Un entretien avec Alain Connes

1 La géométrie non commutative

Le sujet qui m'a occupé pendant toutes ces années est très, très loin d'être épuisé. C'est un sujet qui commence par la découverte de Heisenberg. C'est une découverte de physique dans les années 25, 1925 bien sûr, et ce qu'a découvert Heisenberg, c'est quelque chose de tout à fait extraordinaire. Il a découvert que lorsqu'on fait de la physique avec des systèmes microscopiques, eh bien, on ne peut plus faire des calculs comme on y est habitué, c'est à dire faire ce qu'on appelle de l'algèbre commutative.

On ne peut plus utiliser la commutativité. Alors, la commutativité, ça veut dire que si vous écrivez mc^2, ou c^2 fois m, c'est la même chose, mais lorsqu'on fait de la physique quantique, on ne peut pas. Et donc, qu'est ce que ça veut dire ? Ça veut dire qu'il est essentiel aussi, autant pour la physique que pour les mathématiques, de comprendre des espaces plus subtils qui sont les espaces non commutatifs. Alors si c'était seulement... si la géométrie non commutative était seulement une généralisation de la géométrie à des espaces dans lesquels les cordonnées ne commutent pas, ça ne serait pas très intéressant.

Ce que j'avais découvert dans ma thèse, c'était que, justement, une algèbre non commutative par la simple non commutativité engendre son propre temps, c'est à dire évolue avec le temps. C'est quelque chose qui est difficile à expliquer, mais qui a une profondeur, c'est-à-dire qu'en gros, on peut la résumer sous la forme suivante. On peut dire si vous voulez que l'algèbre commutative est statique, elle ne bouge pas et l'algèbre non commutative évolue. Alors il faut bien comprendre que quand on parle d'algèbre non commutative, de coordonnées qui ne commutent pas, etc., on pourrait penser, de manière un peu simpliste si vous voulez, que c'est une abstraction mathématique qui n'a rien à voir avec nos habitudes, etc. En fait, ce n'est pas du tout le cas parce que, justement, la non commutativité, on est extrêmement familier avec ça parce que lorsqu'on écrit, avec des lettres, lorsqu'on écrit des mots, des phrases, etc., on doit bien sûr faire attention à l'ordre des lettres. Dans le langage écrit, on ne peut pas permuter les lettres.

Si on s'amuse à permuter les lettres, on obtient ce qu'on appelle une anagramme. Et évidemment, à ce moment-là, on peut avoir deux ensembles de lettres qui sont les mêmes dans le cadre commutatif, mais qui ont des significations totalement différentes dans le cas non commutatif. L'exemple qui a été l'occasion d'un livre qu'on a écrit récemment avec Jacques Dixmier et mon épouse, c'est si vous voulez, cette anagramme magnifique qui est dû à Jacques Perry-Salkow et qui est, justement, *"l'Horloge des anges ici-bas"*, qui a à voir avec le temps et l'anagramme de ça, c'est *"Le boson scalaire de Higgs"*.

Donc, on voit bien que si on regarde seulement la partie commutative, si vous voulez, de ces deux phrases, elles sont les mêmes, mais par contre, elles ne sont pas du tout les mêmes, elles n'ont pas du tout le même sens. Le quantique, la grande découverte de Heisenberg, c'est que, justement, il faut faire attention. La manière dont cette géométrie non commutative a évolué, et c'est pour ça qu'elle est très, très loin d'être épuisée, c'est que, d'une part, il y a un lien très, très fort avec la physique. Alors ça, je l'ai développé pendant de nombreux cours, avec mes collaborateurs, etc. Donc, il y a un lien avec le fait que c'est justement le formalisme de la mécanique quantique qui permet de comprendre comment des variables continues peuvent coexister avec des variables discrètes, et comment on peut reformuler la géométrie, la géométrie riemannienne, sous une forme qui est bien plus compatible avec le quantique que ne l'est la relativité générale.

Donc, ça, c'est tout un domaine, c'est tout un domaine qui est encore ouvert, qui est loin d'être épuisé. Il y a eu de gros progrès. Et puis il y a eu un autre épisode extrêmement exaltant qui s'est produit, c'est que si vous voulez, cette géométrie non commutative, justement, permet d'encoder des espaces qui, normalement, pour les mathématiciens, apparaissent comme des espaces très, très singuliers. Ce sont des espaces quotients, mais ce sont des espaces qu'on rencontre en mathématiques en fait, très, très souvent, les gens ne s'en rendent pas compte parce que dès qu'on prend ce qu'on appelle en mathématique une limite inductive, on va tomber sur un espace qui est de cette nature, parce qu'elle est définie comme un espace quotient. Et l'idée, si vous voulez l'idée fondamentale, c'est que lorsqu'on prend un quotient qui est difficile à prendre, il ne faut pas le regarder comme un ensemble. Mais il faut le regarder comme un

Interview d'Alain Connes, Professeur titulaire de la Chaire d'Analyse et Géométrie au Collège de France ; Alain Connes est interrogé en mars 2014 par Sophie Bécherel. Ont également participé au projet de réalisation de cet entretien Cécile Barnier et Sophie Chéron ; le projet a été financé par la Fondation Bettencourt-Schueller ; entretien visionnable ici : https://www.college-de-france.fr/site/alain-connes/Entretien-avec-Alain-Connes.htm.

espace non commutatif où la non commutativité vient du fait qu'on va identifier entre eux des points qui sont distincts et donc on va avoir des flèches, etc. Et c'est ça qui rend la chose non commutative.

