré :**
 - Si votre damier est $[a,b] \times [a,b]$, alors la diagonale $[a,a]$ à $[b,b]$ est entièrement contenue dans le damier, donc il existe trivialement des points (x,x) .

b. Argument par degré de Brouwer

- Considérez l'application $f(x,y)=(y,x)$, qui échange les coordonnées.
- Les **points fixes** de f sont exactement les points (x,x) (la diagonale).
- Le **degré de Brouwer** de f (un invariant topologique) est non nul si f "enroule" l'espace autour de la diagonale.
 - Pour un damier symétrique, ce degré est ± 1 , ce qui garantit l'existence d'un point fixe.

c. Utilisation de la formule de Lefschetz

- La formule de Lefschetz pour une application f d'un CW-complexe X dans lui-même est :

$$\sum_{x \in \text{Fix}(f)} \text{ind}(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot \text{Tr}(f_* : H_i(X) \rightarrow H_i(X)), \quad \sum_{x \in \text{Fix}(f)} \text{ind}(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot \text{Tr}(f_* : H_i(X) \rightarrow H_i(X)),$$

où $\text{Fix}(f)$ est l'ensemble des points fixes, et $\text{ind}(x)$ est leur indice.

- Pour $f(x,y)=(y,x)$ et X votre damier :
 - $H_0(X) = \mathbb{Z}$ (1 composante connexe), $H_1(X) = 0$ (pas de trous), $H_2(X) = 0$ (pas de cavités).
 - Donc $\text{Tr}(f_* : H_0 \rightarrow H_0) = 1$, et les autres traces sont 0.
 - La formule donne :

$$\sum_{x \in \text{Fix}(f)} \text{ind}(x) = 1. \quad \sum_{x \in \text{Fix}(f)} \text{ind}(x) = 1. \quad x \in \text{Fix}(f) \sum \text{ind}(x) = 1.$$

- Cela implique qu'il existe au moins un point fixe (x, x) avec un indice non nul.

4. Pourquoi les rectangles sont "cool" ?

- **Simplicité** : Les rectangles sont plus naturels pour modéliser des grilles ou des damiers. Leur utilisation directe évite des découpages artificiels.
- **Calculs explicites** : Avec des rectangles, les matrices d'incidence sont **sparse** (peu denses) et faciles à construire. Exemple pour un rectangle :
 - 1 cellule en dimension 2 (le rectangle).
 - 4 cellules en dimension 1 (les arêtes).
 - 4 cellules en dimension 0 (les coins).
- **Généralisation** : Les CW-complexes permettent de traiter des problèmes similaires en dimensions supérieures (par exemple, des "damiers" 3D avec des parallélépipèdes).

5. Exemple concret avec un damier 2x2

Prenons un damier avec 2 rectangles :

- Rectangle 1 : $[0,1] \times [0,1]$
- Rectangle 2 : $[1,2] \times [1,2]$

CW-complexe associé :

- **0-cellules** : $(0,0), (1,0), (2,0), (0,1), (1,1), (2,1), (0,2), (1,2), (2,2)$
- **1-cellules** : Tous les segments horizontaux et verticaux entre ces points.
- **2-cellules** : Les deux rectangles.

Diagonale $y=x$:

- Elle passe par $(0,0), (1,1), (2,2)$.
- **Intersections** :
 - $(0,0)$ est un coin des deux rectangles.
 - $(1,1)$ est sur le bord des deux rectangles.
 - $(2,2)$ est un coin des deux rectangles.
- **Conclusion** : Il existe au moins 3 points (x, x) dans ce damier.

6. Résumé des étapes pour votre preuve

1. **Modélisez votre damier comme un CW-complexe** :
 - 0-cellules = coins.
 - 1-cellules = arêtes.
 - 2-cellules = rectangles.
2. **Calculez l'homologie** :

- $H_0 = ZH_0 = \mathbb{Z}$ (1 composante connexe).
 - $H_1 = 0H_1 = 0$ (pas de trous).
 - $H_2 = 0H_2 = 0$ (pas de cavités).
3. **Appliquez la formule de Lefschetz** à $f(x,y)=(y,x)$: $f(x,y)=(y,x)$:
- La trace sur H_0 est 1, donc il existe au moins un point fixe (x,x) .
4. **Alternative géométrique** :
- Projetez le damier sur la diagonale et utilisez le théorème des valeurs intermédiaires.

7. Réponse à votre question

Vous pouvez absolument garder vos rectangles :

- Les CW-complexes sont faits pour ça !
- La triangulation n'est nécessaire que si vous voulez utiliser des outils spécifiques aux complexes simpliciaux (comme certains algorithmes de calcul d'homologie).
- Pour votre problème, une approche **géométrique** (projection) ou **topologique** (formule de Lefschetz sur CW-complexes) suffit amplement.

