

Matrices de Pascal

Alan Edelman, Gilbert Strang

1. Introduction.

Tout polynôme de degré n a n racines ; toute fonction continue sur $(0,1)$ atteint son maximum ; toute matrice symétrique réelle possède un ensemble complet de vecteurs propres orthonormés. Les théorèmes généraux constituent une part importante des mathématiques que nous connaissons. Il est difficile de résister à la tentation de généraliser davantage ! Supprimer les hypothèses, rendre le théorème plus précis et plus complexe, inclure davantage de fonctions, explorer l'espace de Hilbert, ... C'est dans notre nature.

L'autre extrême en mathématiques pourrait s'appeler le “cas particulier”. Une fonction, un groupe ou une matrice spécifique devient particulier. Il obéit aux règles générales, comme tous les autres. Mais il possède une particularité qui relie des objets familiers de manière élégante. Cet article traite d'un cas extrêmement particulier. L'objet familier est le triangle de Pascal.

Cette particularité consiste à placer ce triangle de coefficients binomiaux dans une matrice. Trois matrices différentes – symétrique, triangulaire inférieure et triangulaire supérieure – peuvent contenir le triangle de Pascal de manière pratique. La troncature produit des matrices qu'on notera S_n , L_n et U_n de taille $n \times n$. Voyons ces matrices pour $n = 4$:

$$S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix} \quad L_4 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad U_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Mentionnons d'abord un fait très précis : le déterminant de S_n pour tout n est égal à 1. (Si nous insistions sur le fait que $\det L_n = 1$ et $\det U_n = 1$, vous écririez au rédacteur en chef. Trop particulier !) Les déterminants sont souvent le reflet superficiel d'une propriété plus profonde au sein d'une matrice. C'est le cas ici, et le lien entre les trois matrices apparaît rapidement. Cela se vérifie pour chaque n :

$$S \text{ égale } L \text{ fois } U$$

et alors

$$(\det S) = (\det L)(\det U) = 1.$$

L'identité $S = LU$ est un exemple de l'une des quatre grandes factorisations matricielles de l'algèbre linéaire [13, p. 544] :

1. Triangulaire \times triangulaire : $A = LU$ (élimination de Gauss).
2. Orthogonale \times triangulaire : $A = QR$ (Gram-Schmidt).

Référence : Alan Edelman et Gilbert Strang, “Pascal’s matrices”, American Mathematical Monthly, vol. 111, n° 3, 2004, p. 361-385. https://math.mit.edu/~edelman/publications/pascal_matrices.pdf.

Transcription en LATEX : Denise Vella-Chemla, décembre 2025.

3. Orthogonale \times diagonale \times orthogonale : $A = U\Sigma V^T$ (valeurs singulières dans Σ).
4. Diagonalisation : $A = S\Lambda S^{-1}$ (valeurs propres dans Λ et vecteurs propres dans S). Les matrices symétriques vérifient $S^{-1} = S^T$, avec des vecteurs propres orthonormés et des valeurs propres réelles.

Dans $A = LU$, le triangle U est l'objectif de l'élimination. Les pivots se trouvent sur sa diagonale (ce sont les rapports $\det A_n / \det A_{n-1}$, donc les pivots de Pascal sont tous égaux à 1). On atteint U par des opérations sur les lignes enregistrées dans L . Ensuite, $Ax = b$ est résolu par élimination progressive et substitution inverse. En principe, c'est simple, mais le coût est considérable : des milliards par an pour l'algorithme le plus fréquemment utilisé en calcul scientifique.

Pour une matrice symétrique définie positive, on peut symétriser $A = LU$ en $S = LL^T$ (parfois nommée d'après Cholesky). C'est le cas de Pascal avec $U = L^T$, comme nous allons le démontrer.