Alors il y a eu un épisode tout à fait... qui est loin d'être terminé bien sûr, c'est en fait qu'un espace fondamental pour la théorie des nombres, qui est relié aux nombres premiers en fait, est relié à un espace non commutatif. Alors il y a un très, très long développement qui s'est fait, qui a correspondu à beaucoup de cours que j'ai faits, etc. mais qui continue à évoluer.

Et maintenant, on a trouvé avec Katia Consani, on a trouvé très, très récemment qu'en fait, il y avait un objet de géométrie algébrique très, très pur qui fait intervenir seulement les entiers avec les trois opérations de *inf* de deux nombres, de la somme de deux nombres et leur produit, mais qui fait intervenir deux concepts fondamentaux, le concept de topos, qui est dû à Grothendieck et le concept d'algèbre de caractéristique 1. Ça, c'est encore une autre histoire.

Cet objet fait qu'on a exactement le parallèle avec ce qu'avait fait André Weil en géométrie algébrique, justement pour s'occuper d'un problème fondamental en caractéristique finie.

Ce que vous nous dites là semble démontrer que les mathématiques engendrent d'autres mathématiques.

Oui, mais ce n'est pas qu'elles engendrent, non. Ce qu'il faut bien comprendre, c'est que j'ai toujours eu cette longue discussion avec Jean-Pierre Changeux. Et ce n'est pas qu'on engendre, non, c'est comme si..., mais laissez moi vous expliquer pourquoi ce n'est pas qu'on engendre. C'est exactement comme si on disait que Christophe Colomb avait engendré l'Amérique. Tout le monde rigolerait. Bon, ben, le mathématicien, c'est pareil. Le mathématicien ne va pas engendrer. Il va découvrir et il va découvrir un nouveau pan des mathématiques. Soit parce que si vous voulez, ces mathématiques viennent de la physique. Et bien sûr, je crois que c'est Hadamard qui en a le mieux parlé, si vous voulez : les mathématiques viennent de la physique du fait qu'elles ont à voir avec la réalité extérieure, elles ont un goût particulier. Elles ont une force particulière, mais ce n'est pas du tout quelque chose qu'on engendre, non.

2 La recherche mathématique

On essaye de comprendre. On essaye de comprendre la réalité physique, bien entendu, et on essaye de comprendre la réalité mathématique. C'est quelque chose qui est très, très obscur, très difficile à comprendre. Et la manière que l'on a d'essayer de comprendre, c'est d'élaborer, alors là, on invente effectivement des concepts. Ces concepts sont très précis. Par exemple, j'ai parlé du concept de topos dû à Grothendieck. Ce sont des concepts très précis.

Ce ne sont pas des choses vagues, ce sont des choses très, très précisément définies. Et ce qui est extraordinaire, si vous voulez, c'est qu'un des rôles souvent méconnu des mathématiques, c'est celui d'engendrer des concepts. Et ces concepts, au départ, vont être des concepts purement mathématiques. Mais graduellement, ils vont s'insérer dans le quotidien que nous partageons tous. Un exemple très frappant, c'est le concept de fonction, vous savez, le concept de fonction n'est pas quelque chose qui est évident pour le grand public, etc.

Mais quand on parle par exemple du ralentissement de la croissance du chômage ou de choses comme ça, ça correspond à des propriétés mathématiques très précises, définies sur des fonctions. Et donc, on a là un exemple frappant d'un concept qui vient des mathématiques et qui, graduellement, graduellement, va s'inscrire dans le bagage commun de la civilisation. Et une des raisons pour laquelle il pourra s'inscrire, c'est que maintenant, on n'a pas seulement l'imprimerie, l'écriture, on a aussi les ordinateurs.

Et l'ordinateur ne va pas être seulement capable de transmettre des mots, de transmettre des chiffres. Il va être capable, justement, de transmettre des fonctions, c'est à dire qu'on va pouvoir voir sur son écran d'ordinateur le graphe d'une certaine fonction, etc. Et on va pouvoir comprendre qualitativement les propriétés de ces fonctions et la pertinence des concepts mathématiques.

3 Entre réalité physique et mathématiques pures

Il y a toujours un équilibre et justement, mon équilibre... si vous voulez, on ne peut avancer que si on marche sur deux pieds. Mon équilibre, c'est entre d'un côté la physique, bien entendu, que je n'abandonne jamais, parce qu'il y a cette essence de la physique quantique, justement, qui, comme je le disais si vous voulez, permet cette coexistence du continu et du discret qui est magnifique et d'un autre côté, il y a la géométrie algébrique, la théorie des nombres, etc.

Je parlais par exemple des topos. Grothendieck a écrit sur les topos que justement, c'était *"le lit à deux places qui permet les épousailles entre le discret et le continu"*. Donc, bien que ce soit une approche très différente, ce n'est pas totalement disjoint.

