Les billets d'Alain Connes sur le blog http://noncommutativegeometry.blogspot.com

Dimanche 25 Février 2007
Réel et complexe
Je voudrais discuter d'une "autre entrée" dans les textes parallèles que Masoud a présentés dans son billet.

Du côté théorie des fonctions, on parle de "variables réelles et complexes". Un livre parfait d'introduction à cela est *"Analyse réelle et complexe"* de W. Rudin (McGraw-Hill). C'est un classique et cela reste l'une des meilleures entrées dans le sujet. Ce que l'on y apprend, c'est l'interaction constante entre les techniques à "variable réelle" comme l'intégrale de Lebesgue, la différentiabilité presque partout, etc., et les techniques à "variable complexe". Il y a une citation d'André Weil qui ressemble à "Le monde complexe est beau, le monde réel est sale". On pourrait être tenté d'ignorer le "monde réel" et de ne travailler que dans le paradigme à variable complexe dans lequel "toute" fonction est holomorphe et ainsi infiniment différentiable etc... C'est bien, et on peut parcourir quelque distance avec ça, si ce n'est que la plupart des résultats profonds d'analyse complexe reposent sur l'analyse réelle. Alors maintenant qu'en est-il de l'autre entrée dans le texte en parallèle ? C'est

Variable complexe......................	Opérateur sur l'espace de Hilbert
Variable réelle............................	Opérateur auto-adjoint

où j'ai légèrement réécrit l'entrée précédente en

Fonctions $f : X \to C$.................	Opérateurs sur l'espace de Hilbert

du billet de Masoud pour souligner que la colonne de droite fournit un modèle idéal de cette vaste notion qu'est la notion de "variable"... L'ensemble des valeurs de la variable est le spectre de l'opérateur, et le nombre de fois où la valeur est atteinte est la multiplicité spectrale. Les variables continues (les opérateurs à spectre continu) coexistent allègrement avec les variables discrètes précisément à cause de la non-commutativité des opérateurs.

Le calcul fonctionnel holomorphe donne un sens à $f(T)$ pour toute fonction holomorphe f sur le spectre de T, et un résultat profond contrôle le spectre de $f(T)$. Le fait vraiment incroyable est qu'alors que pour les opérateurs généraux T dans l'espace de Hilbert, les seules fonctions $f(z)$ qui peuvent être appliquées à T sont les fonctions holomorphes (sur le spectre de T), la situation change drastiquement quand on travaille sur des opérateurs auto-adjoints : pour $T = T^*$, l'opérateur $f(T)$ a du sens pour toute fonction f ! On peut prendre un crayon et dessiner le graphe d'une fonction, elle n'a pas besoin d'être continue... même pas continue par morceaux, on peut prendre n'importe quoi qui nous vient à l'esprit... (d'un point de vue technique, la seule contrainte sur f est qu'elle soit partout mesurable mais personne ne peut construire explicitement une fonction qui ne remplisse pas cette condition !)... De plus, un opérateur borné est une fonction de T (i.e. est de la forme $f(T)$) si et seulement s'il partage toutes les symétries de T (i.e. s'il commute avec tous les opérateurs qui commutent avec T).

Je me rappelle que très tôt, dans ma rencontre avec les mathématiques, c'est vraiment ce fait-là qui m'a convaincu du pouvoir des techniques de l'espace de Hilbert en proche relation avec l'opération d'adjonction $T \to T^*$. C'était suffisant pour résister à la tentation de commencer directement dans le "monde complexe" de la géométrie algébrique qui attirait les débutants à ce moment-là, qui suivaient l'aura de Grothendieck qui décrivait si bien sa première rencontre avec ce monde-là : *"Je me rappelle encore de cette impression saisissante (toute subjective certes), comme si je quittais des steppes arides et revêches, pour me retrouver soudain dans une sorte de "pays promis" aux richesses luxuriantes, se multipliant à l'infini partout où il plaît à la main de se poser, pour cueillir ou pour fouiller..."*

AC a dit...
"anonymous", le point est que la classe des fonctions arbitraires (d'analyse réelle) est la classe de celles qui opèrent sur des opérateurs auto-adjoints, alors que les fonctions holomorphes opèrent sur des opérateurs généraux T. Le cas des opérateurs normaux ($[T, T^*] = 0$) est juste "à deux variables" et n'a rien à voir avec l'analyse complexe. Quand la classe des fonctions est plus petite, on attend plus de propriétés, mais ça ne signifie pas que c'est "plus facile" (c'est plutôt le contraire) et donc l'analogie ne va pas en arrière...
Février 26, 2007 à 8 :42 AM

Mercredi 7 Mars 2007
Le rêve mathématique
J'imagine qu'une des utilités possible d'un blog tel que celui-ci, est que c'est un espace de liberté où l'on peut raconter des choses qui n'auraient pas leur place dans un papier de math "sérieux". Le bazar technique fini trouve sa place dans ces papiers et c'est une bonne chose que les mathématiciens maintiennent une exigence standard élevée dans le style d'écriture des articles car si ce n'était pas le cas, on perdrait vite le contrôle de la différence entre ce qui est effectivement prouvé et ce qui est juste un "souhait de vérité". Mais cependant, cette exigence ne laisse pas de place pour la source plus profonde, de nature poétique, qui met les choses en mouvement très tôt dans les étapes du processus mental, et qui amène à la découverte de nouveaux faits avérés ("durs").

Grothendieck a exprimé cela de manière très vive dans *Récoltes et semailles* : *"L'interdit qui frappe le rêve mathématique, et à travers lui, tout ce qui ne se présente pas sous les aspects habituels du produit fini, prêt à la consommation. Le peu que j'ai appris sur les autres sciences naturelles suffit à me faire mesurer qu'un interdit d'une semblable rigueur les aurait condamnées à la stérilité, ou à une progression de tortue, un peu comme au Moyen Age où il n'était pas question d'écornifler la lettre des Saintes Ecritures. Mais je sais bien aussi que la source profonde de la découverte, tout comme la démarche de la découverte dans tous ses aspects essentiels, est la même en mathématique qu'en tout autre région ou chose de l'Univers que notre corps et notre esprit peuvent connaitre. Bannir le rêve, c'est bannir la source - la condamner à une existence occulte".*

J'essaierai de réagir au billet de Masoud à propos des pavages et de donner une description heuristique d'une caractéristique qualitative de base des espaces non-commutatifs qui est parfaitement illustrée par les pavages de Penrose T du plan. Étant données deux tuiles de base, la fléchette et le cerf-volant de Penrose (ceux montrés sur le dessin), on peut paver le plan avec ces deux tuiles (avec une condition de concordance sur les couleurs des arêtes des pièces) mais aucun tel pavage n'est périodique. Deux pavages sont les mêmes si on peut les amener l'un sur l'autre par une isométrie du plan. Il y a plein d'exemples de pavages qui ne sont pas identiques.

L'ensemble T de tous les pavages du plan par les deux tuiles est un ensemble très étrange à cause du fait suivant : "Tout motif fini de tuiles dans un pavage par des fléchettes et des cerfs-volants apparaît, un nombre infini de fois, dans n'importe quel autre pavage contenant les mêmes tuiles".

Cela signifie qu'il est impossible de décider localement quel pavage on est en train de considérer. Les deux pavages de toute paire de pavages peuvent être mis en correspondance avec des grands morceaux arbitraires et il n'y a pas moyen de les différencier en regardant seulement des portions finies de chacun d'entre eux. Cela est en grand contraste avec les nombres réels puisque si deux nombres réels sont différents, leur expansion décimale sera différente suffisamment loin dans leurs chiffres. Je me rappelle avoir assisté il y a longtemps à un exposé de Roger Penrose dans lequel il superposait deux transparents contenant un pavage chacun et il montrait l'impression visuelle étrange obtenue en superposant des grandes parties de l'un sur l'autre... Il exprimait ainsi le sentiment intuitif qu'on a devant la richesse de ces "variations sur le même point" comme étant similaires aux "fluctuations quantiques". Un espace comme l'espace T des pavages de Penrose est en effet un exemple prototype d'un espace non-commutatif. Puisque ses points ne peuvent pas être distingués les uns des autres localement, on découvre qu'il n'y a pas de fonction à valeurs réelles ou complexes intéressantes sur un tel espace qui s'avère ainsi différent d'un espace comme la droite réelle R et que cet espace ne peut pas être analysé au moyen des fonctions à valeurs réelles ordinaires. Mais si on utilise le dictionnaire, on trouve que cet espace T est parfaitement codé par une algèbre (non-commutative) de q-nombres qui rend compte de son aspect "quantique". Voir le livre http://alainconnes.org/docs/book94bigpdf.pdf pour davantage de détails.

Dans un commentaire au billet de Masoud sur les pavages, la question a été posée de la relation entre les pavages apériodiques et les nombres premiers. La notion géométrique, analogue à celle de pavage apériodique, qui correspond en effet à celle de nombres premiers est celle de Q-treillis. Cette notion a été introduite dans notre travail commun avec Matilde Marcolli et est simplement donnée par le couple d'un réseau L dans R avec une application additive de Q/Z dans QL/L. Deux Q-treillis sont commensurables quand leurs treillis le sont (ce qui signifie que leur somme est encore un treillis) et quand les applications s'accordent (modulo la somme). L'espace X des Q-treillis à commensurabilité près est naturellement doté d'une action de mise à l'échelle (qui affecte le treillis et l'application) et d'une action du groupe des automorphismes de Q/Z par composition. À nouveau, comme dans le cas des pavages, l'espace X est un espace non-commutatif typique qui n'a pas de fonctions intéressantes. Il est cependant parfaitement encodé par une algèbre non-commutative et la cohomologie naturelle (la cohomologie cyclique) de cette algèbre peut être calculée en fonction d'un espace adéquat des distributions sur X, comme on a pu le montrer dans notre travail joint avec Consani et Marcolli.

Il y a deux points principaux alors, le premier est que les zéros de la fonction zêta de Riemann apparaissent comme un spectre d'absorption (i.e. comme un conoyau) de la représentation du groupe des fonctions de mise à l'échelle dans la cohomologie ci-dessus, dans le secteur où le groupe des automorphismes de Q/Z agit trivialement (les autres secteurs sont étiquetés par des caractères de ce groupe et ils fournissent les zéros des fonctions L correspondantes).

Le second point est que si l'on applique la formule de Lefschetz comme elle a été formulée au sens théorique des distributions par Guillemin et Sternberg (après Atiyah et Bott), on obtient les formules explicites de Riemann-Weil de la théorie des nombres qui relie la distribution des nombres premiers aux zéros de zêta. Un premier fait incroyable est que l'on n'a même pas besoin de définir la fonction zêta (ou les fonctions L), mais seulement son prolongement analytique, pour obtenir les zéros qui apparaissent comme un spectre. Le second est que les formules explicites de Riemann-Weil font intervenir des valeurs principales délicates d'intégrales divergentes dont la formulation utilise la constante d'Euler et le logarithme de 2π, et que cette combinaison apparaît exactement quand on calcule l'opérateur trace théorique, et ainsi l'égalité de la trace avec la formule explicite peut difficilement être un accident. Après le papier initial, une avancée importante a été effectuée par Ralf Meyer qui a montré comment prouver les formules explicites en utilisant le paradigme fonctionnel analytique ci-dessus (plutôt que l'intégrale de Cauchy).

Cela éclairera je l'espère le commentaire de Masoud sur le sujet rusé de l'utilisation de la géométrie non-commutative dans une approche vers RH. C'est un sujet délicat parce que dès que quelqu'un commence à discuter de n'importe quoi en lien avec RH, cela engendre des attitudes irrationnelles. Par exemple, j'ai été un temps aveuglé par la possibilité de se restreindre aux zéros critiques, en utilisant un espace de fonctions adéquat, plutôt que d'essayer de suivre la trace réussie d'André Weil et de développer la géométrie non-commutative jusqu'au point où son argument dans le cas des caractéristiques positives pourrait être transplanté. Nous avons maintenant commencé à marcher sur cette trace dans notre papier commun avec Consani et Marcolli, et alors que l'espoir d'atteindre le but est encore plutôt lointain, c'est une grande motivation que de développer les outils manquants de la géométrie non-commutative. Comme premier but, on devrait avoir comme objectif de traduire la preuve de Weil dans le cas des corps de fonctions dans le paradigme de la géométrie non-commutative. Relativement à ce but, et le papier de Benoit Jacob et celui de Consani et Marcolli que David Goss a mentionné dans son récent billet ouvrent la voie. Je terminerai par une plaisanterie inspirée du mythe européen de Faust, à propos d'un mathématicien qui essaie de faire une bonne affaire avec le Diable pour une preuve de l'hypothèse de Riemann. Cette blague m'a été racontée il y a quelque temps par Ilan Vardi et je l'utilise avec joie dans des exposés parfois, ici je vais la raconter en français car c'est plus facile de ce côté de l'Atlantique, mais elle est facile à traduire...

La petite histoire veut qu'un mathématicien ayant passé sa vie à essayer de résoudre ce problème se décide à vendre son âme au Diable pour enfin connaître la réponse. Lors d'une première rencontre avec le Diable, et après avoir signé les papiers de la vente, il pose la question "L'hypothèse de Riemann est-elle vraie ?" Ce à quoi le Diable répond "Je ne sais pas ce qu'est l'hypothèse de Riemann" et après les explications prodiguées par le mathématicien "hmm, il me faudra du temps pour trouver la réponse, rendez-vous ici à minuit, dans un mois". Un mois plus tard le mathématicien (qui a vendu son âme) attend à minuit au même endroit... minuit, minuit et demi... pas de Diable... puis vers deux heures du matin alors que le mathématicien s'apprête à quitter les lieux, le Diable apparaît, trempé de sueur, échevelé et dit "Désolé, je n'ai pas la réponse, mais j'ai réussi à trouver une formulation équivalente qui sera peut-être plus accessible !".

Mardi 20 Mars 2007
Temps
Je vais essayer de décrire à grands traits les étapes qui ont amené l'émergence du temps de la non-commutativité dans les algèbres d'opérateurs. Cela répondra je l'espère aux questions de Paul et Sirix (au moins en partie) et à celles d'Urs.

D'abord j'expliquerai la formule basique due à Tomita qui associe à un état L un groupe à un paramètre d'automorphismes. Le fait de base est qu'on donne du sens à l'application $x \to s(x) = LxL^{-1}$ comme application (non-bornée) de l'algèbre dans elle-même puis on prend ses puissances complexes s^{it}. Pour définir cette application, on compare juste les deux formes bilinéaires sur l'algèbre donnée par $L(xy)$ et $L(yx)$. Sous certaines conditions de non-dégénérescence sur L cela donne un isomorphisme de l'algèbre avec son espace linéaire dual et ainsi on peut trouver une application s de l'algèbre dans elle-même telle que $L(yx) = L(xs(y))$ pour tout x et y.