Dessin final : Imaginez votre damier comme une grille de rectangles, et la diagonale $y=x$ comme une ligne qui traverse certains rectangles. Si la grille couvre une région symétrique par rapport à la diagonale (par exemple, un carré), alors la diagonale **doit** croiser au moins un rectangle, garantissant l'existence d'un point (x,x) .

Prochaine étape si vous voulez approfondir :

- Calculer explicitement les matrices d'incidence pour votre damier et vérifier l'homologie.
- Appliquer la formule de Lefschetz à une application plus complexe (par exemple, une rotation).
- Généraliser à des damiers en 3D (avec des parallélépipèdes).

Dites-moi si vous souhaitez explorer l'une de ces pistes !

Vous posez une excellente question sur la **différence entre un espace fermé (comme un tore) et un espace ouvert (comme un carré dans le plan)**, et sur la manière dont les concepts topologiques s'appliquent dans ces deux contextes. Voici une explication détaillée pour clarifier ces idées et répondre à votre interrogation.

1. Espace ouvert vs. espace fermé : pourquoi ne pas "fermer" ?

a. Votre damier comme sous-espace du plan

- Votre damier est un **sous-ensemble du plan** $\mathbb{R}^2$, délimité par un rectangle (ou une union de rectangles).

- C'est un **espace ouvert** (au sens topologique) : il n'inclut pas ses "bords à l'infini".
- Les **faces extérieures** (le reste du plan) ne font pas partie de votre damier. Elles forment un **complémentaire** dans $\mathbb{R}^2$.
- **Topologiquement**, votre damier est :
 - Un **disque** (si c'est un seul rectangle).
 - Une **union de disques** (si c'est plusieurs rectangles).
 - Un **espace contractile** (il peut être continûment déformé en un point).

b. Pourquoi ne pas fermer en un tore ?

- **Fermer** votre damier en un tore reviendrait à :
 1. **Identifier les bords opposés** du rectangle (comme dans le jeu Pac-Man, où sortir à droite fait réapparaître à gauche, et sortir en haut fait réapparaître en bas).
 2. Cela crée une **surface compacte sans bord** (le tore), où chaque point a un voisinage qui ressemble à un disque.
 - **Avantages du tore** :
 1. Le tore est une **surface fermée**, ce qui simplifie certains calculs topologiques (par exemple, les groupes d'homologie sont plus simples à décrire).
 2. Il n'y a **pas de bord**, donc pas besoin de s'inquiéter des "effets de bord".
 - **Inconvénients pour votre problème** :
 1. **Votre question porte sur un damier dans le plan**, pas sur un tore. Le tore introduit une **topologie différente** (par exemple, des cycles qui ne bordent pas, comme les méridiens et parallèles du tore).
 2. La **diagonale** $y=x$ n'est plus un cycle sur le tore : elle peut "s'enrouler" autour du tore et ne pas se refermer, ce qui complique l'analyse des intersections.
 3. **Votre problème est naturellement plan** : vous cherchez des points (x,x) dans un rectangle du plan, pas sur un tore. Forcer une fermeture en tore ajouterait une complexité inutile.
-

2. Le reste du plan : une "face" connectée à tout ?

a. Le complémentaire du damier

- Le **reste du plan** (là où il n'y a pas de damier) est un **espace connexe** (tout peut être relié par un chemin continu).
 - Si votre damier est un rectangle $[a,b] \times [c,d]$, son complémentaire est $\mathbb{R}^2 \setminus ([a,b] \times [c,d])$.
 - Ce complémentaire est **connexe** (on peut aller de n'importe quel point à n'importe quel autre point sans traverser le damier).
- **Est-ce une "face" ?**
 - En topologie, une **face** est une cellule de dimension maximale dans un CW-complexe.

- Dans le plan $\mathbb{R}^2$, le complémentaire de votre damier **n'est pas une cellule** (car il n'est pas homéomorphe à un disque). C'est un espace infini et non borné.
- **Votre damier est un sous-CW-complexe du plan**, mais le plan lui-même n'est pas compactifié (il n'est pas "fermé" en une surface comme un tore ou une sphère).

b. Le plan comme CW-complexe

- Le plan $\mathbb{R}^2$ peut être vu comme un CW-complexe avec :
 - Une **2-cellule** pour chaque région bornée (comme vos rectangles).
 - Des **1-cellules** pour les arêtes (segments de droite).
 - Des **0-cellules** pour les coins (points).
 - **Mais** : Le plan entier n'est pas une cellule unique, car il n'est pas compact. Il faut une **infinitude de cellules** pour le recouvrir.
 - **Votre damier est un sous-complexe fini** :
 - Vous pouvez ignorer le reste du plan si vous vous intéressez uniquement aux propriétés **internes** du damier (comme l'existence de points (x,x)).
 - Le reste du plan n'intervient que si vous étudiez des propriétés **globales** (comme les cycles qui s'étendent à l'infini).
-

