Un topo sur les topos
Alain Connes

Résumé : Alain Connes présente la démarche intellectuelle qui a mené Alexandre Grothendieck, à partir d'une "emmerdante" rédaction qu'il devait faire pour Bourbaki sur l'algèbre homologique, à découvrir et mettre au point la notion de topos et il essaie d'expliquer en quel sens cette notion a une portée considérable grâce en particulier aux nuances qu'elle introduit entre le vrai et le faux (organisateur du séminaire : Frédéric Jaëck (ENS), transcription : Denise Vella-Chemla)

Donc j'espère que je resterai dans l'esprit du séminaire et je pense que l'esprit du séminaire, c'est Grothendieck, avant tout. Donc ce que je vais faire, c'est essayer de m'effacer le plus possible devant Grothendieck et essayer d'expliquer justement, comme je le disais dans mon abstract, le parcours qui l'a amené aux topos, et surtout, je vais essayer de vous donner une métaphore éclairante pour ce que c'est qu'un topos, et vous expliquer ce qu'il y a d'extraordinaire dans cette découverte, au sens, surtout pour les philosophes, au sens où ça introduit des nuances considérables dans la notion de vérité. J'essaierai d'expliquer cela par un exemple, parce que rien de tel qu'un bon exemple pour expliquer. Il y aura l'un de mes slides qui s'appelle "à deux pas de la vérité" et je vais vraiment vous donner un exemple d'un topos qui permet de dire qu'on est par exemple à 10 pas de la vérité, ou qu'on est à 15 pas de la vérité, etc. Donc écoutez bien. Je vous ferai entendre Grothendieck, la voix de Grothendieck, parce que Grothendieck a fait 100 heures de conférences à Buffalo en 1973, et dans ces 100 heures de conférence, il y a des choses qui nous intéressent. Bien sûr, je ne vous le ferai pas écouter longtemps mais je le ferai écouter à un moment-donné, où il explique ce que c'est qu'un faisceau à des gens qui ne connaissent pas du tout. Et il explique comment il va faire son cours sur les topos. On verra, il y aura aussi un intermède encore plus marrant à un moment-donné, on n'entendra pas la voix de Grothendieck mais on entendra la voix d'Yves Montand. Vous verrez, enfin, vous entendrez tout ça.

Donc la première image que je vous montre, c'est une image que je dois à Charles Alunni qui m'a envoyé un email un jour en me disant qu'il aurait bien voulu avoir la deuxième thèse de Grothendieck. Mais à l'époque, quand on faisait une thèse, quand j'ai fait ma thèse par exemple, il y avait toujours une deuxième thèse. Cette deuxième thèse n'était pas écrite. C'était une deuxième thèse qu'on devait défendre devant le jury. Et on avait un sujet qui nous était donné. Ce qui est assez extraordinaire, c'est que dans le cas de Grothendieck, il a fait sa thèse sur les espaces nucléaires, sur les espaces vectoriels topologiques et sur les espaces nucléaires, et il a fait une contribution fondamentale à l'analyse fonctionnelle et ce qui est extraordinaire, c'est qu'on peut penser que ce qui a fait bifurquer Grothendieck, et qui éventuellement l'a amené à l'idée du topos, à cette idée merveilleuse, c'est sa deuxième thèse. Pourquoi ? Parce que la deuxième thèse de Grothendieck, c'est écrit dans ce texte, elle est sur la théorie des faisceaux.

Et alors sur cette page, si vous êtes perspicace, vous allez trouver qu'il y a une erreur, ce qui montre qu'on n'est jamais à l'abri des erreurs. Parce qu'il y a un des examinateurs, si vous regardez bien, qui s'appelle *Georges* Choquet *(rires)* Alors j'ai cherché, pour dire peut-être que je me suis trompé, il y a 3 examinateurs, il y a Henri Cartan, il y a Laurent Schwartz et puis il y a *Georges* Choquet. Alors j'ai cherché sur wikipedia pour voir s'il n'y avait pas un mathématicien qui s'appelait Georges Choquet. En fait, non, il y a un ecclésiastique qui s'appelait Georges Choquet et qui est mort pendant la deuxième guerre mondiale. Donc il n'y a pas de problème, c'est bien une erreur, et c'est bien Gustave Choquet qui était l'examinateur de Grothendieck. Donc sa thèse il l'a passée en 53.

Et déjà en 55, il s'intéressait bien sûr aux faisceaux, qui était une découverte merveilleuse de Leray. Et donc là, j'ai commencé par quelques échanges de lettres entre Serre et Grothendieck parce que finalement, c'est dans ces échanges de lettres que l'on voit apparaître ce qu'on appelle l'article qui est tellement fameux qu'on l'appelle Le Tohoku cet article. Cet article est paru dans un journal qui s'appelle le Tohoku Maths Journal mais l'article est tellement fameux qu'en fait, on l'appelle Tohoku.

Donc voilà ce que dit Grothendieck ; il dit :

"Mon Cher Serre,
Merci pour les divers papiers que généreusement tu m'as envoyés, ainsi que pour ta lettre. Rien de neuf de mon côté."

Conférence d'Alain Connes, le 7 novembre 2017, dans le cadre du séminaire "Lectures grothendieckiennes" de l'ENS, visionnable ici http://savoirs.ens.fr/expose.php?id=3257.

Alors ça, ça justifie ce que j'ai écrit quand j'ai annoncé mon laïus :

"J'ai fini mon emmerdante rédaction d'algèbre homologique."

Alors on va voir très graduellement quelle est la philosophie que Grothendieck utilise tout le temps quand il travaille, c'est-à-dire qu'il n'hésite jamais devant une tâche que n'importe quel mathématicien normal considérerait comme étant sans intérêt, rébarbative, n'allant rien lui rapporter. Donc il continue :

"... que j'ai envoyée à Delsarthe qui manquait de la rédaction pour la dactylo."

Il dit :

"Je l'ai proposée à Tannaka pour le Tohoku."

Le Tohoku, c'est le Tohoku Maths Journal.

"Il paraît que les articles-fleuve ne les rebutent pas."

Alors il est vrai que Grothendieck, en général, quand il écrit, le minimum, c'est au moins 100 pages. Ensuite, il parle de Weil. Je vais vous épargner ce qu'il en dit parce qu'il dit :

"J'ai lu au moins les énoncés des livres de Weil sur les variétés abéliennes dans l'espoir qu'on a arrangé depuis les démonstrations vraiment décourageantes chez Weil, son langage me dégoûte."...

En plus ! *(Rires)* Je passe... Il dit :

"Je passe mon temps soit à apprendre, soit à rédiger les variétés. C'est amusant mais long bien sûr, mais il n'est pas question de recherche avant d'avoir avalé une montagne de choses nouvelles."

Alors ensuite, très important, c'est sans doute la chose la plus importante dans cet échange, il dit à un moment-donné :

"Je me suis aperçu qu'en formulant la théorie des foncteurs dérivés pour des catégories plus générales que les modules..."

(il faut dire qu'à l'époque, il y avait le livre de Cartan-Eilenberg qui était en gestation, Serre l'appelle le Cartan-Sammy - parce que c'est Sammy Eilenberg - et dans ce livre, il y avait bien-sûr les foncteurs dérivés mais c'était toujours appliqué à des catégories de modules. C'est-à-dire qu'on prenait la catégorie des modules sur un anneau non nécessairement commutatif et toute l'algèbre homologique était développée comme ça. Mais évidemment, elle était très analogue dans sa formulation avec ce qui se passait pour la cohomologie à coefficients dans un faisceau. Donc ce que dit Grothendieck, c'est :

"Je me suis aperçu qu'en formulant la théorie des foncteurs dérivés pour des catégories plus générales que les modules, on obtient à peu de frais la cohomologie des espaces à coefficients dans un faisceau."

Il faut savoir qu'à l'époque, quand on prenait la cohomologie à coefficients dans un faisceau, c'était toujours la cohomologie de Čech. C'est à dire qu'on prenait des recouvrements de l'espace topologique, et puis on fabriquait un complexe ou un bi-complexe avec ces recouvrements et on définissait la cohomologie comme ça. Voilà.

Donc voilà ce qu'il dit, et ce point-là, dans sa correspondance, c'est un point absolument essentiel. Alors ensuite, il continue, et donc ça, c'est une lettre du 4 juin 1955, donc on est 2 ans après sa thèse, donc :

"Ci-joint le résultat de mes premières cogitations en forme, sur les fondements d'algèbre homologique."

Donc après, je ne vous détaille pas le reste puisque c'est sur des suites spectrales, etc. Mais disons que là, Grothendieck explique qu'il s'était planté sur l'existence de suffisamment de faisceaux projectifs mais à ce moment-là, il a démontré qu'il y avait suffisamment de faisceaux injectifs, et ça lui a permis de définir les foncteurs dérivés et ça lui a permis de définir, si vous voulez, la cohomologie à coefficients dans un faisceau sans hypothèse sur l'espace topologique. Si on a de bonnes hypothèses sur l'espace topologique, à ce moment-là, ça coïncide avec la cohomologie de Čech. Mais ça n'est pas vrai en général. Alors voilà la réponse de Serre. Donc là, il y avait autre chose dans la correspondance, il y avait autre chose qui était ce qu'on appelle l'Im_1, c'est à dire le foncteur pour les limites projectives, comment ça commute avec la cohomologie. Mais ce qu'il faut lire, c'est le deuxième paragraphe.

"Le fait que la cohomologie d'un faisceau soit un cas particulier des foncteurs dérivés, au moins dans le cas para-compact..."

(parce que dans le cas para-compact, ça coïncide avec la cohomologie de Čech, donc celle qui est définie à partir des recouvrements)

"...n'est pas dans Cartan-Sammy."

(Cartan-Sammy, c'est Cartan-Eilenberg)

"Cartan en avait conscience."

Donc, Cartan avait conscience du fait que, quand ils avaient développé avec Eilenberg toute la théorie cohomologique sur les modules, il avait conscience bien-sûr de l'analogie avec le cas de la cohomologie des faisceaux, mais bon, ils n'avaient pas voulu s'embarrasser pour le faire dans leur livre, et Cartan en avait conscience et avait dit à Buchsbaum de s'en occuper. Donc c'est Buchsbaum en fait qui, indépendamment de Grothendieck, a aussi défini les catégories abéliennes. Il avait commencé à le développer mais il ne s'était pas occupé de la cohomologie.

"Mais il ne me semble pas que celui-ci l'ait fait. Donc l'intérêt de ceci serait de voir quelles sont au juste les propriétés des faisceaux fins qu'il faut utiliser. Ainsi on pourrait peut-être se rendre compte si oui ou non..."

(c'est Serre qui parle, bien sûr)

"... il y a suffisamment de faisceaux fins dans le cas non-séparé.".

Alors le cas non-séparé est extrêmement important bien sûr pour la géométrie algébrique et c'était à un moment où justement, Serre développait la géométrie algébrique à partir de la théorie des faisceaux de Leray en prenant au départ la topologie de Zariski et la topologie de Zariski, elle n'est pas séparée. Je veux dire, donc, on a exactement ce problème-là. Donc cet échange est extrêmement important, c'est un échange qui date de l'année 55. Et l'article de Grothendieck donc, il est marqué *Reçu* 1er *mars 1957*, donc c'est cet article *"Sur quelques points d'algèbre homologique"* qui est vraiment l'ancêtre, on peut vraiment placer, si vous voulez, l'origine des topos dans cet article.