Cet article propose quatre (ou peut-être $4 + \epsilon$) démonstrations de $S = LU$. Les trois premières sont connues, la quatrième pourrait être partiellement nouvelle. Ces résultats proviennent de différentes approches du triangle de Pascal :

- *Première démonstration* : Les coefficients binomiaux satisfont l'identité appropriée.
- *Deuxième démonstration* : S , L et U comptent les chemins sur un graphe orienté.
- *Troisième démonstration* : La récursion de Pascal génère les trois matrices.
- *Quatrième démonstration* : Les coefficients de $(1+x)^n$ ont une signification fonctionnelle.

L'identité binomiale qui énonce l'égalité de S_{ij} et $\sum L_{ik}U_{kj}$ apparaît naturellement en premier, mais elle ne donne aucune indication sur l'origine de $S = LU$. La démonstration par comptage de chemins (qui multiplie les matrices en recollant des graphes) est plus attrayante. La démonstration récursive utilise l'élimination et l'induction. La démonstration fonctionnelle est la plus courte : elle consiste à vérifier que $Sv = LUv$ pour la famille de vecteurs $v = (1, x, x^2, \dots)$. Ceci permet de comprendre le sens du triangle de Pascal.

Le lecteur devinera que la dernière démonstration est notre préférée. Elle ouvre la voie à des idées plus générales : les transformations telles que $x \mapsto 1+x$ et $x \mapsto 1/(1-x)$ sont des cas particuliers de $x \mapsto (ax+b)/(cx+d)$. Il s'agit de représentations proches du groupe de Möbius. Par ailleurs, S , L et U apparaissent dans la méthode multipolaire [7], l'un des "dix meilleurs algorithmes du xx^e siècle", qui a considérablement accéléré le calcul des sommes $\sum a_k/(x - r_k)$.

Vous voyez, la tentation de généraliser est véritablement irrésistible ! Nous nous engageons à ne pas laisser ce sujet prendre le pas sur le contenu de ce court article. Notre objectif est uniquement d'étudier le triangle de Pascal sous quatre angles différents : identités, graphes, récurrences et fonctions. Les matrices de Pascal ont donné lieu à plusieurs exemples résolus (voir [13, p. 89]), et cet article est disponible sur la page web du cours : web.mit.edu/18.06/.

2. Preuve par multiplication matricielle.

La démonstration directe consiste à multiplier LU pour obtenir S . Les trois matrices commencent par la ligne $i = 0$ et la colonne $j = 0$. L'élément (i, k) de L est alors $\binom{i}{k} =$ "choisir k objets parmi

i'' . En multipliant la ligne i de L par la colonne j de $U = L^T$, on cherche à vérifier que :

$$\sum L_{ik} U_{kj} = \sum_{k=0}^n \binom{i}{k} \binom{j}{k} = \binom{i+j}{i} S_{ij}. \quad (1)$$

Séparer $i + j$ objets en deux groupes, contenant respectivement i et j objets. Si l'on sélectionne $i - k$ objets du premier groupe et k objets du second groupe, on a sélectionné i objets parmi $i + j$. La première sélection peut être effectuée de $\binom{i}{i-k} = \binom{i}{k}$ façons et la seconde de $\binom{j}{k}$ façons. Tout nombre k compris entre 0 et $\min(i, j)$ est admissible, de sorte que le nombre total correspond à l'équation (1) :

$$\sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{i}{k} \binom{j}{k} = \binom{i+j}{i} \quad (2)$$

Dans la forme (2), la somme tient compte de la triangularité de L et U . Les coefficients binomiaux sont nuls lorsque $k > i$ et $k > j$.

Une référence est [14] et il est difficile d'imaginer une démonstration plus courte (bien que la démonstration 4 s'en approche). Mais la découverte de $LU = S$ serait improbable par cette voie. Les spécialistes du binôme connaissent l'identité (1), et nous autres avons tendance à nous fier à leur parole. David Ingerman nous a montré comment multiplier des matrices en “collant des graphes”, ce qui donne une explication visuelle de $LU = S$ [4], [6], [10].

3. Preuve en collant des graphes.

La première étape consiste à identifier S_{ij} comme le nombre de chemins de a_i à b_j sur le graphe orienté ascendant et descendant de la figure 1.