On peut vérifier à ce niveau très formel que s vérifie $s(ab) = s(a)s(b)$:
$L(abx) = L(bxs(a)) = L(xs(a)s(b))$.

Ainsi toujours à ce niveau très formel, s est un automorphisme de l'algèbre, et la meilleure façon de la considérer, c'est de la voir comme $x \to LxL^{-1}$ où on respecte l'ordre cyclique des termes en écrivant $Lyx = LyL^{-1}Lx = LxLyL^{-1}$. Maintenant, tout ceci est formel et pour le rendre "réel", on a seulement besoin de la structure la plus basique d'espace non-commutatif, c'est-à-dire de la théorie de la mesure. Cela signifie que l'algèbre qu'on étudie est une algèbre de von Neumann, et qu'on a besoin de très peu de structure pour travailler puisque l'algèbre de von Neumann d'un espace non-commutatif contient seulement sa théorie de la mesure, ce qui constitue très peu de structure en fait. Ainsi, le principal résultat de Tomita (qui a d'abord rencontré beaucoup de scepticisme de la part des spécialistes du sujet, a été ensuite exposé avec succès par Takesaki dans ses notes de cours et est appelé la théorie de Tomita-Takesaki) est que quand L est un état fidèle normal sur une algèbre de von Neumann M, les puissances complexes de l'application associée $s(x) = LxL^{-1}$ ont du sens et définissent un groupe à un paramètre d'automorphismes s_L de M.

Il y a de nombreux états normaux fidèles sur une algèbre de von Neumann et du coup, beaucoup de groupes s_L d'automorphismes à un paramètre qui lui correspondent. C'est ici que le truc des matrices 2×2 entre en scène (Groupe modulaire d'une algèbre de von Neumann, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B, 274, 1972, voir AC-biblio10.pdf) et montre qu'en fait, les groupes d'automorphismes s_L sont tous les mêmes modulo les automorphismes intérieurs !

Ainsi, si on appelle $\mathrm{Out}(M)$ le quotient du groupe des automorphismes de M par le sous-groupe normal des automorphismes intérieurs, on obtient un groupe complètement canonique d'automorphismes du groupe additif des nombres réels R : $\delta : R \to \mathrm{Out}(M)$ et c'est ce groupe que j'ai toujours vu comme un candidat extrêmement alléchant pour le "temps émergent" en physique.

Bien sûr cela donne immédiatement des invariants des algèbres de von Neumann tels que le groupe $T(M)$ des "périodes" de M qui est le noyau du morphisme de groupes ci-dessus. Ceci est la base de la classification des facteurs et de la réduction du type III au type II + automorphismes que j'ai effectuée en Juin 1972 et publié dans ma thèse (avec le cas III_1 manquant complété plus tard par Takesaki).

Ce "temps émergent" est non trivial quand les espaces non-commutatifs considérés sont loin d'être "'classiques". C'est par exemple le cas pour l'espace des feuilles de feuilletages tels que les feuilletages d'Anosov pour les surfaces de Riemann et également pour l'espace des Q-treillis modulo le facteur d'échelle dans notre travail conjoint avec Matilde Marcolli.

Le véritable problème alors est d'établir le lien avec le temps de la physique quantique. Par les calculs de Bisognano-Wichmann, on sait que les s_L pour la restriction de l'état vide à l'algèbre locale en théorie quantique des champs associée à une région de coin de Rindler (définie par $x_1 > \pm x_0$) est en fait l'évolution de cette algèbre selon le "temps propre" de la région. Cela est lié à la thermodynamique des trous noirs et à la température d'Unruh. Il y a toute une littérature sur ce qui se passe en théorie des champs conformes en dimension 2. Je discuterai du problème réel ci-dessus de la connexion avec le temps en physique quantique dans un autre billet.

AC a dit... Urs : Oui, ce qui se passe en fait c'est que pour tout système quantique à un nombre infini de degrés de liberté, l'hamiltonien H n'appartient pas à l'algèbre des observables. Ainsi, les automorphismes correspondant ne sont pas intérieurs. Pour voir ce qui se passe, il est plus simple de prendre le cas d'un système de spins sur un réseau. L'algèbre des observables est la limite inductive des produits tensoriels finis des algèbres de matrices, une pour chaque site du réseau. L'halmitonien H est, même dans le cas le plus simple sans interaction, une somme infinie d'hamiltoniens associés à chaque site du réseau. Ainsi, il n'appartient pas à l'algèbre des observables et le groupe à un paramètre correspondant n'est pas intérieur (à la fois dans la fermeture de la norme i.e. la C^*-algèbre, et également dans la fermeture faible)... En théorie quantique des champs, la situation est complètement similaire et a bien sûr une infinité de degrés de liberté dès le départ...

26 Mars 2007 à 8 :53 AM

Dirac et le fait d'être entier

Dans le premier article sur la "seconde quantisation", i.e. dans l'article "La théorie quantique de l'émission et de la radiation", le processus de seconde quantisation est introduit et est à nouveau lié au caractère "entier". Cette fois, ce n'est pas l'index de Fredholm qui est derrière l'intégralité (le fait d'être entier) mais le simple fait suivant : si un opérateur a satisfait $[a, a^*] = 1$, alors le spectre de a^*a est contenu dans $N*$, l'ensemble des entiers positifs (comme cela découle de l'égalité entre les spectres de aa^* et de a^*a excepté potentiellement pour 0)... La seconde quantisation est simplement obtenue en remplaçant les nombres complexes ordinaires a_j qui étiquettent l'expansion de Fourier ordinaire du champ électromagnétique par les variables non-commutatives vérifiant $[a_j, a_j^*] = 1$... (plus précisément, le 1 est remplacé par $\hbar\nu$ où ν est la fréquence du mode de Fourier). Cet exemple montre bien sûr que l'intégralité (caractère d'être entier) et que la non-commutativité sont étroitement reliés... Alors que l'index de Fredholm est un bon modèle pour les entiers relatifs (positifs ou négatifs), le aa^* pour $[a, a^*] = 1$ est un bon modèle pour les entiers positifs...

Mercredi 25 Avril 2007

Un autre développement récent très surprenant a été décrit dans l'exposé d'U. Haagerup sur son travail conjoint (je pense que c'est avec Magdalena Musat mais je n'en suis pas sûr, cet article n'est pas encore sorti) sur la classification des facteurs modulo les isomorphismes des espaces d'opérateurs associés. Il a donné une surprenante condition nécessaire et suffisante pour la classe des facteurs hyperfinis de type III_1 : que le flot des poids admette une mesure invariante de probabilité. (On sait que c'est le cas pour l'algèbre de von Neumann d'un feuilletage à classe de Godbillon-Vey non nulle). Ce cas particulier suggère que la condition nécessaire et suffisante devrait être la "commensurabilité" des flots de poids et l'idée de Mackey de voir un flot ergodique comme un "sous-groupe virtuel" du groupe additif R serait essentiel pour développer la notion appropriée de "commensurabilité" des flots ergodiques.

J'étais absent au début de la semaine à cause d'un ennuyeux voyage cours en Suède (les exposés "Witten" d'Atiyah sont toujours ennuyeux) et j'ai entendu un exposé vraiment intéressant de Nirenberg qui suggère que l'exposant de Holder 1/3 qui entre comme limite de régularité dans la formule du nombre d'enroulement de Kahane correspond au $3 = 2 + 1$ de la séquence longue exacte de périodicité en cohomologie cyclique. Il y a également une autre conférence qui a lieu toute la semaine à Paris, organisée par Vincent Rivasseau.

Samedi 26 Mai 2007

Meeting à Ascona sur Pauli et Jung

Merci à Masoud de maintenir le blog en vie au milieu de tous ces voyages pour des conférences. La dernière à laquelle j'ai assisté s'est terminée aujourd'hui et était dédiée aux idées philosophiques de Pauli. C'était assez intéressant et cela m'a donné l'occasion d'avoir une meilleure connaissance de ces idées. Un exposé intéressant a été donné par Rafael Nunez "D'où viennent les mathématiques ? Pauli, Jung, et la science cognitive comtemporaine" avec une tentative courageuse de rejeter le platonisme (et en particulier le point de vue de Pauli) en utilisant la "science cognitive contemporaine". L'exposé était vraiment intéressant, en particulier dans la représentation du futur comme un mouvement relatif dans des expressions de la forme "l'hiver arrive" or "nous arrivons à la fin de l'année", ou bien dans l'exemple d'un infâme dictateur qui a successivement dit : "Le communisme nous a amenés au bord du goufre" et "aujourd'hui nous avons fait un grand pas en avant". Malheureusement, j'ai raté l'exposé d'Arthur Miller "Quand Pauli a rencontré Jung - et ce qui est arrivé ensuite"... Mais j'ai pu lui parler directement et j'ai été très intéressé par ces images que Jung montrait à Pauli après avoir entendu ses rêves. J'ai dû donner un exposé plutôt improvisé mercredi matin (à propos de la nature de la réalité mathématique et également de ses relations avec la physique) et ai pu tout juste le faire à temps, parce que mon avion vers Milan avait été annulé la veille (grève du contrôle aérien) et que j'avais dû y aller en train. Cela m'a pris toute la journée et le seul moyen possible pour atteindre Ascona à temps a été de louer une voiture à Milan et de rouler jusque-là au milieu de la nuit. J'ai fait ça parce que je déteste vraiment accepter de donner un exposé et ne pas être capable de le faire au dernier moment mais il y avait là une sorte d'"effet Pauli" qui a rendu difficile mon atteinte du lieu à temps...

Jürg Fröhlich était absent et l'exposé sur le travail de Pauli a été fait par Harald Atmanspacher qui a remplacé Fröhlich au pied levé. Ce qui était vraiment incroyable dans ce meeting, c'est que les exposés étaient suivis de longues et passionnantes discussions qui duraient habituellement plus d'une demi-heure et qu'on en apprenait beaucoup, juste par ces si nombreuses interactions.

AC a dit...
Cher Nic, oui et c'était un point très plaisant de l'exposé. Je partage complètement ce point de vue que le passé est la seule chose que nous contrôlons et en fait, je crois que nous essayons seulement de réarranger le passé de manière à ce qu'il colle avec ce que le présent nous donne...

30 Mai 2007 à 10 :09 AM
AC a dit...
Anonymous, l'exposé d'Arthur Miller était basé sur un livre dont la publication est programmée l'année prochaine. On devra donc attendre pour celui-là.

Autant que je le sache, c'est vrai que Grothendieck a beaucoup écrit au sujet des rêves, mais mon information n'est pas fiable et la seule source est le site du "Grothendieck Circle" ici http://www.grothendieckcircle.org/ où vous pouvez obtenir de meilleures informations.
Mai 30, 2007 at 4 :41 PM

AC a dit...
Cher Lieven
Merci pour votre commentaire, c'est assez difficile pour Masoud et moi seuls de "maintenir" le blog. Nous accueillons agréablement des commentaires tels que les vôtres et serions contents de vous avoir comme blogger "invité".

L'un des objectifs de base que j'ai est d'essayer de combler le fossé entre les différents aspects de la NCG [1]. J'aime vraiment les aspects purement algébriques (et ai un peu travaillé avec Michel Dubois-Violette sur ces sujets). Aussi bien la géométrie non-commutative purement algébrique que la géométrie non-commutative différentielle plus "théorie des opérateurs" sont assez mûres maintenant pour ne pas avoir peur d'interagir plus ouvertement. Quand une théorie est à son début, je crois qu'il est important de lui laisser ses chances de grandir par elle-même et de la "protéger" en quelque sorte, mais il est clair que le temps est mûr maintenant pour avoir une perspective et une attitude plus larges. C'est à peu près ce qui est en train de se produire avec le nouveau Journal et les rencontres organisées comme celle du programme de l'Institut Newton de l'automne dernier ou précisément le colloque de Chicago. Comme je n'y étais que brièvement, il est difficile pour moi d'en écrire un rapport complet mais je ferai ce que je peux (après l'avoir fait pour la rencontre à Vanderbilt) et essaierai de trouver un "volontaire" pour donner un meilleur compte-rendu que le mien qui sera partiel (à cause du peu d'exposés auxquels j'ai pu assister, étant assez fatigué après les cours que j'ai donnés à Vanderbilt).
6 Juin 2007 à 8 :11 PM

Mardi 3 Juillet 2007
Espace-temps non-commutatif
Comme je l'ai expliqué dans un billet précédent, c'est uniquement parce qu'on laisse tomber la commutativité que, dans le calcul, les variables de domaines continus peuvent coexister avec des variables de domaines discrets. Dans la formulation classique des variables, du fait de la définition des applications d'un ensemble X vers l'ensemble des nombres réels, nous avons vu ci-dessus que les variables discrètes ne peuvent pas coexister avec des variables continues.

L'unicité de l'espace de Hilbert de dimension infinie séparable résout ce problème, et les variables de domaines continus coexistent avec bonheur avec des variables de domaines dénombrables, telles que les infinitésimaux. Le le seul fait nouveau est qu'ils ne commutent pas.

Une façon de comprendre la transition du commutatif au non-commutatif est que dans ce dernier cas, il faut se soucier de l'ordre des lettres quand on écrit. À titre d'exemple, utilisez la règle de commutativité entre les lettres pour simplifier le message cryptique suivant, que j'ai reçu d'un ami : "Je suis alençonnais, et non alsacien. Si t'as besoin d'un conseil nana, je t'attends au coin Annales. Qui suis-je ?"

C'est Heisenberg qui a découvert qu'un tel soin était nécessaire lors du traitement des coordonnées de l'espace des phases des systèmes microscopiques.

1. Géométrie non-commutative

Au niveau philosophique, il y a quelque chose de tout à fait satisfaisant dans la variabilité des observables de la mécanique quantique. Habituellement, lorsqu'on cherche à expliquer quelle est la cause de la variabilité de monde, la réponse qui vient naturellement à l'esprit est juste : le temps qui passe. Mais précisément le monde quantique fournit une réponse plus subtile depuis la réduction du paquet d'onde qui se produit dans toute mesure quantique n'est rien d'autre que le remplacement d'un "nombre q" par un nombre réel qui est choisi parmi les éléments de son spectre. Il y a donc une variabilité intrinsèque dans le monde quantique, et qui jusqu'à présent ne se réduit à rien de classique. Les résultats des observations sont intrinsèquement des quantités variables, et ce au point que leurs valeurs ne peuvent être reproduites d'une expérience à l'autre, mais que, prises ensemble, elles forment un nombre q. La découverte de Heisenberg montre que l'espace des phases des systèmes microscopiques est un espace noncommutatif dans la mesure où les coordonnées sur cet espace ne satisfont plus les règles commutatives de l'algèbre ordinaire. Cet exemple de l'espace des phases peut être considéré comme l'origine de la géométrie non-commutative. Mais qu'en est-il de l'espace-temps lui-même ? Nous montrons maintenant pourquoi l'étape permettant de passer d'un espace-temps commutatif à un espace-temps non-commutatif est une étape très naturelle.