La raison pour laquelle on peut placer l'origine des topos dans cet article, c'est que dans cet article, d'abord, bien sûr, il introduit ce que sont les catégories abéliennes. Donc ça, c'est extrêmement important, avec toutes leurs propriétés, etc. Il développe l'algèbre homologique dans le cadre des catégories abéliennes. Donc ça, c'est ce qu'il fait. Mais, ce qui est beaucoup plus important, c'est qu'il prend deux types d'exemples, dans son article, de catégories abéliennes. Le premier exemple de catégorie abélienne qu'il prend, c'est la catégorie abélienne des modules sur un anneau. Ca, ça appartient à Cartan-Eilenberg. Là-dessus, il n'y a pas de problème, mais il prend aussi l'exemple des faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique, bien entendu ; là encore, pas de surprise puisque c'était pour unifier les 2 qu'il avait fait son travail de généralisation. Mais ce qui est absolument crucial, c'est qu'il avait un autre exemple en tête, un troisième exemple en tête, et c'est ce qu'il appelait les catégories de diagrammes. C'est-à-dire, ce qu'il faisait, c'était qu'il avait l'idée que si vous prenez des diagrammes de groupes abéliens, mais quels que soient les diagrammes que vous regardiez, eh bien, ça, ça forme encore une catégorie abélienne. Eh bien, en fait, si on pense juste, on s'aperçoit qu'il avait là les deux piliers de la notion de topos. C'est-à-dire qu'il avait la notion d'espace topologique, qui donne la notion de faisceaux de groupes abéliens, etc., et il avait aussi la notion de catégories de diagrammes et on verra que ces catégories-là, elles donnent naissance à un topos. Et ces topos ont un rôle absolument fondamental qu'on va utiliser tout le temps, tout le temps, tout le temps.

Alors, il y a une chose qui est à remarquer : il définit ce que c'est qu'une catégorie abélienne. Donc ce que dit Grothendieck, c'est qu'une catégorie abélienne, c'est une catégorie additive. Alors je vais vous expliquer en deux mots l'erreur qu'on a sur la catégorie additive qui satisfait aux deux axiomes supplémentaires suivants : alors, il y a le fait qu'un morphisme doit avoir un noyau et un co-noyau, ça, c'est une notion abstraite, si vous ne la connaissez pas, bon, ça prendrait un certain temps, c'est un peu une gymnastique, et la deuxième condition, c'est le fait d'être un morphisme exact. C'est-à-dire le fait que si vous divisez par le noyau et si vous regardez par rapport à ce qu'on appelle l'image en la définissant par rapport au co-noyau, eh bien, à ce moment-là, vous avez un isomorphisme entre le quotient par le noyau et l'image. Et ça, c'est extrêmement important, ce n'est pas vrai pour des applications dans des espaces topologiques par exemple, si vous prenez un espace de Hilbert et si vous prenez les applications linéaires continues dans l'espace de Hilbert, ça ne vérifie pas ces deux conditions. Ça n'est pas une catégorie abélienne et la raison, c'est que vous pouvez avoir un morphisme qui a une image, mais il est dense dans son image et son image n'est pas fermée et à ce moment-là, la deuxième condition AB2 n'aura pas lieu.

Alors il y a une erreur que Grothendieck reproduit quand il définit les catégories additives dans son article et qui est la chose suivante : c'est qu'en général, les gens définissent une catégorie additive en disant "une catégorie additive, c'est une catégorie où on rajoute une structure supplémentaire qui est la structure de groupe additif sur les morphismes." Eh bien, c'est une hérésie. Je vais vous expliquer pourquoi : parce qu'en fait, ça n'est pas du tout une structure supplémentaire. Et il y a un exercice dans MacLane que je vous ai noté là qui montre que c'est une hérésie. Quelle est cette hérésie ? L'hérésie est que quand vous prenez une catégorie comme une catégorie abélienne, elle a des produits et des co-produits. Ca, c'est une chose très simple. Et elle a un objet qui est à la fois initial et final, c'est l'objet 0 ; dans les groupes abéliens, c'est le groupe qui est réduit à 0. D'accord ? C'est un objet initial parce que vous avez une seule flèche qui va de 0 vers n'importe quel groupe abélien, et c'est un objet final parce que vous avez une seule flèche qui va d'un groupe abélien vers 0. Tout s'envoie vers 0. Donc il y a un objet qui est à la fois initial et final. Eh bien, si vous avez ça, vous pouvez dire, quand la catégorie est abélienne. Comment ?

Eh bien, parce que ce qui se produit, vous avez une flèche complètement canonique, complètement naturelle, qui va du coproduit de deux objets vers le produit de deux objets. Parce qu'en utilisant le 0, vous pouvez envoyer la moitié sur 0 et l'autre moitié sur 0 et à ce moment-là, vous avez une flèche qui est complètement naturelle. Si vous demandez si cette flèche est un isomorphisme, vous avez fait la moitié du parcours. Parce que comme cela est expliqué dans ce texte de MacLane, à ce moment-là, vous avez une addition pour les morphismes. Simplement en utilisant le fait que cette flèche naturelle qui va du coproduit vers le produit est un isomorphisme. Vous avez une addition naturelle pour les morphismes et une fois que vous avez cette addition naturelle, vous pouvez prendre l'axiome supplémentaire qu'il y a un signe moins, si vous voulez, pour cette addition, bien sûr en général, vous n'aurez pas un signe moins, c'est ce qu'on appelle les catégories semi-additives, elles sont très intéressantes, mais une catégorie additive, vous demandez simplement qu'il y ait un inverse. Et alors, donc, ça n'est pas une structure supplémentaire. C'est une hérésie de croire qu'une catégorie additive est donnée par une catégorie + une structure supplémentaire. Ça n'est pas vrai. Donc c'est une erreur.

Alors, maintenant, je vais vous lire du Grothendieck, puisque le principe du séminaire est de s'effacer devant Grothendieck. Et même à un moment-donné, on va l'écouter. Et puis lorsqu'on aura lu et écouté suffisamment Grothendieck, là, je prendrai une métaphore, puis on verra un exemple. D'accord, donc soyez patients, je ne vais pas faire que lire ou vous faire écouter du Grothendieck, il faut être patient, mais écoutons-le quand-même. Voilà ce qu'il dit :

"Le point de vue et le langage des faisceaux introduit par Leray nous a amené à regarder les "espaces" et "variétés" en tous genres dans une lumière nouvelle. Ils ne touchaient pas, pourtant, à la notion même d'espace..."

Donc ce que dit Grothendieck, c'est que Leray avait envisagé un espace sous la forme des faisceaux sur cet espace, mais en fait, d'ailleurs, Leray ne considérait que les faisceaux de groupes abéliens. Et on va voir le changement que Grothendieck a apporté déjà même là.

"Ils ne touchaient pas, pourtant, à la notion même d'espace, se contentant de nous faire appréhender plus finement, avec des yeux nouveaux, ces traditionnels "espaces", déjà familiers à tous. Or, il

s'est avéré que cette notion d'espace est inadéquate pour rendre compte des "invariants topologiques" les plus essentiels qui expriment la "forme" des variétés algébriques "abstraites" (comme celles auxquelles s'appliquent les conjectures de Weil), voire celle des "schémas" généraux..."

Alors là, c'est le moment où je vais vous faire entendre Grothendieck. Pourquoi, parce qu'on va entendre Grothendieck qui définit ce que c'est qu'un faisceau. Donc, je pense que c'est important que vous l'écoutiez, d'accord, parce que vous ne savez pas forcément ce que c'est qu'un faisceau, on va écouter Grothendieck en parler, d'accord, et une fois qu'on aura écouté Grothendieck en parler, on reviendra à nos moutons. C'est le début de ses conférences à Buffalo.

"Depuis des années, les topoi sont essentiellement des objets de la topologie générale. Je veux dire qu'un topos peut être considéré comme l'objet d'étude principal de la topologie. Et donc, les topoi sont la généralisation de la topologie générale classique. Je vais considérer... Disons que leur étude nécessite une certaine familiarité avec la manipulation des espaces topologiques, des cartes, des homomorphismes, etc., et d'autre part une familiarité avec le langage des catégories... Plus tard, nous parlerons d'exponentiations et je donnerai des exemples. Mais pour comprendre... ce que signifie le terme topos, il faudrait une certaine familiarité avec le langage des faisceaux sur un espace topologique. Je pense que ces notions ne sont pas très familières à tout le monde, donc je pense que je donnerai plutôt quelques notions d'introduction sur les faisceaux sur un espace topologique. Je veux supposer que l'on sait tout à ce sujet. Je passerai en revue une "faisceau-machinerie" standard... J'espère que si certaines explications ne sont pas claires, ou si certains commentaires viennent, vous m'interromprez librement pour poser des questions, pour signaler des erreurs ou pour faire tout type de commentaires. Ce serait bien si, au fur et à mesure, il y avait une sorte de participation du public, je suis sûr qu'un certain nombre d'entre vous ont quelques notions sur les topoi... Vous pourrez faire des suggestions et commentaires.