Donc il y a cet équilibre entre les deux et bon, la physique, bien sûr, se heurte à l'expérimentation. Les mathématiques se heurtent aussi, d'une certaine manière, à une expérimentation. J'utilise énormément l'ordinateur, j'utilise énormément de vérifications sur ordinateur, même pour des choses qui paraîtraient impossibles à regarder sur l'ordinateur. Et là, on se heurte à une vraie réalité. On se heurte à quelque chose qu'on ne peut pas modifier. On veut savoir si quelque chose est vrai ou pas, on fait des tests, on regarde tout ça.

Bon, ben, c'est un peu comme un physicien qui va faire des expériences et regarder si son idée est correcte ou s'il faut la corriger. Bon donc, il y a ces deux pans de mon travail, si vous voulez, et il n'y a pas un pan qui a pris le pas sur l'autre, ils sont toujours restés très équilibrés.

Certains disent quand même que votre géométrie non commutative, elle est un pont entre la mécanique quantique et la physique classique. Pourquoi ?

Oui. Si vous voulez, ce qu'il y a... ce n'est pas vraiment un pont entre la mécanique quantique et la physique classique. Non, le pont entre la mécanique quantique et la physique classique, c'est ce qu'on appelle la déquantification. C'est toute une histoire, ça relie à la caractéristique 1 dont je parlais tout à l'heure. Mais c'est autre chose. En fait, la géométrie non commutative, non, c'est plus un pont entre le quantique et la géométrie et le fait que, justement, notre géométrie à laquelle nous sommes habitués, celle de Descartes, s'applique parfaitement à la physique classique, mais ne s'applique pas à la physique quantique.

La physique quantique oblige à repenser la géométrie. C'est exactement mon travail. C'est exactement ce que je fais, ce qu'on a fait avec mes collaborateurs, c'est de montrer que le lagrangien [1], qui est extrêmement compliqué, et qui contient à la fois, la gravitation, et la mécanique quantique, le lagrangien de la mécanique quantique, ce lagrangien, se comprend de manière incroyablement simple et conceptuelle lorsqu'on a les outils de la géométrie non commutative. Mais c'est encore un lagrangien, il faut comprendre ça, qui est au niveau classique, c'est-à-dire qu'il n'est pas encore quantifié. Alors, on sait qu'on est sur la bonne voie parce que ce lagrangien qui a l'air incroyablement compliqué, il prend quatre heures pour le mettre en formules.

Un lagrangien, on peut résumer ça comme une formule ?

Un lagrangien, c'est une formule, mais en gros, si vous voulez pour vous expliquer ce que c'est qu'un lagrangien, il faut comprendre le principe d'action le plus simple, qui est ce qu'on appelle le principe de Fermat, et je peux vous l'expliquer en trois mots. Le principe de Fermat, c'est le principe qui dit que la lumière va suivre le chemin qui sera le plus court en temps pour elle. Alors, vous pouvez faire une analogie avec... Supposez que vous soyez en banlieue, que vous vouliez aller à l'intérieur de Paris, par exemple.

Ok, eh bien, à ce moment-là, si vous savez qu'il y a de grands grands embouteillages dans Paris, ce que vous allez faire, c'est que vous allez atteindre le point de la circonférence de Paris. Qui sera le plus proche du point que vous voulez atteindre ? Peu importe que vous n'alliez pas en ligne droite. Et ça, c'est exactement ce qu'on appelle le principe de réfraction de la lumière. D'accord ? Donc, le principe de Fermat vous dit qu'il y a un principe qui consiste à minimiser le temps de parcours, ok ? Alors les physiciens ont agrandi ce principe à des choses beaucoup plus générales. Ils l'ont agrandi à toute la physique et lorsqu'on l'agrandit à toute la physique, le principe d'action, c'est justement ce qu'on appelle le lagrangien. D'accord ? Et

1. Le lagrangien d'un système dynamique est une fonction des variables dynamiques qui permet d'écrire de manière concise les équations du mouvement du système.

il contient toute la physique parce qu'il contient à la fois la gravitation et il contient aussi le lagrangien de la mécanique quantique. Mais on est encore au niveau classique, comme on dit. Il faut encore quantifier ça.

Et alors, ce qu'on s'est dit avec mes collaborateurs, c'est que quantifier quelque chose que l'on ne comprend pas, c'est un peu illusoire. Et donc, ce qu'on a fait, c'est qu'on a compris ce lagrangien classique, comme étant le lagrangien d'Einstein, c'est à dire la gravitation pure, mais sur un espace un petit peu plus subtil que l'espace, qui est simplement le continu auquel on est habitué et l'espace qu'on a trouvé, c'est un espace qui est précisément un mélange entre le continu et le discret, et ce mélange ne peut se produire qu'à travers le non commutatif.

Et ça vous donne quoi, d'avoir trouvé ça ?