La pleine action de la gravité couplée à la matière admet un énorme groupe naturel de symétries. Le groupe d'invariance pour l'action d'Einstein-Hilbert est le groupe des difféomorphismes de la variété et l'invariance de l'action n'est que la manifestation de sa nature géométrique. Un difféomorphisme agit par permutations des points de sorte que les points n'ont pas de signification absolue.

Le groupe complet d'invariance de l'action de la gravité couplée à la matière est cependant plus riche que le groupe de difféomorphismes de la variété car il faut inclure quelque chose appelé "le groupe des transformations de jauge" que les physiciens ont identifié comme la symétrie de la partie matière. Ceci est défini comme le groupe des applications de la variété vers un autre groupe fixe, G, appelé le "groupe de jauge", dont nous savons qu'il est tel que : $G = U(1).SU(2).SU(3)$. Le groupe de difféomorphismes agit sur le groupe des transformations de jauge par permutations des points de la variété et le groupe complet de symétries de l'action est le produit semi-direct des deux groupes (de la même manière, le groupe de Poincaré, qui est le groupe d'invariance de la relativité restreinte, est le produit semi-direct du groupe de traductions par le groupe des transformations de Lorentz). En particulier, ce n'est pas un groupe simple (un groupe simple est un groupe qui ne peut pas être décomposé en plus petits morceaux, un peu comme un nombre premier ne peut pas être factorisé en un produit de nombres plus petits que lui mais est un "composé" et contient un énorme sous-groupe normal.

Maintenant que nous connaissons le groupe d'invariance de l'action, il est naturel d'essayer de trouver un espace X dont le groupe des difféomorphismes est simplement ce groupe, afin que nous puissions espérer interpréter l'action complète comme de la gravité pure sur X. C'est la vieille idée de Kaluza-Klein. Malheureusement, cette recherche est vouée à l'échec si l'on cherche une variété ordinaire puisque par un résultat mathématique, les composantes connexes de l'identité dans le groupe des difféomorphismes forment toujours un groupe simple, à l'exclusion d'une structure de produit semi-direct comme celui cidessus du groupe d'invariance de la pleine action de la gravité couplée à la matière. Mais les espaces non-commutatifs du type le plus simple donnent facilement la réponse, modulo quelques points subtils. Pour comprendre ce qui se passe, notez que pour les variétés ordinaires, l'objet algébrique correspondant à un difféomorphisme n'est qu'un automorphisme de l'algèbre des coordonnées, c'est-à-dire une transformation des coordonnées qui ne détruit pas leurs relations. Lorsqu'une algèbre involutive A n'est pas commutative, il est facile de construire des automophismes. On prend un élément unitaire u de l'algèbre c'est-à-dire tel que $uu^* = u^*u = 1$. En utilisant u on obtient un automorphisme appelé intérieur, par la formule $x \to uxu^*$.

Notez que dans le cas commutatif, cette formule donne juste l'automorphisme d'identité (car on pourrait alors permuter x et u^*). Cette construction n'est donc intéressante que dans le cas non-commutatif. De plus, les automorphismes intérieurs forment un sous-groupe noté $\mathrm{Int}(A)$ qui est toujours un sous-groupe normal du groupe des automorphismes de A.

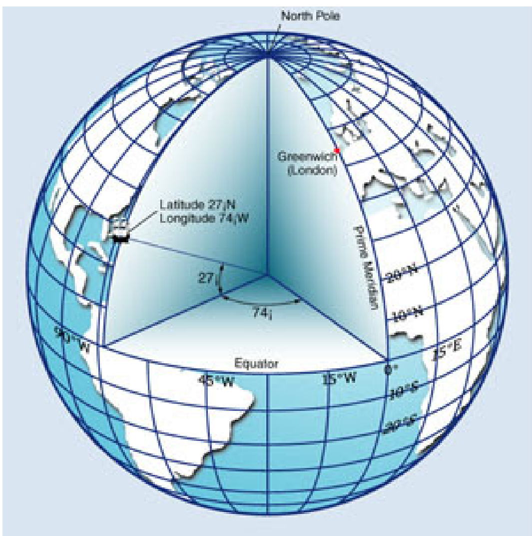
Dans l'exemple le plus simple, où nous prenons pour A l'algèbre des applications lisses d'une variété M à l'algèbre de matrices sur les nombres complexes, on montre que le groupe $\mathrm{Int}(A)$ dans ce cas est (localement) isomorphe au groupe de transformations de jauge, c'est-à-dire des applications lisses de M au groupe de jauge $G = PSU(n)$ (quotient de $SU(n)$ par son centre). De plus, la relation entre les automorphismes internes et tous les automorphismes devient identique à la séquence exacte régissant la structure du groupe d'invariance ci-dessus de la pleine action de la gravité couplée à la matière.

Il est assez frappant de constater que la terminologie issue de la physique : les symétries internes, s'accordent si bien avec les mathématiques des automorphismes intérieurs. Dans le cas général, seuls les automorphismes qui sont unitairement mis enœuvre dans l'espace Hilbert seront pertinent mais modulo cette subtilité on peut voir à la fois à partir de l'exemple qui précède l'avantage de traiter les espaces non-commutatifs sur le même pied que les espaces ordinaires. La prochaine étape consistera à définir correctement la notion de métrique pour ces espaces et nous nous livrerons, dans le prochain billet, à une brève description historique de l'évolution de la définition de "l'unité de longueur" en physique. Cela préparera le terrain pour l'introduction au paradigme spectral de la géométrie non-commutative.

AC a dit...
Mec de la rue, essayez juste de permuter quelques lettres et obtenez 4 fois un nom qui n'est pas si difficile à deviner... que pouvez-vous trouver en commençant par "non alsacien" par exemple ?
4 Juillet 2007 à 6 :59 PM
AC a dit...
Cher Fabien Votre question est pertinente. Le rôle de l'espace fini est maintenant beaucoup mieux compris à partir du tout récent article avec A. Chamseddine : "*Pourquoi le modèle standard*"[2] et "*Un habit pour Modèle standard le mendiant* "[3] qui sont sur le he-th arXiv. Mon intention est d'utiliser ce blog, ces vacances d'été, pour expliquer leur contenu dans les détails, mais une étape à la fois. Jusqu'à présent, je voulais juste expliquer pourquoi il est naturel de considérer les espaces-temps non-commutatifs et ne pas être aussi dépendants de la vue commutative "ponctuelle" des espaces. Donc même si on ne peut pas exclure que l'espace fini F soit, comme vous le suggérez, un "vestige d'un continu ancestral rétréci, l'espace" cela nous donnera beaucoup plus de liberté pour abandonner la dépendance au point de vue commutative.
4 Juillet 2007 à 7 :10 PM

AC a dit...
Je crois que l'extension du cadre "symplectique" au monde NC est simplement la notion de terme de premier ordre dans une déformation de l'algèbre NC. Ceci est assez clair dans le cas commutatif où une structure symplectique (ou plus généralement une structure de Poisson) n'est que le premier terme dans l'expansion de la déformation du produit. Il s'agit donc d'une forme semi-classique de déformation. Dans le cas NC, il existe de nombreux exemples où il est naturel d'utiliser un point de départ similaire pour les déformations (par exemple, des crochets de Rankin-Cohen généralisés aux déformations des structures projectives NC).
8 Juillet 2007 à 11 :35 AM

Mardi 10 Juillet 2007
Une brève histoire du système métrique



2. https://arxiv.org/pdf/0706.3688.pdf
3. https://pdfs.semanticscholar.org/765c/4b648502de8f1628258f79ca7bc7e61fe3fc.pdf

L'étape suivante consiste à comprendre quel est le remplacement du paradigme riemannien par les espaces non-commutatifs. Pour me préparer à cela, et en utilisant l'excuse des vacances d'été, permettez-moi d'abord de raconter l'histoire du changement de paradigme qui a déjà eu lieu dans le système métrique avec le remplacement du solide "mètre-étalon" par une unité spectrale de mesure.

La notion de géométrie est intimement liée à la mesure de la longueur. Dans le monde réel, la mesure dépend du système d'unités choisi et l'histoire du système le plus couramment utilisé - le système métrique - illustre les difficultés liées à la conclusion d'un accord sur une unité physique de longueur qui unifierait les nombreux choix existants. Comme on le sait, les États-Unis sont l'un des rares pays qui n'utilisent pas le système métrique et ce manque d'uniformité dans le choix d'un unité de longueur est devenue douloureusement évident lorsqu'il a entraîné la perte d'une sonde d'une valeur de 125 millions de dollars seulement parce que deux équipes différentes d'ingénieurs avaient utilisé les deux unités différentes (le pied et le système métrique).

En 1791, l'Académie française des sciences a convenu de la définition de l'unité de longueur dans le système métrique, le "mètre", comme étant la dix millionième partie du quart du méridien de la Terre. L'idée était de mesurer la longueur de l'arc du méridien de Barcelone à Dunkerque tandis que l'angle correspondant (environ 9,5°) a été déterminé en utilisant la mesure de la latitude à partir des étoiles de référence. Dans un sens ce n'était qu'un raffinement de ce qu'Ératosthène avait fait en Égypte, 250 ans avant JC, pour mesurer la taille de la terre (avec une précision de 0,4%).

Ainsi, en 1792, deux expéditions furent envoyées pour mesurer cet arc du méridien, une pour la portion nord était dirigée par Delambre et l'autre pour la partie sud était dirigée par Méchain. Tous deux ont été des astronomes qui utilisaient un nouvel instrument de mesure des angles, inventé par Borda, un physicien français. La méthode qu'ils ont utilisée est la méthode de triangulation et de mesure concrète de la "base" d'un triangle. Il leur a fallu beaucoup de temps pour effectuer leurs mesures et c'était une entreprise risquée. Au début de la révolution, la France entre en guerre avec l'Espagne.

Essayez d'imaginer à quel point il est difficile d'expliquer que vous essayez de définir une unité universelle de longueur lorsque vous êtes arrêté au sommet d'une montagne avec des instruments optiques très précis vous permettant de suivre tous les mouvements des troupes dans les environs.

Delambre et Méchain essayaient tous deux d'atteindre la plus grande précision dans leurs mesures et une partie importante du retard est due au fait que cette quête a atteint un niveau obsessionnel dans le cas de Méchain. En fait, quand il a mesuré la latitude de Barcelone, il l'a fait à partir de deux endroits proches, mais ils ont trouvé des résultats contradictoires discordants de 3,5 secondes d'arc. Pressé de donner son résultat, il a choisi cacher cette divergence juste pour "sauver la face", ce qui est une mauvaise attitude pour un scientifique. Chassé d'Espagne par la guerre avec la France, il n'a pas eu une seconde chance de comprendre l'origine de l'écart et a dû jouer un peu avec ses résultats pour les présenter à la Commission internationale qui s'est réunie Paris en 1799 pour recueillir les résultats de Delambre et Méchain et en déduire la longueur du "mètre". Depuis ce jour, comme Méchain était un honnête homme obsédé par la précision, l'écart ci-dessus le hantait et il a obtenu de l'Académie de diriger une autre expédition quelques années plus tard pour trianguler plus loin en Espagne. Il est parti en Espagne et est mort du paludisme à Valence. Après sa mort, ses cahiers ont été analysés par Delambre qui a trouvé l'écart dans les mesures de la latitude de Barcelone mais n'a pas pu l'expliquer. L'explication a été trouvée 25 ans après la mort de Méchain par un jeune astronome du nom de Nicollet, qui était un élève de Laplace. Méchain avait fait dans les deux sites qu'il avait choisis à Barcelone (Mont Jouy et Fontana del Oro) un certain nombre de mesures de latitude en utilisant plusieurs étoiles de référence. Puis il avait simplement pris la moyenne de ses mesures à chaque endroit. Méchain savait très bien que la réfraction fausse le chemin des rayons lumineux, ce qui crée une incertitude lorsque vous utilisez des étoiles de référence proches de l'horizon. Mais il a estimé que le résultat moyen éliminerait ce problème.

Ce que Nicollet a fait, c'est de réfléchir à la moyenne pour éliminer l'incertitude créée par la réfraction et, en utilisant les mesures de Méchain, il a obtenu un accord remarquable (0,4 seconde soit quelques mètres) entre les latitudes mesurées depuis le Mont Jouy et Fontana del Oro. En d'autres termes, Méchain n'a commis aucune erreur pour prendre ses mesures et il aurait pu comprendre par pure pensée ce qui n'allait pas dans son calcul. Je recommande le livre de Ken Adler (*La mesure de toutes choses : l'odyssée de sept ans et l'erreur cachée qui a transformé le monde*, eds Little, Brown et compagnie, 2003, ou sa traduction *Mesurer le monde*, Flammarion, 2005) pour un joli compte rendu de l'histoire complète des deux expéditions.

En tout cas, entre-temps, la commission internationale avait pris les résultats des deux expéditions et calculé la longueur de la dix millionième partie du quart du méridien les utilisant. De plus, une barre de platine d'environ cette longueur a ensuite été réalisée et a été prise comme définition de l'unité de longueur dans le système métrique. Avec cette unité, la longueur réelle du quart de méridien se révèle être 10 002 290 plutôt que l'objectif de 10 000 000 mais ce n'est plus pertinent. En réalité en 1889, la référence est devenue une autre barre métallique spécifique (de platine et d'iridium) appelée "mètre-étalon", déposé près de Paris dans le pavillon de Breteuil. Cette définition a perduré jusqu'en 1960.

Déjà en 1927, lors de la septième conférence sur le système métrique, afin de prendre en compte les inévitables variations naturelles du platine appelé "mètre-étalon", l'idée est apparue de le comparer à une longueur d'onde de référence (la ligne rouge du cadmium). Vers 1960, la référence au dénommé "mètre-étalon" a finalement été abandonnée et une nouvelle définition de l'unité de longueur dans le système métrique (le "mètre") a été adoptée comme 1650763,73 fois la longueur d'onde du rayonnement correspondant à la transition entre les niveaux 2p10 et 5d5 du Krypton 86Kr.

En 1967, la seconde a été définie comme la durée de 9192631770 périodes de rayonnement correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfin de Césium-133. Enfin, en 1983, le "mètre" a été défini comme la distance parcourue par la lumière en 1/299792458 seconde. En fait, la vitesse de la lumière n'est qu'un facteur de conversion et pour définir le "mètre" on lui donne la valeur spécifique de $c = 299792458$m/s. En d'autres termes, le "mètre" est défini comme étant une certaine fraction 9192631770/299792458 $\sim$ 30.6633... de la longueur d'onde du rayonnement provenant de la transition entre les niveaux hyperfins ci-dessus de l'atome de césium.