Je commence donc par une sorte d'étude formelle des faisceaux sur un espace topologique. Soit X un espace topologique, et considérons l'ensemble $O(X)$, il dépend de X, de tous les sous-ensembles ouverts de X. La topologie de X est définie en fonction des familles de sous-ensembles ouverts de X qui est un sous-ensemble des $Parties(X)$. Je rappelle l'axiome de la topologie qui est que $O(X)$ doit être stable par des unions arbitraires et par des intersections finies. Donc $O(X)$ en particulier est un ensemble ordonné par inclusion et tout cela définit une catégorie par abus de langage. Si U et V sont des éléments de $O(X)$, sont des ensembles ouverts sur X, l'ensemble des homomorphismes de U vers V sera soit l'ensemble vide si U n'est pas contenu dans V et peut être réduit à l'inclusion de U dans V, si U est contenu dans V ; c'est la définition du vide et de la composition des flèches ... Il doit y avoir au plus une flèche d'un objet à un autre. Donc, cette construction d'une catégorie en termes d'ensembles ouverts est logique pour tout ouvert que ce soit. Donc, la catégorie qui se comporte comme ... flèches du graphe de toutes les relations ... Maintenant, définissons d'abord les pré-faisceaux : un pré-faisceau sur X, disons f, est par définition un foncteur qui va de la catégorie $O(X)$ dans la catégorie des ensembles, quand je dis un pré-faisceau, je veux dire un pré-faisceau d'ensembles, plus tard, nous verrons d'autres types de pré-faisceaux. Mais ça devrait être un foncteur contravariant ... C'est un foncteur qui va de la catégorie opposée à $O(x)$ à la catégorie des ensembles, rappelons donc ce que cela signifie pour un foncteur : tout d'abord, cela signifie pour les objets de $O(X)$, pour chaque ensemble ouvert, $U(X)$, nous associons un objet fU de la catégorie des ..., (Remarque d'Alain Connes : ce qui est très important, c'est qu'il parle de faisceaux d'ensembles, et Leray parlait de faisceaux de groupes abéliens.) *C'est une flèche entre des catégories, cela signifie que pour chaque carte d'inclusion de U dans V deux ensembles ouverts, nous associons une carte de fV dans fU ..., cette carte sera appelée la carte de restriction, correspondant aux pré-faisceaux, et les axiomes sont les axiomes évidents de la transitivité, c'est-à-dire que si nous avons V qui est contenu dans un autre ensemble ouvert W, alors nous aurons une carte de restriction de fV à fW mais aussi de fW à fV et nous voulons que la restriction de fW à fU... soit la composition ici et d'ailleurs nous voulons que dans le cas où nous prenons l'identité, la flèche d'identité de U dans U, on veut que la carte correspondante fU qui passe à fU soit l'identité... comme des cartes de foncteurs ... Donc un pré-faisceau sur f n'est qu'un foncteur contravariant de la catégorie $O(X)$ vers les ensembles. Et la catégorie des pré-faisceaux sur X, appelons-la $PreFaisceaux(X)$, est définie comme étant la catégorie de tous les foncteurs de $\dot{O}$ aux ensembles. Ainsi, les pré-faisceaux peuvent être considérés comme des objets d'une catégorie, la catégorie des pré-faisceaux, dans la catégorie des foncteurs. Alors qu'est-ce qu'un homomorphisme d'un pré-faisceau f vers un autre g, par définition des homomorphismes de foncteurs. Prenons f un tel homomorphisme. Par définition, f consiste en une connexion de cartes de fU vers gU, nous appelons cette carte $f(U)$ pour chaque objet U de la catégorie de tous les sous-ensembles ouverts de X, et ces cartes d'ensembles seront compatibles avec les cartes de restriction, ce qui signifie que chaque fois que U est contenu dans un ensemble ouvert V, alors* *nous avons aussi fV qui va dans gV par f de V et nous avons les cartes de restriction ici, de fV à fU et de gV vers gU et il faut que que le carré commute. Voilà donc un homomophisme de pré-faisceaux, c'est juste un homomorphisme de foncteurs, et ils se composent de manière évidente, leur composition est vers l'extérieur et vers l'intérieur (?). Il y a un homomorphisme de pré-faisceaux ... cela signifie pour chaque U, un homomorphisme de gU en hU, la composante de g et f est définie comme associant à chaque U la composition des homomorphismes ici. Très bien, donc c'est juste un non-sens général*[1] *sur les foncteurs, sur les catégories. Jusqu'à présent, nous n'avons pas utilisé le fait que $O(X)$ était la catégorie des sous-ensembles ouverts de X, nous venons d'utiliser le fait que c'est un ensemble ordonné, mais on va l'utiliser maintenant pour définir la notion de pré-faisceau sur X qui rappelle les faisceaux sur X, nous devons introduire un autre axiome sur les pré-faisceaux qui se transforme en faisceaux. Maintenant, traditionnellement les axiomes sur les préé-faisceaux sont séparés en deux : vous dites d'abord que les pré-faisceaux sont des séparateurs si l'axiome suivant est vrai : pour chaque ensemble ouvert U sur X et pour chaque recouvrement de U par des sous-ensembles ouverts U_i dont l'union est U, peut être défini en termes d'ensembles ordonnés ; c'est juste le supremum des U_i et, en termes de ... Soit la cartographie de fU, dans chacun des fU, une carte de restriction, et donc, nous obtenons une cartographie de f dans le produit des fU est et on n'a que deux ensembles, séparés par chacun de ces choix ici, cette application est injective.*

Maintenant, disons ceci d'une autre manière : si f est un pré-faisceau sur X, f de U, les éléments des ensembles s'accordent aux sections de f sur U. Quand nous donnerons des exemples, nous verrons d'où vient cet accord des sections. Très bien, et, la carte ici, je l'ai déjà dit contenue dans V, la carte donnée de fV en fU sera appelée la carte de restriction ... qui signifie que les sections de ... est appelée la restriction de ... à U et à l'axiome pour qu'un faisceau soit séparé signifie qu'à chaque fois qu'il existe une union de sous-ensembles ouverts $U_i(X)$, dont l'union est U, il y a une section des pré-faisceaux sur U connue sous le nom de ces restrictions sur les U_i. La première condition serait restreinte en ... mais en termes géométriques, cela signifie simplement que ... la flèche est une injection, cela signifie qu'une section de f sur U peut être identifiée pour le système de sections de f sur ces U_i est stable alors la deuxième question qui se pose est de voir si nous pouvons identifier ici les sous-ensembles que nous obtenons comme images de fU qui sont les systèmes de sections de f sur U qui proviennent de sections globales f sur U. Prenons maintenant un système de sections disons Φ_i dans fU_i pour chaque i, pour chaque index, ici l'axiome nécessaire pour ce système de Φ provienne de sections globales est le suivante : quand vous avez deux indices i et j, la restriction de Φ_i à $U_i \cap U_j$ pourrait être égale à Φ_j... "

Voilà, je m'arrête ici, notre patience est sans doute épuisée. Mais, je vais dire qu'une des raisons pour lesquelles je vous ai fait entendre Grothendieck est assez compliquée : il faut qu'on s'habitue à cette incroyable patience qu'il a d'expliquer tous les détails, de rentrer, d'aller jusqu'au bout de tous les détails. Et ça, on le verra, je veux dire, c'est une qualité absolument essentielle dans sa démarche. Donc je continue à lire ce qu'il disait sur le point de vue et le langage des faisceaux introduit par Leray. Grothendieck continue, il dit :

> *"Pour les "épousailles" attendues, "du nombre et de la grandeur", c'était comme un lit décidément étriqué, où l'un seulement des futurs conjoints (à savoir, l'épousée) pouvait à la rigueur trouver à se nicher tant bien que mal, mais jamais les deux à la fois ! "*

Donc là, il avait en tête effectivement toutes sortes de développements qui étaient de nature combinatoire, qui étaient reliés à la théorie des nombres, par opposition à ce qui se passait en topologie mais bon, bien sûr, il y avait le travail de Serre sur l'utilisation de la topologie de Zariski.

> *"C'est le point de vue des faisceaux qui a été le guide silencieux et sûr, la clef efficace (et nullement secrète), me menant sans atermoiements ni détours vers la chambre nuptiale au vaste lit conjugal. Un lit si vaste en effet (telle une vaste et paisible rivière très profonde. . .), que*
> *"tous les chevaux du roi*
> *y pourraient boire ensemble..." "*

On y reviendra à ça.

> *"comme nous le dit un vieil air"*

---

1. ?

(que je vous ferai entendre tout à l'heure)

"comme nous le dit un vieil air que sûrement tu as dû chanter toi aussi, ou au moins entendre chanter. Et celui qui a été le premier à le chanter a mieux senti la beauté secrète et la force paisible du topos, qu'aucun de mes savants élèves et amis d'antan..." (rires)

Bon, il y a bien sûr dans cette phrase, le fait que nous connaissons, sans doute, beaucoup d'entre nous, qui est que le premier à dévoiler un certain paysage mathématique en a une appréhension qui est incomparable (c'est ce qui est arrivé à Galois par exemple) par rapport aux autres mathématiciens qui viennent après lui et le comprennent. Ca, c'est une chose très frappante, il dit quelque chose de plus méchant, de beaucoup plus méchant.

"La clef a été la même, tant dans l'approche initiale et provisoire (via la notion très commode, mais non intrinsèque du "site")" (dont je vous parlerai, bien sûr)

"...que dans celle du topos. C'est l'idée du topos que je voudrais essayer à présent de décrire.".

Donc laissons parler Grothendieck bien sûr.

"Considérons l'ensemble formé de tous les faisceaux sur un espace (topologique)"

Alors, à l'intention du mathématicien, à vrai dire, il s'agit ici des faisceaux d'ensembles, ça, c'est absolument fondamental, c'est un pas énorme, qu'il ait remplacé les faisceaux de groupes abéliens, qui étaient intéressants, on pensait que c'étaient les seuls intéressants, puisque ce sont les seuls qui vont donner une cohomologie, etc. Non ! Il a eu l'idée, qui paraît complètement naïve, de remplacer les faisceaux de groupes abéliens par des faisceaux d'ensembles, et on va voir la portée que ça donne.

"Je crois d'ailleurs".

(et c'est ce qu'il dit)

"être le premier à avoir travaillé systématiquement avec les faisceaux d'ensembles à partir de 1955. Quel est l'avantage de travailler avec les faisceaux d'ensembles, on va le voir, c'est que quand vous travaillez avec les faisceaux d'ensembles, vous pouvez définir ce que c'est qu'un groupe dans ce truc-là, vous pouvez définir ce que c'est qu'une algèbre dans ce truc-là, parce que ce que vous faites, c'est que vous travaillez comme si vous travailliez dans les ensembles mais il y a une variabilité. C'est-à-dire qu'il y a quelque-chose qui bouge, mais sinon, vous faites exactement comme si vous travailliez dans les ensembles, habituels. Donc vous pouvez définir ce que c'est qu'un groupe. Alors, si vous cherchez ce que c'est qu'un groupe abélien dans cette catégorie des faisceaux d'ensembles, eh bien, vous trouvez les faisceaux de groupes abéliens. Donc on retombe sur ses pieds."

Ensuite ce que dit Grothendieck :

"Nous considérons cet "ensemble" ou "arsenal" comme muni de sa structure la plus évidente, laquelle y apparaît, si on peut dire, "à vue de nez"; à savoir, une structure dite de "catégorie"."

Alors bien sûr, nous, on a été éduqués, du moins à mon époque, avec la théorie des ensembles. En fait, c'était sans doute une erreur. La vraie manière de penser, c'est la théorie des catégories. Donc, il pense à cette espèce de théorie qu'il a devant les yeux comme une catégorie.

"(Que le lecteur non mathématicien ne se trouble pas, de ne pas connaître le sens technique de ce terme. Il n'en aura nul besoin pour la suite.)"

C'est-à-dire que ce qu'il faut que le lecteur non-mathématicien pense, simplement, c'est qu'il a un analogue, maintenant, de la théorie des ensembles, dans cette nouvelle catégorie, dans cette catégorie des faisceaux d'ensembles. Il y a quelque chose qui ressemble à la théorie des ensembles, et on va voir que cette métaphore va très loin.

"C'est cette sorte de "superstructure d'arpentage", appelée "catégorie des faisceaux" (sur l'espace

envisagé), qui sera dorénavant considérée comme "incarnant" ce qui est le plus essentiel à l'espace."

Alors on verra une métaphore, que je développerai plus loin, mais je peux déjà en dévoiler une partie. Si vous voulez, d'habitude, quand on parle d'un espace, je vais vous la montrer tout de suite parce que je ne veux pas attendre, pour cette métaphore. Voilà, la métaphore est la suivante : avant Grothendieck, on avait l'habitude, quand on étudiait un espace, je ne sais pas moi, une courbe, ou n'importe quoi, on mettait l'espace... sur la scène. Et puis, on le regardait, on l'étudiait, comme un ensemble muni d'une structure, etc. Eh bien, ce que fait Grothendieck, c'est... non ! L'espace n'est pas sur la scène, l'espace, il est dans les coulisses. Sur la scène, il y a les acteurs habituels de la théorie des ensembles : les groupes abéliens, les algèbres, etc. Mais, l'espace en question, il est dans les coulisses, comme un espèce de *Deus ex machina* qui introduit une variabilité dans les personnages qui sont sur la scène. C'est-à-dire que maintenant les personnages qui sont sur la scène, ils vont dépendre d'un aléa. Cet aléa, il est gouverné par le topos. Et quand on a un topos de Grothendieck, il y a aussi les constantes, c'est-à-dire qu'il y a aussi les ensembles qui ne dépendent pas de l'aléa. Et la cohomologie, elle se définit en comparant les deux.

