Deux éclaircissements : la diagonale vide de la matrice *dg* et les centres de symétrie du treillis de congruences pour $n = 98$
Denise Vella-Chemla pilotant l'ia claude, septembre 2026

J'ai fourni à l'ia claude l'intégralité des pdf que j'ai écrits avec l'aide de 6 ia différentes [1] (240 pdf en 3 mois, du 15 juin au 15 septembre 2026. On parle maintenant de "slop ia" (pour "bouillie ia") : jusque-là, je produisais mon propre slop, la production de slop avec ia multiplie la "productivité de slop" par 6 environ ; je peux à peu près suivre le fil des idées que j'ai eues dans les productions des ia, mais souvent, je ne comprends pas ce que les ia écrivent et la logique qu'ils suivent. Cependant, les 2 remarques ci-dessous m'épatent par la précision de leur analyse, et m'aident à comprendre davantage encore, c'est l'un de mes buts.

La suite de la présente note a été intégralement rédigée par l'ia claude, à la demande de Denise Vella-Chemla, à partir de deux documents : la note de juillet 2026

[1] https://denisevellachemla.eu/goldbach-matrices-claude-dvc-20260711.pdf

sur les matrices de divisibilité (qui reprend les matrices de février 2025), et la note de l'ia lumo du 18 septembre 2026

[2] https://denisevellachemla.eu/reseaux-pour-CG-lumo-dvc-20260918.pdf

sur les treillis de congruences pour $n = 98$. Tous les calculs annoncés comme vérifiés ont été refaits par programme.

1. De quoi il s'agit, et ce qu'il faut en attendre

Deux questions restaient ouvertes.

1. Dans la note de juillet sur les matrices *trianglinf*, *miroir3* et *dg*, le critère "l'anti-diagonale de p est vide si et seulement si p et $n - p$ sont premiers" avait été testé sur 13 valeurs de n et n'avait échoué qu'une fois, pour $n = 300$ et $p = 11$ (où $n - p = 289 = 17^2$). Pourquoi cette exception ?
2. Dans le dessin des treillis de congruences pour $n = 98$, on observe une symétrie d'ordre 8 autour du point $(19, 19)$, et un second type de centre, demi-entier. D'où viennent-ils ? Ont-ils un lien avec le programme de diffraction *Fraunhofer2.py* ? Peuvent-ils conduire à une démonstration de la conjecture ?

Réponse courte. Dans les deux cas, on obtient une explication complète et exacte, mais qui ne conduit pas à une démonstration : la matrice *dg* et le treillis de congruences ne font que lire des divisibilités par de petits nombres, c'est-à-dire qu'ils font un crible d'Ératosthène. Ils ne disent donc jamais qu'un candidat convenable *existe* (voir les sections 2.4. et 3.5.).

2. La matrice *dg* et le critère de la diagonale vide

2.1. Rappel

Pour n pair, le programme *autrecode.py* construit trois matrices carrées de taille $(n-1) \times (n-1)$, dont les lignes et colonnes sont indexées par $i, j \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$:

1. claude, chatgpt, gemini, mistral, lumo et deepseek, versions gratuites.

- *trianglinf*, matrice triangulaire inférieure codant une divisibilité ;
- *miroir3*, la même information transposée puis retournée (*fliplr*, *flipud*) ;
- $dg = \max(\textit{trianglinf}, \textit{miroir3})$ (maximum case par case), qui réalise le repli $x \leftrightarrow n - x$.

À chaque nombre p avec $3 \le p \le n/2$ est associée l'anti-diagonale $K(p) = \{(i, j) \ : \ i + j = 2p - 2\}$. Le critère testé est : en retirant les deux extrémités de $K(p)$ et sa case centrale ($i = j$), l'anti-diagonale est *vide* (toutes ses cases valent 0) si et seulement si p et $n - p$ sont premiers.