Ça nous donne d'abord un plaisir esthétique formidable, le fait qu'un lagrangien, qui normalement prend quatre heures à être transcrit en LaTex sur un fichier, peut s'écrire sous la forme d'une toute petite formule. Et cette toute petite formule est encore plus simple que la formule d'Einstein, puisque c'est une formule qui ne fait que compter le nombre de valeurs propres de l'élément de longueur en géométrie non commutative, qui sont plus grandes qu'une longueur donnée. Donc, c'est quelque chose d'incroyablement simple et c'est quelque chose si vous voulez, qui dit justement que l'élément de longueur en géométrie non commutative est quelque chose de totalement différent de l'élément de longueur classique. L'élément de longueur classique, vous savez, c'était le mètre-étalon dont on nous parlait lorsqu'on était étudiants et on nous disait "L'élément de longueur... Le mètre-étalon est déposé au Pavillon de Breteuil", etc. Et il y avait toute une histoire qui expliquait la création de ce mètre-étalon avec Delambre et Méchain qui avaient été envoyés, les arpenteurs qui avaient été envoyés entre Dunkerque et Barcelone pour mesurer, etc.

Et alors ? Il s'est produit justement dans les années 1920 un épisode extraordinaire qui est exactement le même au niveau de la physique que le changement de paradigme que nous proposons pour la géométrie non commutative. Cet épisode, c'est le suivant. Il y avait un congrès, pas d'arpenteurs, mais du système métrique. Donc, les gens étaient réunis et parmi eux, il y en a un qui a levé le doigt pendant la réunion et il a dit "Je suis désolé de vous apprendre une mauvaise nouvelle, mais l'unité de longueur change de longueur.". Imaginez, le mètre change de longueur. Alors c'est très, très embêtant, si vous voulez, on a une unité de longueur qui change de longueur.", alors les autres lui ont demandé. "Bon, d'accord, c'est très bien, mais comment est-ce que vous savez ça ?" Il a dit "Écoutez, j'ai pris le mètre-étalon qui est au Pavillon de Breteuil, etc. Et je l'ai mesuré par rapport à la longueur d'onde du krypton et je me suis aperçu qu'il changeait de longueur".

Bon, alors, catastrophe, etc. On ne peut pas prendre un élément de longueur qui change de longueur, alors graduellement, les physiciens ont réfléchi, etc.

Et ils ont compris qu'en fait, il fallait prendre comme unité de longueur, ce qui avait permis de voir que l'ancienne unité de longueur avait changé. Donc, ils ont pris une unité de longueur qui est spectrale. Ensuite, ils ont remplacé le krypton par le césium.

Et il est bien évident que si l'on veut unifier le système métrique, admettons dans la galaxie, il faudra donner quelque chose de convaincant.

Si on dit aux gens "si vous voulez mesurer votre lit, il faut que vous veniez au Pavillon de Breteuil, etc." Bon, ça ne sera pas très convaincant. Si, par contre, on leur dit "écoutez, vous prenez l'hydrogène. Vous prenez le spectre de l'hydrogène. Il y a une certaine raie spectrale qui a une certaine forme et vous prenez sa longueur d'onde comme unité de longueur". C'est formidable. Et bien le changement qui permet de passer de la géométrie classique à la géométrie non commutative est exactement le même, c'est à dire qu'en géométrie non commutative, l'élément de longueur est spectral, il est donné par l'inverse de ce qu'on appelle l'opérateur de Dirac et il est donné par ce que les physiciens appellent le propagateur des fermions, c'est à dire quelque chose qu'ils écrivent toujours comme un infinitésimal. Donc, il y a là si vous voulez une coïncidence qui est extrêmement, extrêmement forte, et qui dit qu'il y a une évolution de la géométrie qui passe justement d'un formalisme entièrement classique, entièrement commutatif à un formalisme qui cadre avec le non commutatif, mais qui aussi est spectral, qui devient spectral.

Pourquoi dites-vous que vous n'en avez pas fini... ?

On n'en a pas fini, mais non. On en est au tout début, si vous voulez, on en est au tout début. D'abord parce que bon, effectivement, il faudrait passer au niveau quantique pour la géométrie de l'espace-temps, c'est à dire quantifier ce lagrangien dont je parlais, mais aussi dans la compréhension, par exemple, de la géométrie qui sous-tend les nombres premiers, on est encore bien loin du compte. On a trouvé récemment donc, l'objet qu'on cherchait depuis une quinzaine d'années.

C'est ce que je disais. C'est un objet de géométrie algébrique, mais qui utilise des notions très sophistiquées puisqu'il utilise à la fois les topos et la caractéristique 1.

Mais d'un autre côté, lorsqu'on donne la définition, la définition est d'une simplicité bouleversante, si vous voulez, donc, c'est sûrement la bonne définition. Mais ensuite, il faut développer l'analogue de la géométrie algébrique qui avait été développée en caractéristique finie, il faut la développer en caractéristique 1, il faut développer une cohomologie qui remplace la cohomologie de Weil, etc. Donc, vous voyez, il y a tout un programme qui est là, qui est devant nous.