Les avantages du nouveau standard de longueur sont nombreux. D'abord en n'étant lié à aucun emplacement, il est en fait disponible partout où il y a du césium. Le choix du césium par opposition à l'hélium ou l'hydrogène qui sont beaucoup plus communs dans l'univers est bien sûr encore discutable, et il est tout à fait possible qu'une nouvelle norme soit bientôt adoptée impliquant des raies spectrales de l'hydrogène plutôt que du césium. Voir cet article de Bordé pour une mise à jour http://christian.j.borde.free.fr/ChB.pdf.

Même s'il serait difficile de communiquer notre standard de longueur avec d'autres civilisations extraterrestres s'ils devaient effectuer des mesures de la Terre (telles que sa taille), la définition spectrale peut facilement être encodée dans une sonde et envoyée. En fait, les motifs spectraux fournissent une parfaite "signature" des produits chimiques, et une information universelle disponible partout où ces produits chimiques peuvent être trouvés, de sorte que la longueur d'onde d'une ligne spécifique est une unité parfaitement acceptable, alors que si vous commencez à réfléchir un peu, vous découvrirez que nous serions incapables de dire où se trouve la Terre dans l'univers...

Coordonnées ? oui mais avec quel système ? Une possibilité serait de donner la séquence de décalages vers les galaxies voisines, et d'une manière plus raffinée vers les étoiles proches, mais ce serait assez difficile à expliciter pour être sûr que cela permette d'aboutir à un endroit précis.

AC a dit...
Cher physicien apprenti.
Tout d'abord, je ne connais aucune preuve réelle de la variation dans le temps des constantes de nature.
Regardez par exemple
http://www-cosmosaf.iap.fr/Cste%208%20mai%202004%20html.htm
En fait l'idée de grand nombre de Dirac de 1937, qui prédit une variation de G avec le temps n'a pas été validée par expérience et on a une borne supérieure expérimentale de l'ordre de $dG/G < 4\ 10^{-11}$ par an.
Donc je ne suis pas sûr qu'il existe encore des preuves expérimentales convaincantes de ce que vous dites.
S'il y en avait, ce serait intéressant de discuter plus précisément de la constante dont nous parlons. Par exemple, le spectre unité de longueur dont j'ai parlé dans le billet dépend de la constante de Rydberg et donc de la masse de l'électron. Dans NCG, cette masse est liée à la taille inverse de la géométrie fine F qui sera discutée plus loin dans ce blog. Au moins, on peut dire que, dans le NCG, les "unités atomiques" sont intimement liées à la la géométrie de l'espace fin F, tandis que les unités astronomiques sont liées à la variété M. Le modèle de l' espace-temps en NCG est le produit M fois F, mais rien n'empêche la géométrie de F de varier dans M.
Juillet 13, 2007 at 10 :27 AM

Mardi 17 Juillet 2007
Truc non standard
Je ne suis pas sûr de vraiment savoir comment utiliser un “blog” comme celui-ci. Récemment j’ai été sollicité et j’ai dû écrire un article décrivant la perspective sur la structure de l’espace-temps obtenue du point de vue de la géométrie non-commutative. Au début, je pensais que je pouvais être paresseux et après avoir rédigé le document (il est disponible ici https://alainconnes.org/docs/shahnlong.pdf), que je pourrais simplement utiliser des morceaux du document pour garder ce blog vivant pendant les vacances d’été. Cependant, en essayant de faire ça, j’ai réalisé que c’était mieux (en partie à cause de l’utilisation peu pratique du Latex dans le blog) de mettre d’abord le papier à disposition puis de dire dans le blog les choses supplémentaires que l’on n’écrirait pas “normalement” dans un article (même un article grand public non technique comme celui ci-dessus). Je n’ai pas envie de transformer le blog en lieu de controverses car il n’est pas clair pour moi que l’on gagne beaucoup dans de telles discussions. La règle semble être que, le plus souvent, les gens ont des préjugés contre de nouvelles choses principalement parce qu’ils ne les connaissent pas suffisamment et ils optent pour l’attitude paresseuse qu’il est plus facile de dénigrer une théorie que d’essayer de l’apprécier. Je ne suis pas une exception et j’ai certainement adopté cette attitude en ce qui concerne la supersymétrie ou la théorie des cordes. Un débat montrera généralement les opinions bien arrêtées des différentes parties et il est rare qu’un vrai changement ait lieu. Voilà pour le côté “controverse”. Cependant, je crois qu’il existe certains points qui peuvent être assez utiles à connaître et qui, à condition d’être présentés de manière non polémique, peuvent beaucoup aider à éviter certains pièges. Je vais discuter à titre d’exemple les deux notions d’“infinitésimaux” que je connais et essayer d’expliquer la pertinence des deux. Ce n’est pas un “papier mathématique” mais plutôt une discussion informelle.

Quand j’étais étudiant à l’Ecole Normale il y a environ 40 ans, je suis tombé amoureux d’un nouveau sujet de mathématiques appelé “Analyse non standard” qui a été créée par A. Robinson. Être étudiant de Gustave Choquet à ce moment-là fait que je savais beaucoup de choses sur les ultrafiltres. Ces filtres maximaux ont été (corrigez-moi si je me trompe) découverts par H. Cartan lors d’un atelier Bourbaki. À cette époque, Cartan n’avait pas de nom pour ces nouveaux objets mais il avait découvert l’efficacité remarquable qu’ils avaient dans toute preuve où une compacité et des arguments de choix étaient nécessaires. Donc (ce que j’ai entendu de Cartan) le nom qu’il utilisait était “boum”!!! Bien sûr, il savait que cette notion permettait de fournir une preuve d’une ligne de l’existence de la mesure de Haar (boum ...). Et aussi qu’en raison de l’unicité de cette dernière, il s’agit en fait d’une déclaration de convergence assez forte sur les fonctions de comptage à proximité de la mesure de Haar. Il voulait en être sûr et il a écrit dans une note aux Comptes-Rendus tous les détails d’un argument géométrique direct prouvant la convergence attendue. Passer des ultrafiltres aux ultra-produits est une étape facile. Et j’ai été complètement charmé par les ultraproduits quand j’ai appris (à cette époque) le théorème d’Axe-Cochen : l’ultraproduit des corps p-adiques est isomorphe à l’ultraproduit des corps fonctionnels locaux avec les mêmes corps de résidus. J’ai donc commencé à travailler sur ce sujet et j’ai obtenu, en utilisant un classe d’ultrafiltres dite “sélective”, une construction de modèles minimaux en analyse non standard. Ils sont obtenus comme ultraproduits mais les ultrafiltres utilisés sont si particuliers que, par exemple, pour connaître les éléments de l’ultra-puissance d’un ensemble X, on n’a pas besoin de se soucier des étiquettes : l’ultrafiltre image en X est tout ce qui est nécessaire. J’ai écrit un article expliquant comment utiliser les ultraproduits et j’ai toujours gardé cet outil prêt pour une utilisation ultérieure. Je l’ai utilisé de manière essentielle dans mon travail sur la classification des facteurs. Tant pour le côté positif de la pièce. Cependant, très tôt, j’ai essayé en vain de mettre en œuvre l’une des plus-values de l’analyse non standard, à savoir qu’elle donnait enfin la terre promise pour les “infinitésimaux”. En fait, les ajouts sont venus avec un exemple spécifique : une prétendue réponse à la question naïve “quel est la probabilité “p” qu’une fléchette atterrisse à un point donné x de la cible” lors d’une partie de fléchettes. C’était suivi par 1) l’argument simple pour lequel ce nombre positif “p” était plus petit que ε pour tout ε un réel positif 2) cent pages de logique 3) l’identification de “p” avec un nombre “non standard”...
Au début, j’ai attribué mon incapacité à obtenir concrètement “p” à mon manque de connaissances en logique, mais après avoir réalisé que les modèles pourraient être construits comme des ultra-produits, cette excuse ne s’applique plus. À ce moment-là, je me suis rendu compte qu’il y avait une raison fondamentale pour laquelle on ne serait jamais capable de trouver “p” parmi les nombres non standard : à partir d’un nombre non standard (non trivial bien sûr), on déduit canoniquement un caractère non mesurable du produit infini de deux groupes d’éléments (l’argument est plus simple en utilisant un entier infini non standard “n”, il suffit de prendre l’application qui à la séquence a_n (de 0 et 1) assigne sa valeur pour l’indice “n”). Désormais, le caractère d’un groupe compact est soit continu, soit non mesurable. Ainsi, un nombre non standard nous donne canoniquement un sous-ensemble non mesurable de $[0\ ,\ 1]$. C’est la fin

de la corde pour être "explicite" puisque (d'un point de vue logique) on sait qu'il est tout simplement impossible de construire explicitement un sous-ensemble non mesurable de $[0\ ,\ 1]$!

Il m'a fallu de nombreuses années pour trouver une bonne réponse à la question naïve ci-dessus concernant "p". La réponse est expliquée ici en détail https://alainconnes.org/docs/2000.pdf. Elle est donnée par le formalisme de la mécanique quantique, qui, comme expliqué dans le billet précédent sur les "variables infinitésimales" donne un cadre où les variables continues peuvent coexister avec les variables infinitésimales, au seul prix d'avoir des règles algébriques plus subtiles où la commutativité n'est plus forcément vérifiée. Les nouveaux infinitésimaux ont un "ordre" (un infinitésimal d'ordre un est un opérateur compact dont les valeurs caractéristiques μ_n sont un grand O de $(1/n)$). Le fait nouveau est qu'ils ont une intégrale qui en termes physiques est donnée par le coefficient de la divergence logarithmique de la trace. On obtient ainsi un nouvelle étape pour le "calcul" et elle est au cœur de la géométrie différentielle non-commutative.

En géométrie riemannienne, la donnée naturelle est le carré de l'élément de longueur, de sorte que lors du calcul de la distance $d(A, B)$ entre deux points, il faut minimiser l'intégrale de A à B le long d'un chemin continu de la racine carrée de $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. Maintenant, il est souvent vrai que "prendre une racine carrée" de manière brutale comme dans l'équation ci-dessus cache un niveau plus profond de compréhension. En fait, cette question de prendre la racine carrée a conduit Dirac à sa célèbre équation analogue de l'équation de Schrödinger pour l'électron et à la découverte théorique du positron. Dirac cherchait une forme invariante relativiste de l'équation de Schrödinger. La propriété de base de cette équation est qu'elle est que la variable de temps y apparaît au premier ordre. L'équation de Klein-Gordon qui est la forme relativiste de l'équation de Laplace, est invariante relativiste mais de second ordre dans le temps.

Dirac a trouvé cette idée de prendre la racine carrée de l'opérateur de Klein-Gordon en utilisant l'algèbre de Clifford. En fait (comme me l'a fait remarquer Atiyah) Hamilton avait déjà écrit la combinaison magique des dérivées partielles en utilisant ses quaternions comme coefficients et il avait noté que cela donnait une racine carrée du laplacien. Quand j'étais à Saint-Pétersbourg pour le 300e d'Euler, j'ai remarqué qu'Euler pouvait partager les honneurs pour les quaternions puisqu'il avait explicitement écrit leur règle de multiplication afin de montrer que le produit de deux sommes de 4 carrés est une somme de 4 carrés.

Quelle est donc la relation entre la racine carrée de Dirac du Laplacien et la question ci-dessus de prendre le racine carrée dans la formule de la distance $d(A, B)$. Le fait est que l'on peut utiliser la solution de Dirac et réécrire la même distance géodésique $d(A, B)$ de la manière suivante : on ne mesure plus la longueur minimum d'un chemin continu mais on mesure la variation maximale d'une fonction : i.e. la valeur absolue de la différence $f(A) - f(B)$. Bien sûr, sans restriction sur f, cela donnerait l'infini, mais il faut que le commutateur $[D, f]$ de f avec l'opérateur de Dirac soit borné par 1.

Nous voici dans notre étape de "calcul quantifié", de sorte que les fonctions de notre espace géométrique comme l'opérateur de Dirac sont toutes concrètement représentées dans le même espace de Hilbert H. H est l'espace de Hilbert des spineurs de carrés intégrables et les fonctions agissent par multiplication point par point. Le commutateur $[D, f]$ est la multiplication de Clifford par le gradient de f de sorte que lorsque la fonction f est réelle, sa norme est juste la norme Sup du gradient. Dire ensuite que la norme de $[D, f]$ est inférieure à 1 revient à demander que f soit une fonction de Lipschitz de la constante 1, c'est-à-dire que la valeur absolue de $f(A) - f(B)$ soit inférieure à $d(A, B)$ où cette dernière distance est la distance géodésique. Pour les fonctions de valeur complexes, on obtient seulement une inégalité, mais il suffit de montrer que la variation maximale de tels f donne exactement la distance géodésique : c'est-à-dire qu'on récupère la distance géodésique $d(A,B)$ comme Sup $f(A)-f(B)$ pour une norme de $[D,f]$ inférieure à 1.

Notez que D a la dimension de l'inverse d'une longueur, c'est-à-dire d'une masse. En fait, dans la formule ci-dessus pour des distances en termes de supremum le produit de "f" par D est sans dimension et "f" a la dimension d'une longueur puisque $f(A)-f(B)$ est une distance.

Maintenant, quelle est la signification intuitive de D ? Notez que la formule ci-dessus mesurant la distance $d(A,B)$ comme un supremum est basée sur le manque de commutativité entre D et les coordonnées "f" sur notre espace. Donc il devrait y avoir une tension qui empêche D de commuter avec les coordonnées. Cette tension est fournie par l'hypothèse clé suivante "l'inverse de D est un infinitésimal".

En effet, nous avons vu dans un article précédent que les variables à domaine continu ne peuvent pas commuter avec des variables infinitésimales, ce qui donne la tension nécessaire. Mais il y a plus, en raison de l'équation fondamentale $\mathbf{ds}=1/D$ qui donne à l'inverse de D la signification heuristique de l'élément de longueur. Ce changement de paradigme de $g_{\mu\nu}$ à cet opérateur théorique **ds** est le parallèle exact du changement de l'unité de longueur dans le système métrique à un paradigme spectral.

Ainsi, on peut considérer une géométrie comme une représentation concrète de l'espace de Hilbert non seulement de l'algèbre de coordonnées sur l'espace X qui nous intéresse, mais aussi de son élément de longueur infinitésimal **ds**. Dans le cas riemannien habituel cette représentation est d'ailleurs irréductible. Ainsi, à bien des égards, cela est analogue à penser une particule comme nous l'a appris Wigner, c'est-à-dire comme une représentation irréductible (du groupe de Poincaré).