Un seul chemin monte directement de a_0 à b_j , ce qui correspond à $S_{0j} = 1$ dans la première ligne de S . Un seul chemin va directement de a_i à b_0 , ce qui correspond à $S_{i0} = 1$. À partir de cette ligne et de cette colonne, le reste de S est construit récursivement, selon la règle de Pascal : $S_{i-1,j} + S_{i,j-1} = S_{ij}$. Montrons que le comptage des chemins donne la même règle (et donc la même matrice S).

Une entrée typique est $S_{22} =$ effectuer 2 choix possibles parmi $4 = 6$. Il existe six chemins de a_2 à b_2 (trois horizontaux et trois ascendants). Les chemins horizontaux vont de a_{i-1} à b_j ; par récurrence, ils sont comptés par $S_{i-1,j}$. Les chemins ascendants passent par le niveau 1 et vont de là à b_j . Ils sont comptés par $S_{i,j-1}$ et la règle de Pascal est vérifiée. (Pour cela, imaginons que le graphe entier soit décalé d'un niveau vers le bas; nous allons donc en réalité de a_i à b_{j-1} de $S_{i,j-1}$ façons). Nous ignorons qui a été la personne qui, la première, a relié la matrice S à son graphe.

Découpons maintenant le graphe le long de la ligne à 45° de la figure 2. Nous voulons montrer que L_{ik} compte les chemins de a_i au point (k, k) sur cette diagonale. Ensuite, U_{kj} compte les chemins de la ligne à 45° à b_j .

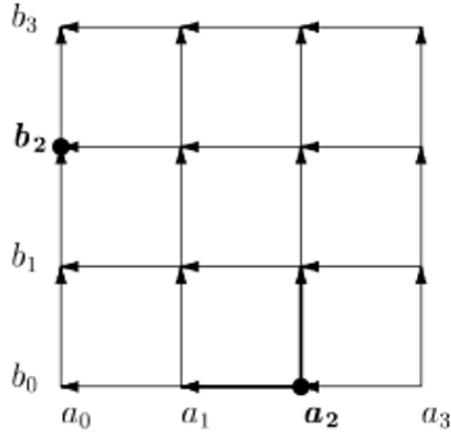


FIGURE 1 : Le graphe orienté pour la matrice de comptage des chemins S .

Le raisonnement repose à nouveau sur l’induction. On part de $L_{i0} = 1$ pour le chemin unique reliant a_i à $(0, 0)$. De même, $L_{ii} = 1$ pour le chemin unique menant à (i, i) . La récurrence de Pascal s’écrit $L_{ik} = L_{i-1,k} + L_{i-1,k-1}$ lorsque son triangle est placé dans L .

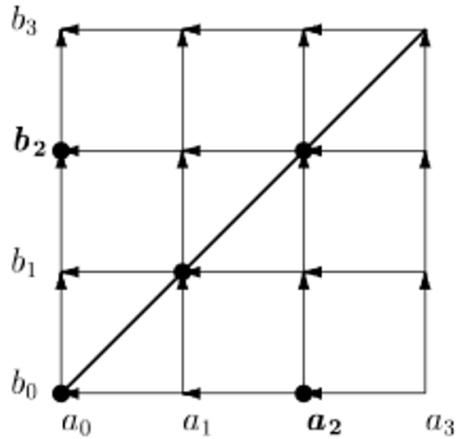


FIGURE 2 : L compte les chemins vers la droite pour rejoindre la diagonale à 45° .
 U compte les chemins ci-dessus.

Par récurrence, $L_{i-1,k}$ compte les chemins partant de la gauche de a_i et allant de a_{i-1} à (k, k) . Les autres chemins vers (k, k) partent du haut de a_i . En translatant le graphe vers le bas et la gauche (le long de la droite 45°), on imagine que ces chemins vont de a_{i-1} au point $(k - 1, k - 1)$. Ces prolongements ascendants sont comptés par $L_{i-1,k-1}$. Le nombre de chemins correspond à la récurrence de Pascal ; ce sont donc les éléments de L . De même, U_{kj} compte les chemins de (k, k) à b_j .

