Matrices booléennes triangulaires, espace non commutatif de Goldbach
Denise Vella-Chemla, mai 2025.

I. Introduction

On définit dans cette note l'espace des matrices booléennes triangulaires inférieures, qui permettent de dénombrer les décompositions de Goldbach et on essaie de décrire cet espace en tant qu'espace non commutatif.

II. L'espace des matrices de représentation des décompositions de Goldbach

II.1. Définitions

II.1.1. *Des matrices booléennes triangulaires inférieures qui permettent de compter sur leurs diagonales les décompositions de Goldbach $p+q$, p et q premiers, $p > \sqrt{n}$ des nombres pairs (≥ 6)*

Voyons les caractéristiques de la matrice M_n qui compte les décompositions de Goldbach de n [1] :

1) Cette matrice est une matrice booléenne, triangulaire inférieure ;
2) elle est de taille $(n-1) \times (n-1)$;
3) Ses éléments diagonaux sont tous égaux à 1.
4) Concernant ses sous-diagonales, seule une sous-diagonale sur deux contient des booléens potentiellement égaux à 1, tandis qu'une sous-diagonale sur deux ne contient que des booléens égaux à 0, ainsi : la première sous-diagonale est vide, la seconde contient un élément sur deux égal à 1, en partant d'un premier booléen, dans la première colonne sur les visualisations des matrices ci-après, qui vaut 1 ; la troisième sous-diagonale est vide, la quatrième sous-diagnale contient un élément sur trois égal à 1, en partant de l'élément dans sa première colonne qui vaut 1, etc., la $(2k+1)^{\text{ème}}$ sous-diagonale est vide, la suivante, etc.

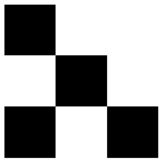
Remarque : en informatique, un tableau a toujours ses indices qui commencent par l'indice 0, on suivra cette convention dans la définition formelle ci-dessous.

La définition formelle de la matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$ est :

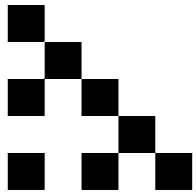
$$\begin{cases} M[x,x] & = 1 \quad \forall x \in [0, n-2] \\ \\ M[x, x-k-1] & = 1 \quad \forall x, k, \;\; 2 \leqslant x \leqslant n/2, \;\; 2 \leqslant x-k-1 \leqslant n/2 \end{cases}$$

Pour illustrer les idées, fournissons ci-dessous les matrices M_4, M_6, M_8, M_{26} et M_{28}.

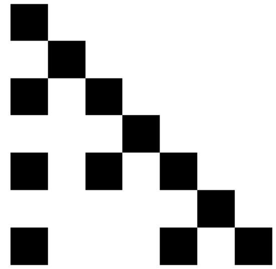
[1] On rappelle qu'un nombre pair $n \geq 6$ admet comme décomposition de Goldbach toute somme de deux nombres premiers impairs. Par exemple, 98 a trois décompositions de Goldbach qui sont $19+79$, $31+67$ et $37+61$.



M_4



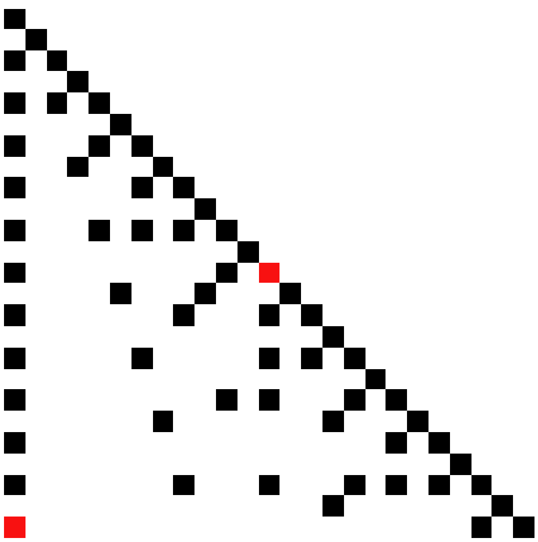
M_6



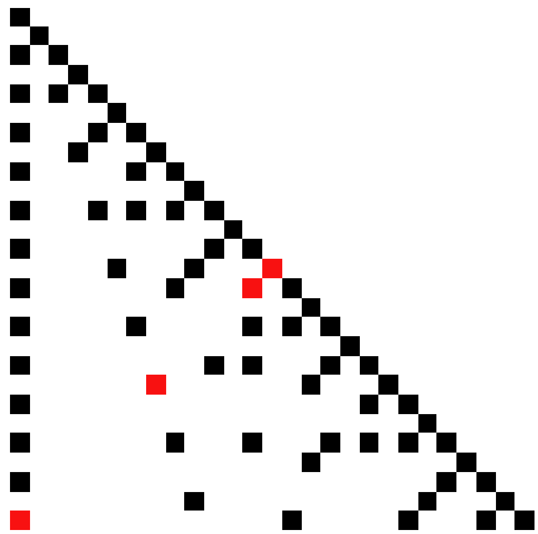
M_8

Un nombre pair double d'un nombre premier vérifie trivialement la conjecture de Goldbach.

Ce qui différencie un tel double d'un nombre premier $2p$, d'un double de nombre composé $2c$, c'est le fait que sa diagonale ascendante [2] "centrale" contienne exactement deux booléens égaux à 1.



M_{26}



M_{28}

À l'inverse, $2c$, un nombre pair double d'un nombre composé, aura plus de deux booléens égaux à 1 sur sa diagonale ascendante centrale. On a coloré les éléments diagonaux en question en rouge, dans les matrices M_{26} et M_{28} ci-dessus, pour que cette distinction triviale soit claire.