AC a dit...
Cher Arivero, merci ! C'est bien que Tao et moi discutions de la même chose. En fait ma première note aux Comptes Rendus (1970) portait sur les ultrafiltres sélectifs et les modèles non standards minimaux construits en utilisant des ultraproduits. Ma conviction est que les deux points de vue sur les infinitésimaux sont le reflet des nuances existant déjà au début de l'invention du calcul. Les nombres non standards au sens de la logique ou les ultrafiltres sont très proches du point de vue de Leibniz.
17 Juillet 2007 à 7 :30 PM

AC a dit...
Cher Alon Levy
Oui, bien sûr, je suis d'accord pour mettre le billet sur l'analyse non standard sur le blog du carnaval, merci,
Alain
19 Août 2007 à 1 :57 PM

Vendredi 3 Août 2007
70 ans de Paul
Je reviens tout juste d'un très bel événement autour des 70 ans de Paul Baum, qui s'est déroulé à Varsovie lundi, merci en particulier à Piotr Hajac. Je connais Paul depuis l'été 1980, lorsque nous nous sommes rencontrés à Kingston. J'ai vraiment eu, lors de ma première rencontre, l'impression de rencontrer l'"homologie en personne". Plus je l'ai connu grâce à notre très longue collaboration, plus j'ai apprécié sa clarté d'esprit et sa quête incessante de simplicité et de beauté. À bien des égards, il réussit devant un problème difficile à faire ce que Grothendieck conseillait dans *Récoltes et Semailles*, c'est-à-dire à garder "une innocence enfantine" devant les mathématiques. Le dîner du lundi soir était d'une intensité comparable à celle du mémorable dîner organisé par Martin Walter, à Boulder, pour les 60 ans de Paul lorsque l'équipe Paul Baum - Raoul Bott avait forcé Martin à chercher (encore et encore) dans sa cave plus de bouteilles de vin pour suivre leur capacité à boire !

Raoul Bott est décédé en décembre 2005. Peu de temps auparavant, Paul est allé jusqu'en Californie pour lui rendre visite et ils ont parlé ensemble pendant une journée entière. Ce type de fidélité dans l'amitié et la compréhension de ce qui compte vraiment, c'est une attitude envers la vie que Paul a et que j'admire vraiment.

Lundi 13 Août 2007
Moyenne harmonique
Ce "billet" est principalement une tentative de voir si l'on peut réussir à utiliser des formules dans le blog et

discuter de vrais trucs en quelque sorte. Les formules doivent être vraiment visibles, un peu comme avec les transparents. Donc, comme prétexte, je vais commencer par discuter d'un problème lié à l'Ansatz de base :

$$\mathbf{ds} = D^{-1}$$

qui donne l'élément de longueur théorique de l'opérateur en termes de l'opérateur de Dirac dans le cadre général de la géométrie non-commutative "métrique". Le noyau de l'opérateur D est de dimension finie et on prend **ds** qui s'évanouit sur ce noyau. Comme cela a déjà été discuté ici, la connaissance de D retourne la métrique. De plus l'intégrale non-commutative, sous la forme de la trace de Dixmier, redonne la forme volumique. Ainsi l'intégrale d'une fonction f de dimension n est simplement donnée par

$$⨍ f|\mathbf{ds}|^n$$

où l'intégrale "coupée" est la trace de Dixmier c'est-à-dire la fonctionnelle qui assigne à un infinitésimal d'ordre 1 le coefficient de la divergence logarithmique dans la série qui donne la somme de ses valeurs propres.

Je n'essaierai pas de justifier davantage la définition heuristique de l'élément de longueur. Il est plus intéressant de le mettre à l'épreuve, de le remettre en question, et je vais discuter d'un exemple d'un problème qui m'a laissé perplexe assez longtemps parfois mais qui a une jolie résolution.

Il s'agit de comprendre ce qui se passe quand on prend le produit de deux géométries non-commutatives. On obtient la relation suivante pour les carrés des opérateurs de Dirac correspondants :

$$D^2 = D_1^2 + D_2^2$$

où nous abusons des notations en éliminant le produit tensoriel par l'opérateur d'identité qui va normalement avec chacun des opérateurs D_j. Maintenant, cette relation est très différente de la simple relation de Pythagore des éléments de longueur classiques dont le carré s'additionne et pose donc la question de savoir comment concilier la formule d'Ansatz au-dessus avec la formule simple d'addition des carrés des opérateurs de Dirac. Plus généralement, on peut considérer un tas d'espaces NC avec les opérateurs de Dirac D_μ et les combiner comme suit : on commence avec une matrice positive d'opérateurs dans l'espace de Hilbert :

$$g = (g^{\mu\nu}) \in M_n(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$$

et on étend la formule ci-dessus donnant D^2 pour un produit de deux espaces et on forme la somme suivante :

$$D^2 = \sum_{\mu,\nu} D_\mu g^{\mu\nu} D_\nu^*$$

où la notation avec z souligne le fait que nous ne supposons même pas l'auto-adjonction des différents D_μ qui n'est pas nécessaire. Nous voulons une formule pour l'inverse du carré de D i.e. pour :

$$\mathbf{ds}^2 = D^{-2}$$

en fonction de la matrice inverse :

$$g^{-1} = (g_{\mu\nu})$$

qui joue un rôle similaire au $g_{\mu\nu}$ de la géométrie Riemannienne, et des opérateurs

$$dz^\mu = D_\mu^{-1}$$

Cela semble totalement désespéré, car il faut une formule pour l'inverse d'une somme d'opérateurs non-commutants. Heureusement, il s'avère qu'il existe une belle formule simple qui fait le travail en toute généralité. Il s'agit de se rappeler de la définition d'une distance comme un minimum. Elle est donnée par :

$$\langle \xi, \mathbf{ds}^2 \xi \rangle = \mathrm{Inf} \sum_{\mu,\nu} \langle dz^\mu \xi^\mu, g_{\mu\nu} dz^\nu \xi^\nu \rangle$$

L'infimum est repris par toutes les décompositions du vecteur donné comme une somme :

$$\sum_\mu \xi^\mu = \xi$$

Notez que cette formule suffit pour déterminer complètement l'opérateur $\mathbf{ds}^2$, car elle donne la valeur de la forme quadratique positive correspondant à n'importe quel vecteur de l'espace de Hilbert. La preuve de la formule n'est pas difficile et peut être effectuée en appliquant la technique des multiplicateurs de Lagrange pour faire respecter la contrainte qui précède sur les vecteurs libres ξ^μ.

AC a dit...
Dear Christophe
Ce que j'ai fait, c'est d'incorporer de petites images dans le texte, j'ai d'abord écrit un fichier pdf, puis j'ai extrait des petites parties du pdf en utilisant Adobe Professional et en les enregistrant au format JPEG.
7 Septembre 2007 à 4 :51 PM

Mardi 18 Septembre 2007
Les motifs - ou le coeur dans le coeur
C'est avec ce titre fascinant que A. Grothendieck présente dans *Récoltes et Semailles* (cf. Promenade à travers une œuvre ou l'Enfant et la Mère) le sujet des motifs : le plus profond des douze thèmes de recherche autour desquels il a développé son programme de recherche "à long terme" qui a littéralement révolutionné le domaine de la géométrie algébrique dans la décennie 1958-68. Les motifs étaient envisagés comme le "cœur dans le cœur" d'une nouvelle géométrie (la géométrie arithmétique) que Grothendieck a inventée en suivant une stratégie scientifique basée sur l'introduction d'une série de nouveaux concepts organisés sur un plan de généralité progressive : à commencer par les schémas, topos et sites puis en poursuivant par le yoga des motifs et les groupes de Galois motiviques et enfin par l'introduction de la géométrie algébrique anabelienne et de la théorie de Galois-Teichmuller.

Si les notions de schéma et de topos étaient les deux idées cruciales qui constituaient le moteur originel dans le développement de cette nouvelle géométrie - Grothendieck était évidemment fasciné par les concepts de point géométrique, espace et symétrie - ce n'est qu'avec la notion de motif que l'on finit par capter la structure la plus profonde, le cœur de l'identité profonde entre la géométrie et l'arithmétique.

Grothendienck a très peu écrit sur les motifs. Les fondations sont documentées dans son document inédit. "Motifs" et ont été discutés lors d'un séminaire à l'Institut des Hautes Études Scientifiques, en 1967. On sait, en lisant *Récoltes et Semailles*, qu'il a commencé à penser aux motifs en 1963-64. J.-P. Serre a inclus dans son article "Motifs" un extrait d'une lettre que Grothendieck lui a écrite en août 1964 dans laquelle il parle (plutôt vaguement, en fait) des notions de motif, foncteur fibré, groupes de Galois motiviques et poids.

Les motifs ont été introduits dans le but ultime de fournir une explication intrinsèque aux analogies entre les différentes théories cohomologiques des variétés algébriques : ils devaient jouer le rôle d'une théorie cohomologique universelle (la cohomologie motivique) et aussi fournir une linéarisation de la théorie des variétés algébriques, en finissant par fournir (c'était le point de vue de Grothendieck) le bon cadre pour une attaque réussie des Conjectures de Weil sur la fonction zêta d'une variété algébrique sur un corps fini.

Contrairement à la topologie algébrique où le foncteur cohomologique standard est uniquement caractérisé par les axiomes d'Eilenberg-Steenrod en termes de normalisation associée à la valeur du foncteur en un point, en géométrie algébrique il n'existe pas de théorie cohomologique appropriée à coefficients entiers, pour les variétés définies sur un corps k, à moins que l'on ne prévoie une intégration de k dans les nombres complexes.

En fait, au moyen d'une telle cartographie, on peut former l'espace topologique des points complexes de la variété algébrique originale et enfin calculer sa cohomologie de Betti (singulière). Cependant, cette construction dépend généralement du choix de l'incorporation de k dans le domaine des nombres complexes. De plus, la cohomologie de Hodge, la cohomologie algébrique de de-Rham, la cohomologie ℓ-adique étale fournissent plusieurs exemples de foncteurs de cohomologie pouvant être associés simultanément à une variété algébrique donnée, dont chacun fournit une information pertinente sur l'espace topologique.

Grothendieck a émis l'hypothèse que cette pléthore de données cohomologiques différentes devrait être quelque peu codée systématiquement dans une théorie unique et plus générale de la nature cohomologique qui agit comme une "liaison" entre la géométrie algébrique et l'ensemble des théories cohomologiques disponibles. C'est l'idée du "motif", à savoir la raison commune derrière cette multitude d'invariants cohomologiques qui régit et contrôle systématiquement tous les appareils cohomologiques appartenant à une variété algébrique ou plus généralement à un schéma.

La construction originale d'une catégorie M de motifs (purs) sur un corps k commence par deux considérations préliminaires. La première considération est que M devrait être la cible d'un foncteur contravariant naturel reliant la catégorie C de variétés algébriques projectives lisses, sur un corps k à M. Un tel foncteur devrait associer à un objet X de C son motif $M(X)$. La deuxième considération est que ce foncteur devrait, par construction, prendre en compte chaque théorie cohomologique particulière.

Maintenant, en gardant à l'esprit cet objectif, on pense au processus axiomatisant une théorie cohomologique en géométrie algébrique. Cela se fait en introduisant un foncteur contravariant $X \to H(X)$ de C vers une catégorie abélienne graduée, où les ensembles de morphismes entre ses objets forment des K-espaces vectoriels (K est un corps de caractéristique zéro, que pour simplifier, je fixe ici égal aux rationnels). On aimerait aussi que toute correspondance $V \to W$ (un cycle algébrique dans le produit cartésien $V \times W$ qui peut être vu comme le graphe d'une application algébrique à valeurs multiples) induise a contrario, une application sur la cohomologie et que la catégorie cible soit convenablement définie de façon à contenir parmi ses objets toute "théorie cohomologique de Weil", à savoir une cohomologie qui satisfait entre autres axiomes la dualité de Poincaré et la formule de Künneth.

Cette présentation préalable aide à formaliser la construction de la catégorie des motifs suivant une procédure en trois étapes. On souhaite élargir la catégorie C de manière précise dans l'espoir de produire également une catégorie abélienne. Les trois étapes sont brièvement reprises comme suit :

(1) On passe de C à une catégorie avec les mêmes objets mais où les ensembles de morphismes sont les classes d'équivalence de correspondances rationnelles. Ici, le choix naturel de la relation d'équivalence est le relation d'équivalence numérique car elle est la plus grossière parmi les relations possibles entre cycles algébriques qui peuvent être considérés comme induisant, via les axiomes cohomologiques de toute théorie cohomologique de Weil, les homomorphismes définis en cohomologie.

(2) On agrandit la collection d'objets de la catégorie définie en (1), en ajoutant formellement des noyaux et images de projecteurs. Cette étape est appelée techniquement "enveloppe pseudo-abélienne" de la catégorie définie en (1) et elle est motivée par le besoin de définir une catégorie abélienne de motifs pour lesquels, par exemple, la formule de Künneth peut être appliquée.

(3) Enfin, on considère l'opposé de la catégorie définie en (2).

Maintenant, après avoir appliqué avec diligence toutes ces machines abstraites, on aimerait voir une application fructueuse de ces idées, sous la forme, par exemple, de la preuve d'une conjecture majeure. Cependant, on perçoit également très tôt qu'une application réussie du yoga des motifs est subordonnée à une connaissance approfondie de la théorie des cycles algébriques, puisque la construction de la catégorie M est centrée sur l'idée d'élargir les ensembles de morphismes en mettant en œuvre la notion de correspondance. C'est pour cette raison que les Conjectures Standard (critères cohomologiques pour l'existence de cycles algébriques intéressants) ont été associées, depuis le début, à la théorie des motifs car elles semblent remplir la "conditio sine qua non" une théorie des motifs a une application concrète et réussie.

Cependant, afin de mettre les Conjectures Standard dans la bonne perspective et pour éviter peut-être une surestimation de leur importance, il convient également de noter que Y. Manin a été en 1968, le premier à appliquer ces idées sur les motifs en produisant une preuve élégante de l'hypothèse de Riemann-Weil pour les variétés unirationnelles projectives tridimensionnelles non singulières sur un corps fini, sans faire appel aux Conjectures Standard. De plus, nous savons également que les Conjectures de Weil ont été prouvées par P. Deligne en 1974 sans utiliser ni la théorie des motifs ni les Conjectures Standard.

Près de quarante ans se sont écoulés depuis que ces idées ont été discutées de manière informelle dans le "cercle de Grothendieck". Une théorie élargie et en partie encore conjecturale des motifs mixtes a entretemps prouvé son utilité pour expliquer conceptuellement certains phénomènes intrigants qui se produisent dans plusieurs domaines des mathématiques pures, tels que la théorie de Hodge, la théorie K, les cycles algébriques, les polylogarithmes, les fonctions L, les représentations de Galois, etc.