Il reste à constater que le recollement des graphes équivaut à multiplier L par U ! Le terme $L_{ik}U_{kj}$ compte les chemins de a_j à b_j passant par (k, k) . La somme sur k compte alors tous les chemins (et coïncide avec S_{ij}). Les six chemins de a_2 à b_2 proviennent de $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1$. Ceci achève la seconde démonstration.

Une généralisation de cette démonstration (à laquelle on résiste fermement) consiste à supprimer des arêtes du graphe. On peut supprimer l'arête reliant a_1 à a_0 . Cela annule tous les chemins passant par a_0 avant de remonter. La ligne d'origine (0) est soustraite de toutes les autres lignes de S , ce qui constitue la première étape de l'élimination de Gauss. Ces opérations sur les lignes (suppressions d'arêtes) sont au cœur de la démonstration 3 : $S = LU$ est la factorisation matricielle fondamentale obtenue par élimination.

4. Démonstration par élimination de Gauss

Les étapes d'élimination produisent des zéros sous chaque pivot, une colonne à la fois. Le premier pivot de S (et également de L) est son élément supérieur gauche, 1. On soustrait généralement les multiples de la première équation de ceux des équations suivantes. Pour les matrices de Pascal, Brawer et Pirovino [2], [6] ont remarqué qu'on pouvait soustraire chaque ligne de la ligne située en dessous.

La matrice d'élimination E a pour coefficients $E_{ii} = 1$ et $E_{i,i-1} = -1$. Pour les matrices 4×4 , on peut observer comment apparaît la matrice L immédiatement plus petite :

$$EL_4 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_3 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Le produit de E par L donne la récurrence de Pascal $L_{ik} - L_{i-1,k} = L_{i-1,k-1}$, ce qui produit la matrice plus petite L_{n-1} , décalée vers le bas comme dans (3).

Ceci suggère une démonstration par récurrence. Supposons que $L_{n-1}U_{n-1} = S_{n-1}$. Alors l'équation (3) et sa transposée donnent :

$$(EL_n)(U_nE^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Nous espérons que la dernière matrice coïncide avec ES_nE^T . Nous pouvons alors prémultiplier par E^{-1} et postmultiplier par $(E^T)^{-1}$ pour conclure que $L_nU_n = S_n$.

Considérons l'élément (i, j) de ES_nE^T .

$$(ES_n)_{ij} = S_{ij} - S_{i-1,j} \quad \text{et}$$

$$(ES_nE^T)_{ij} = (S_{ij} - S_{i-1,j}) - (S_{i,j-1} - S_{i-1,j-1}).$$

Dans cette dernière expression, les trois premiers termes s'annulent pour donner $S_{i-1,j-1}$. Il s'agit de l'élément (i, j) de la matrice plus petite S_{n-1} , décalée vers le bas comme dans (4). La récurrence est complète.

Cette approche “algorithme” aurait pu mener à $LU = S$ sans connaître ce résultat au préalable. Sur le graphe, multiplier par E revient à supprimer toutes les arêtes horizontales qui atteignent la ligne 45° par la droite. Tous les chemins doivent alors monter vers cette ligne. Lors du dénombrement, on peut considérer leur dernier mouvement comme acquis, ce qui laisse un graphe triangulaire de taille inférieure (correspondant à $L_{n-1}!$).

L’élimination complète de S à U correspond à la suppression de toutes les arêtes horizontales situées en dessous de la ligne 45° . Alors $L = I$ puisque tout chemin vers cette droite est vertical. L’élimination supprime généralement des colonnes de S (et des colonnes d’arêtes), mais cela ne réduit pas la dimension de S_{n-1} . L’ordre d’élimination optimal consiste à multiplier par E pour supprimer les arêtes horizontales une diagonale à la fois. Ceci a permis une démonstration par récurrence qui constitue la preuve 3.