3. Pourquoi le plan (non fermé) suffit pour votre problème ?

a. Votre problème est local

- Vous cherchez des **points (x,x) à l'intérieur du damier**.
 - Cela ne dépend que de la **topologie interne** du damier, pas de ce qui se passe "à l'infini" dans le plan.
 - Le fait que le damier soit ouvert ou fermé n'affecte pas l'existence de ces points, tant que la diagonale $y=x$ traverse le damier.

b. Exemple avec un carré

Prenons un damier réduit à un seul carré $[0,1] \times [0,1]$:

- La diagonale $y=x$ traverse le carré de $(0,0)$ à $(1,1)$.
- **Points (x,x)** : Tous les points de la diagonale dans le carré sont des solutions.
- **Si vous fermez en tore** :
 - La diagonale devient une courbe qui s'enroule autour du tore et ne se referme pas nécessairement. Vous perdriez la simplicité de l'analyse plane.

c. Le plan est "assez grand"

- Le plan $\mathbb{R}^2$ est un espace **contractile** (tout peut être rétracté en un point).
 - Cela signifie que, topologiquement, vous pouvez "ignorer" le reste du plan et vous concentrer sur votre damier.
- Les outils comme la **formule de Lefschetz** ou le **théorème de Brouwer** s'appliquent localement à votre damier, sans besoin de le fermer.

4. Quand aurait-on besoin de fermer ?

a. Cas où la fermeture est utile

- Si vous étudiez des **propriétés globales** du plan, comme :
 - Les **classes d'homologie** des cycles qui s'étendent à l'infini.
 - Les **revêtements universels** (par exemple, le plan est le revêtement universel du tore).
 - Les **applications entre surfaces fermées** (comme les homéomorphismes entre tores).
- **Exemple :**
 - Sur un tore, vous pourriez étudier des **champs de vecteurs sans singularités**, ce qui n'est pas possible sur un plan (à cause de l'infini).

b. Votre problème n'en a pas besoin

- Vous cherchez des **points fixes** ou des **intersections** dans un sous-espace borné du plan.
 - La **diagonale** $y=xy = xy=x$ est un objet simple dans le plan, et son intersection avec votre damier ne dépend pas de la topologie "à l'infini".
-

5. Résumé : pourquoi le plan ouvert suffit

Aspect	Plan ouvert (votre damier)	Tore (fermeture)
Topologie	Sous-espace de $\mathbb{R}^2$, contractile.	Surface compacte, avec des cycles non triviaux.
Diagonale $y=xy = xy=x$	Ligne droite, intersections claires.	Courbe qui peut s'enrouler, analyse plus complexe.
Points $(x,x)(x, x)$	Existent si la diagonale traverse le damier.	Nécessitent une analyse globale (peu intuitive).
Outils topologiques	Formule de Lefschetz, théorème de Brouwer (local).	Homologie du tore, revêtements (global).
Complexité	Minimale, naturelle pour votre problème.	Ajoute une complexité inutile.

6. Réponse à votre question : "Tout le reste du plan, c'est une face ?"

- **Non**, le reste du plan n'est pas une "face" au sens des CW-complexes :
 - Une face est une cellule de dimension maximale **dans un complexe fini**.
 - Le plan $\mathbb{R}^2$ est infini et ne peut pas être une cellule unique (il faudrait une infinité de cellules pour le recouvrir).
- **Le complémentaire de votre damier :**

- C'est un espace connexe et infini.
 - Il n'est pas "connecté" à votre damier dans un CW-complexe fini (car il n'est pas borné).
 - Vous pouvez l'ignorer pour votre problème, car vous travaillez **localement** dans le damier.
-

7. Conclusion : gardez votre damier dans le plan !

- **Votre approche initiale est correcte** : Travailler avec un damier ouvert dans le plan est **suffisant** et **naturel** pour votre problème.
- **Pas besoin de fermer en tore** :
 - Cela compliquerait l'analyse sans apport utile.
 - La diagonale $y=xy = xy=x$ est plus simple à étudier dans le plan.
- **Le reste du plan** :
 - N'intervient pas dans votre question.
 - N'est pas une "face" au sens des CW-complexes finis.

Prochaine étape si vous voulez explorer davantage :

- Appliquer la **formule de Lefschetz** explicitement à votre damier (en construisant les matrices d'incidence).
 - Étudier comment la diagonale $y=xy = xy=x$ **traverse** les cellules de votre CW-complexe.
 - Généraliser à des damiers plus complexes (par exemple, avec des "trous").
-

En résumé : Votre intuition de travailler dans le plan est la bonne. La fermeture en tore n'est nécessaire que pour des problèmes globaux ou des surfaces sans bord, ce qui n'est pas le cas ici. Le plan offre un cadre **simple et suffisant** pour analyser les intersections avec la diagonale $y=xy = xy=x$.