Invariant : Du fait de la forme qui a été choisie pour les matrices, tout booléen égal à 1 est positionné sur une case dont la somme des indices de ligne et colonne est paire.

Pour que ceci soit clair à l'esprit, voici la liste des positions des booléens de la matrice $M8$ fournie plus haut :

$$(0,0), \quad (1,1), \quad (2,0), \quad (2,2), \quad (3,3), \quad (4,0), \quad (4,2), \quad (4,4), \quad (5,5), \quad (6,0), \quad (6,4), \quad (6,6)$$

[2] Par diagonale ascendante, on entendra dans toute la suite, la diagonale qui va du sud-ouest au nord-est de la matrice.

II.2. Deux opérations de transformation des matrices : l'expansion et la symétrisation

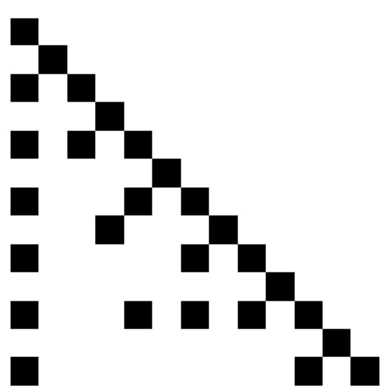
Étudions maintenant les deux seules opérations définies dans cette algèbre de matrices, et qu'on nommera l'*expansion* et la *symétrisation*.

a) Détaillons d'abord l'"expansion matricielle".
Le passage de la matrice M_n à la matrice M_{n+2} s'effectue en ajoutant deux nouvelles colonnes et deux nouvelles lignes à M_n et en positionnant correctement les booléens égaux à 1 dans ces deux nouvelles lignes et colonnes selon la définition fournie précédemment :

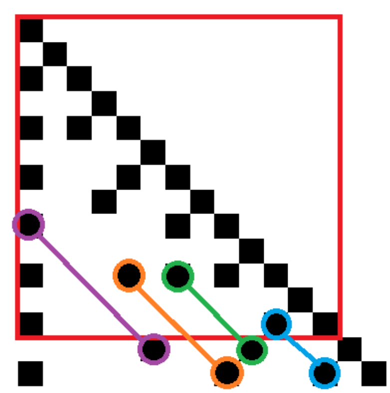
> *contrainte :* dans toute diagonale *descendante*, la suite de booléens est une suite de la forme $1(0^{k-1}1)^{k'}$. Cette écriture est à lire comme on le fait en théorie des langages (informatiques notamment). On considère ce qui s'appelle en termes de structures de données une chaîne de caractères (*string* en anglais). L'opération de concaténation, représentée ici par un signe multiplicatif, est l'opération principale utilisée dans un "monoïde libre", ici le langage basé sur l'alphabet à deux lettres, "0", et "1".

Le dessin ci-après illustre de manière locale les règles à respecter sur chaque diagonale descendante. Ces règles s'énoncent très simplement : un booléen, tous les k booléens successifs, est égal à 1 dans la $2k^{\text{ième}}$ sous-diagonale descendante. Cette contrainte a pour conséquence que sur chaque diagonale descendante, *tout 1 est toujours suivi d'un 0.*

On note à titre de remarque que cette même contrainte est également respectée par les chaînes de booléens associées au processu d'expansion dans le cas des pavages de Penrose, et que l'espace des pavages de Penrose est un espace non commutatif.



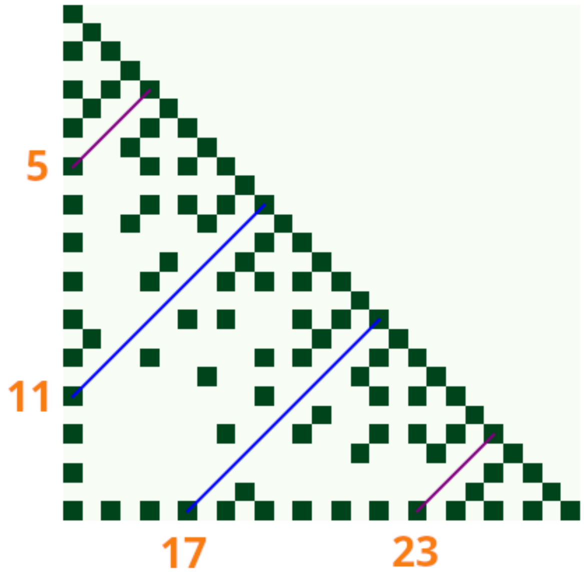
M14



M16

b) Voyons maintenant l'opération de symétrisation : pour voir les décompositions de Goldbach d'un nombre pair n, on symétrise sa matrice M_n, obtenant ainsi une nouvelle matrice, qu'on dénotera M'_n dans la suite. Cette opération de symétrisation, qui s'effectue par une opération `max`, sur les booléens, et qui correspond à un calcul du $\vee$ logique, mélange (au sens de amalgame) en quelque sorte les caractères de divisibilité de x et de $n - x$, son complémentaire à n, et les affecte d'office aux deux nombres complémentaires.

Il suffit alors de compter dans la matrice symétrique M'_n le nombre de booléens égaux à 1 qui est associé à chaque décomposant de n, de les compter par diagonale ascendante donc, et, de façon directe, les décomposants de Goldbach seront les nombres correspondant aux diagonales n'ayant que leurs extrémités qui sont des booléens égaux à 1. On montre ceci sur l'exemple du nombre pair $n = 28$.