5. Puissances, inverse et logarithme de L .

Pour préparer la démonstration 4, considérons la signification “fonctionnelle” de L . Chaque série de Taylor autour de zéro est le produit scalaire d’un vecteur de coefficients $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ avec le vecteur moment $v = (1, x, x^2, \dots)$. La fonction de Taylor $f(x)$:

$$\sum a_k x^k = a^T v = a^T L^{-1} Lv. \quad (5)$$

Ici, L devient une matrice triangulaire infinie, contenant tout le triangle de Pascal. La multiplication par Lv montre que (5) se termine par une série de puissances de $(1+x)$:

$$Lv = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+x \\ (1+x)^2 \\ \ddots \end{pmatrix}. \quad (6)$$

La multiplication simple (6) est très utile. Une seconde multiplication par L donnerait des puissances de $2+x$. La multiplication par L^p donne des puissances de $p+x$. L’entrée (i,j) de L^p doit être $p^{i-j} \binom{i}{j}$ comme l’ont observé des auteurs précédents (le cas 4×4 est fourni) :

$$L^p = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ p & 1 & & \\ p^2 & 2p & 1 & \\ p^3 & 3p^2 & 3p & 1 \end{pmatrix}, \quad L^p L^q = L^{p+q}.$$

Pour toute matrice de taille $n = 1, 2, \dots, \infty$, les puissances L^p représentent les groupes \mathbb{Z} et \mathbb{R} (pour p entier et p réel). La matrice inverse L^{-1} a la même forme avec $p = -1$. Call et Velleman [3] ont identifié L^{-1} , qui est DLD^{-1} avec D comme indiqué :

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

La matrice L^p a la forme exponentielle e^{pA} et on peut calculer $A = \log L$:

$$A = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^{pA} - I}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{L^p - I}{p} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ 0 & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Le remarquable article [1] prend cette “matrice de création” A comme point de départ et relie L aux matrices de Vandermonde et Stirling, ainsi qu’à celles de Bernoulli et Bernstein. (Il existe certainement de nouvelles connexions à explorer). Remarquons que la série $L = e^A = I + A + A^2/2! + \dots$ ne comporte que n termes, produisant les coefficients binomiaux de L . A ne possède aucun sous-déterminant négatif. Son exponentielle L est donc également totalement positive [11, p. 115]. Le produit $S = LU$ hérite de cette propriété d’avoir tous ses mineurs positifs (voir [6]).

6. Valeurs propres de Pascal.

Un bref commentaire sur les valeurs propres peut précéder la quatrième démonstration de $S = LU$. Les valeurs propres de L et U sont leurs éléments diagonaux, tous égaux à 1. Ainsi, L et U sont semblables à leurs inverses (et les matrices sont toujours semblables à leurs transposées). La transposition de $L^{-1} = DLD^{-1}$ dans l’équation (7) conduit à $U^{-1} = DUD^{-1}$ car $D^{-1} = D^T$.

Il est plus remarquable encore que S^{-1} soit semblable à S . Les valeurs propres de S doivent être appariées par paires inverses λ et $1/\lambda$, puisque les matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

$$\begin{aligned} S^{-1} &= U^{-1}L^{-1} = DUD^{-1}DLD^{-1} \\ &= (DU)(LU)(U^{-1}D^{-1}) = (DU)S(DU)^{-1} \end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrice de Pascal symétrique 3×3 sont $\lambda_1 = 4 + \sqrt{15}$, $\lambda_2 = 4 - \sqrt{15}$ et $\lambda_3 = 1$. Alors $\lambda_1\lambda_2 = 1$ forment une paire réciproque, et $\lambda_3 = 1$ est réciproque. Les références de l’excellent ouvrage de Higham [8], ainsi que l’aide concernant Pascal dans MATLAB, permettent d’établir d’autres propriétés de $S = \text{pascal}(n)$.