2.2. Ce que contient chaque case

Proposition 1. *Pour* $0 \le j \le i \le n - 2$ *avec* $i \equiv j \pmod 2$*, on pose* $d = \dfrac{i - j}{2} + 1$*. Alors*

$$\begin{aligned} \textit{trianglinf}[i, j] = 1 &\iff d \mid n - 2 - i, \\ \textit{miroir3}[i, j] = 1 &\iff d \mid j, \end{aligned}$$

et ces deux matrices valent 0 *partout ailleurs, en particulier pour* $i < j$*.*

Démonstration. Le programme marque, pour chaque somme paire s de n à 2, avec $d = \dfrac{n - s}{2} + 1$, les couples (x, y) tels que $x + y = s$ et $x = s - 1 - kd$ ($k \ge 0$, $x \ge 1$). On a alors $y = s - x = 1 + kd$: la case (x, y) est marquée si et seulement si $x + y$ est pair et $d = \dfrac{n - x - y}{2} + 1$ divise $y - 1$. La matrice *trianglinf* est obtenue par rotation d'un quart de tour : $\textit{trianglinf}[i, j]$ est la marque en $(x, y) = (j + 1,\ n - 1 - i)$. On en tire $d = \dfrac{i - j}{2} + 1$ et $y - 1 = n - 2 - i$, d'où la première équivalence. Enfin $\textit{miroir3}[i, j] = \textit{trianglinf}[n - 2 - j,\ n - 2 - i]$: les deux indices ont la même différence $i - j$, donc le même d, et le nombre à diviser devient $n - 2 - (n - 2 - j) = j$. Les deux matrices sont triangulaires inférieures ($i \ge j$). □

Proposition 2 (contenu d'une anti-diagonale)**.** *Soit* $3 \le p \le n/2$ *et* $q = n - p$*. Pour* $e = 1, 2, \ldots, p$*, la case* $(i, j) = (p - 2 + e,\ p - e)$ *de* $K(p)$ *vaut* 1 *dans dg si et seulement si* $e \mid p$ *ou* $e \mid q$*. Les cases de* $K(p)$ *situées au-dessus de la diagonale principale* ($i < j$) *valent toujours* 0*.*

Démonstration. On a $i - j = 2(e - 1)$, donc $d = e$. Pour *trianglinf*, $e \mid n - 2 - i = n - p - e$, c'est-à-dire $e \mid q$. Pour *miroir3*, $e \mid j = p - e$, c'est-à-dire $e \mid p$. On conclut avec la proposition 1. □

Remarque : Cette description corrige un détail de la note de juillet : les deux extrémités de l'anti-diagonale ne sont pas toutes deux "toujours allumées". L'extrémité $(2p - 2, 0)$ (correspondant à $e = p$) est toujours allumée, car $p \mid p$; l'extrémité $(0, 2p - 2)$ est toujours éteinte, car elle est au-dessus de la diagonale. La case centrale $(p - 1, p - 1)$ (correspondant à $e = 1$) est toujours allumée. Cela ne change rien au critère, puisque ces trois cases sont retirées du test.

2.3. L'explication de l'exception

Retirer les extrémités et le centre revient à ne garder que les cases $e = 2, 3, \ldots, p - 1$. On obtient donc :

Théorème 3. *Pour $3 \le p \le n/2$, l'anti-diagonale de p est vide si et seulement si aucun entier e avec $2 \le e \le p-1$ ne divise p ni $n-p$.*

Autrement dit, la matrice *dg* teste la divisibilité de p et de $n-p$ par les entiers de 2 à $p-1$, *et seulement ceux-là*. C'est un crible d'Ératosthène arrêté à p au lieu de $\sqrt{n-p}$.

Corollaire 4. *L'anti-diagonale de p est vide si et seulement si p est premier et si, ou bien $n-p$ est premier, ou bien $n-p$ est composé de plus petit facteur premier $\ge p$. Les exceptions au critère sont donc exactement les couples (n,p) avec p premier et $n-p$ composé de plus petit facteur premier $\ge p$; elles n'existent que si $n-p \ge p^2$. En particulier, le critère est exact dès que $p(p+1) > n$, et donc dès que $p > \sqrt{n}$.*

Démonstration. Un entier $p \ge 2$ a un diviseur dans $[2, p-1]$ si et seulement s'il est composé. Ensuite, $q = n-p \ge p$ a un diviseur dans $[2, p-1]$ si et seulement s'il a un facteur premier $< p$. Si q est premier, son seul facteur premier est $q \ge p$: aucun diviseur ne convient. Si q est composé sans facteur premier $< p$, il est $\ge p^2$ et passe le test alors qu'il n'est pas premier : c'est une exception. □

Pour $n = 300$ et $p = 11$: $n - p = 289 = 17 \times 17$, dont le seul facteur premier est $17 > 11$. La case $e = 17$ qui trahirait ce diviseur n'existe pas sur l'anti-diagonale de 11, qui s'arrête à $e = p = 11$. C'est exactement l'exception observée.