Remarque 1 : l'expansion et la symétrisation sont deux opérations qui ajoute des booléens égaux à 1, l'expansion dans la matrice résultante M_{n+2}, et la symétrisation dans la matrice M'_{n+2} qui n'affectent pas la parité de la somme des indices des éléments des matrices qui sont des booléens égaux à 1, qui est donc invariante. Dit autrement, dans les matrices, par expansion ou symétrisation, les booléens égaux à 1 sont toujours positionnés sur des cases d'échiquiers, si on voit nos matrices comme des échiquiers, de la même couleur (les cases blanches ou bien, par un ou exclusif, les cases noires de l'échiquier).

Remarque 2 : les décomposants de Goldbach trouvés par cette méthode matricielle sont ceux qui sont supérieurs à $\sqrt{n}$.

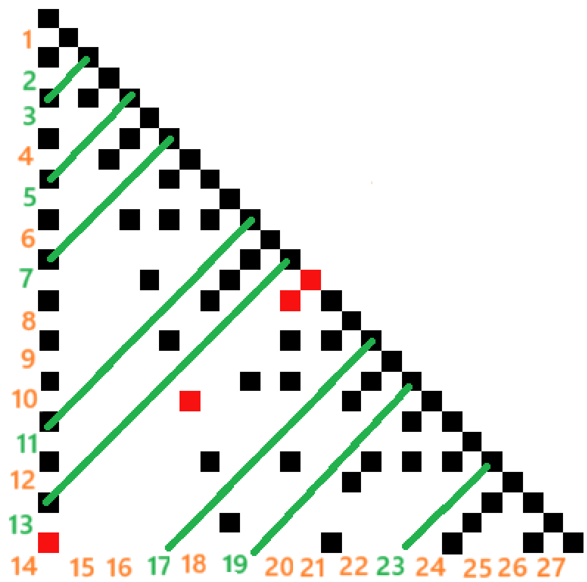
Remarque 3 : l'expansion et la symétrisation sont des opérations qui ne commutent pas.

II.3. Compter les diagonales

Les matrices M_n et M'_n (M symétrisée par rapport à la diagonale principale ascendante) sont toutes les deux de taille $(n-1) \times (n-1)$.

$n = 2k$ est un nombre pair et ses deux matrices associées comptent chacune $nbd = 4k-3$ diagonales. Ce nombre de diagonales nbd se décompose en un certain nombre de diagonales correspondant à des nombres premiers inférieurs à n et un certain nombre de diagonales correspondant à des nombres composés.

Si par exemple, on met en regarde de la matrice M_{28}, vue plus haut, les nombres correspondant de 1 à 27, le nombre de diagonales 53 se décompose en 9 nombres premiers, 18 nombres composés et 26 diagonales blanches.



Imaginons que la matrice symétrisée M'_{28} ne contienne aucune décomposition de Goldbach : en face de chaque nombre premier p_k devrait se trouver un nombre composé. Mais on a vu que l'opération de symétrisation "amalgame" la composition : la diagonale d'un nombre premier p_k "en face" d'un nombre composé $n - p_k$ se voit adjoindre les booléens égaux à 1 de la diagonale de $n - p_k$; dit autrement, la symétrisation "transmet à un nombre premier p_k le caractère composé de $n - p_k$, le complémentaire à n de p_k". Si M'_{2n} ne contenait aucune décomposition de Goldbach, i.e. si tout nombre premier avait pour complémentaire un nombre composé, la matrice symétrisée aurait plus de 2 booléens dans toutes ses diagonales non vides.

Arrivés là, on arrive d'abord à établir une contradiction dans de nombreux cas mais pas dans tous les cas : on a vu que les diagonales sont au nombre de $4k - 3$. Ces $4k - 3$ diagonales se séparent en deux sous-ensembles disjoints : les diagonales contenant des booléens (au nombre de $2k - 1$) et celles n'en contenant pas (au nombre de $2k - 2$). Oublions les diagonales vides. Les diagonales à booléens sont en nombre impair. Ces $2k - 1$ diagonales contenant les booléens se séparent en deux ensembles disjoints : les diagonales correspondant aux nombres premiers, on note leur ensemble P et les diagonales correspondant aux nombres composés, on note leur ensemble C ; on sépare à nouveau cet ensemble C en l'union de l'ensemble des nombres composés dont le complémentaire est un nombre premier $C_1 + P'$ et l'ensemble des nombres composés dont le complémentaire est un nombre composé, noté $C_2 + C'$. Si tous les nombres premiers ont leur complémentaire qui est composé, cela signifie que les deux ensembles dénotés P et $C_1 + P'$ ont le même cardinal, la somme de leurs cardinaux est un nombre pair, donc l'ensemble des nombres restants, qu'on a noté $C_2 + C$ est de cardinal forcément impair, puisque le nombre total de diagonales à booléens est $2k - 1$ (un nombre impair). On aboutit ainsi à une contradiction à chaque fois que le nombre de nombres composés compris entre 1 et $n - 1$ est un nombre pair (ce qui est le cas par exemple pour les nombres pairs $6, 12, 18, 24, 26, 28, 34, 36, 42, 48, 50, 52, 60, 68, 70, 74, 76, 78, 84, 86, 88, 98, 100$, etc.). Cela permet d'être assuré de l'existence obligatoire d'un décomposant de Goldbach dans ces très nombreux cas. Mais on ne parvient pas à voir d'où pourrait provenir la contradiction dans les très nombreux cas pour lesquels le nombre de nombres composés compris entre 1 et $n-1$ est un nombre impair.