4 Les outils du mathématicien

On a une chance inouïe en mathématiques, c'est qu'un mathématicien confronté à un problème très difficile, qu'est ce qu'il fait ? En général, le problème est trop difficile pour l'attaquer frontalement. Donc il y a une méthode. Il faut savoir, par exemple, que si je vous dis "on prend une tablette de chocolat qui a 4 d'un côté, 8 de l'autre. Combien faut il de fois la couper en deux pour que finalement, elle soit réduite en petits carreaux ?". Vous allez me dire c'est très, très compliqué, etc., d'accord.

Eh bien, l'idée du mathématicien, c'est immédiatement de généraliser le problème. C'est à dire qu'au lieu de dire une tablette de chocolat de 4 fois 8, il va dire une tablette de chocolat de n fois m, où n et m sont deux entiers. Et puis après, il va prendre les plus petites valeurs de n et m. Par exemple, il va prendre $n = 1, m = 2$. Il va prendre 2 carreaux. OK, on coupe en une fois, ça marche. D'accord.

Et puis après, il va s'amuser à regarder des cas plus simples, mais de plus en plus compliqués. Et au bout d'un moment, parce qu'il aura résolu les cas les plus simples qui sont faciles, la difficulté va croître comme un escalier. Et à travers cet escalier, à un moment donné, il dira "Ah voilà, ça y est, j'ai compris !", et il aura compris l'idée générale. D'accord. Donc, c'est ça l'essence des mathématiques. Et si vous voulez, il y a une chose formidable, c'est qu'en général, lorsqu'on regarde les petits cas, les cas plus simples, eh bien, ensuite, on va pouvoir procéder par analogie.

Et l'analogie est un outil des mathématiciens qui, pour le moment, échappe totalement à l'ordinateur parce que l'analogie n'est jamais exacte. L'analogie, c'est quelque chose...

C'est de l'intuition ?

Non, ce n'est pas de l'intuition. L'intuition, c'est autre chose. L'analogie, c'est quelque chose qui consiste à dire que l'on va transplanter des méthodes qui ont marché dans un cas, à un autre cas. Et bien sûr, ça ne sera pas exactement la même chose. Il faudra prendre... c'est comme si vous preniez une petite fleur, vous la transplantez ailleurs, si vous voulez, il faut qu'elle reste vivante, mais la terre sera différente, elle sera dans un contexte différent, etc.

Cette idée de la transplanter, est-ce que ça, c'est de l'intuition, de se dire "tiens, je vais prendre cet outil-là, et je vais l'amener là ?

Oui, bon, c'est vrai, si vous voulez que dans les mathématiques, il y a une part non négligeable d'intuition qui est très, très difficile à définir.

5 L'intuition

C'est vrai, c'est parfaitement vrai que dans certaines situations, certaines situations où on a un problème très difficile, etc., on arrive à avoir une intuition. Mais cette intuition, si quelqu'un vous demandait

“Est-ce que tu peux me dire,...Là, qu’est ce que tu veux ? Qu’est ce que tu fais ?” Etc. On serait incapable de le dire, on serait incapable de le dire, parce que c’est une intuition qui n’est pas encore rationalisée et qui, si on essayait artificiellement de la rationaliser, s’évaporerait.

Et ça, c’est quelque chose de très, très difficile à comprendre. C’est quelque chose qui est très difficile à formaliser et qui rend le travail du mathématicien très difficile, c’est que c’est un travail entièrement, purement rationnel, si vous voulez...

Ni linéaire.

Ni linéaire, absolument pas linéaire, c’est-à-dire qu’il y a des périodes, souvent assez longues, dans lesquelles il y a une espèce d’incubation. Hadamard en a parfaitement parlé, je ne vais pas répéter ce qu’il disait, mais il y a une période d’incubation qui est souvent longue, et qui demande justement de pas être trop rapide intellectuellement, parce que si on est trop rapide intellectuellement, on va facilement trouver des raisons qui font que ça ne va pas marcher.

Mais c’est une erreur souvent de croire ça parce qu’il faut laisser les choses lentement évoluer. Il faut être extrêmement patient, mais en même temps, il faut être exactement comme une bête sauvage aux aguets, c’est-à-dire tout en étant patient, rester complètement en éveil et être capable, justement, si on voit quelque chose qui a l’air de marcher, là, il faut sauter. Bien sûr, il ne faut pas être endormi. Il ne faut pas attendre que ça tombe du ciel comme ça.

En ce moment, quelle est la bête que vous traquez ?

Eh bien la bête qu’on traque, là, c’était ce que je vous disais, c’est sur la théorie des nombres, etc. Ce qui s’est passé avec Katia Consani, justement, c’est qu’on a eu l’impression qu’il y avait un certain nombre de pièces du puzzle, de cet immense puzzle qui sous-tend les nombres premiers qui sont tombés en place. Alors bon, c’est une avancée, c’est une avancée, mais c’est une avancée qui peut paraître trop naïve, etc., d’un certain côté, mais pour nous qui comprenons l’essentiel des éléments qui composent ce puzzle, ça a été vraiment une révélation.