Donc c'est absolument fondamental que vous essayiez progressivement d'acquérir une image mentale, même si vous n'êtes pas mathématicien, pour comprendre que l'espace qui est donné par le topos, il va apparaître derrière, il est dans les coulisses, il n'est pas sur le devant de la scène, ça n'est pas lui qu'on étudie ; on étudie la théorie des ensembles, mais il y a ce bon Dieu de topos, qui est caché et qui fait tout varier, qui introduit une variabilité là-dedans, d'accord. Donc alors, c'est ce que dit Grothendieck d'une autre manière : *"ce qu'il considère comme cet ensemble ou "arsenal" comme muni de sa structure la plus évidente"*, il y pense comme à une catégorie, cette catégorie de faisceaux d'ensembles. Alors ensuite que dit-il ? *"Que c'est une chose licite d'oublier l'espace et de ne considérer que la catégorie des faisceaux d'ensembles."*

Pourquoi est-ce que c'est une chose licite ? C'est une chose licite parce qu'on n'a pas perdu l'espace en cours de route. On retrouve les points de l'espace. Alors, comment est-ce qu'on retrouve les points de l'espace dans la métaphore que je vous ai donnée ? Parce que lui dit *"c'est un simple exercice de le vérifier : une fois qu'on a posé la question."*. Bon. Effectivement, vous pouvez vous amuser, en pensant en termes classiques, si vous avez les faisceaux d'ensembles sur un espace topologique ordinaire, comment est-ce que vous allez retrouver l'espace lui-même, c'est-à-dire les points de l'espace ? Vous pouvez vous poser cette question. Alors en fait, dans la métaphore que je vous ai donnée, les points de l'espace, c'est quand vous prenez un instant donné, un temps figé. Quand vous prenez un temps qui est figé, eh bien, à ce moment-là, il n'y a plus de variabilité, et vous avez la théorie des ensembles ordinaire. C'est ce qu'on appelle abstraitement dans la théorie des topos un point d'un topos, c'est-à-dire que c'est ainsi qu'on appelle un morphisme géométrique, qui va de la théorie des ensembles ordinaire vers le topos considéré. Mais ça revient exactement à figer les choses à un instant donné.

Lui dit *"de vérifier est un simple exercice."*. En fait, ce n'est pas toujours vrai ; comme il dit *"(à l'intention du mathématicien) A strictement parler ceci n'est vrai que pour des espaces dits "sobres" "*. Il faut quand-même qu'il y ait un minimum de séparation dans l'espace. Et il y a un exemple extrêmement intéressant, que je vous invite à faire, parce qu'il faut toujours... on ne fait pas des maths en écoutant, on fait des maths en faisant des exercices. Donc il y a l'exercice déjà sur les catégories abéliennes de tout à l'heure. Et voilà un autre exercice maintenant. C'est que vous prenez une courbe avec sa topologie de Zariski. Ou vous prenez plutôt une surface avec sa topologie de Zariski. Et vous calculez les points du topos correspondant, c'est-à-dire de la topologie des faisceaux pour la topologie de Zariski. Eh bien, vous allez vous apercevoir qu'il y a plus de points, parce que l'espace en question, il n'était pas sobre, et vous allez obtenir exactement les points du schéma correspondant. Donc je vais dire, déjà, dans cet exemple-là, on voit le potentiel absolument incroyable de cette manière de penser. Il dit :

"...nous pouvons désormais "oublier" l'espace initial, pour ne plus retenir et ne nous servir que de la "catégorie" associée, laquelle sera considérée comme l'incarnation la plus adéquate de la "structure topologique" (ou "spatiale") qu'il s'agit d'exprimer."

Alors ce qu'il explique après, c'est :

"Comme si souvent en mathématique, nous avons réussi ici (grâce à l'idée cruciale de "faisceau", ou de "mètre cohomologique") à exprimer une certaine notion, (celle d'"espace"), en termes d'une autre (celle de "catégorie")."

Donc on a remplacé, toujours en suivant la métaphore, l'espace par cette catégorie, qui est une catégorie d'ensembles, ce sont des ensembles.

"A chaque fois, la découverte d'une telle traduction d'une notion (exprimant un certain type de situations) en termes d'une autre (correspondant à un autre type de situations), enrichit notre compréhension."

Bien entendu.

"et de l'une et de l'autre notion, par la confluence inattendue des intuitions spécifiques qui se rapportent soit à l'une, soit à l'autre."

"Ainsi, une situation de nature "topologique" (incarnée par un espace donné) se trouve ici traduite par une situation de nature "algébrique" (incarnée par une "catégorie") ; ou, si on veut, le "continu" incarné par l'espace, se trouve "traduit" ou "exprimé" par la structure de catégorie, de nature "algébrique" (et jusque là perçue comme étant de nature essentiellement "discontinue" ou "discrète")."

On dénie, a priori, à une catégorie le droit de représenter quelque-chose de continu. Or c'est le cas ici. C'est le cas parce qu'on retrouve les points et on retrouve la topologie des points, simplement à partir de la catégorie, qui *ressemble* à la catégorie des ensembles.

"Mais ici, il y a plus. La première de ces notions, celle d'espace, nous était apparue comme une notion en quelque sorte "maximale" - une notion si générale déjà, qu'on imagine mal comment en trouver encore une extension qui reste "raisonnable". Par contre, il se trouve que de l'autre côté du miroir, ces "catégories" " (donc les catégories que l'on obtient comme catégories de faisceaux d'ensembles) *"sur lesquels on tombe, en partant d'espaces topologiques, sont de nature très particulière."*

"Le "miroir" dont il est question ici, comme dans Alice au pays des merveilles, est celui qui donne comme "image" d'un espace, placé devant lui, la "catégorie" associée."

Donc cette catégorie, c'est la catégorie de la scène derrière laquelle est le topos.

"Elles jouissent en effet d'un ensemble de propriétés fortement typées, (on ne va pas en parler tout de suite) qui les font s'apparenter à des sortes de "pastiches" de la plus simple imaginable d'entre elles." Quelle est la plus simple d'entre elles ? C'est la théorie des ensembles. Donc les catégories que vous obtenez comme ça, à partir d'un topos, sont des pastiches de la théorie des ensembles. C'est ce que dit Grothendieck.

"Ceci dit, un "espace nouveau style" (ou topos), généralisant les espaces topologiques traditionnels, sera décrit tout simplement comme une "catégorie" qui, sans provenir forcément d'un espace ordinaire, possède néanmoins toutes ces bonnes propriétés." Donc on les appelle topos, alors il va le dire d'ailleurs, attendez, il faut que je le trouve...

"Le nom "topos" a été choisi (en association avec celui de "topologie", ou "topologique") pour suggérer qu'il s'agit de "l'objet par excellence" auquel s'applique l'intuition topologique. Par le riche nuage d'images mentales que ce nom suscite, il faut le considérer comme étant plus ou moins l'équivalent du terme "espace" (topologique), avec simplement une insistance plus grande sur la spécificité "topologique" de la notion. Ainsi..." Bon, il parle des espaces vectoriels, etc. Donc je reviens en arrière.

*"Voici donc l'idée nouvelle. Son apparition peut être vue comme une conséquence de cette observation, quasiment enfantine à vrai dire, que ce qui compte vraiment dans un espace topologique, ce ne sont nullement ses "points" ou ses sous-ensembles de points, et les relations de proximité etc. entre ceux-ci, mais que ce sont les faisceaux sur cet espace, et la catégorie qu'ils forment. Je n'ai fait, en somme, que mener vers sa conséquence ultime l'idée initiale de Leray - et ceci fait, **franchir le pas**. Comme l'idée même des faisceaux (due à Leray), ou celle des schémas, comme toute "grande idée" qui vient bousculer une vision invétérée des choses, celle des topos a de quoi déconcerter par son caractère de naturel, d' "évidence", par sa simplicité."*

En fait, on sait quand on fait des maths, quand on est sur la bonne voie, quand quelqu'un vous dit *"Oh, ce n'est que ça !". (rires)*

Voilà ce que dit Grothendieck, donc :

"...par cette qualité particulière qui nous fait nous écrier si souvent : "Oh, ce n'est que ça !", d'un ton mi-déçu, mi-envieux ; avec en plus, peut-être, ce sous entendu du "farfelu", du "pas sérieux", qu'on réserve souvent à tout ce qui déroute par un excès de simplicité imprévue. A ce qui vient nous rappeler, peut-être, les jours depuis longtemps enfouis et reniés de notre enfance..."

Donc là, il revient à la notion de schéma :

"Elle constitue un vaste élargissement de la notion de "variété algébrique", et à ce titre elle a renouvelé de fond en comble la géométrie algébrique léguée par mes devanciers. Celle de topos constitue une extension insoupçonnée, pour mieux dire, une métamorphose de la notion d'espace."

Si vous voulez, ce qui est absolument extraordinaire, au départ, même, dans la notion de topos, c'est la manière dont l'espace est appréhendé. Comme je le disais, il n'est plus appréhendé par les points, il est appréhendé par l'aléa qu'il introduit : il introduit un aléa dans la théorie des ensembles ; il introduit une variabilité dans la théorie des ensembles. Et ça, c'est extraordinaire.

"Par là, elle porte la promesse d'un renouvellement semblable de la topologie, et au delà de celle-ci, de la géométrie. Dès à présent d'ailleurs, elle a joué un rôle crucial dans l'essor de la géométrie nouvelle."

Ca, c'est pour la cohomologie l-adique, ou pour la cohomologie cristalline.

"Comme sa sœur aînée (et quasi-jumelle)[2]*, elle possède les deux caractères complémentaires essentiels pour toute généralisation fertile, que voici."*

Primo, il ne faut pas que cette notion soit trop vaste, je passe assez vite là-dessus ; il parle des topos, on en a parlé ; il faut que "les constructions géométriques les plus essentielles" s'appliquent bien entendu, qu'elles "puissent se transposer de façon plus ou moins évidente." Il ne faut pas qu'elle soit trop générale, il ne faut pas que la notion que vous preniez soit, par exemple, la notion générale de catégorie. Si c'était la notion générale de catégorie, on n'irait pas loin. Donc il faut qu'elle ait cette propriété.

Il explique : *"Parmi ces "constructions", il y a notamment celle de tous les "invariants topologiques" familiers."*

Il explique très bien : *"Pour ces derniers, j'avais fait tout ce qu'il fallait dans l'article déjà cité de "Tohoku" (1955)."*

Donc l'origine, vous voyez, elle vient de là. Comme je le disais tout à l'heure, dans l'article de Tohoku, il y avait à la fois les faisceaux sur un espace topologique et il y avait aussi, et c'était extrêmement important, les catégories de diagrammes, il parlait des catégories de diagrammes et on va voir qu'elles jouent un rôle absolument essentiel, de la même manière. Donc il parle des associations mentales, et de notions moins techniques, bien sûr.