III. Deux caractéristiques de l'espace des matrices

III.1. Les opérations utilisées sur les matrices ne commutent pas

Du point de vue historique, c'est James Sylvester qui utilisa le premier le terme de "matrice" pour désigner des tableaux de nombres. La théorie des matrices a été développée par Cayley, Hamilton, Grassmann, Frobenius et von Neumann. Heisenberg, lorsqu'il a inventé le formalisme de la mécanique quantique, en 1925, a écrit les spécifications du nouveau paradigme de la physique, avec l'aide de Born et Jordan : ceux-ci, mathématiciens, avaient vu que le formalisme de Heisenberg utilisait les propriétés du calcul matriciel, notamment la non commutativité.

En effet, l'une des caractéristiques essentielles du calcul matriciel est le fait que la multiplication ne commute pas : $AB \neq BA$ si A et B sont deux matrices.

Donnons un tout petit exemple avec deux matrices 2×2, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ du fait que $AB \neq BA$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il faut avoir à l'esprit que les matrices qui sont utilisées dans la présente note pour compter les décompositions de Goldbach des nombres pairs ne sont à aucun moment multipliées : on ne fait pas de calcul matriciel. On utilise les matrices pour représenter (une diagonale contenant des booléens égaux à 1 "représente d'une certaine façcon la divisibilité, par k par exemple, en étant de la forme syntaxique "$1((0^k\,1)^{k'})$"). Cependant, on souligne à nouveau le fait que les deux opérations qui sont effectuées sur les matrices, à savoir l'expansion et la symétrisation, elles, sont deux opérations qui ne commutent pas entre elles.

Dans les années 1970, Alain Connes a fondé la géométrie non commutative. Il avait au préalable, dans sa thèse, établi la classification des facteurs, ou algèbres d'opérateurs, de von Neumann. Dans la classification d'Alain Connes, les algèbres des matrices complexes, notées $M_n(\mathbb{C})$ sont des facteurs de type I.

III.2. Les matrices ont un contenu complètement apériodique

Ce qui caractérise l'espace des matrices qu'on a utilisées, c'est l'apériodicité de leur contenu. On doit d'ores et déjà dire qu'on ne sait pas démontrer l'apériodicité des matrices utilisées. Cependant, on va ci-dessous étudier deux autres modèles, dans lesquelles l'apériodicité est plus flagrante.

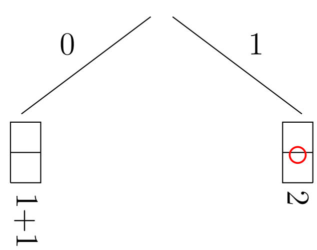
III.2.1. Espace des arbres binaires de compositions, dont les feuilles sont étiquetées par des sommes purement syntaxiques : un nombre premier a tous ses mots, sauf ses deux mots dits triviaux, qui sont apériodiques

Voyons une autre manière de représenter les nombres, par leurs compositions (au sens quasi-chimique). On prend comme référence l'article de wikipedia

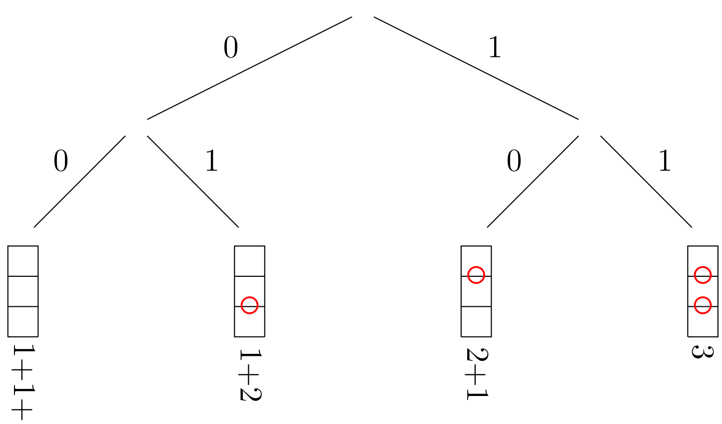
https://fr.wikipedia.org/wiki/Composition_(combinatoire).

Un nombre n a 2^{n-1} compositions différentes. On peut voir les compositions de n comme feuilles d'un arbre binaire de hauteur $n-1$. On voit que l'ordre des sommants importe, $1+1+2+2$ et 1+2+1+2 sont des compositions différentes de 6 (alors qu'elles correspondent à la même partition). Il y a une correspondance bijective entre les mots booléens de $n-1$ caractères et les compositions de n. Par exemple, le mot de 5 lettres 10010 correspond à la décomposition $2+1+2+1$ de 6.