Bien sûr, on est très, très loin du but. On est encore très, très loin du but, mais ça permet, si vous voulez, de se raccrocher à toute la panoplie d’outils, de notions qui ont été développés par les géomètres algébristes, donc d’abord André Weil, puis Serre, puis Grothendieck. Et donc, ça nous donne une espèce de programme de travail. Et ça, c’est formidable. Ça, c’est formidable. Je vous dirais qu’il y a plus de plaisir à avoir un programme de travail, à savoir qu’on va s’embarquer dans ce programme de travail, c’est un peu comme le marin qui s’embarque pour de longs périples, etc., il y a plus de plaisir à ça que de terminer quelque chose, parce que c’est ouvert, et ça, ça ouvre quelque chose.

6 La réalité mathématique

À plusieurs reprises, vous parlez de la réalité mathématique, mais expliquez-la nous, parce qu’elle nous est étrangère

Le problème, si vous voulez, c’est que les mathématiques ne sont pas quelque chose que l’on peut comprendre, où l’on peut lire sans en faire. En cela, les mathématiques sont très différentes d’autres sujets. Mais la réalité mathématique, c’est quelque chose d’incroyablement concret, c’est aussi concret qu’une chaise, si vous voulez, qu’on peut toucher. Mais je n’essaierai pas de vous donner des exemples d’arithmétique, parce que c’est trop simple. Mais par exemple, prenons la géométrie, si vous voulez, si vous prenez la géométrie euclidienne ordinaire, je peux vous donner un énoncé. Et puis vous pouvez, après, chercher à comprendre, chercher à voir si c’est vrai ou pas. Et je vous donne un exemple. C’est ce qu’on appelle le théorème de Morley. C’est un magnifique théorème. C’est un théorème qui vous dit que de tout triangle émerge un triangle équilatère. Alors, comment il émerge ? Il émerge de la manière suivante : vous prenez le triangle et vous prenez chaque angle du triangle et vous le coupez en trois, trois parties égales, d’accord ? Alors vous obtenez comme ça des droites. Vous intersectez ces droites, ça va vous donner trois points. Eh bien, ces points sont les trois sommets d’un triangle équilatère, quel que soit le triangle dont vous parlez. Donc, c’est incroyable, c’est incroyable. Alors vous pouvez me dire “mais non, ce n’est pas vrai !". Et moi, je vais vous donner la démonstration que c'est vrai et on touche la réalité mathématique.

Alors en fait, on la touche aussi de manière extrêmement concrète avec les ordinateurs, c'est à dire que bon, on peut... on peut se poser la question de savoir à partir de quel moment on se convainc qu'une chose est vraie, mais on se convainc d'une chose est vraie de deux manières différentes. Il y a une manière expérimentale. C'est exactement comme en physique, c'est à dire que bon, il peut y avoir un énoncé, je ne sais pas, sur des formes modulaires.

Mais l'ordinateur est tellement puissant, tellement fort, si vous voulez, qu'il est capable, justement, de calculer des exemples. Et si on vérifie sur suffisamment d'exemples que ça marche, on est convaincu que c'est vrai. Ce n'est pas du tout la même chose que de trouver une démonstration. Mais il faut bien comprendre que c'est un peu comme la réalité physique et c'est une réalité qui est là, qui est tangible et qu'on peut explorer. On peut l'explorer directement. On peut l'explorer par la pensée, c'est bien mieux et on peut aussi l'explorer par l'ordinateur. Et elle est présente tout le temps. Elle n'est pas comment dire, on ne peut pas la toucher comme on touche la réalité physique. Mais peu importe, elle est tout aussi réelle. Elle est tout aussi fondamentale que celle-là. Je reprends l'exemple du théorème de Morley, si vous voulez, ce qui va enlever le doute complètement, c'est de donner une démonstration algébrique. Elle existe. Il existe une démonstration purement algébrique du théorème de Morley.

Et alors, une fois qu'on a trouvé cette démonstration, c'est formidable, ça veut dire que d'abord, ça marche dans tous les cas, bien sûr, parce que c'est purement algébrique et en plus, non seulement ça marche dans tous les cas, mais la figure géométrique qu'on a, elle va utiliser ce qu'on appelle le corps des nombres complexes. Mais la démonstration algébrique va marcher pour tout corps, donc c'est quelque chose de formidable parce que ça veut dire qu'à partir justement d'une image géométrique et d'une intuition géométrique, eh bien, on a trouvé une formulation algébrique qui est beaucoup plus générale. Et donc, on a franchi un pas, on a franchi un pas justement par cette espèce de communication, si vous voulez, entre d'un côté une intuition géométrique et de l'autre côté, une intuition algébrique, qui est une formulation algébrique des choses et qui est beaucoup plus puissante d'une certaine manière. Mais il y a toujours un aller-retour, c'est-à-dire que certains mathématiciens ont une vision géométrique des choses, ont des images, des images mentales, d'autres ont une compréhension algébrique des choses, c'est-à-dire une manipulation dans le temps, à l'inverse d'une manipulation géométrique, d'une comprehension géométrique.

7 La géométrie non commutative engendre son propre temps... (?)

J'aimerais creuser une phrase que je n'ai pas comprise : "la géométrie engendre son temps".