Vérification numérique : le programme de l'annexe a été exécuté pour tous les n pairs de 20 à 700 et tous les p de 11 à $n/2$ (soit 57 970 couples (n,p)). Le théorème 3 n'a souffert d'aucune divergence. Le critère initial ("vide $\iff$ p et $n-p$ premiers") a 79 exceptions, toutes prévues par le corollaire 4, et aucune autre. Le théorème a aussi été vérifié sans divergence pour tous les $p \ge 3$ et tous les $n \le 400$ (19 700 couples). Les premières exceptions sont :

n	p	$n-p$	factorisation de $n-p$
132	11	121	11^2
154	11	143	11×13
180	11	169	13^2
182	13	169	13^2
300	11	289	17^2

Parmi les 13 valeurs de n testées dans la note de juillet, seule $n = 300$ tombe dans ce cas, par hasard.

2.4. À quoi cela sert, et ce que cela n'apporte pas

- **Réponse à la question posée.** L'exception n'est ni un "artefact de bord" ni le signe que le critère doit être "affiné" : c'est la limite exacte de ce que voit une anti-diagonale, à savoir les diviseurs inférieurs à p.
- **Correction du seuil.** La restriction "$p \ge 11$" de la note de juillet écartait les petits p au motif que leur anti-diagonale est trop courte. Ce n'est pas la vraie cause des exceptions : elles existent dès que $n - p \ge p^2$, et sont d'ailleurs fréquentes pour de petits p et de grands n. Le bon seuil est $p(p+1) > n$, par exemple $p > \sqrt{n}$, à partir duquel le critère est exact.

- **Lien avec la caractérisation de Vella-Chemla–Schneps.** Pour $p > \sqrt{n}$, la matrice dg redit exactement ce que dit cette caractérisation : p et $n-p$ sont sans diviseur "petit". C'est le même crible.
- **Vers une démonstration ?** Non. Le critère caractérise les p convenables ; il ne dit pas qu'il en existe. Pour cela, il faudrait montrer que les diviseurs de p et de $n-p$ ne peuvent pas couvrir toutes les valeurs de p possibles, et c'est exactement ce que l'obstruction de parité de Selberg interdit à un crible d'établir.

3. Le treillis de congruences pour $n = 98$

3.1. Rappel de la construction

Pour $n = 98$ (donc $\sqrt{98} \approx 9{,}9$), les modules sont 3, 5, 7. On choisit un reste autorisé par module : $r_3 = 1$, $r_5 = 4$, $r_7 = 5$. On rappelle que $98 \equiv 2 \pmod 3$, $98 \equiv 3 \pmod 5$ et $98 \equiv 0 \pmod 7$. Pour chaque module p, on considère le réseau

$$\Lambda_p(r) = \{(r + px,\ r + py) \ :\ x, y \in \mathbb{Z}\} = S_p \times S_p, \qquad S_p = r + p\mathbb{Z}.$$

Le nombre 19 vérifie $19 \equiv 1 \pmod 3$, $19 \equiv 4 \pmod 5$, $19 \equiv 5 \pmod 7$: le point $(19, 19)$ appartient aux trois réseaux. Il est "triple". On a $98 = 19 + 79$.

3.2. L'origine de la symétrie d'ordre 8

Proposition 5. *Soit p un entier impair, $r \in \mathbb{Z}$, $S = r + p\mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{R}$. Le réseau $\Lambda = S \times S$ est invariant par les trois transformations*

$$\sigma_1 : (x, y) \mapsto (2c - x,\ y), \qquad \sigma_2 : (x, y) \mapsto (x,\ 2c - y), \qquad \tau : (x, y) \mapsto (y,\ x)$$

si et seulement si $2c \equiv 2r \pmod p$, c'est-à-dire $2c - 2r \in p\mathbb{Z}$.

Démonstration. La progression S est invariante par $x \mapsto 2c - x$ si et seulement si $2c-(r+pk) \in r+p\mathbb{Z}$ pour tout k, c'est-à-dire si et seulement si $2c - 2r \in p\mathbb{Z}$. Dans ce cas $S \times S$ est invariant par σ_1 et σ_2. La transformation τ laisse toujours $S \times S$ invariant. Réciproquement, l'invariance par σ_1 impose celle de S par $x \mapsto 2c - x$. □

Les transformations σ_1, σ_2, τ engendrent le groupe des 8 symétries du carré (le groupe diédral d'ordre 8) : les quatre réflexions d'axes $x = c$, $y = c$, $y = x$ et $x + y = 2c$, et les rotations de 90°, 180° et 270° autour de (c, c). **C'est l'origine de la symétrie d'ordre 8 :** chaque réseau $\Lambda_p(r)$ est le carré d'une même progression arithmétique avec elle-même, et une progression arithmétique est symétrique par rapport à chacun de ses points et de ses milieux.