Arbre binaire des compositions de 2



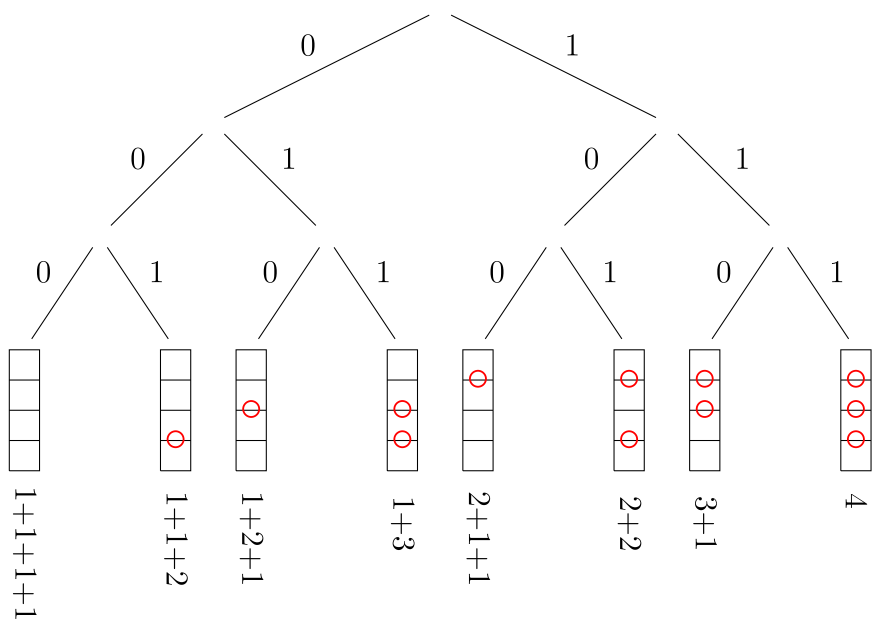
Arbre binaire des compositions de 3 (lire les dessins de haut en bas)



Pour obtenir une composition de $n+1$ à partir d'une composition de n, il suffit soit d'ajouter un sommant 1+ au début de la composition de n, soit de remplacer le premier sommant de la composition de n par son successeur, en obtenant à partir de la composition $n = s_0 + A$ la composition $n+1 = (1+s_0) + A$, le calcul entre parenthèses devant être effectivement effectué.

Voyons cela pour le passage des compositions de 3 à celles de 4 : de l'ensemble $\{1+1+1, 1+2, 2+1, 3\}$ des compositions de 3, on peut concaténer 1+ au début de chaque somme, ce qui permet d'obtenir l'ensemble de compositions de 4 $\{1{+}1{+}1{+}1, 1{+}1{+}2, 1{+}2{+}1, 1{+}3\}$; ou bien dans chaque composition de 3, on remplace le premier sommant par son successeur, ce qui permet d'obtenir l'ensemble de compositions de 4 $\{2{+}1{+}1, 2{+}2, 3{+}1, 4\}$. On réitère le processus pour passer de l'ensemble des compositions de 4 $\{1{+}1{+}1{+}1, 1{+}1{+}2, 1{+}2{+}1, 1{+}3, 2{+}1{+}1, 2{+}2, 3{+}1, 4\}$ à l'ensemble de compositions de 5 constitué de l'union des deux ensembles $\{1{+}1{+}1{+}1{+}1, 1{+}1{+}1{+}2, 1{+}1{+}2{+}1, 1{+}1{+}3, 1{+}2{+}1{+}1, 1{+}2{+}2, 1{+}3{+}1, 1{+}4\}$ et $\{2{+}1{+}1{+}1, 2{+}1{+}2, 2{+}2{+}1, 2{+}3, 3{+}1{+}1, 3{+}2, 4{+}1, 5\}$.

Arbre binaire des compositions de 4



On appelle compositions triviales les deux compositions constituées l'une uniquement de n caractères 1 séparés par des signes "+", de la forme $1 + 1 + \ldots + 1$, et l'autre de n seul. Un nombre composé est notamment caractérisé par le fait que l'une de ses compositions au moins, différente des deux compositions triviales, est telle que quelle que soit la permutation qu'on pourrait effectuer entre 2 de ses sommants, cette composition reste identique à elle-même. Il en est ainsi de la composition $2+2+2$ de 6, ou $5+5+5+5+5$ de 25. Un nombre premier n'a aucune de ses compositions qui est ainsi invariante par toute permutation de ses sommants. On peut dire qu'un nombre premier n'a aucun de ses mots associés, hormis ses deux mots triviaux, qui ne soit périodique : un nombre premier a tous ses mots qui sont apériodiques. Cette caractérisation de la primalité est exclusivement syntaxique, elle est la définition même de l'indivisibilité d'un nombre premier par un autre nombre plus petit que lui, si ce n'est 1, on a représenté les produits ici par des sommes itérées.

De façon plus formelle, à chaque entier est associé un ensemble de parties de $\mathbb{N}$. Chaque partie de $\mathbb{N}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\{0, 1\}$ et on code par un booléen le fait qu'une partie soit image d'un entier ou pas.

Une partie de $\mathbb{N}$ étant codée par un mot infini, on complète chaque mot booléen de la section précédente par une infinité de 0 ; cette infinité de zéros à droite n'ajoute pas de sommant à l'écriture additive.

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow \{0,1\}^{\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \\ n &\longmapsto \{s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \forall i \geqslant n, s[i]=0\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}) \end{aligned}$$

Le passage d'un entier à l'entier suivant consiste à concaténer une lettre 0 ou 1 à gauche des mots de n).
La condition correspondant au fait d'être composé pour un nombre entier qui consiste à avoir une composition (différente des deux compositions triviales) de la forme $x+x+\ldots+x+x$ se traduit très simplement sur les mots booléens : elle consiste en l'apparition dans le mot d'une puissance au moins carrée d'un sous-mot non-nul (le sous-mot en question est appelé période en théorie des langages rationnels) ; par exemple, la composition $2+2+2$ de 6, codée par le mot $1010100000\ldots$ contient le sous-mot 10 répété trois fois, elle s'écrit $((10)^3)(0^\infty)$.