7. Preuve par égalité de fonctions.

Si $Sv = LUv$ est vérifié pour un nombre suffisant de vecteurs v , on peut conclure que $S = LU$. Notre quatrième démonstration, qui est notre préférée, utilise les vecteurs infinis $v = (1, x, x^2, \dots)$.

La première ligne de Sv présente la série géométrique suivante :

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

La dérivée de chaque ligne de Sv donne la ligne suivante.

On a besoin de $|x| < 1$ pour que la convergence se produise (x peut être un nombre complexe).

$$Sv = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \dots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/(1-x) \\ 1/(1-x)^2 \\ 1/(1-x)^3 \\ 1/(1-x)^4 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Le même résultat devrait être obtenu avec LUv . La première étape, Uv , comporte des puissances supplémentaires de x car les lignes ont été décalées :

$$Uv = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/(1-x) \\ x/(1-x)^2 \\ x^2/(1-x)^3 \\ x^3/(1-x)^4 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

En factorisant $1/(1-x)$, les composantes de Uv sont les puissances de $a = x/(1-x)$. Multiplions maintenant par L , sans problème de convergence puisque toutes les sommes sont finies. La signification fonctionnelle de L se trouve dans le binôme de Newton. La n -ième ligne de L contient

$$L(Uv) = \frac{1}{1-v} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \\ a^3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/(1-x) \\ 1/(1-x)^2 \\ 1/(1-x)^3 \\ 1/(1-x)^4 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $Sv = LUv$ pour les vecteurs $v = (1, x, x^2, \dots)$. En déduit-on que $S = LU$? Le choix $x = 0$ donne le vecteur de coordonnées $v_0 = (1, 0, 0, \dots)$. Alors, $Sv_0 = LUv_0$ assure la concordance entre les premières colonnes de S et LU (qui sont toutes égales à 1). Si l'on peut construire les autres vecteurs de coordonnées à partir des vecteurs v , alors toutes les colonnes de S et LU doivent être identiques.

La méthode la plus rapide pour obtenir $(0, 1, 0, \dots)$ consiste à dériver v en $x = 0$. Introduisons $v_\Delta = (1, \Delta, \Delta^2, \dots)$ et formons une combinaison linéaire de v_Δ et v_0 :

$$S \left(\frac{v_\Delta - v_0}{\Delta} \right) = LU \left(\frac{v_\Delta - v_0}{\Delta} \right).$$

Faisons tendre $\Delta \rightarrow 0$. Toutes les séries convergent uniformément, toutes les fonctions sont analytiques, toutes les dérivées sont valides. Les dérivées d'ordre supérieur donnent les autres vecteurs de coordonnées, et les colonnes de S et LU sont identiques. En travaillant avec des matrices infinies, $S = LU$ est confirmé pour tout ordre n simultanément.

Une autre possibilité consiste à considérer les vecteurs de coordonnées comme des combinaisons linéaires (d'un continuum) des vecteurs v , en utilisant le théorème intégral de Cauchy autour de

$$x = z = 0.$$

Ces démonstrations fonctionnelles nécessitent l'intervention d'un analyste, car un algébriste travaillant seul pourrait appliquer S à Sv . Les puissances de cette matrice positive deviennent soudainement négatives à partir de $\sum_1^\infty (1-x)^{-n} = -1/x$. La situation se complique encore si l'on multiplie à nouveau par S pour obtenir $S^3v = -v$:

$$S^2v = \begin{pmatrix} -1/x \\ -(x-1)/x^2 \\ -(x-1)^2/x^3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad S^3v = \begin{pmatrix} -1 \\ -x \\ -x^2 \\ \vdots \end{pmatrix} = -v.$$

Nous semblons avoir démontré que $S^3 = -I$. Il pourrait y avoir un léger problème de convergence. Cela n'a pas dérangé Cauchy (lorsqu'il était en forme), et nous devons être face à une généralisation matricielle de sa série géométrique pour $1/(1-2)$:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots = -1$$