Très récemment, de nouvelles applications de la théorie des motifs à la théorie des nombres et à la théorie quantique des champs ont été trouvés ou sont sur le point d'être développés, avec le soutien de techniques fournies par la géométrie non-commutative et la théorie des algèbres d'opérateurs.

En théorie des nombres, une compréhension conceptuelle de l'interprétation proposée par A. Connes des formules explicites de Weil en tant que formule de trace de Lefschetz sur l'espace non-commutatif des classes d'adèles, nécessite l'introduction d'une catégorie généralisée de motifs qui comprend des espaces très singuliers d'un point de vue classique. Plusieurs questions se posent déjà quand on considère des espaces non-commutatifs de dimension zéro de types spéciaux, tels que l'espace sous-jacent au système statistique quantique dynamique défini par J.-B. Bost et Connes dans leur article "Algèbres de Hecke, facteurs de type III et transitions de phase avec rupture spontanée de symétrie"(Selecta Math. (3) 1995). Cet espace est une version simplifiée des classes d'adèles et il encode dans son groupe de symétries l'arithmétique de l'extension abélienne maximale des rationnels. Une nouvelle théorie des endomotifs (algébrique et analytique) a été récemment développée dans "Géométrie non-commutative et motifs : la thermodynamique des endomotifs" (à paraître dans Advances in Mathematics). Les objets de la catégorie des endomotifs sont des espaces non-commutatifs décrits par des actions de semi-groupe sur les limites projectives des motifs d'Artin (ce sont parmi les exemples les plus simples de motifs purs, car ils sont associés aux variétés algébriques de dimension zéro). Les morphismes de cette nouvelle catégorie généralisent la notion de correspondances (algébriques) et sont définis au moyen de groupoïdes étales pour tenir compte de la présence des actions du semi-groupe.

Un problème ouvert et intéressant est lié à la définition d'une théorie dimensionnelle supérieure des motifs commutatifs et en particulier la mise en place d'une théorie des motifs elliptiques et formes modulaires non-commutatifs. Une généralisation appropriée du yoga des motifs à la géométrie non-commutative a déjà produit des résultats intéressants sous la forme, par exemple, d'un analogue pour la caractéristique zéro de l'action du groupe de Weil sur la cohomologie étale d'une variété algébrique. Il semble assez excitant de poursuivre ces idées : l'espoir est que les techniques motiviques, une fois convenablement transférées dans le cadre de la géométrie non-commutative, puissent fournir des outils utiles et produire des applications encore plus substantielles que celles obtenues dans le contexte commutatif classique.
1 commentaire :
AC a dit...
Chère Katia
Merci pour ce beau billet. Votre question est restée sans réponse depuis assez longtemps maintenant, et je vais essayer (pourquoi pas) de donner une réponse dans un prochain billet. Bien sûr, ce sera une réponse (partielle), il s'agira de mon point de vue et en tant que tel, elle n'aura aucune prétention à être "la" réponse.
4 Octobre 2007 à 1 :21 PM

Mercredi 31 Octobre 2007
Battement de cœur 1
Le dernier billet de Katia s'est terminé par une question provocatrice motivée par la description de Grothendieck dans *Récoltes et Semailles* du "cœur dans le cœur" de la géométrie arithmétique, à savoir la théorie des motifs. Sa question a été formulée comme ceci :
——— Qu'est-ce que le "cœur du cœur" de la géométrie non-commutative ? ———
J'essaierai d'expliquer ici qu'il existe un "supplément d'âme" certain, obtenu lors du passage de la classe des espaces commutatifs aux espaces non-commutatifs. La principale nouveauté est que "les espaces non-commutatifs génèrent leur propre temps "et peuvent en outre subir des opérations thermodynamiques telles que le refroidissement, la distillation etc.

Cela ouvre de nouvelles façons de gérer les espaces géométriques et notre travail avec Matilde Marcolli et Katia Consani http://alainconnes.org/docs/ccm.pdf n'est qu'un exemple d'applications potentielles à la théorie des nombres. Il est étroitement lié à la fonction zêta de Riemann et est très proche dans l'esprit des idées de Grothendieck sur les motifs, ce qui ne le rend pas hors de propos dans la discussion présente de la question de Katia. L'histoire commence par une distinction qualitative entre espaces issus de la classification (par von Neumann) des algèbres non-commutatives des types I, II et III. Les espaces commutatifs sont tous de type I. Lors du codage d'un espace X par une algèbre A de fonctions (à valeurs complexes) sur X, on utilise une certaine structure sur X pour restreindre la classe de fonctions (par exemple pour lisser les fonctions sur un espace lisse) et la distinction ci-dessus entre les types utilise la structure la plus grossière possible qui est la théorie de la mesure. Les algèbres correspondantes (appelées algèbres de von Neumann) sont assez simples à caractériser de façon abstraite : ce sont des commutants dans l'espace de Hilbert d'une certaine représentation unitaire. Alors on peut prendre la somme directe des algèbres A et B, on peut mélanger des algèbres de différents types. Plus précisément, toute algèbre de von Neumann se décompose de amnière unique comme une intégrale d'algèbres qui ne peuvent pas être décomposés davantage et qu'on appelle facteurs. Un facteur est une algèbre de von Neumann dont le centre est aussi petit qu'il peut l'être, à savoir qu'il se réduit aux nombres complexes. Les facteurs de type I sont équivalents au sens de Morita aux nombres complexes, et donc un facteur de type I correspond bien à la notion classique de "point" dans un espace X .

Pour comprendre géométriquement à quoi ressemblent les facteurs de type II et III, il est utile de décrire l'algèbre (de von Neumann) A associée à l'espace des feuilles d'une variété feuilletée : (V, F). Un élément T de A assigne à chaque feuille un opérateur dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur la feuille, et il est logique de dire que T est borné, mesurable ou nul presque partout. Les opérations algébriques se font feuille par feuille, et l'algèbre des éléments mesurables bornés modulo les éléments négligeables est une algèbre de von Neumann. L'exemple le plus simple correspond au feuilletage dont l'espace des feuilles est le tore non-commutatif.

C'est un feuilletage de deux tores par l'équation "$dy = a\ dx$" en coordonnées plates. L'algèbre de von Neumann correspondante est un facteur lorsque "a" est irrationnel et ce facteur n'est pas de type I mais de type II. Pour obtenir des exemples de type III on peut prendre n'importe quel feuilletage de codimension un dont l'invariant de Godbillon-Vey ne s'évanouit pas. La sous-variété intégrable F définissant un feuilletage de codimension un est l'orthogonal d'une forme v et l'intégration donne dv comme le produit extérieur de v par une unique forme w. L'invariant de Godbillon-Vey est l'intégrale sur V du produit extérieur de w par dw lorsque V est compact orienté de dimension trois. Par essence la forme w est la dérivée logarithmique d'un élément de volume transversal et l'invariant GV est une obstruction à la recherche d'un élément de volume transversal invariant par holonomie, c'est-à-dire qui ne change pas quand on se déplace le long d'une feuille en gardant une trace de la façon dont les feuilles voisines se développent. Plus généralement les facteurs de type II sont ceux qui possèdent une trace et ceux de type III sont ceux qui ne sont ni de type I ni de type II. Dans le contexte des feuilletages, un élément de volume transversal invariant par holonomie permet d'intégrer la trace ordinaire des opérateurs et cela donne une trace sur l'algèbre de von Neumann du feuilletage.

Jusqu'au travail du mathématicien japonais Minoru Tomita, très peu de résultats positifs existaient sur les facteurs de type III. Le résultat clé de Tomita est qu'un vecteur v cyclique et séparateur pour un facteur A dans l'espace de Hilbert H génère un groupe à un paramètre d'automorphismes de A par la recette suivante : on considère le module carré $S \times S$ de l'opérateur fermable S qui envoie xv sur $S(xv) = x * v$ pour tout x dans A, puis on l'élève à la puissance purement imaginaire "it". Tomita a montré que l'opérateur unitaire normalise A et définit donc un automorphisme de A. On obtient ainsi un groupe à un seul paramètre d'automorphismes de A associés au choix d'un vecteur cyclique et séparateur v. Il a également montré que la phase J de l'opérateur fermable S ci-dessus donne un anti-isomorphisme de A avec son commutant A qui coïncide avec JAJ. Dans son récit du travail de Tomita, Takesaki a caractérisé la relation entre l'état défini par le vecteur cyclique et séparateur v et le groupe de paramètres d'automorphismes de Tomita comme condition de Kubo-Martin-Schwinger (KMS), qui avait été formulée en termes C^*-algébriques par les physiciens Haag, Hugenholtz et Winnink.

Le résultat clé de ma thèse (en 1972) est que la classe modulo les automorphismes intérieurs du groupe d'automorphismes de Tomita est en fait **indépendante** du choix de l'état (normal fidèle) utilisé pour sa construction. Il va sans dire que c'est cette unicité qui permet de définir des **invariants** de facteurs. Le plus simple est le sous-groupe $T(A)$ de R qui est formé des **périodes**, à savoir l'ensemble des temps t pour lesquels l'automorphisme correspondant est intérieur. Ceci, avec l'invariant spectral $S(A)$, m'a conduit à la classification des facteurs de type III en sous-types III_s pour s dans $[0, 1]$ et la réduction du type III au type II et les automorphismes réalisés dans ma thèse https://alainconnes.org/docs/THESE.pdf à l'exception du cas III_1 qui a ensuite été complété par Takesaki. Tout cela remonte au début des années 70 et suffira pour ce premier battement de cœur. C'est seulement le début d'une longue saga qui est loin d'être terminée et dont le thème principal est cette mystérieuse génération d'un "temps" intrinsèque qui émerge de la non-commutativité d'une algèbre de von Neumann.

Exactement comme les variétés sont livrées avec une classe de mesure "lisse" naturelle, un espace non-commutatif X donne généralement lieu à une algèbre de von Neumann A qui code la classe de mesure naturelle sur X. C'est donc une caractéristique totalement nouvelle du monde non-commutatif que l'évolution temporelle correspondante soit bien définie et donne un homomorphisme canonique :

$$\delta : \mathbb{R} \to \mathrm{Out}(A)$$
$$1 \to \mathrm{Int}(A) \to \mathrm{Aut}(A) \to \mathrm{Out}(A) \to 1$$

où la deuxième ligne donne la définition du groupe des automorphismes extérieurs $\mathrm{Out}(A)$ de A comme quotient du groupe $\mathrm{Aut}(A)$ des automorphismes par le sous-groupe normal $\mathrm{Int}(A)$ des automorphismes intérieurs (qui sont obtenus par conjugaison par un élément unitaire de l'algèbre A).

AC a dit...
Cher Urs
Ce que vous devez comprendre, c'est que toutes les choses intéressantes se produisent ici lorsque le nombre de degrés de liberté impliqué est infini. Un exemple typique est la mécanique statistique quantique (comme un système de spin sur un réseau). Les systèmes qu'on trouve dans la théorie quantique des champs, les exemples liés aux nombres premiers impliquent tous une infinité de degrés de liberté et sont le plus souvent de type III. Les systèmes de mécanique quantique très simples sont bien sûr de type I et la structure plus profonde n'y apparaît pas. Ça n'a rien à voir avec les anomalies.

AC a dit...
Chers Urs

L'évolution temporelle est aussi "canonique" que possible car toute algèbre non-commutative a des automorphismes intérieurs. De plus on peut montrer que l'évolution temporelle appartient au centre de $\mathrm{Out}(A)$!

Si vous prenez des exemples très simples comme le cas de réseau, vous constaterez qu'un automorphisme intérieur affecte ce qui se passe sur un nombre fini d'endroits du réseau. Dans une situation simple de translation invariante par produit, l'hamiltonien (qui génère l'évolution temporelle dont nous parlons) est une somme infinie de contributions des endroits du treillis et son essence est inchangée par une perturbation provenant d'un nombre fini de terme dans la somme. C'est le fait que la somme soit infinie et n'appartienne pas à l'algèbre des observables qui crée le comportement de type III.

Vous pouvez légèrement perturber cette évolution temporelle par un automorphisme intérieur mais son action globale sur l'algèbre des observables restera essentiellement inchangée, car elle ne sera modifiée que sur un nombre fini de degrés de liberté. En d'autres termes, cette "évolution temporelle" de l'algèbre se déroule globalement, sur tous les degrés de liberté, alors que les automorphismes internes ne contrôlent qu'un nombre fini de nombreux degrés de liberté ! Vous devez étudier attentivement divers exemples, y compris les feuilletages, l'ensemble des nombres premiers ou le cas de QFT pour apprécier ce qui se passe... (et je dois dormir un peu maintenant)...
31 Octobre 2007 à 10 :16 PM

AC a dit...
Cher Urs
Ce n'est pas vraiment bien expliqué nulle part, donc le mieux est de comprendre l'idée de base sur un exemple sans entrer dans les détails techniques. Considérez le système de spin sur un réseau infini.

L'algèbre des observables est la limite inductive des algèbres de dimension finie qui proviennent du produit tensoriel des algèbres matricielles sur des sous-ensembles finis du réseau. Par construction, ils impliquent seulement un nombre fini d'endroits du treillis à un instant donné. De ce fait, un automorphisme intérieur - puisqu'il est implémenté par un élément unitaire de l'algèbre - ne "voit" vraiment qu'un nombre fini de degrés de liberté.
1er Novembre 2007 à 5 :49 PM

AC a dit...
Cher Anonymous
L'espace-temps qui permet de récupérer le modèle standard couplé à la gravité est de type I, car c'est le produit d'une variété M par un espace fini F c'est-à-dire un espace dont l'algèbre de coordonnées est de dimension finie. Ce n'est pas à ce niveau que nous nous attendons à obtenir du "temps émergent" mais plutôt au niveau de l'algèbre des observables dans QG. L'origine de cette idée vient de Carlo Rovelli qui - complètement indépendamment de l'histoire de KMS - avait trouvé en réfléchissant aux questions philosophiques de base dans QG que le "temps que nous ressentons" (par opposition à une coordonnée temporelle

dans l'espace-temps) doit être de nature thermodynamique et doit être lié à un état thermique : le bain de chaleur du reliquat de rayonnement photonique qui rompt naturellement l'invariance de Lorentz. La vraie chose maintenant est de mettre la main sur un bon modèle pour une algèbre d'observables spectraux dans QG. Quelques ingrédients pour cela sont expliqués à la fin de notre prochain livre avec Matilde Marcolli. Mais je préfère raconter l'histoire dans l'un des "battements de cœur" à venir plutôt que de l'expliquer dans un commentaire ...
2 Novembre 2007 à 2 :42 PM

AC a dit...
Cher anonymous
Je n'aime pas être trop négatif dans mes commentaires. Le document de Li est une tentative de prouver une variante de la formule de trace de mon papier dans Selecta. La "preuve" est celle du Théorème 7.3 page 29 du document de Li, mais je me suis arrêté de le lire quand j'ai vu qu'il étend la fonction de test h des idèles aux adèles par 0 à l'extérieur des ideles puis en utilisant la transformée de Fourier (voir page 31). Cela ne peut pas fonctionner et les ideles forment un ensemble de mesure 0 à l'intérieur des adèles (contrairement à ce qui se passe quand on ne traite qu'un nombre de places fini).
3 Juillet 2008 à 7 :50 AM

AC a dit...
1er août 2008
En tant qu'épilogue de ces longs articles sur l'atelier de l'Université Vanderbilt, nous aimerions remercier tous les intervenants pour leur participation spontanée et généreuse et pour avoir partagé leurs idées avec nous sur le corps à un élément et sa nouvelle connexion avec NCG. Nous remercions également tous les participants pour avoir assisté aux échanges et avoir écouté patiemment les discussions qui étaient parfois intenses et certainement "très vivantes" et stimulantes...