III.2.2. Suites fractales d'entiers et fonction de réécriture syntaxique pour la valuation p-adique

Plaçons-nous dans le monoïde défini sur l'alphabet $\mathbb{N}$, et notons ce monoïde $\mathbb{N}^{**}$. La valuation p-adique peut être calculée en utilisant seulement des "mots" dont les lettres sont des entiers, i.e. des suites de lettres, du monoïde $\mathbb{N}^{**}$ (on met deux étoiles ici pour distinguer ce monoïde de l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ privé de l'entier 0). Le monoïde $\mathbb{N}^{**}$ contient tous les mots que l'on peut fabriquer dont les lettres sont des entiers naturels.

Il faut se dire que compter par des lettres, c'est un peu comme faire de l'arithmétique à base de bâtons (à l'école maternelle, par exemple). L'arithmétique des bâtons est à rapprocher de la manière dont von Neumann, ou bien Russell, ont proposé de représenter les entiers. Cette arithmétique a été complètement théorisée (voir par exemple les articles *Équations dans les monoïdes libres*, d'André Lentin [3], *L'arithmétique dans les algèbres simples* de Claude Chevalley [4], *Concatenation as a basis for arithmetic* de W. Quine [5]).

Pour calculer la valuation 2-adique, on écrit, c'est-à-dire qu'on commence avec, le mot 01, qui exprime que 2 a pour valuation 2-adique 1. Puis à chaque étape, on concatène deux (resp. k) suites de lettres identiques à celle qu'on a écrites jusque-là, et on change simplement la dernière lettre de la suite complète de lettres en son succ (succ(n), au sens de Peano, de n, la lettre terminale de la suite).

On obtient aux étapes successives (pour la valuation 2-adique) :

01
0102
01020103
0102010301020104
01020103010201040102010301020105
...

La chaîne de caractères voit sa taille doubler (ou multipliée par k) à chaque étape.

---

[3] M.S.H. (8e année, no 31, 1970, p. 5-16).

[4] Séminaire de mathématiques, Première année 1933-1934, Théorie des Groupes et des Algèbres, exposé du 30 avril 1934.

[5] The Journal of Symbolic Logic, Volume 11. Numéro 4. Déc. 1946.

Voyons les valuations 3-adiques, chaque chaîne du niveau précédent est répétée trois fois, et on change la dernière lettre en son successeur (au sens de Peano) :

001
001001002
001001002001001002001001003
001001002001001002001001003001001002001001002001001003001001002001001002001001004
...

La chaîne des valuations 3-adiques voit sa longueur tripler à chaque étape.

Mettons ces valuations k-adiques, pour k compris entre 2 et $\sqrt{n}$ avec $n = 28$, valuations calculées par cette méthode syntaxique pure, en regard des nombres entiers, pour vérifier qu'on a bien calculé les valuations 2-adiques et 3-adiques.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$p=2$	0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	0	2	0	1	0	4	0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	0	2
$p=3$	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	1	0	0	3	0
$p=4$	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
$p=5$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0	0	0
$\sum$	0	1	1	3	1	2	0	4	2	2	0	4	0	1	2	6	0	3	0	4	1	1	0	5	2	1	3	4

Calculons maintenant, dans la ligne $\sum$ de la table, la somme des valeurs k-adiques, pour k variant de 2 à $\sqrt{n}$; cette suite d'entiers, dans laquelle les caractères fractals des différentes suites de valuations p-adiques se sont mélangés, est totalement apériodique.

Cette chaîne "somme", qu'on peut qualifier de suite fractale, sous prétexte qu'elle est la somme de suites fractales, mais qui n'est cependant pas auto-similaire, les auto-similarités de chaque suite se perturbant les unes les autres, permet pourtant de distinguer les nombres premiers des autres nombres : leur somme de valuations p-adiques, avec $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{n}$, est égale à 1.

III.2.3. Une petite idée de la dimension de l'espace fractal des matrices

On ne sait pas si cela aurait du sens de calculer la dimension fractale de l'espace des matrices qu'on a présentées dans la section II. On a vu que chaque diagonale contenant des booléens est périodique, mais que les périodes des différentes diagonales "se mélangeant", le contenu de chacune des matrices rencontrée ne peut pas présenter de période (ça serait à prouver).

On imagine, sans savoir le prouver, que si l'espace des matrices utilisé devait avoir une dimension en lien avec la densité des booléens égaux à vrai par rapport aux nombres totaux d'éléments des matrices (avant ou après symétrisation), cette dimension devrait être en lien avec le nombre $1+\sqrt{2}$. On pense cela par analogie avec l'espace des pavages de Penrose, que l'on a étudié précisément (i.e. dont on a programmé un spécimen (celui des triangles d'or et d'argent) de façon récursive, ou par règles de réécriture de Lindenmayer), et qui a quant à lui pour ratio de densité (i.e. nombre de triangles d'or sur nombre de triangles d'argent que contient un pavage de Penrose) le nombre d'or $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Le nombre $1+\sqrt{2}$, dont on pense qu'il peut être lié à notre ensemble de matrices, partage une propriété avec le nombre d'or, propriété peu commune : on a

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}} = 1+\sqrt{2} \quad \text{pour le nombre } 1+\sqrt{2}$$

et

$$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}} = 1+\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} \quad \text{pour le nombre d'or } \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}$$

Cette propriété s'écrit plus simplement en disant que l'un comme l'autre de ces deux nombres vérifient l'équation $X^2 - X - 1 = 0$.