En gros, la manière dont le temps apparaît, c'est qu'en géométrie, lorsque les choses ne commutent pas, ab est différent de ba, d'accord. Mais il y a une équation qui se produit que je vais ultra-simplifier, bien sûr, qui est que ab n'est pas égal à ba, mais est égal à b, multiplié par a transformé par le temps, mais pas par le temps réel qu'on connaît, mais par le temps imaginaire. Donc, ce qu'il faut retenir, c'est que ab n'est pas égal ba, mais est égal à b fois a transformé par le temps imaginaire et ensuite par ce qu'on appelle le prolongement analytique, eh bien, on arrive à un temps réel. Donc, c'est ça l'idée fondamentale, si vous voulez. Alors au départ, c'était une idée qui a été développée par les physiciens qu'on appelle Kubo-Martin-Schwinger (KMS), puis par d'autres physiciens Hugenholtz-Winnink-Haag. Et puis par Tomita, un mathématicien japonais, et Takesaki.

Et puis moi, j'ai travaillé dans ma thèse avec Jacques Dixmier là-dessus et j'ai fait justement, à un moment donné, une trouvaille vraiment qui était fondamentale, qui était que, alors qu'on avait l'impression que cette évolution dans le temps dépendait d'un choix particulier, d'un état, j'avais trouvé qu'elle n'en dépendait pas, par ce qu'on appelle "modulo les automatismes intérieurs près". Alors ça a donné toute une foultitude d'invariants des algèbres en question, et ça a permis de les classifier, ça a permis d'avancer considérablement, mais il y avait comment dire... Il y avait un message philosophique que j'avais ressenti à travers mon intuition, bien sûr, dans cette découverte et que j'avais pendant des années été incapable de relier à la physique, jusqu'au jour où j'ai rencontré un physicien un peu par hasard. Et c'est Carlo Rovelli.

Et en discutant avec lui, si vous voulez, je me suis aperçu que... on s'est aperçu tous les deux que lui avait eu une idée semblable, mais il n'avait pas les outils mathématiques qui permettaient de mettre ce cadre sur pied. Et en plus, lui, il l'avait fait dans ce qu'on appelle le cadre semi-classique, c'est à dire pas encore quantique. Et donc, en mettant les choses ensemble, eh bien, on a compris, si vous voulez, que cette équation, cette génération du temps par le non commutatif avait probablement un rôle fondamental en physique qui n'est pas encore totalement établi.

8 Faire admettre la portée d'une découverte

Un des prétextes, comment dire, d'un livre qu'on vient d'écrire, qui s'appelle *Le théâtre quantique*, justement avec mon professeur de thèse Jacques Dixmier et avec mon épouse Danye Chéreau, c'est précisément, si vous voulez, de faire passer cette idée dans le grand public, parce que bon, finalement, moi, j'y tiens énormément à cette idée et la faire passer à travers un message qui est ludique, si vous voulez, dire ce message à traverse une histoire qui raconte les épisodes de la vie d'une chercheuse, de l'héroïne, etc.

Et vous diriez que là, en ce moment, on est à une période charnière, justement, sur cette notion de temps.

Vous savez, je ne sais pas, parce qu'il faut bien comprendre que dans le domaine dans lequel je travaille, si vous voulez, il y a deux niveaux. Il y a un niveau qui est le niveau vraiment de la recherche, de comment les choses se passent, comment elles évoluent. Et puis, il y a un niveau sociologique. Et le niveau sociologique, c'est dans quelle mesure ces choses là vont passer dans la communauté scientifique. Et évidemment, ce sont deux choses qui sont disjointes, bien sûr, d'accord.

Mais bon, je ne peux pas dire que je me sois beaucoup préoccupé pendant ma carrière du niveau sociologique. Donc bon, alors c'est un peu à la traîne toujours...

Vous ne pouvez pas vous prononcer

Non, pas vraiment, non, disons que c'est un peu à la traîne, c'est vrai. Des fois, c'est exaspérant parce qu'on voit les gens qui ne comprennent pas, etc. On voit d'autres théories qui occupent le devant de la scène de manière un peu indécente, mais c'est comme ça. Donc, je veux dire, on a souvent fait... Quand on travaille, on a le choix. Soit on travaille vraiment, soit on se répand pour dire... soit on communique. Bon, c'est difficile, c'est très, très difficile de faire les deux choses en même temps. C'est presque contradictoire. Pourquoi ? Parce que quand on travaille vraiment, c'est une occupation de tous les instants et on a très, très peu de temps libre, en fait. Pour le reste.

On travaille seul ?

Non, non, non. On a absolument besoin des autres. Moi, je vais dire, j'ai toujours eu des collaborateurs, soit en physique, surtout, par exemple, mon collaborateur Chamseddine et bon, en ce moment pour la théorie des nombres avec Katia Consani. Donc, c'est essentiel d'avoir des collaborateurs, justement, ne serait-ce que bon, d'abord, ils apportent des idées nouvelles, bien entendu, mais surtout aussi, je dirais, pour ne pas être complètement seul, parce qu'il y a évidemment des moments très difficiles. Il y a évidemment des moments, des longues, longues périodes dans lesquelles rien ne se produit. Et si on était seul, on n'aurait peut-être plus tendance à se décourager que si on travaille plus dur. Ça, ça joue un rôle très, très important.