Lundi 4 Août 2008
IRONIE
De manière assez ironique, la première masse de Higgs qui est maintenant exclue par les derniers résultats de Tevatron est précisément 170 GeV, à savoir celle qui était privilégiée dans l'interprétation NCG du modèle standard, de l'unification de l'auto-couplage quartique de Higgs avec les autres couplages de jauge et en faisant l'hypothèse du "grand désert", qui suppose qu'il n'y a pas de nouvelle physique (à part le mélange des neutrinos) jusqu'à l'échelle d'unification. Ma première réaction est bien sûr un découragement profond, mélangé à la curiosité de savoir quelle nouvelle physique sera découverte au LHC.

Je termine avec ces vers de Lucrèce :
Suave, mari magno turbantibus aequora ventis,
e terra magnum alterius spectare laborem ;
non quia vexari quemquamst jucunda voluptas,
sed quibus ipse malis careas quia cernere suave est.

[Il est plaisant, lorsque les vents troublent les eaux d'une immense mer,
De regarder depuis le rivage les épreuves infligées à un autre,
Non pas parce que les malheurs de quiconque procurent une joie délectable,
Mais parce qu'il est plaisant de ne pas être dans ce malheur qu'un autre subit.]

Mardi 21 Février 2012
Galois
Ceci est juste un très court message pour ceux qui seraient intéressés par un exposé simple au sujet de Galois, ses relations avec les mathématiciens français de son temps, et une introduction générale à la "théorie de l'ambiguïté". La conférence est en français, disponible sur http://www.alainconnes.org/fr/videos.php
N'oubliez pas de cliquer sur le symbole "HD" à l'écran pour obtenir une meilleure qualité de la vidéo.

Samedi 9 Juin 2012
TRISTE NOUVELLE
C'est avec une profonde tristesse que nous apprenons la mort subite de Jean-Louis Loday, tombé par accident de son voilier le 6 juin. Nous perdons un mathématicien exceptionnel qui a produit tant de grandes réalisations et un merveilleux ami de longue date.

Vendredi 10 Août 2012
UNE ROBE POUR LE MENDIANT ?

Depuis 4 ans, je pensais qu'il y avait une incompatibilité inévitable entre le modèle spectral et l'expérience. J'ai écrit un article dans ce blog pour expliquer le problème, le 4 août 2008, dès qu'une masse d'environ 170 GeV pour le Higgs avait été exclue par le Tevatron. Maintenant, 4 ans se sont écoulés et nous savons enfin que la particule de Brout-Englert-Higgs existe et a une masse d'environ 125 Gev.

Pendant tout ce temps, le problème de cet écart dans la masse de Higgs semblait très difficile à résoudre et cela a certainement ralenti un peu l'intérêt pour le modèle spectral car il ne semblait pas y avoir de moyen facile et tout ce que l'on essaierait ne réussirait pas à réduire la masse de Higgs. La raison de ce billet est que cette incompatibilité a finalement été résolue de manière pleinement satisfaisante dans un travail conjoint avec mon collaborateur Ali Chamseddine, l'article est maintenant sur arXiv ici http://fr.arxiv.org/pdf/1208.1030

Ce qui est vraiment remarquable, c'est qu'il n'est pas nécessaire de modifier le modèle spectral, en aucune façon, il avait déjà les bons ingrédients et notre erreur a été d'avoir négligé le rôle d'un véritable champ scalaire qui était déjà présent et dont les couplages (avec le champ de Higgs notamment) avaient déjà été calculés en 2010 comme on peut le voir sur http://fr.arxiv.org/pdf/1004.0464

Cela change complètement la perspective sur le modèle spectral, d'autant plus que le champ scalaire ci-dessus a été indépendamment suggéré par plusieurs groupes comme un moyen de stabiliser le modèle standard malgré la faible masse expérimentale de Higgs. Donc, après cette interaction fructueuse avec les résultats expérimentaux, il est juste de conclure qu'il y a de fortes chances que l'approche spectrale de la physique des hautes énergies soit la bonne piste pour une unification géométrique de toutes les forces connues, y compris la gravité.

Quelques mots sur l'image, la métaphore du modèle standard en mendiant avec un diamant dans la poche a été suggérée par Daniel Kastler il y a longtemps, donc cela explique le personnage de droite. Le personnage de gauche porte les symboles issus de la NCG, les ingrédients de nature spectrale qui permettent de construire la géométrie à partir des observables gravitationnels, tels que le spectre de l'opérateur de Dirac, et d'écrire l'action du modèle standard couplé à la gravité.

Mardi 30 Octobre 2012
LA MUSIQUE DES SPHERES
Le titre de cet article, la musique des sphères, fait référence à un exposé *La musique des formes* https://www.dailymotion.com/video/xuiyfo que j'ai donné à Lille, le 26 septembre, à l'occasion d'une réunion conjointe avec le Fields Institute. La conférence est une introduction à l'aspect spectral de la géométrie non-commutative et à ses implications en physique.

Le point de départ est la question naïve "Où sommes-nous ?", ou comment est-il possible de communiquer avec des extraterrestres notre position dans l'Univers. Cette question conduit, dans le cadre riemannien de la géométrie, à celle de déterminer un ensemble complet d'invariants géométriques, à la fois pour un espace et pour un point dans un espace. Le thème de Mark Kac, "Peut-on entendre la forme d'un tambour ?" associe à une forme son échelle musicale qui est le spectre de la racine carrée du laplacien, ou mieux de l'opérateur de Dirac. Après avoir illustré ce thème familier par de nombreux exemples concrets, nous donnons un indice de l'invariant supplémentaire qui permet de récupérer l'image géométrique, à savoir l'invariant CKM, et l'illustrer, sous une forme simplifiée, pour l'exemple le plus simple possible de formes isospectrales mais non congruentes. Et la relation avec la musique ? On constate rapidement que la musique est plutôt basée sur l'échelle (spectre) qui se compose de l'ensemble des puissances entières positives q^n pour le nombre réel $q = 2^{1/12} \sim 3^{1/19}$. En raison de la croissance exponentielle de ce spectre, il ne peut correspondre à une forme familière mais plutôt à un objet de dimension moindre que tout nombre strictement positif. Comme expliqué dans l'exposé, il y a un bel espace qui a le bon spectre : c'est la sphère quantique de Poddles, Dabrowski, Sitarz, Brain, Landi et all. Son spectre se compose d'une légère variante des q^j où chacune apparaît avec multiplicité $O(j)$. (Voir le papier original de Dabrowskiet Sitarz arXiv:math/0209048 (Banach Center Publications, 61, 49-58, 2003)
pour la formule précise, et le papier de Brain et Landi arXiv:math/1003.2150 pour une variante et les nombreuses références aux mathématiciens impliqués, mes excuses à chacun d'eux pour ne pas en avoir mis la liste ici.)

Nous expérimentons en interagissant avec ce spectre et montrons à quel point il est adapté pour jouer de la musique. La nouvelle géométrie qui encode ces nouveaux espaces, est ensuite introduite sous sa forme spectrale, c'est la géométrie non-commutative, qui est alors confrontée à la physique. Là, le noyau est le modèle standard spectral de A. Chamseddine et l'auteur, modèle qui remonte à 1996. Nous racontons l'histoire de la résilience de ce modèle dans ses confrontations successives aux expériences. Le début et la fin de l'exposé sont inhabituels. La conférence précédente était une conférence d'Alain Aspect sur ses récentes expériences, avec ses collaborateurs, confirmant expérimentalement le "choix différé" Gedankenexperiment de John Wheeler. Donc, le tout début de mon exposé fait référence au point souligné par Aspect sur la subtilité du concept de "réalité" impliquée par le quantique. La thèse que je défends brièvement est que le manque total de contrôle que nous avons sur le résultat d'une expérimentation quantique (nous ne contrôlons que les probabilités), est une "variabilité" plus primordiale que la variabilité classique régie par le temps qui passe (sur lequel nous n'avons aucun contrôle non plus). J'explique aussi brièvement pourquoi le temps émerge de la variabilité quantique. La partie finale, dans la session de questions, est également inhabituelle, c'est une longue réponse à une question posée par Alain Aspect.

Les trois intervenants, Lille 26 septembre : E. Ghys, A.Aspect, A. Connes
Mise à jour : Le discours d'Alain Aspect est désormais également disponible sur le site de la conférence https://www.youtube.com/watch?v=vqEg4VnoCmc.

Dimanche 9 Novembre 2014
PARTICULES EN GRAVITE QUANTIQUE
Le but de cet article est d'expliquer une découverte récente que nous avons faite avec mes deux collaborateurs physiciens Ali Chamseddine et Slava Mukhanov. Nous avons écrit un long article *Geometry and the Quantum : Basics* https://arxiv.org/abs/1411.0977 que nous avons mis sur l'arXiv, mais en quelque sorte je ressens le besoin d'expliquer le résultat en termes non techniques.

Le sujet est la notion de particule dans la gravité quantique. En physique des particules, il existe une notion bien acceptée de particule qui est la même que celle de représentation irréductible du Groupe de Poincaré. Il est donc naturel de penser que la notion de particule dans la gravité quantique impliquera des représentations irréductibles dans l'espace de Hilbert, et la question est "de quoi ?".

Ce que nous avons trouvé est une réponse candidate qui est un analogue de degré 4 de la relation de commutation canonique de Heisenberg $[p, q] = ih$. Le degré 4 est lié à la dimension de l'espace-temps. Le rôle de l'opérateur p est maintenant joué par l'opérateur de Dirac D. Le rôle de q est joué par la barre oblique de Feynman, de sorte que l'on applique la même recette aux variables spatiales qu'on le fait aux variables de moment. L'équation est alors de la forme $E(Z[D, Z]^4) = \gamma$ où γ est la chiralité et où le E d'un opérateur est sa projection sur le commutant des matrices gamma utilisées pour définir la barre oblique de Feynman.

Nos principaux résultats sont alors les suivants :

1) Chaque 4-variété M de spins (compact lisse connexe) apparaît comme une représentation irréductible de notre équation bilatérale.

2) L'algèbre générée par les champs coupés est l'algèbre des fonctions sur M avec des valeurs dans $A = M_2(H) \oplus M_4(C)$, qui est exactement l'algèbre légèrement non-commutative nécessaire pour produire la gravité couplée au modèle standard étendu au minimum à une théorie asymptotiquement libre.

3) La seule contrainte sur la métrique riemannienne de la 4-variété est que son volume est quantifié, ce qui signifie qu'il s'agit d'un entier (supérieur à 4) en unités de Planck.

Le résultat 1) est la conséquence de résultats profonds dans la théorie de l'immersion remontant aux travaux de Smale, mais aussi aux résultats géométriques sur la construction de 4-variétés comme couvertures ramifiées de la 4-sphère, où le résultat optimal est le résultat d'Iori et Piergallini affirmant que l'on peut toujours supposer que la ramification se produit sur des surfaces lisses et à 5 couches dans la couverture ramifiée. La dimension 4 apparaît comme la dimension critique car trouver une variété donnée comme une représentation irréductible nécessite de trouver deux cartes de la sphère de telle sorte que leurs ensembles singuliers ne se croisent pas. Dans la dimension n, les ensembles singuliers peuvent avoir (en vertu de l'analyse complexe) une dimension aussi petite que $n - 2$ (mais pas moins) et donc un argument de position générale fonctionne si $(n - 2) + (n - 2)$ est inférieur à n, tandis que $n = 4$ est la valeur critique.

Le résultat 2) est une conséquence de la classification des algèbres de Clifford. Lorsque vous travaillez en dimension 4, la sphère vit dans l'espace euclidien à cinq dimensions et pour écrire son équation comme la somme des carrés des cinq coordonnées, on a besoin de 5 matrices gamma. Les deux algèbres de Clifford $Cliff(+, +, +, +, +)$ et $Cliff(-, -, -, -, -)$ sont respectivement $M_2(H) + M_2(H)$ et $M_4(C)$. Ainsi prendre une représentation irréductible de chacune d'elles donne respectivement $M_2(H)$ et $M_4(C)$.

Le résultat 3) provient de la formule d'index en géométrie non-commutative. On montre que l'équation de degré 4 implique que le volume de la variété (qui est défini comme le terme principal des asymptotes de Weyl des valeurs propres de l'opérateur de Dirac) est la somme de deux indices de Fredholm et est donc un entier. Il s'appuie fortement sur la formule de l'indice de cohomologie cyclique et la détermination de la classe de Hochschild du caractère de Chern. Le grand avantage de 3) est que, comme le volume est quantifié, l'énorme terme cosmologique qui domine l'action spectrale est maintenant quantifié et n'interfère plus avec les équations de mouvement qui, c'est un résultat de notre collaboration de longue date avec Ali Chamseddine, ramènent aux équations d'Einstein couplées au modèle standard.

Le gros plus de 2) est que l'on comprend enfin le sens de l'étrange choix des algèbres qui semble être privilégié par nature : c'est le moyen le plus simple de remplacer un certain nombre de coordonnées par un seul opérateur. De plus, suite à notre collaboration avec Walter van Suijlekom, nous avons constaté que la légère extension du Modèle standard à un modèle de Pati-Salam donné par l'algèbre $M_2(H) \oplus M_4(C)$ améliore considérablement les choses du point de vue mathématique tout en rendant le modèle asymptotiquement libre ! (voir Au-delà du spectral modèle standard, émergence de l'unification Pati-Salam http://www.alainconnes.org/docs/beyond.pdf). Pour avoir une image mentale de la signification de 1), je vais essayer une image qui est venue progressivement pendant que nous travaillions sur le problème de la réalisation de toutes les 4-variétés à spin avec un volume quantifié arbitrairement grand comme solution à l'équation.