Citons enfin Euler, qui décrivait pleinement cette absence d'ordre, au début de son article *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*, (voir ici : Leonhard Euler - Œuvres complètes), bien qu'il n'ait pas parlé alors d'apériodicité, mais plutôt de l'absence de règle simplement formalisable pour trouver les nombres premiers :

> *Les Mathématiciens ont tâché jusqu'ici en vain de découvrir quelque ordre dans la progression des nombres premiers, et on a lieu de croire que c'est un mystère que l'esprit humain ne saurait jamais pénétrer. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à jeter les yeux sur les tables des nombres premiers, que quelques-uns se sont donnés la peine de continuer au-delà de cent mille et on s'apercevra d'abord qu'il n'y règne aucun ordre ni règle. Cette circonstance est d'autant plus surprenante, que l'Arithmétique nous fournit des règles sûres, par le moyen desquelles on est en état de continuer la progression de ces nombres aussi loin qu'on souhaite, sans pourtant nous y laisser la moindre marque de quelque ordre.*

La référence à cet article d'Euler nous fait refermer notre boucle : Euler avait proposé, dans l'article en question, une définition récursive de la somme des diviseurs d'un nombre, cette définition récurrente (qu'on programme par une fonction récursive) étant basée sur les nombres pentagonaux. Après avoir programmé la récurrence d'Euler, nous avions préféré utilisé une autre définition récurrente, basé sur l'équation différentielle de Chazy, qui nous avait été fournie par M. Dominique Giard, à qui on avait adressé un mail, en 2006 environ, lorsqu'on avait trouvé dans la séquence A000203 de l'OEIS (la On-Line encyclopedia of integer sequences fondée en 1964 par N. J. A. Sloane) la formule récurrente de calcul qu'il fournissait (et qui était plus simple, quant à ses conditions de calcul des derniers termes de la somme, que celle fournie par Euler.

Formule de récurrence dans la suite A000203 de l'OEIS :

$$n^2(n-1)a(n) = 12\sum_{k=1}^{n-1}(5k(n-k)-n^2)a(k)a(n-k), \quad \text{si} n > 1.$$

Dominique Giard, 11 janvier 2005.

Jacques Chemla [6] a démontré le lien entre l'équation de Chazy et la définition récurrente fournie par Dominique Giard : voici sa démonstration :

L'équation de Chazy est l'équation différentielle (ordinaire, non linéaire, explicite, d'ordre 3) :

$$u''' = 2uu'' - 3(u')^2$$

Une solution particulière de cette équation différentielle est la série d'Eisenstein E_2, définie pour tout nombre complexe $\tau \in \mathbb{C}$ de partie imaginaire strictement positive :

$$E_2(\tau) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) e^{2\pi i \tau n}$$

E_2 correspond au cas $k = 1$ des séries d'Eisenstein E_{2k} définies pour tout entier $k \geq 2$ [7]:

$$E_{2k}(\tau) = 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) e^{2\pi i \tau n}$$

Les B_n sont les nombres de Bernouilli et $\sigma_k(n)$ est la somme des puissances k-ièmes des diviseurs de n (voir fonction somme des diviseurs).

En particulier, $B_2 = \dfrac{1}{6}$ et $\sigma_1(n)$ est la somme des diviseurs de n, notée habituellement $\sigma(n)$.

Montrons que $u = E_2$ est solution de l'équation de Chazy.

On a :

$$\begin{aligned}
u(\tau) &= 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) e^{2\pi i \tau n} \\
u'(\tau) &= -24(2\pi i) \sum_{n=1}^{\infty} n\sigma(n) e^{2\pi i \tau n} \\
u''(\tau) &= -24(2\pi i)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2\sigma(n) e^{2\pi i \tau n} \\
u'''(\tau) &= -24(2\pi i)^3 \sum_{n=1}^{\infty} n^3\sigma(n) e^{2\pi i \tau n}
\end{aligned}$$

[6]mon époux.

[7]*Les séries d'Eisenstein E_{2k} sont des formes modulaires définies pour tout entier $k \geq 2$, et la série E_2 correspondant au cas $k = 1$ n'en fait donc pas partie. Néanmoins, E_2 peut être définie comme une forme quasi-modulaire analogue aux séries d'Eisenstein.*

Par conséquent :

$$(u')^2(\tau) = 24^2(2\pi i)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)\sigma(k)\sigma(n-k) \right) e^{2\pi i \tau n}$$
$$uu''(\tau) = -24(2\pi i)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2\sigma(n)e^{2\pi i\tau n} + 24^2(2\pi i)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2\sigma(k)\sigma(n-k) \right) e^{2\pi i\tau n}$$

En identifiant les termes généraux à gauche et à droite dans l'équation de Chazy, on obtient, pour $n \geq 2$:

$$-24(2\pi i)^3 n^3\sigma(n) = 24^2(2\pi i)^2 \left(-2n^2\sigma(n) + 2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2\sigma(k)\sigma(n-k) - 3\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)\sigma(k)\sigma(n-k) \right)$$
$$\iff \quad -\frac{\pi i}{12}n^3\sigma(n) = -2n^2\sigma(n) + \sum_{k=1}^{n-1}\left(2(n-k) - 3k\right)(n-k)\sigma(k)\sigma(n-k)$$
$$\iff \quad \left(2n^2 - \frac{\pi i}{12}n^3\right)\sigma(n) = \sum_{k=1}^{n-1}(2n-5k)(n-k)\sigma(k)\sigma(n-k)$$

Ce qu'il faudrait élucider ici, c'est le fait que Alain Connes relie, dans son livre *Noncommutative geometry* téléchargeable ici feuilletages dans le livre book94big.pdf les espaces non-commutatifs aux équations différentielles. Il écrit par exemple au paragraphe $4.\beta$ (p. 55) :

> *Les espaces X [non commutatifs] considérés sont des espaces de variétés qui sont solutions d'équations différentielles, i.e. les espaces de feuilles d'un feuilletage.*

et il fournit plus loin l'exemple du tore 2-dimensionnel $V = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ et du feuilletage de Kronecker associé à un nombre réel θ, donné par l'équation différentielle $dy = \theta\, dx$.