"Secundo, la nouvelle notion est en même temps assez vaste pour englober une foule de situations qui, jusque là, n'étaient pas considérées comme donnant lieu à des intuitions de nature "topologico-géométrique" - aux intuitions, justement, qu'on avait réservées par le passé aux seuls espaces topologiques ordinaires."

Comme on le verra dans un exemple que je vous donnerai dans relativement peu de temps, comme on le verra, ce qui se produit dans la métaphore dont je vous parlais, ce qui va se produire, c'est que comme il y a cet aléa, comme il y a cette variabilité dans la théorie des ensembles, on ne peut plus appliquer le principe du tiers-exclus. Par contre, l'intuitionnisme marche. Et donc, ce que ça va engendrer, cette nuance, c'est pour ça que je veux vous y amener pas à pas, on est lent, mais il faut que nous soyons lents, donc je vous montrerai un exemple, comme je l'ai dit au début, dans lequel la notion de vérité associée au topos sera beaucoup plus subtile que la notion de vérité ordinaire, et j'aurai un transparent, sur lequel il y aura marqué "à deux pas de la vérité" et je vous donnerai un topos dans lequel on sera "à 10 pas de la vérité", "à 15 pas de la vérité", "à 20 pas de la vérité", etc. On prendra un exemple parce que tant qu'on n'a pas

2. la théorie des schémas

pris un exemple, tant qu'on parle abstraitement, on ne sait pas trop ce qu'on fait. Donc on se dirige vers là.

"La chose cruciale ici, dans l'optique des conjectures de Weil, c'est que la nouvelle notion est assez vaste en effet, pour nous permettre d'associer à tout "schéma" un tel "espace généralisé" ou "topos" (appelé le "topos étale" au schéma envisagé). Certains "invariants cohomologiques" de ce topos (tout ce qu'il y a de "bébêtes" !) semblaient alors avoir une bonne chance de fournir "ce dont on avait besoin" "

Il continue et on se relaxe un peu avant de venir aux exemples et aux choses vraiment cruciales.

"C'est dans ces pages que je suis en train d'écrire que, pour la première fois dans ma vie de mathématicien, je prends le loisir d'évoquer (ne serait-ce qu'à moi-même) l'ensemble des maître-thèmes et des grandes idées directrices dans mon œuvre mathématique. Cela m'amène à mieux apprécier la place et la portée de chacun de ces thèmes, et des "points de vue" qu'ils incarnent, dans la grande vision géométrique qui les unit et dont ils sont issus. C'est par ce travail que sont apparues en pleine lumière les deux idées novatrices névralgiques dans le premier et puissant essor de la géométrie nouvelle : l'idée des schémas, et celle des topos."

Et là, il insiste :

"C'est la deuxième de ces idées, celle des topos, qui à présent m'apparaît comme la plus profonde des deux. Si d'aventure, vers la fin des années cinquante..."

Donc Grothendieck a introduit les topos dans une période un peu dépressive qu'il avait eue après la mort de sa mère en 1957, il a introduit les topos en 58. Donc on sera, l'année qui vient, au 60ème anniversaire de la naissance des topos.

"Si d'aventure, vers la fin des années cinquante, je n'avais pas retroussé mes manches, pour développer obstinément jour après jour,"

Ca, c'est Grothendieck : "Obstinément, jour après jour..."

"tout au long de douze longues années, un "outil schématique" d'une délicatesse et d'une puissance parfaites - il me semblerait quasiment impensable pourtant que dans les dix ou vingt ans déjà qui ont suivi, d'autres que moi auraient pu à la longue s'empêcher d'introduire à la fin des fins (fut-ce à leur corps défendant) la notion qui visiblement s'imposait, et de dresser tant bien que mal tout au moins quelques vétustes baraquements en "préfab", à défaut des spacieuses et confortables demeures[3] *que j'ai eu à cœur d'assembler pierre par pierre et de monter de mes mains."*

Là, il parle des schémas.

"Par contre, je ne vois personne d'autre sur la scène mathématique, au cours des trois décennies écoulées, qui aurait pu avoir cette naïveté, ou cette innocence, de faire (à ma place) cet autre pas crucial entre tous, introduisant l'idée si enfantine des topos (ou ne serait-ce que celle des "sites"). Et, à supposer même cette idée-là déjà gracieusement fournie, et avec elle la timide promesse qu'elle semblait receler..."

Vous savez, quelqu'un vous dirait : "Je vais faire ça...". "Bonne chance !", vous diriez ! D'accord... *(rires*[4]

"...je ne vois personne d'autre, que ce soit parmi mes amis d'antan ou parmi mes élèves, qui aurait eu le souffle, et surtout la foi, pour mener à terme cette humble idée (si dérisoire en apparence...)"

Qu'est-ce que c'est que de s'évertuer sur les faisceaux d'ensembles sur un espace topologique ?...

"...(si dérisoire en apparence alors que le but semblait infiniment lointain...) : depuis ses premiers débuts balbutiants, jusqu'à la pleine maturité de la "maîtrise de la cohomologie étale", en quoi elle a fini par s'incarner entre mes mains, au cours des années qui ont suivi."

3. adresse de l'orateur au public : "là, il parle des schémas"
4. pour souligner l'ironie de l'euphémisme du Bonne chance par rapport à l'ampleur de la tâche que cela représente.)

Bon après, il parle de détails, enfin, de choses qui sont importantes pour le mathématicien, mais il parle de la cohomologie étale et c'est à ce propos, comme il le dit :

"C'est inspiré par ce propos que j'avais découvert la notion de site en 1958." Donc, il a découvert la notion de site en 1958, et c'est cette notion, bien sûr, et le formalisme cohomologique, qui ont été développés plus tard.

Il dit :

"Quand je parle de "souffle" et de "foi"," (ça, c'est toujours pour le mathématicien), *"il s'agit là des qualités de nature "non-techniques" "*

Grothendieck a écrit quelque-part dans Récoltes et Semailles qu'il n'était pas rapide, qu'il était entouré de gens beaucoup plus rapides que lui, mais bon, c'est un exemple qui montre à quel point, il ne faut pas se décourager, quand on n'est pas rapide, bon quand on parle avec des gens dont on s'aperçoit qu'ils comprennent dix fois plus vite que vous, il ne faut pas se décourager. Par contre, ce qui est absolument crucial, c'est d'être persévérant, et d'avoir la foi dans une idée.

C'est-à-dire si vous avez une idée, il faut d'abord que vous vous l'appropriez, que vous la fassiez vôtre. Et une fois qu'elle est vôtre, il faut la protéger ;au départ, il faut la protéger comme un tout petit enfant qui vient de naître. Il ne faut pas trop la montrer, pas trop, etc. *(petits rires)* Et puis après... Pas tellement parce que quelqu'un peut vous la prendre mais parce qu'il faut que vous la testiez, on va en parler plus tard, il faut que vous la testiez, il faut que vous vous habituiez à elle, en privé.

"A un autre niveau, je pourrais y ajouter aussi ce que j'appellerais le "flair cohomologique", c'est-à-dire le genre de flair qui s'était développé en moi pour l'édification des théories cohomologiques."

Après, il râle un peu contre ses élèves, mais ça, on en a l'habitude avec Grothendieck.

On va faire une petite pause : on ne va pas s'arrêter mais je vais vous faire écouter Yves Montand *(rires).*

"Oui, la rivière est profonde, et vastes et paisibles sont les eaux de mon enfance, dans un royaume que j'ai cru quitter il y a longtemps. Tous les chevaux du roi y pourraient boire ensemble à l'aise et tout leur saoul, sans les épuiser ! Elles viennent des glaciers, ardentes comme ces neiges lointaines, et elles ont la douceur de la glaise des plaines. Je viens de parler d'un de ces chevaux, qu'un enfant avait amené boire et qui a bu son content, longuement. Et j'en ai vu un autre venant boire un moment, sur les traces du même gamin si ça se trouve - mais là ça n'a pas traîné. Quelqu'un a dû le chasser. Et c'est tout, autant dire."

On écoute la chanson Aux marches du Palais*, chantée par Yves Montant, qui raconte l'histoire de la jeune-fille qui a tant d'amoureux qu'elle ne sait lequel prendre et qui a choisi son petit cordonnier.*

Voilà, on revient aux choses sérieuses.

Alors, il continue, il dit :

"Je vois pourtant des troupeaux innombrables de chevaux assoiffés qui errent dans la plaine - et pas plus tard que ce matin même leurs hennissements m'ont tiré du lit, à une heure indue, moi qui vais sur mes soixante ans et qui aime la tranquillité. Il n'y a rien eu à faire, il a fallu que je me lève. Ça me fait peine de les voir, à l'état de rosses efflanquées, alors que la bonne eau pourtant ne manque pas, ni les verts pâturages. Mais on dirait qu'un sortilège malveillant a été jeté sur cette contrée que j'avais connue accueillante, et condamné l'accès à ces eaux généreuses. Ou peut-être est-ce un coup monté par les maquignons du pays, pour faire tomber les prix qui sait ? Ou c'est un pays peut-être où il n'y a plus d'enfants pour mener boire les chevaux, et où les chevaux ont soif, faute d'un gamin qui retrouve le chemin qui mène à la rivière..."

Alors, avec Pierre Cartier et Olivia Caramello, on a organisé un colloque, il y a de ça deux ans, à l'IHES, justement pour raviver l'idée des topos, mais vraiment des topos de Grothendieck, et le colloque a été remarquable, ça s'est très très bien passé.

Alors qu'est-ce qu'un topos de Grothendieck ? Donc maintenant on revient aux mathématiques. Donc il y a trois manières de les définir : c'est sans doute la première manière qui est la plus simple. Alors, comme Grothendieck l'expliquait quand il fait son cours, la chose importante, au départ, c'étaient des pré-faisceaux, c'est-à-dire c'étaient des foncteurs contravariants qui allaient de la catégorie des ouverts, mais c'est une catégorie extrêmement simple, hein. Je veux dire c'est une catégorie pour laquelle entre deux objets, il y a au plus un morphisme donc c'est vraiment quelque-chose d'extrêmement simple. Donc on regardait les foncteurs contravariants qui allaient de cette catégorie vers les ensembles. Alors maintenant, on enlève toutes les conditions sur cette catégorie, sauf que ça doit être une petite catégorie. Qu'est-ce que ça veut dire une petite catégorie ? Ça veut dire que les objets forment un ensemble. Et puis les morphismes aussi bien entendu. Donc on regarde une petite catégorie et on regarde tous les foncteurs contravariants de cette petite catégorie vers les ensembles. On oublie le fait qu'on avait les ouverts et qu'on avait une catégorie extrêmement particulière en regardant les ouverts. D'accord, on prend n'importe laquelle. Et alors maintenant, ce qu'on demande, bien sûr, on ne va pas prendre tous les foncteurs contravariants, puisqu'on sait bien, et Grothendieck l'expliquait dans ce qu'on a écouté, qu'on ne va pas prendre tous les pré-faisceaux. Parmi ces pré-faisceaux, on va en sélectionner qu'on va appeler des faisceaux. Quelle est la propriété importante de cette sélection ? Il y a deux choses qui sont très importantes dans cette sélection : la première, c'est qu'on ne va pas changer les morphismes ; la première chose qui est fondamentale, c'est que quand vous prenez un morphisme d'un faisceau vers un autre faisceau, en fait, vous pouvez oublier que ce sont des faisceaux. C'est un morphisme de pré-faisceaux, d'accord. Donc en fait, quand on va sélectionner la sous-catégorie de la catégorie des pré-faisceaux, on va prendre une sous-catégorie pleine. Sous-catégorie pleine, ça veut dire qu'on ne va pas changer la notion de morphisme. D'accord, c'est crucial, ça, si vous écoutez Grothendieck plus loin, il en parle et il dit bien que c'est crucial. Donc première chose. Deuxième chose, qui est extrêmement importante, c'est qu'il y a un moyen, lorsque vous avez un pré-faisceau de le faisceautiser, de le transformer en un faisceau. Donc ça veut dire que les faisceaux sont des pré-faisceaux particuliers, mais il y a une espèce de projection qui vous permet de remplacer un pré-faisceau par un faisceau. Alors quelle est la manière de le dire qui est correcte : c'est que le foncteur qui inclut la catégorie des faisceaux dans la catégorie des pré-faisceaux, bon d'abord il est plein, il est fidèle, parce qu'on n'oublie rien, mais surtout, il a un adjoint à gauche, qui est la faisceautisation, et par miracle, cette action à gauche, il est exact à gauche, ce qui n'est normalement jamais le cas pour un adjoint à gauche. Normalement, un adjoint à gauche, on sait que dans tous les cas, il va préserver ce qui s'appelle les colimites, mais c'est très rare qu'il préserve les limites. Eh bien, là, ça préserve les limites. Donc c'est ça la condition. Donc si vous voulez une définition courte de ce que c'est qu'un topos, c'est ça.