9 L'intensité des cours au Collège de France

J'ai un public, assez varié, très varié, qui vient régulièrement à mes cours et il y a un contact très fort qui s'établit avec le public.

Donc c'est vraiment, vous, la recherche en train de se faire...

Ah oui ! Et je dois dire que, comment dire, le leitmotiv du collège qui fait son originalité, ça, ça crée justement pendant les mois qui sont les mois de cours du Collège, une période extraordinaire, une période extraordinaire. Pourquoi ? Parce que les bonnes années, ça n'arrive pas tout le temps. Les bonnes années, en gros, deux semaines avant le cours, je sais de quoi je vais parler. En gros, j'ai le sujet, d'accord, mais je n'ai absolument pas les détails. Et en gros, ce que je fais, c'est que je m'arrange pour avoir deux semaines d'avance, c'est à dire que je sais en gros ce que je vais faire dans le cours suivant. Et puis, je travaille sur le cours d'après. Donc, je cherche sur le cours d'après et c'est une période de recherche d'une intensité absolument incroyable. Pourquoi ? Parce qu'on sous-estime souvent le fait qu'en mathématiques, si vous voulez comprendre les choses, on peut avoir l'impression d'avoir compris. Mais il y a toujours un bénéfice extraordinaire à aller dans le moindre détail et à, comment dire, à exhiber toutes les facettes d'une notion, etc. Parce que...

Vous êtes perfectionniste

Être perfectionniste, parce que ça va engendrer des choses. Et je m'en suis encore aperçu en préparant le cours de cette année parce que c'est justement à travers toute l'élaboration du cours, etc., que l'objet de géométrie algébrique est apparu. Donc, ce que je veux dire, c'est que c'est une période très intense, très dure, très dure, parce que c'est dur physiquement, par exemple. Il m'arrive souvent d'avoir des manifestations physiques, si vous voulez de la tension, pendant la période du cours, au moment du début, etc. Mais c'est extrêmement productif parce que c'est la période où je travaille le plus, etc.

Mais c'est concentré, vous ne pouvez pas faire ça tout le temps, évidemment. Si on faisait ça tout le temps, on serait complètement lessivé, raplapla, etc.

C'est peut-être là, le secret de votre foisonnement...

Oui, absolument. Absolument. Parce que si vous voulez souvent, je me suis dit "Bon, peut-être si j'étais resté au CNRS...", etc. Mais ça dépend. Bien sûr, chaque mathématicien est un cas particulier et si vous voulez, il faut trouver l'équation qui va lui permettre de marcher.

Mais finalement, dans mon cas en particulier, la motivation qu'il y a au Collège qui consiste à dire que chaque cours doit être un cours sur quelque chose d'original qui est en train de se faire, à la limite qui n'est pas publié, mais qui est vraiment en train de se faire. Mais cette motivation, je la trouve formidable. Je la trouve formidable. Il y a des années, effectivement, où c'est beaucoup plus difficile ou beaucoup plus embêtant, mais c'est comment dire, c'est très, très bien dosé. C'est à dire que si vous voulez, c'est pas comme si j'avais 6 mois de cours, ce serait trop. Mais cette période de cours qui dure entre 2 et 3 mois. Si vous voulez, c'est parfait parce que c'est très bien dosé et ça oblige à une certaine discipline. Ça oblige justement à rester tout le temps, tout le temps, tout le temps un peu inquiet, un peu sur le fil.

Et jamais, jamais se dire "bon, bah ok, maintenant je suis vieux, etc.". On ne peut pas agir, on ne peut pas. Parce que bon, bien sûr, il faudra que je m'arrête à un moment donné. Mais on ne doit absolument pas faire ça parce que si on fait ça, justement, on ne sera pas capable de faire le cours.

10 Le doute

Le doute, vous savez, dans le livre, le livre avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, commence par cette exposition à Venise qui s'appelle *L'éloge du doute*. Le doute est présent tout le temps. Le doute est présent à quatre heures du matin, lorsqu'on se réveille la nuit et qu'on se dit "Est-ce que je n'aurais pas fait une erreur là, etc.". Et qu'on commence à vérifier. Donc le doute est présent tout le temps, mais je rajouterai quand même que de temps en temps, de temps en temps, ça arrive rarement, mais ça arrive, heureusement, il y a des moments où le doute s'évapore. Et justement, j'ai douté pendant des années et des années que l'espace que j'avais trouvé en 1996 pour les nombres premiers était le bon. Et ce qu'on a trouvé récemment avec Katia Consani lève ce doute. C'est sûrement le bon espace, donc, c'est merveilleux que de temps en temps, il y ait, vous voyez, comme ça, un moyen de lever le doute. Alors bien sûr, on peut dire : "Bon, eh bien, tu as levé le doute pour toi, lève-le pour les autres.". Comme le but de tous ces développements, si vous voulez, c'est très, très difficile, bien sûr, ce n'est pas immédiat. Mais pour nous, c'est très, très important de lever le doute, même ponctuellement, si vous voulez, comme ça, sur une notion aussi importante.