Pour que les trois réseaux aient le même centre (c, c), il faut $2c \equiv 2r_p \pmod p$ pour $p = 3, 5, 7$. Comme $2r_3 = 2$, $2r_5 = 8$, $2r_7 = 10$, et comme $38 \equiv 2 \pmod 3$, $38 \equiv 8 \pmod 5$, $38 \equiv 10 \pmod 7$, le théorème des restes chinois donne

$$2c \equiv 38 \pmod{105} \quad \Longleftrightarrow \quad c \in 19 + \tfrac{105}{2}\,\mathbb{Z}.$$

On obtient deux familles de centres communs aux trois réseaux :

- **type A** (entiers, $c = 19 + 105k$) : $\ldots, -86,\ 19,\ 124, \ldots$;
- **type B** (demi-entiers, $c = 19 + 105k + \frac{105}{2}$) : $\ldots, -33{,}5,\ 71{,}5, \ldots$

L'ordre 8 est *exact* autour de chacun de ces points ; il ne s'agit pas d'une ressemblance approchée. Il a été vérifié par programme sur la fenêtre $[-300, 300]^2$, pour les centres $(19, 19)$, $(-33{,}5; -33{,}5)$ et $(71{,}5; 71{,}5)$: aucune violation. Le point $(49, 49)$ n'est *pas* un centre de ce dessin, car le dessin ne comporte qu'*un* reste par module.

Remarque : [le lien avec $x \mapsto n - x$] La réflexion $x \mapsto 98 - x$ (centre 49) envoie les classes $(1, 4, 5)$ sur $(1, 4, 2)$, car $98 - 1 \equiv 1 \pmod 3$, $98 - 4 \equiv 4 \pmod 5$ et $98 - 5 \equiv 2 \pmod 7$. Cette dernière classe est celle de $79 = 98 - 19$ (coset no 14 de la table de la note de lumo). Le dessin symétrique autour de 49 est donc le dessin du coset no 14, non le même dessin retourné. C'est la raison pour laquelle 49 n'est pas un centre du dessin du coset no 17.

3.3. Corrections qu'il faudrait apporter à la note de lumo du 18 septembre

1. **Le point de type B.** Le point $(-32{,}5; -32{,}5)$ n'est *pas* un centre de symétrie. Avec $2c = -65$, les restes modulo 3, 5, 7 valent 1, 0, 5 (la note écrit 1, 3, 5), alors que $2r_p$ vaut 2, 3, 3 : l'égalité $2c \equiv 2r_p$ est fausse pour les trois modules. Le centre de type B le plus proche est $(-33{,}5; -33{,}5)$: $2c = -67$ a pour restes 2, 3, 3, égaux à $2r_p$. C'est aussi, à la précision du dessin, le point que désigne la flèche orange. Vérifié par programme : la symétrie est violée en de nombreux points autour de $(-32{,}5; -32{,}5)$ et ne l'est jamais autour de $(-33{,}5; -33{,}5)$.
2. **Les flèches.** Le texte dit deux fois "flèche noire" ; sur le dessin, le point de type A (19) porte une flèche noire et le point de type B une flèche orange.
3. **Une précision sur le comptage.** L'espérance $N(98) \approx 7{,}9$ (ou 8,4 avec $49 \times \dfrac{6}{35}$) est à comparer avec le nombre exact de candidats retenus dans $[3, 95]$: ce sont exactement $19, 31, 37, 61, 67, 79$, soit 6 nombres. Ils sont *tous* premiers, et ce sont tous les décomposants de 98 ("parmi eux figurent" peut donc se remplacer par "ce sont exactement"). La raison est élémentaire : un entier composé de $[3, 95]$ sans facteur ≤ 7 serait $\geq 11^2 = 121$.
4. **Deux définitions du treillis.** La section 1 définit Λ_p comme réseau du plan tout entier, la section 3.2 comme sous-réseau de la diagonale $y = x$. Le dessin représente les réseaux du plan ; la diagonale est l'endroit où se trouvent les points triples (x, x). Il serait utile de le dire explicitement.