Alors maintenant ce qu'on va voir, et puis on va voir ce que c'est qu'un site, il y a une autre manière de le dire qui est plus précise : c'est qu'en fait, on sait que toute faisceautisation, comme celle dont je vous parlais, en fait, elle provient de ce qu'on appelle une topologie de Grothendieck sur la petite catégorie dont on est parti. Alors on va voir ce que c'est. Et puis en fait, il y a une troisième définition de ce que c'est qu'un topos. Mais alors ça, c'est vraiment une définition, comment dire, très abstraite mais c'est une définition qui énonce des propriétés qui sont vraies pour la théorie des ensembles, d'accord. Et on demande que le topos les vérifie aussi. Alors ça, ça a engendré une autre théorie des topos, qu'on appelle la théorie des topos élémentaires, qui ne sont pas des topos de Grothendieck en général. Mais alors, qu'est-ce qu'il manque à un topos élémentaire, donc un topos qui vérifie des propriétés naïves de théorie des ensembles, pour être un topos de Grothendieck ? Ce qui lui manque, ce sont les constantes. C'est-à-dire que tout à l'heure, dans la métaphore, je vous disais qu'on a des ensembles variables, qui dépendent d'un aléa. Eh bien, quand on a un topos de Grothendieck, il y a ce qu'on appelle un morphisme géométrique, qui va du topos vers le topos des ensembles, et ça permet de parler des constantes. Or parler des constantes, lorsqu'on fait de la cohomologie par exemple, c'est absolument essentiel. Parce que ce sont les constantes qui permettent par exemple de définir les sections globales d'un faisceau, etc., etc. Donc c'est pas du tout innocent, et il y a une différence très grande entre un topos de Grothendieck et ce qu'on appelle un topos élémentaire qui rassemblerait des propriétés élémentaires de la théorie des ensembles.

Alors les exemples. Bon alors parmi les exemples, il y a bien sûr l'exemple des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique. C'est le premier exemple. Le deuxième exemple, j'en ai déjà parlé, ce sont les faisceaux pour la topologie de Zariski, donc c'est un cas particulier des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique. Mais comme je le disais, l'intérêt, c'est que quand on cherche les points, pour ce topos-là, on trouve les bons points du schéma, d'accord. Et enfin, il y a un troisième exemple, qui est ce que Grothendieck a introduit en 58 pour avoir la cohomologie étale, c'est-à-dire qu'on part d'un schéma, et il y a un topos qui est associé au schéma, mais ça n'est plus un topos qui provient d'une topologie sur le schéma. Donc c'est quelque-chose qui est au-dessus et qui, bon, bien sûr, là, c'est déjà un topos au sens original, qui est en dehors des espaces topologiques.

Donc je reviens à Grothendieck, il dit :

"Le thème du topos est issu de celui des schémas, l'année même où sont apparus les schémas - mais en étendue il dépasse largement le thème-mère. C'est le thème du topos, et non celui des schémas, qui est ce "lit", ou cette "rivière profonde", où viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre, la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des structures "discontinues" ou "discrètes". Si le thème des schémas est comme le cœur de la géométrie nouvelle, le thème du topos en est l'enveloppe, ou la demeure. Il est ce que j'ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse, par un même langage riche en résonances géométriques, une "essence" commune à des situations des plus éloignées les unes des autres, provenant de telle région ou de telle autre du vaste univers des choses mathématiques. Ce thème du topos est très loin pourtant d'avoir connu la fortune de celui des schémas."

Il y a une espèce de malédiction sur les topos. Il y a une malédiction qui règne, on y reviendra peut-être si on a le temps. Alors voilà la métaphore. Donc la métaphore dont je vous parlais tout à l'heure. Il faut absolument que vous ayez une image mentale de ce que c'est qu'un topos. Donc on avait l'habitude, comme je le disais, de mettre l'espace à étudier sur le devant de la scène. Ce que fait Grothendieck, c'est de lui faire jouer ce rôle de Deus ex machina, qui n'est pas présent, qui reste dans les coulisses. Mais ce qui est important, c'est de savoir que, quand vous avez un topos, vous pouvez faire toutes les manipulations, vous pouvez parler de groupes abéliens, vous pouvez parler d'algèbres, etc., et si vous travaillez avec un topos provenant d'un espace topologique, ça vous donnerait les faisceaux de groupes abéliens, ou les faisceaux d'algèbres, etc., c'est formidable, c'est formidable d'avoir cette liberté de manœuvre. Bon, alors, lorsqu'on travaille dans un topos, tout se passe comme si on manipulait des ensembles ordinaires. Donc c'est ça qu'il faut savoir. En fait, dès qu'on fait des fibrés vous savez sur un espace, on prend l'habitude de penser à un fibré comme à un espace vectoriel variable. Mais là, la variabilité, c'est la **bonne** notion de variabilité, parce que ça paramétrise les ensembles. Sauf que l'on ne peut plus appliquer la règle du tiers-exlus. Donc ce qui apparaît, c'est qu'on ne peut plus, pour une proposition dire la proposition p est vraie, ou la proposition *non* p est vraie, on n'a plus le tiers-exclus. Alors on va très vite voir un exemple concret d'un topos pour lequel cette notion de vérité devient plus subtile que le simple vrai ou faux que nous utilisons familièrement. Par exemple, si vous regardez la télévision, et vous regardez une discussion politique à la télévision ; eh bien, nous avons l'habitude de dire "celui-là a raison et celui-là a tort". Eh bien, je prétends qu'on n'a pas l'outil conceptuel qu'il faut pour juger. Et je vais vous donner des exemples. Je vais vous montrer à quel point la notion de vérité est une notion beaucoup plus subtile et à quel point l'idée du topos permet de la formaliser. Donc on va faire marcher ça sur un exemple. Pour faire marcher ça, on va introduire des topos qui sont autres que les topos qui viennent d'un espace topologique et qui ont une nature extrêmement simple : ce sont les topos qui consistent à prendre une petite catégorie et à prendre simplement la catégorie de tous les foncteurs contravariants vers les ensembles. Donc là, on ne fait pas de distinction entre faisceaux et pré-faisceaux. On prend tous les pré-faisceaux. On dit que ce sont tous des faisceaux. Donc à une petite catégorie, on va associer un topos qui est son espèce de dual, qui est tous les foncteurs contravariants de cette petite catégorie vers les ensembles, et on va s'amuser avec ça.

Alors en 91, Grothendieck était encore parfaitement en contact avec certains mathématiciens, et voilà ce qu'il écrivait, c'est dans une lettre à Thomasson, il dit :

"D'autre part pour moi, le paradis originel pour l'algèbre topologique n'est nullement la catégorie simpliciale..." donc, je ne sais pas si on aura le temps d'en parler, mais il parle des topos.

"En effet, les topos ayant comme catégories des faisceaux d'ensembles les $\hat{C}$, avec C une petite catégorie, sont de loin les plus simples des topos connus." Et c'est pour l'avoir senti qu'il insiste tant sur ces topos catégoriques dans SGA4. Donc si vous regardez SGA4, vous verrez qu'il y a deux exemples fondamentaux de topos ; bien sûr, il y a le topos étale, et puis il y a les topos qui sont duaux d'une catégorie. D'accord. Alors on va s'amuser avec ça.

Alors quelle est la notion de vérité dans un topos ? *(rires)* En quel sens la notion de vérité est-elle différente dans un topos ? Alors, en quel sens d'abord, est-ce qu'on est capable, dans les ensembles, de définir le vrai et le faux ? Alors, comment va-t-on définir le vrai et le faux dans la théorie des ensembles ? On va s'intéresser à essayer de classifier les sous-ensembles d'un ensemble, d'accord. Vous voyez, si vous travaillez avec les ensembles ordinaires, et si je vous dis “j’ai un foncteur qui, si vous me donnez un ensemble, lui associe tous ses sous-ensembles.”. C’est un foncteur parce que si vous avez une application qui va de X dans Y, vous pouvez rappeler en arrière les sous-ensembles de Y, donc c’est un foncteur. Alors maintenant, la question, c’est “est-ce que ce foncteur est représentable ?”. C’est une notion mathématique, d’accord, et alors dans les ensembles, il est représentable à cause d’une notion que nous, nous connaissons très très bien : c’est qu’à un sous-ensemble, on associe ce qu’on appelle sa fonction caractéristique. C’est-à-dire quand on a un sous-ensemble d’un ensemble, on définit une fonction : cette fonction, elle vaut 1 si on est dans le sous-ensemble, et elle vaut 0 si on n’est pas dans le sous-ensemble. Alors cette fonction, il se fait qu’elle a une propriété assez miraculeuse : c’est qu’elle classifie, c’est-à-dire qu’elle représente ce foncteur. Dans le cas des ensembles, il y a un objet privilégié Ω qui est l’objet qui est formé de l’ensemble $\{0, 1\}$, l’ensemble à deux points, et quand vous regardez tous les sous-ensembles d’un ensemble, ça revient à regarder toutes les applications de cet ensemble vers l’ensemble $\{0, 1\}$. Puisque quand vous avez une application qui va vers l’ensemble $\{0, 1\}$, le sous-ensemble, il est défini par le sous-ensemble sur lequel elle prend la valeur 1. Mais là où elle ne prend pas la valeur 1, eh bien, elle prend forcément la valeur 0. Eh bien, si on réfléchit suffisamment, en logique, en pensant dans le langage des topos, on s’aperçoit que c’est ce simple fait qu’il n’y avait que 0 et 1 dans les ensembles qui permet d’avoir le principe du tiers-exclus.