Il faudrait étudier précisément le feuilletage associé à l'équation différentielle de Chazy vue plus haut, et dont J. Chemla a démontré le lien avec la somme des diviseurs : un nombre premier p a sa somme des diviseurs $\sigma(p)$ qui est égale à $p+1$, i.e. les nombres premiers sont les nombres dont les sommes de diviseurs sont les plus simples à calculer.

Annexe : rappel de 3 autres possibilités utilisant des matrices pour trouver les nombres premiers

a) Lors de nos recherches autour de la conjecture de Goldbach, nous avons à trois reprises utilisé des matrices qui permettent de trouver, par un calcul dans lequel elles interviennent, les nombres premiers.

La première forme de matrice [8], qu'on appellera F_j, pour j un nombre entier, associe à j une matrice diagonale dont les éléments sont des exponentielles de la forme $\exp\left(\dfrac{2i\pi j}{p_k}\right)$ avec p_k un nombre premier. Cette matrice intervient dans un contexte de représentation des nombres par la

[8] Cf. utiliser une matrice diagonale d'exponentielles pour trouver les nombres premiers.

suite de leurs restes modulaires selon l'ensemble infini des nombres premiers. On avait appelé ce système de représentation des nombres le `Snurpf` pour système de numération par les restes dans les parties finies de $\mathbb{N}$.

Un nombre p est premier ssi il n'y a qu'un seul 1 sur la diagonale de sa matrice associée. La diagonale de la matrice associée à un nombre composé contient plusieurs 1 (autant que de diviseurs de ce nombre moins 1 car le diviseur 1 n'est pas pris en compte).

On avait constaté à cette occasion par programme que (en ajoutant la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe obtenu, la seconde étant vraiment très inférieure à la première) :

$$\sum_{\substack{p_k \text{ premier} \\ 2 \leqslant p_k \leqslant x}} \exp\left(\frac{2i\pi}{p_k}\right) \simeq \pi(x).$$

b) La seconde matrice G [9] se définit ainsi (on rappelle qu'une matrice informatique a son premier élément qui a pour indices $(0,0)$ et que le symbole "|" signifie "divise") :

$$\begin{cases} G[x,y] & = (y+1) \ \mid \ (x+1) \quad \text{si} \quad x \neq y \\ & = 0 \qquad\qquad\qquad\quad\ \text{sinon} \end{cases}$$

Dans la première colonne de l'exponentielle de G (on a découvert cette notion d'*exponentielle d'une matrice* en programmant, on ne sait pas si elle est définie mathématiquement), seuls les éléments dont l'indice de ligne est un nombre premier sont égaux à 1 (indice à 1 près, du fait des indices de matrices démarrant à 0 en informatique).

c) La troisième matrice H [10] est une matrice carrée, à blocs, et qui contient sur sa diagonale la suite des matrices circulantes de taille $2 \times 2, 3 \times 3, 4 \times 4,$ etc. qu'on appellera $M_{C_2}, M_{C_3}, M_{C_4},$ etc.. Cette matrice quand on l'élève à une puissance entière k, voit certains de ses 1 s'aligner sur la diagonale principale suivant que k est un nombre premier ou pas. On a :

$$p \text{ est un nombre premier} \Longleftrightarrow \text{Trace}(H^p) = p$$

En effet, chaque petite matrice circulante a pour propriété de présenter une diagonale "pleine de 1" lorsqu'on l'élève à une puissance multiple de sa taille.

L'utilisation d'une telle matrice est prohibitive, ses propriétés sont le reflet simple du crible d'Eratosthène mais caractériser la primalité par une trace matricielle peut peut-être présenter un intérêt conceptuel. On fournit la définition formelle de la matrice H. H a pour taille

$$\left(\frac{k(k+1)}{2} - 1\right) \times \left(\frac{k(k+1)}{2} - 1\right).$$

[9] Cf. utiliser l'exponentielle d'une matrice pour trouver les nombres premiers.
[10] Cf. utiliser des matrices circulantes pour implémenter le crible d'Eratosthène.

On a :

$$\begin{cases} H\left[(u+1)^2+\dfrac{3(u+1)-2}{2},(u+3)^2-\dfrac{3(u+3)}{2}\right]=1 & \forall u \in [0,k-1[\\[2ex] H[u,u+1]=1 & \forall u \in \left[0,\dfrac{k(k+1)}{2}-2\right[\\[2ex] H\left[(u+1)^2+\dfrac{3(u+1)-2}{2},(u+1)^2+\dfrac{3(u+1)-2}{2}+1\right]=0 & \forall u \in [0,k-2[\end{cases}$$

Quelques références bibliographiques sous la forme de transcriptions / traductions

Transcription du mémoire d'Arthur Cayley sur la théorie des matrices
https://denisevellachemla.eu/trad-Cayley-fr.pdf.

Traduction de l'article fondateur de Heisenberg de 1925 *Réinterprétation en théorie quantique des relations cinématique et mécanique*
https://denisevellachemla.eu/trad-art-Heisenberg.pdf.

Article de Born et Jordan *Sur la mécanique quantique*
https://denisevellachemla.eu/trad-BJ-mecaquant-1925.pdf.

Traduction de l'article de Born, Heisenberg et Jordan *Sur la mécanique quantique*
https://denisevellachemla.eu/trad-BHJ-1.pdf.