8. Matrices de Möbius.

Un véritable algébriste chercherait des matrices de type Pascal dans une représentation de groupe. Supposons que les matrices infinies S , U et L représentent les transformations de Möbius $x \mapsto 1/(1-x)$, $x \mapsto x/(1-x)$ et $x \mapsto x+1$ rencontrées dans la démonstration 4. Alors, $LU = S$ admettrait une démonstration encore plus concise (démonstration 5) en composant $y = x/(1-x)$ et $z = y+1$ à partir de U et L :

$$z(y(x)) = \frac{x}{1-x} + 1 = \frac{1}{1-x}$$

représente $L \circ U = S$. Nous espérons étudier une classe plus large de "matrices de Möbius" pour $(ax+b)/(cx+d)$, mais la représentation infinie adéquate reste à trouver. Une représentation de dimension finie conduit à $M^3 = I$ pour la matrice pivotée à signes alternés, connue dans MATLAB sous le nom de $M = \text{pascal}(n, 2)$. Voici le cas $n = 3$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = I$$

car

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}}} = x.$$

Waterhouse [15] a appliqué cette idée (modulo p) pour démontrer un théorème de Strauss : si n est une puissance de p , alors $S^3 = I \pmod{p}$. Il semble tout à fait possible que des transformations numériques basées sur les matrices de Pascal restent à découvrir.

Ne serait-il pas ironique et fascinant que le triangle de Pascal s'avérait appartenir aux mathématiques appliquées ?

9. Deux opinions à propos du triangle de Pascal

Pascal n'a pas été le premier à créer son triangle ! Edwards [5] décrit la découverte progressive de ses éléments, en Perse (par Omar Khayyam lui-même), en Chine, en Europe et en Inde. Les démonstrations sont celles de Pascal (dont une démonstration par récurrence qui est devenue un modèle pour les mathématiciens ultérieurs). Nous avons beaucoup apprécié les propos de Jacques Bernoulli, qui a complété le lien avec les puissances en calculant $1^p + \dots + N^p$:

Cette table possède des propriétés véritablement exceptionnelles et admirables ; car, outre le fait qu'elle recèle les mystères de la combinatoire, elle est reconnue par les spécialistes des branches supérieures des mathématiques comme contenant également les secrets les plus importants de l'ensemble du reste du sujet.

Personne ne saurait mieux dire. Mais un génie de notre époque a exprimé une pensée différente, que nos lecteurs bienveillants ne partageraient certainement jamais. Cette pensée est de Don Knuth [12] et est citée (avec Bernoulli) dans la préface de [5] :

Il y a tellement de liens en jeu que lorsqu'une personne découvre une nouvelle identité, rares sont ceux qui s'enflamment encore, hormis le découvreur !

Références

- [1] L. Aceto and D. Trigiante, The matrices of Pascal and other greats, Amer. Math. Monthly 108 (2001) 232-245.
- [2] R. Brawer and M. Pirovino, The linear algebra of the Pascal matrix, Linear Algebra Appl. 174 (1992) 13-23.
- [3] G. Call and D. Velleman, Pascal's matrices, Amer. Math. Monthly 100 (1993) 372-376.
- [4] E. B. Curtis, D. Ingerman and J. A. Morrow, Circular planar graphs and resistor networks, Linear Algebra Appl. 283 (1998) 115-150.
- [5] A.W.F. Edwards, Pascal's Arithmetical Triangle : The Story of a Mathematical Idea, Charles Griffin, London, 1987, and Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2002.
- [6] S. Fallat, Bidiagonal factorization of totally nonnegative matrices, Amer. Math. Monthly 108 (2001) 697-712.
- [7] L. Greengard and V. Rokhlin, A fast algorithm for particle simulations, J. Comp. Phys. 73 (1987) 325-348.
- [8] N. J. Higham, Accuracy and Stability in Numerical Algorithms, SIAM, Philadelphia, 1996.
- [9] P. Hilton and J. Pederson, Looking into Pascal's triangle : Combinatorics, arithmetic, and geometry, Math. Magazine 60 (1987) 305-316.
- [10] D. Ingerman, Discrete and continuous inverse boundary problems on a disc, Ph.D. Thesis, University of Washington, 1997.