"*L'histoire euclidienne de l'espace-temps se déroule à la dimension macroscopique à partir du produit de deux 4-sphères du volume planckien tandis qu'un papillon se déploie de sa chrysalide.*"

Annexe : Section extraite des *Récoltes et semailles* de Grothendieck

Les motifs - ou le cœur dans le cœur

Le thème du topos est issu de celui des schémas, l'année même où sont apparus les schémas - mais en étendue il dépasse largement le thème-mère. C'est le thème du topos, et non celui des schémas, qui est ce "lit", ou cette "rivière profonde", où viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre, la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des structures "discontinues" ou "discrètes". Si le thème des schémas est comme le cœur de la géométrie nouvelle, le thème du topos en est l'enveloppe, ou la demeure. Il est ce que j'ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse, par un même langage riche en résonances géométriques, une "essence" commune à des situations des plus éloignées les unes des autres, provenant de telle région ou de telle autre du vaste univers des choses mathématiques.

Ce thème du topos est très loin pourtant d'avoir connu la fortune de celui des schémas. Je m'exprime à ce sujet en diverses occasions dans Récoltes et Semailles, et ce n'est pas le lieu ici de m'attarder sur les vicissitudes étranges qui ont frappé cette notion. Deux des maîtres-thèmes de la géométrie nouvelle sont pourtant issus de celui du topos, deux "théories cohomologiques" complémentaires, conçues l'une et l'autre aux fins de fournir une approche vers les conjectures de Weil : le thème étale (ou "ℓ-adique"), et le thème cristallin. Le premier s'est concrétisé entre mes mains en l'outil cohomologique ℓ-adique, qui dès à présent apparaît comme un des plus puissants outils mathématiques du siècle. Quant au thème cristallin, réduit après mon départ à une existence quasi-occulte, il a finalement été exhumé (sous la pression des besoins) en juin 1981, sous les feux de la rampe et sous un nom d'emprunt, dans des circonstances plus étranges encore que celles autour des topos.

L'outil cohomologique ℓ-adique a été, comme prévu, l'outil essentiel pour établir les conjectures de Weil. J'en ai démontré moi-même un bon paquet, et le dernier pas a été accompli avec maestria, trois ans après mon départ, par Pierre Deligne, le plus brillant de mes élèves "cohomologistes".

J'avais d'ailleurs dégagé, vers l'année 1968, une version plus forte et surtout, plus "géométrique" des conjectures de Weil. Celles-ci restaient "entachées" (si on peut dire !) d'un aspect "arithmétique" apparemment irréductible, alors pourtant que l'esprit même de ces conjectures est d'exprimer et de saisir "l'arithmétique" (ou "le discret") par la médiation du "géométrique" (ou du "continu") [4]. En ce sens, la version des conjectures que j'avais dégagée me paraît plus "fidèle" que celle de Weil lui-même à la "philosophie de Weil" - à cette philosophie non écrite et rarement dite, qui a été peut-être la principale motivation tacite dans l'extraordinaire essor de la géométrie au cours des quatre décennies écoulées [5]. Ma reformulation a consisté, pour l'essentiel, à dégager une sorte de "quintessence" de ce qui devait rester valable, dans le cadre des variétés algébriques dites "abstraites", de la classique "théorie de Hodge", valable pour les variétés algébriques "ordinaires" [6]. J'ai appelé "conjectures standard" (pour les cycles algébriques) cette nouvelle version, entièrement géométrique, des fameuses conjectures.

Dans mon esprit, c'était là un nouveau pas, après le développement de l'outil cohomologique ℓ-adique, en direction de ces conjectures. Mais en même temps et surtout, c'était aussi un des principes d'approche possibles vers ce qui m'apparaît encore comme le thème le plus profond que j'aie introduit en mathématique [7] : celui des motifs (lui-même né du "thème cohomologique ℓ-adique"). Ce thème est comme le cœur ou l'âme, la partie la plus cachée, la mieux dérobée au regard, du thème schématique, qui lui-même est

4. (A l'intention du mathématicien) Les conjectures de Weil sont subordonnées à des hypothèses de nature "arithmétique", du fait notamment que les variétés envisagées doivent être définies sur un corps fini. Du point de vue du formalisme cohomologique, cela conduit à donner une place à part à l'endomorphisme de Frobenius associé à une telle situation. Dans mon approche, les propriétés cruciales (type "théorème de l'index généralisé") concernent les correspondances algébriques quelconques, et ne font aucune hypothèse de nature arithmétique sur un corps de base préalablement donné.

5. Il y a eu cependant, après mon départ en 1970, un mouvement de réaction très nette, lequel s'est concrétisé par une situation de stagnation relative, que j'ai occasion plus d'une fois d'évoquer dans les lignes de Récoltes et Semailles.

6. "Ordinaire" signifie ici : "définie sur le corps des complexes". La théorie de Hodge (dite "des intégrales harmoniques") était la plus puissante des théories cohomologiques connues dans le contexte des variétés algébriques complexes.

7. C'est le thème le plus profond, tout au moins dans la période "publique" de mon activité de mathématicien, entre 1950 et 1969, c'est-à-dire jusqu'au moment de mon départ de la scène mathématique. Je considère le thème de la géométrie algébrique anabélienne et de la théorie de Galois-Teichmüller, développé à partir de 1977, comme étant d'une profondeur comparable.

au cœur de la vision nouvelle. Et les quelques phénomènes-clef dégagés dans les conjectures standard [8] peuvent être vus comme formant une sorte de quintessence ultime du thème motivique, comme le "souffle" vital de ce thème subtil entre tous, de ce "cœur dans le cœur" de la géométrie nouvelle.

Voici en gros de quoi il s'agit. Nous avons vu, pour un nombre premier p donné, l'importance (en vue notamment des conjectures de Weil) de savoir construire des "théories cohomologiques" pour les "variétés (algébriques) de caractéristique p". Or, le fameux "outil cohomologique ℓ-adique" fournit justement une telle théorie, et même une infinité de théories cohomologiques différentes, à savoir une associée à tout nombre premier différent de la caractéristique p. Il y a là encore visiblement, une "théorie qui manque", qui correspondrait au cas d'un ℓ qui serait égal à p. Pour y pourvoir, j'ai imaginé tout exprès une autre théorie cohomologique encore à laquelle il a été déjà fait allusion tantôt), dite "cohomologie cristalline". D'ailleurs, dans le cas important où p est infini, on dispose de trois autres théories cohomologiques encore [9] - et rien ne prouve qu'on ne sera conduit, tôt ou tard, à introduire encore de nouvelles théories cohomologiques, ayant des propriétés formelles toutes analogues. Contrairement à ce qui se passait en topologie ordinaire, on se trouve donc placé là devant une abondance déconcertante de théories cohomologiques différentes. On avait l'impression très nette qu'en un sens qui restait d'abord assez flou, toutes ces théories devaient "revenir au même", qu'elles "donnaient les mêmes résultats" [10]. C'est pour parvenir à exprimer cette intuition de "parenté" entre théories cohomologiques différentes, que j'ai dégagé la notion de "motif" associé à une variété algébrique. Par ce terme, j'entends suggérer qu'il s'agit du "motif commun" (ou de la "raison commune") sous-jacent à cette multitude d'invariants cohomologiques différents associés à la variété, à l'aide de la multitude de toutes les théories cohomologiques possibles à priori. Ces différentes théories cohomologiques seraient comme autant de développements thématiques différents, chacun dans le "tempo", dans la "clef" et dans le "mode" ("majeur" ou "mineur") qui lui est propre, d'un même "motif de base" (appelé "théorie cohomologique motivique"), lequel serait en même temps la plus fondamentale, ou la plus "fine", de toutes ces "incarnations" thématiques différentes (c'est-à-dire, de toutes ces théories cohomologiques possibles). Ainsi, le motif associé à une variété algébrique constituerait l'invariant cohomologique "ultime", "par excellence", dont tous les autres (associés aux différentes théories cohomologiques possibles) se déduiraient, comme autant d'"incarnations" musicales, ou de "réalisations" différentes. Toutes les propriétés essentielles de "la cohomologie" de la variété se "liraient" (ou s'"entendraient") déjà sur le motif correspondant, de sorte que les propriétés et structures familières sur les invariants cohomologiques particularisés (ℓ-adique ou cristallins, par exemple), seraient simplement le fidèle reflet des propriétés et structures internes au motif [11].

---

8. (A l'intention du lecteur géomètre algébriste) Il y a lieu, éventuellement, de reformuler ces conjectures. Pour des commentaires plus circonstanciés, voir "Le tour des chantiers" (ReS IV note n° 178, p. ... (chercher Chantier 6)) et la note de b. de p. dans "Conviction et connaissance" (ReS III, note n° 162).

9. (A l'intention du lecteur mathématicien) Ces théories correspondent respectivement à la cohomologie de Betti (définie par voie transcendante, à l'aide d'un plongement du corps de base dans le corps des complexes), à la cohomologie de Hodge (définie par Serre) et à la cohomologie de De Rham (définie par moi), ces deux dernières remontant déjà aux années cinquante (et celle de Betti, au siècle dernier).

10. (A l'intention du lecteur mathématicien) Par exemple, si f est un endomorphisme de la variété algébrique X, induisant un endomorphisme de l'espace de cohomologie $H^i(X)$, le "polynôme caractéristique" de ce dernier devait être à coefficients entiers, ne dépendant pas de la théorie cohomologique particulière choisie (par exemple : ℓ-adique, pour ℓ variable). Itou pour des correspondances algébriques générales, quand X est supposée propre et lisse. La triste vérité (et qui donne une idée de l'état de lamentable abandon de la théorie cohomologique des variétés algébriques en caractéristique $p > 0$, depuis mon départ), c'est que la chose n'est toujours pas démontrée à l'heure actuelle, même dans le cas particulier où X est une surface projective et lisse et $i = 2$. En fait, à ma connaissance, personne après mon départ n'a encore daigné s'intéresser à cette question cruciale, typique de celles qui apparaissent comme subordonnées aux conjectures standard. Le décret de la mode, c'est que le seul endomorphisme digne d'attention est l'endomorphisme de Frobenius (lequel a pu être traité à part par Deligne, par les moyens du bord...).

11. (A l'intention du lecteur mathématicien) Une autre façon de voir la catégorie des motifs sur un corps k, c'est de la visualiser comme une sorte de "catégorie abélienne enveloppante" de la catégorie des schémas séparés de type fini sur k. Le motif associé à un tel schéma X (ou "cohomologie motivique de X", que je note $H^*_{mot}(X)$) apparaît ainsi comme une sorte d'"avatar" abélianisé de X. La chose cruciale ici, c'est que, tout comme une variété algébrique X est susceptible de "variation continue" (sa classe d'isomorphie dépend donc de "paramètres" continus, ou "modules"), le motif associé à X, ou plus généralement, un motif "variable", est lui aussi susceptible de variation continue. C'est là un aspect de la cohomologie motivique, qui est en contraste frappant avec ce qui se passe pour tous les invariants cohomologiques classiques, y compris les invariants ℓ-adique, à la seule exception de la cohomologie de Hodge des variétés algébriques complexes. Ceci donne une idée à quel point la "cohomologie motivique" est un invariant plus fin, cernant de façon beaucoup plus serrée la "forme arithmétique" (si j'ose hasarder cette expression) de X, que les invariants purement topologiques traditionnels. Dans ma vision des motifs, ceux-ci constituent une sorte de "cordon" très caché et très délicat, reliant les propriétés algébro-géométriques d'une variété algébrique, à des propriétés de nature "arithmétique" incarnées par son motif. Ce dernier peut être considéré comme un objet de nature "géométrique" dans son esprit même, mais où les propriétés "arithmétiques" subordonnées à la géométrie se trouvent, pour ainsi dire, "mises à nu". Ainsi, le motif m'apparaît comme le plus profond "invariant de la forme" qu'on a su associer jusqu'à présent à une variété algébrique, mis à part son "groupe fondamental motivique". L'un et l'autre invariant représentent pour moi comme les "ombres" d'un "type d'homotopie motivique" qui resterait à décrire (et sur lequel je dis quelques mots en passant dans la note "Le tour des chantiers - ou outils et vision" (ReS IV, n° 178, voir chantier 5 (Motifs),

C'est là, exprimé dans le langage non technique d'une métaphore musicale, la quintessence d'une idée d'une simplicité enfantine encore, délicate et audacieuse à la fois. J'ai développé cette idée, en marge des tâches de fondements que je considérais plus urgentes, sous le nom de "théorie des motifs" ou de "philosophie (ou "yoga") des motifs", tout au long des années 1963-69. C'est une théorie d'une richesse structurale fascinante, dont une grande partie est restée encore conjecturale [12].

Je m'exprime à diverses reprises dans Récoltes et Semailles au sujet de ce "yoga des motifs", qui me tient particulièrement à cœur. Ce n'est pas le lieu de revenir ici sur ce que j'en dis ailleurs. Qu'il me suffise de dire que les "conjectures standard" découlent le plus naturellement du monde de ce yoga des motifs. En même temps elles fournissent un principe d'approche pour une des constructions en forme possibles de la notion de motif.

Ces conjectures m'apparaissaient, et m'apparaissent aujourd'hui encore, comme l'une des deux questions les plus fondamentales qui se posent en géométrie algébrique. Ni cette question, ni l'autre question tout aussi cruciale (celle dite de la "résolution des singularités") n'est encore résolue à l'heure actuelle. Mais alors que la deuxième de ces questions apparaît, aujourd'hui comme il y a cent ans, comme une question prestigieuse et redoutable, celle que j'ai eu l'honneur de dégager s'est vue classer par les péremptoires décrets de la mode (dès les années qui ont suivi mon départ de la scène mathématique, et tout comme le thème motivique lui-même [13]) comme aimable fumisterie grothendieckienne. Mais encore une fois j'anticipe...

---

et notamment p. ...)). C'est ce dernier objet qui me semble devoir être l'incarnation la plus parfaite de l'élusive intuition de "forme arithmétique" (ou "motivique") d'une variété algébrique quelconque.

12. J'ai expliqué ma vision des motifs à qui voulait l'entendre, tout au long de ces années, sans prendre la peine de rien publier à ce sujet noir sur blanc (ne manquant pas d'autres tâches au service de tous). Cela a permis plus tard à certains de mes élèves de piller plus à l'aise, sous l'œil attendri de l'ensemble de mes anciens amis, bien au courant de la situation (Voir note de b. de p. qui suit.).

13. En fait, ce thème a été exhumé en 1982 (un an après le thème cristallin), sous son nom d'origine cette fois (et sous une forme étriquée, dans le seul cas d'un corps de base de caractéristique nulle), sans que le nom de l'ouvrier ne soit prononcé. C'est là un exemple parmi un nombre d'autres, d'une notion ou d'un thème enterré aux lendemains de mon départ comme des fantasmagories grothendieckiennes, pour être exhumés l'un après l'autre par certains de mes élèves au cours des dix ou quinze années suivantes, avec une fierté modeste et (est-il besoin encore de le préciser) sans mention de l'ouvrier...