Donc maintenant on va s’amuser avec un topos qui est un tout petit peu plus compliqué. On va prendre... alors, c’est ce que j’appelle “à deux pas de la vérité”. Alors, qu’est-ce qu’on va prendre comme topos ? On va prendre la catégorie C qui n’a qu’un seul objet, et qui a pour morphisme les puissances d’un seul morphisme. C’est-à-dire que je choisis un seul morphisme qui va de cet objet dans lui-même et je l’élève à des puissances, d’accord, T^n. Alors qu’est-ce que ça veut dire, un objet de la catégorie des foncteurs contravariants de cette catégorie vers les ensembles ? Ça veut simplement dire un ensemble avec une application de X dans X. C’est tout. Pourquoi vous n’avez qu’un seul ensemble ? Parce que la catégorie n’avait qu’un objet. Donc vous n’avez qu’un ensemble. Et en fait, la catégorie, elle n’avait qu’un seul morphisme, bon, on l’élève à ses puissances, mais, je veux dire... il suffit de le connaître, il suffit de connaître son image. Qu’est-ce que c’est que son image ? C’est une transformation T de X dans X. Quel est le topos ? Eh bien, ce sont les ensembles munis d’une transformation. Bon, eh bien, les ensembles munis d’une transformation, ça fait un topos. C’est une catégorie, d’accord. Comment est-ce une catégorie ? C’est une catégorie parce que si vous avez deux ensembles avec une transformation, vous avez les applications de X dans Y qui respectent la transformation. C’est à dire qu’ils vérifient que l’image $f(TX)$ de TX, c’est $Tf(x)$. Donc vous avez une catégorie, et cette catégorie, c’est un topos. Pourquoi c’est un topos ? Parce que c’est le dual d’une petite catégorie que je vous ai donnée.

Bon alors maintenant, on va chercher Ω, pour ça, donc on va chercher à classifier les sous-objets d’un objet. Alors, pourquoi est-ce embêtant, d’essayer de classifier les sous-objets d’un objet ? Eh bien, on va essayer avec $\Omega = \{0, 1\}$. On va essayer avec la fonction caractéristique, comme on faisait tout à l’heure. Après tout, si je prends un ensemble avec une application, si je prends un sous-objet, c’est un sous-ensemble qui est stable par l’application, d’accord. Donc si je prends mon X, je vais prendre un sous-ensemble Y qui était invariant, qui était invariant par l’application T. Bon. Très bien. Il est invariant par l’application T. Donc je vais associer la valeur 1 sur ce sous-ensemble, d’accord. Sur le sous-ensemble, je vais donner 1. Pourquoi est-ce que je ne peux pas donner la valeur 0, sur le complémentaire ? Eh bien, parce qu’il peut y avoir des points du complémentaire qui vont finir par atterrir dans l’ensemble en question. Je ne suis pas du tout assuré que le complémentaire va être invariant par T. Il peut très bien se produire qu’un point du complémentaire, au bout d’un moment, tac !, il va taper dans le sous-ensemble en question. C’est pas parce que le sous-ensemble en question est invariant que son complémentaire est invariant. Bien sûr que non ! La transformation, je n’ai pas pris une action de Z, j’ai pris une action de N. Alors comment on va faire ? C’est embêtant ! Ça veut dire que l’application qui allait vers 0 et 1, elle ne marche pas, elle ne marche pas. Bon ! Eh bien, il faut se creuser la tête un petit peu. Qu’est-ce qu’il faut faire ? Eh bien, quand je prends un x qui est dans X, il va exister un plus petit entier, un premier entier, tel que quand j’applique T, n fois, ça tape dans le sous-ensemble. D’accord. Donc je vais lui associer cet entier. Cet entier, il sera l’∞, bien sûr, si on n’arrive jamais dans le sous-ensemble.

Donc on voit qu’il faut remplacer l’ensemble $\{0, 1\}$ par l’ensemble $\{0, 1, 2, 3, \ldots, \infty\}$. Et comment va-t-on faire de cet ensemble un ensemble muni d’une transformation ? Eh bien, on s’aperçoit que si je regarde le h, c’est-à-dire le plus petit entier pour TX, eh bien, le plus petit entier pour TX, ça va être le plus petit entier pour X moins 1 sauf si ça devient négatif ; si ça devient négatif, ça ne marche pas ; donc je prends le *sup* avec 0. D’accord.

Donc vous voyez que pour ce topos, alors la notion de vérité qui avant était simplement 0 ou 1, maintenant, elle est donnée par l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, \ldots, \infty\}$, avec la transformation qui remplace par $n - 1$. Alors qu'est-ce que ça veut dire ? Eh bien, ça veut dire qu'on a un exemple incroyablement simple d'un topos qui permet de dire "Ouais, ce que tu fais, ouais, je dirais, c'est à 10 pas de la vérité...". Moi, j'ai toujours dit que les gens qui font de la théorie des cordes, c'est à une infinité de pas de la vérité. *(rires)*

Donc vous voyez que cette notion, pour innocente qu'elle soit, pour bêbête qu'elle ait l'air, en fait, elle a un potentiel d'une richesse absolue. Et ce que je prétends, c'est que notre esprit, notre formation logique, est extrêmement primitive parce que nous avons l'habitude, lorsque nous écoutons une discussion politique de décréter "oui ou non", "telle personne a raison, telle personne a tort" et on est dans l'erreur en faisant cela et s'il y avait des philosophes, bon, je rêve hein, s'il y avait des philosophes connaissant les maths, et qui comprennent les topos de l'intérieur, et il y en a très peu, qui comprennent les topos de l'intérieur, ils seraient capables de donner des modèles, qui seraient utiles, pour beaucoup mieux apprécier ce genre de discussions, ce genre de situations, qui sont en fait beaucoup plus subtiles par rapport à la notion de vérité, que cette notion d'une inefficacité absolue, que nous utilisons tout le temps, et qui est "un tel a raison ou un tel a tort.". Donc, je voulais absolument vous donner cet exemple pour que vous le gardiez en tête, et que vous essayiez de construire d'autres exemples semblables ; il y a des exemples finis bien entendu, ne soyez pas effrayés par le fait qu'il y a des n qui vont de 0 à l'infini, en fait, vous pouvez très bien imaginer des constructions finies, d'accord. Les constructions finies, il y a une richesse combinatoire dans les topos qui fait que les constructions finies ont un potentiel extraordinaire.

Alors qu'est-ce qu'un crible ? Cet exemple va nous permettre de définir ce que c'est qu'un crible. Qu'est-ce que c'est qu'un crible ? Je vous ai donné un exemple de crible. Le Ω en général, quand vous prenez le topos qui est donné par tous les foncteurs contravariants d'une petite catégorie vers les ensembles, eh bien, on construit le Ω et comment est construit le Ω ? Le Ω, il est construit à partir d'un crible. Alors qu'est-ce qu'un crible ? Eh bien, un crible sur un objet d'une catégorie, le Ω, va être construit à partir des objets de cette catégorie, rappelons-nous que la catégorie dont j'ai parlé tout à l'heure, elle n'avait qu'un seul objet. Donc pour le moment, on n'a rien. On a un seul objet. Alors, un crible sur un objet X, sur notre objet X, c'est la donnée d'une famille de morphismes $C(X)$ qui est contenue dans tous les morphismes dont l'image est X... enfin, ça va d'un ensemble Z vers X, dont le codomaine est X, et qui est stable par composition à droite.

Quels sont les cribles, dans l'exemple de tout à l'heure ? On avait un seul objet ; les morphismes qui allaient dans cet objet, c'étaient simplement les entiers, puisque c'étaient les puissances de T, il y avait $T^0, T^1, T^2, \ldots$. Qu'est-ce que c'est qu'un crible ? Eh bien, un crible, c'est un espèce d'idéal, c'est-à-dire que c'est une famille de morphismes qui est stable par composition à droite, par n'importe quel morphisme. Donc dans le cas de tout à l'heure, qu'est-ce que c'est que la composition à droite ? Ça rajoute à un entier, eh bien, ça lui rajoute n'importe quel entier. Ça revient à regarder tous les intervalles infinis d'un côté. Alors, parmi les intervalles infinis, vous avez quoi, vous avez 0, jusqu'à l'infini, ça, c'est ce qu'on appelle... enfin, c'est un crible qui doit être toujours présent ; c'est le crible qui est formé de tous les morphismes. Et puis ensuite, on avait tous les morphismes qui étaient à partir d'un certain entier n. Ca, c'était un crible, d'accord, et c'était quand on était à distance n. Et puis, il y a le crible où il n'y en a aucun, c'est l'ensemble vide, et ça, ça correspondait à l'infini tout à l'heure. Voilà.

Alors il se fait que donc en général, on peut définir le Ω, les valeurs de vérité, pour le dual d'une petite catégorie, et on le définit exactement à partir des cribles. Quand on calcule Ω donc, on construit cet objet, simplement comme toujours comme un foncteur contravariant d'un ensemble etc., mais on le construit à partir des cribles sur chacun des objets de la catégorie. Dans notre cas, il y avait un seul objet donc c'était très simple. C'était très très simple.

Alors moi j'ai été longtemps fasciné par l'idée que Grothendieck avait appelé crible et qu'il n'ignorait pas que ce nom avait déjà été utilisé par les mathématiciens, et qu'il y a par exemple un crible qui est bien connu et qui est le crible d'Eratosthène. Alors j'ai finalement trouvé la réponse, j'ai finalement trouvé pourquoi le crible d'Eratosthène est un crible, au sens de Grothendieck et ça, ça vient d'un travail en commun qu'on a fait avec Katia Consani et dans lequel la catégorie qu'on prend, elle est très semblable à celle de tout à l'heure, où il y avait une seule transformation, mais cette fois, elle est un peu plus compliquée quand-même, parce que, au lieu d'avoir (on a toujours un seul objet, comme avant), mais au lieu d'avoir les puissances d'un seul morphisme, on a une action des entiers multiplicatifs. C'est-à-dire que pour chaque entier, on a un morphisme, et quand on fait le produit de deux entiers, les morphismes se composent.

Alors c'est un exercice de démontrer que le crible d'Eratosthène est un crible de la manière suivante : c'est très amusant. Parce que... qu'est-ce que c'est que le crible d'Eratosthène ? Le crible d'Eratosthène, ça consiste à prendre le premier nombre non trivial. On va foutre en l'air 1, hein, on s'en fout de 1, d'accord. Donc on prend le premier nombre non trivial qui est 2. Et que fait le crible ? Le crible considère tous les multiples de 2, tous les nombres pairs, sauf 2. Et puis après, il reste des choses, bon. Il reste 3 par exemple, alors il prend tous les multiples de 3 sauf 3. Et puis il reste des choses, 4 on l'a déjà pris puisque... Donc il prend tous les multiples de 5 sauf 5. Eh bien, je prétends que si vous regardez les entiers comme les morphismes, les entiers multiplicatifs, comme les morphismes d'une catégorie qui n'a qu'un seul objet, et si vous regardez tout ce que je viens de vous dire, c'est-à-dire si vous regardez tous les entiers pairs sauf 2, tous les multiples de 3 sauf 3, etc., ça, ça fait un crible au sens que je vous ai donné tout à l'heure. Et ça vous montre à quel point la notion de vérité est subtile pour cette catégorie-là, parce que ça, je vous ai donné seulement **un** exemple de crible. Vérifier que c'est un crible, c'est trivial, c'est pas la question, c'est pas la difficulté.