3.4. Le lien avec le programme *Fraunhofer2.py* de la note [2]

L'intensité de diffraction d'un ensemble de points (le carré du module de sa transformée de Fourier) hérite des symétries de cet ensemble : réflexions et rotations autour d'un centre laissent l'intensité invariante, un déplacement de l'origine ne changeant que la phase. Si le programme *Fraunhofer2.py* calcule la transformée de Fourier d'un ensemble de points de ce type, on y retrouvera donc nécessairement les symétries d'ordre 8 du dessin. C'est une *conséquence* de la symétrie du treillis, non une seconde explication indépendante.

3.5. À quoi cela sert, et ce que cela n'apporte pas

- **Ce que cela apporte.** Une explication exacte de l'ordre 8 (produit d'une même progression par elle-même) et de la nature des centres de type A et B (solutions de $2c \equiv 38 \pmod{105}$), ainsi que la correction du point de type B.
- **Ce que cela n'apporte pas.** Toutes ces symétries ne viennent que des *conditions de congruence* modulo 3, 5, 7 : elles décrivent l'information dont dispose un crible. L'obstruction de parité de Selberg dit précisément que cette information seule ne permet pas de garantir qu'un candidat retenu est premier plutôt qu'un produit de deux premiers. Les deux énoncés ne s'opposent donc pas : la symétrie décrit ce que fait le crible, la parité dit ce qu'il ne peut pas faire.
- **Le point de vue de la géométrie des nombres.** La note de lumo (section 4) indique déjà que le théorème de Minkowski ne s'applique pas directement (domaine non convexe, symétrie centrale non garantie). Une raison supplémentaire tient à la taille des modules : le produit $P(\sqrt{n}) = \prod_{p \le \sqrt{n}} p$ est, asymptotiquement (théorème des nombres premiers), de l'ordre de $e^{\sqrt{n}}$, donc beaucoup plus grand que n. Pour $n = 98$, on a $P = 105$, comparable à 98, et tout se passe bien (les 6 candidats sont tous premiers). Mais quand n grandit, une classe de restes modulo $P(\sqrt{n})$ peut n'avoir aucun représentant dans la fenêtre $[3, n-3]$, et rien ne garantit le contraire.
- **Vers une démonstration ?** Non, pour les mêmes raisons que dans la section précédente : le mélange de réseaux affines est une manière de dessiner le crible de Legendre, et il hérite de sa limite.

4. Conclusion

Les deux phénomènes observés s'expliquent entièrement et se démontrent en quelques lignes : l'exception de $n = 300$ vient de ce que l'anti-diagonale de p ne teste que les diviseurs inférieurs à p ; l'ordre 8 et les centres de types A et B viennent de ce que chaque réseau est le carré d'une progression arithmétique symétrique. Ces explications améliorent la précision des notes (seuil $p(p+1) > n$, point de type B en $-33{,}5$), mais ne rapprochent pas d'une démonstration de la conjecture de Goldbach, car les deux constructions ne font que redire les congruences modulo de petits nombres.

A Programme de vérification (section 2)

```
import numpy as np
from sympy import isprime, factorint

def build(n):                          # reprise de autrecode.py
    M = np.zeros((n, n), dtype=int)
    for somme in range(n, 0, -2):
        x, ligne = somme - 1, (n - somme + 2) // 2
        while x > 0:
            M[x, somme - x] = 1
            x -= ligne
```

```
    se = np.zeros((n-1, n-1), dtype=int)
    for x in range(1, n):
        for y in range(1, n):
            se[x-1, y-1] = M[x, y]
    tri = np.rot90(se, 1)
    mir3 = np.flipud(np.fliplr(tri.T.copy()))
    return np.fmax(tri, mir3)       # dg

def est_vide(dg, p):
    K, size = 2*p - 2, dg.shape[0]
    cells = [(r, K-r) for r in range(max(0, K-size+1), min(size-1, K)+1)]
    inter = [(r, c) for (r, c) in cells[1:-1] if r != c]
    return all(dg[r, c] == 0 for (r, c) in inter)

exceptions, divergences = [], 0
for n in range(20, 701, 2):
    dg = build(n)
    for p in range(11, n//2 + 1):
        q = n - p
        vide = est_vide(dg, p)
        # theoreme 1 : aucun diviseur de p ni de q dans [2, p-1]
        pred = all(p % e for e in range(2, p)) and all(q % e for e in range(2, p))
        divergences += (vide != pred)
        if vide != (isprime(p) and isprime(q)):
            exceptions.append((n, p, q))
print(divergences, len(exceptions))            # 0 et 79
# chaque exception : p premier, q compose, plus petit facteur premier de q >= p
assert all(isprime(p) and not isprime(q) and min(factorint(q)) >= p
           for (n, p, q) in exceptions)
```