- [11] S. Karlin, Total Positivity, vol. 1, Stanford University Press, Stanford, 1968.
- [12] D. Knuth, Fundamental Algorithms : Volume I, The Art of Computer Programming, Addison-Wesley, Reading, MA, 1973.
- [13] G. Strang, Introduction to Linear Algebra, 3rd ed., Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, MA, 2003.
- [14] J. Strum, Binomial matrices, Two-Year College Math. J. 8 (1977) 260-266.
- [15] W.C. Waterhouse, The map behind a binomial coefficient matrix over Z/pZ , Linear Algebra Appl. 105 (1988) 195-198.

ALAN EDELMAN, passionné d'algèbre linéaire depuis toujours, il a récemment fêté ses 40 ans avec un gâteau offert par sa femme, décoré d'un glaçage sur lequel était écrit $Ax = \lambda x$. Titulaire d'une licence et d'une maîtrise de l'Université Yale, il a obtenu un doctorat du MIT, où il enseigne depuis 1993. Il a également passé trois ans à l'Université de Californie à Berkeley. Sa thèse sur les matrices aléatoires a été dirigée par Nick Trefethen (un ouvrage est en cours de rédaction). Les matrices aléatoires, le calcul parallèle et l'algèbre linéaire numérique demeurent ses principaux centres d'intérêt. Il a reçu le prix Gordon Bell pour son travail dans le domaine du calcul parallèle et le prix Householder pour ses recherches en algèbre linéaire numérique.

Affectation d'Alan Edelman : Département de Mathématiques, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139.

Site d'Alan Edelman : <http://math.mit.edu/~edelman>

GILBERT STRANG a fait ses études de premier cycle au MIT et a été boursier Rhodes au Balliol College d'Oxford. Il a obtenu son doctorat à l'UCLA et enseigne depuis au MIT. Il a présidé la SIAM de 1999 à 2000 et est président du Comité national américain de mathématiques. Il continue d'enseigner et d'écrire des manuels : *Introduction à l'algèbre linéaire* (1993, 1998, 2003), *Algèbre linéaire et applications* (1976, 1983, 1988), *Introduction aux mathématiques appliquées* (1986) et *Calcul* (1991). Ses ouvrages sont toujours publiés par Wellesley-Cambridge Press, à l'exception de son premier livre sur l'algèbre linéaire, paru chez Brooks/Cole. Ses autres ouvrages (écrits en collaboration avec de brillants auteurs) ne sont que de l'algèbre linéaire sous une forme simplifiée : *An Analysis of the Finite Element Method* (1973), *Wavelets and Filter Banks* (1996) et *Linear Algebra, Geodesy, and GPS* (1997). Il prévoit d'apprendre prochainement quelque chose de nouveau. Il est particulièrement heureux de partager cet article sur Pascal avec son ami Alan Edelman, lui aussi lauréat du prix Chauvenet de la MAA.

Affectation de Gilbert Strang : Département de Mathématiques, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139.

Site de Gilbert Strang : <http://math.mit.edu/~gs>

Note de la traductrice : les chercheuses et chercheurs en mathématiques seraient-ils tous gourmands ? Même si chacune de nous est son unique référence, nous vivons accompagnées. À défaut d'une photo du gâteau de l'épouse d'Edelman, je colle ci-dessous une photo du gâteau que m'avaient concocté mon mari, mes enfants, et mon pâtissier, pour mes 44 ans, qui fournit la belle décomposition par lindromique de Goldbach de 44 et en dessous, les décompositions de Goldbach sur carré écossais de 60, mon âge aujourd'hui. Manque un petit pont entre le gâteau d'Edelman et le mien, entre le carré et la diagonale du présent article et "mon" carré de tartan...