Alors maintenant, une fois qu'on a la notion de crible, on va voir la notion de topologie de Grothendieck. Je ne pouvais pas faire un exposé sur les topos sans donner la définition d'une topologie de Grothendieck. Alors, moi, je vais vous dire le moment qui pour moi a été crucial dans l'appréciation de la notion de topos. Le moment qui a été crucial, c'est le suivant : c'est qu'avant, quand on me présentait un topos, on me présentait toujours un topos en me disant "je prends une catégorie, une petite catégorie, et je suppose qu'elle est stable par produit fibré." A ce moment-là, mon oreille se fermait et je pensais à autre chose, d'accord *(rires)*. Et la raison, c'est la suivante : c'est que, quand on dit ça, et qu'après on écrit ce que c'est qu'une base, etc., on a bien sûr en tête l'intuition topologique ; c'est-à-dire que quand on dit que la catégorie a des produits fibrés, on pense à deux ouverts qui ont une intersection. Et à partir de là, bon, on peut développer les choses. Et alors, ce qui pour moi a été crucial, c'est le moment où j'ai compris en fait que, déjà dans SGA4, Grothendieck avait défini les sites, et les produits fibrés sur les sites, *sans aucune hypothèse* sur la petite catégorie, *sans aucune hypothèse* sur la petite catégorie, on n'a absolument pas besoin de supposer *quoi que ce soit* sur la petite catégorie, et l'avantage énorme, c'est que lorsqu'on fait ça, on comprend mieux ce dont on parle. Vous savez, en mathématiques, il y a une chose qu'il faut comprendre, c'est que la principale difficulté quand on est devant un problème, c'est d'arriver à **penser juste**. Et penser juste, ça a l'air idiot, ça a l'air de... chercher à penser juste... mais une fois qu'on arrive à penser juste, les choses tombent comme des fruits mûrs, mais il faut savoir penser juste. Et ça n'est pas penser juste que de demander à la petite catégorie d'avoir des produits fibrés. Penser juste, c'est ce qu'il y a là, c'est-à-dire le crible maximal, le fait que quand vous avez un crible... Donc, qu'est-ce que c'est qu'une topologie de Grothendieck, c'est une collection de cribles, on donne pour chaque objet une collection de cribles, et on a des conditions de compatibilité. Mais quelle est l'intuition qu'il faut avoir derrière ? Peu importe le détail des axiomes. Quelle est la... Quand vous faites de la topologie, vous avez l'intuition des recouvrements ouverts. C'est une intuition qui est très délicate, je vais vous expliquer pourquoi elle est très délicate. Prenez par exemple l'intervalle $[0, 1]$. Et puis ne prenez dans l'intervalle $[0, 1]$ que les nombres rationnels. Ils sont denses, donc vous reconnaîtrez les ouverts, avec les nombres rationnels, puisque les ouverts, ce sont des réunions d'intervalles. Un intervalle, je le connais par son intersection avec les rationnels. D'accord ? Qu'est-ce qui va changer ? Pourquoi est-ce que si je prends le topos qui est donné par les rationnels avec ces ouverts-là, j'obtiens quelque-chose de différent que le topos qui est donné par l'intervalle $[0, 1]$ avec ses ouverts ordinaires ? Ils se ressemblent, ils ont l'air d'être les mêmes. Eh bien, si vous cherchez, vous allez trouver qu'en fait, il y a beaucoup plus de recouvrements ouverts pour les rationnels qu'il n'y en a pour les réels. Pour les rationnels, il y a des recouvrements ouverts qui sont là alors qu'ils ne sont pas là pour les réels. Voilà. Typiquement, c'est que si vous prenez une suite d'ouverts de plus en plus grands mais dont la limite est un nombre irrationnel, eh bien, cela, ça va apparaître comme un recouvrement au niveau rationnel mais ça ne sera pas un recouvrement au niveau réel. D'accord ? C'est-à-dire qu'au niveau réel, si vous prenez le complémentaire de ça, la réunion des deux, ça ne sera pas un recouvrement ouvert. Donc en fait, il y a beaucoup moins de recouvrements ouverts pour les réels qu'il n'y en a pour les rationnels. Quand on pense topologiquement, on pense comme ça. Quand on pense au niveau des topos, on pense différemment : comment on pense au niveau des topos ? On pense que les cribles, ça signifie des choses petites, ça signifie des objets petits. Passer au crible, ça revient à donner des objets qui sont petits. Et à ce moment-là, les axiomes, ils deviennent presque absolument évidents. Et qu'est-ce que ça signifie qu'un objet est petit par rapport à un recouvrement ouvert ? Qu'est-ce que ça signifie qu'un recouvrement est petit par rapport à un recouvrement ouvert ? Ça signifie qu'il passe à travers, ça signifie qu'il est contenu dans un des ouverts du recouvrement : il passe à travers un trou. Donc, c'est ça l'intuition qu'il faut avoir : l'intuition du crible, c'est que ce sont des choses qui sont petites, et qui passent à travers les trous. D'accord.

Alors ceci dit, maintenant, on a l'intuition d'une topologie de Grothendieck quand il y a une base, etc. ; je ne vais pas vous embêter avec ça. Alors il y a une notion essentielle dans les topos mais c'est pareil, je ne vais pas en parler trop longtemps : c'est la notion de point. Et surtout la notion de morphisme géométrique. Donc, les topos... Il se fait qu'une fois qu'on pense juste à propos des topos, les mêmes propriétés qui sont vraies pour les espaces topologiques continuent à avoir un sens, mais évidemment, elles sont beaucoup plus subtiles. Typiquement, ce qui se produit, et ça, j'ai copié une page de SGA4, c'est ce que c'est qu'un morphisme d'un topos dans un autre, ce qu'on appelle un morphisme géométrique.

Alors pour comprendre ce que c'est qu'un morphisme géométrique, c'est-à-dire un morphisme d'un topos dans un autre, il faut avoir une certaine familiarité avec les faisceaux sur un espace. Pourquoi ? Parce que lorsqu'on a une application continue d'un espace X vers un espace Y, si j'ai une application continue f qui va de X dans Y, eh bien, il se fait qu'il y a deux manières de relier les faisceaux sur X avec les faisceaux sur Y. Il y a deux manières de le faire. Et ces deux manières, il y en a une qui est tautologique, presque triviale, et qui consiste à prendre un faisceau sur X et à l'envoyer en avant vers un faisceau sur Y. Et ça, en quel sens c'est trivial ? C'est trivial parce qu'il vous suffit, quand vous prenez un ouvert sur Y, de prendre son image inverse et de regarder les sections du faisceau sur X sur cet ouvert, sur l'image inverse. Donc ça, ça fait un faisceau, il n'y a pas de problème. Donc cette définition, elle va de soi. Mais il y a une autre manière de relier les faisceaux de X et les faisceaux de Y qui va dans l'autre sens, c'est-à-dire qui envoie un faisceau sur Y vers un faisceau sur X, et celle-là, elle est beaucoup plus intéressante, elle est beaucoup moins triviale. Elle est visuellement évidente si on pense à un faisceau comme un espace étalé sur l'espace de base, et c'est en particulier le cas pour les faisceaux d'ensembles, mais, là où elle est extrêmement intéressante, c'est que cette application qui va dans l'autre sens, elle a une propriété merveilleuse, elle a une propriété totalement inattendue. D'abord, elle est adjointe à gauche de l'autre. Ca, ça se vérifie, ça n'est pas une grande chose, on aurait pu la définir comme ça. Donc elle est adjointe à gauche de l'autre, de celle qui allait en avant, très bien. Mais elle a une propriété merveilleuse, et cette propriété merveilleuse, c'est la propriété qu'elle est exacte à gauche, c'est-à-dire qu'elle commute avec les limites. Donc ça, c'est une propriété extrêmement puissante, extrêmement étonnante, et je pense que l'exemple qui est dû à Pierre, l'exemple le plus frappant de ça, il faut être frappé par un exemple, tant que vous n'êtes pas frappé par un exemple, vous ne comprendrez pas. L'exemple le plus frappant de ça, c'est ce qu'on appelle les ensembles simpliciaux, les complexes simpliciaux. Donc ce que vous faites, il y a une petite catégorie, donc un peu plus compliquée que celle de tout à l'heure, (intervention de Pierre Cartier) *dont Grothendieck ne veut pas*, repris par Alain Connes, dont Grothendieck ne veut pas, précisément. Je vais revenir à la page de Grothendieck parce qu'il n'en veut pas. C'est amusant d'ailleurs. Voilà.

C'est celle dont Grothendieck ne veut pas. C'est cette petite catégorie qu'on appelle Δ^{op}, c'est la catégorie semi-simpliciale, c'est quoi ? Ce sont les ensembles finis, totalement ordonnés, avec les applications non décroissantes. Cette catégorie, elle est très importante pour la raison suivante : en topologie, dans les années 40-50, s'est développée une notion, au départ, elle était formulée de manière un peu trop simple, qui était la notion de complexe simplicial. On prenait un espace et on le triangulait. Quand on prend l'espace ordinaire, on peut le trianguler, ou bien en dimension plus grande, etc. Quand on le triangule, on peut donner une donnée combinatoire qui encode la triangulation. Cette donnée combinatoire, on peut la formuler en regardant ce qu'on appelle le complexe simplicial mais de manière entièrement combinatoire, en prenant des simplexes, etc. Alors, il se fait que si on fait les choses comme ça, ça ne marche pas très bien du tout pour le produit. C'est-à-dire que comme le produit de deux simplexes n'est pas un simplexe, par exemple, le produit de deux intervalles, c'est un carré, ça n'est pas un simplexe, mais ça ne marche donc pas bien du tout pour le produit. Mais c'est parce qu'on n'a pas pensé juste. Et c'est parce qu'on n'a pas fait une chose qui paraît triviale quand on la fait, mais qui en fait est fondamentale. Et cette chose qui est triviale quand on la fait, mais qui en fait est fondamentale, c'est qu'il faut beaucoup mieux comprendre la réalisation géométrique de cet objet combinatoire, et cette réalisation géométrique de l'objet combinatoire, en fait, c'est un point d'un topos. Il se fait qu'à cette catégorie est associé un topos, le topos bêbête, le topos des foncteurs contravariants qi va de cette catégorie vers la catégorie des ensembles, et que, c'est un théorème qu'on peut démontrer facilement, les points de ce topos, dans un sens sur lequel on ne va pas s'éterniser, les points de ce topos, ce sont exactement les intervalles. C'est-à-dire ce sont exactement les ensembles totalement ordonnés qui ont un plus petit élément et un plus grand élément. Donc les points de ce topos sont donnés exactement comme ça. Et quand on a un point du topos, eh bien, le foncteur d'image inverse, qui va vers les ensembles, eh bien, ce foncteur, c'est le foncteur de réalisation géométrique si on prend pour l'espace totalement ordonné avec un plus petit élément et un plus grand élément, si on prend l'intervalle $[0, 1]$, ça donne exactement la réalisation géométrique du simplexe, du complexe simplicial.

Alors maintenant, merveille des merveilles : ce foncteur préserve les limites finies et donc, il préserve les produits. Et donc, quand on prend le produit bêbête de deux ensembles simpliciaux, c'est-à-dire de deux foncteurs contravariants de cette petite catégorie vers les ensembles, eh bien, quand on prend la réalisation géométrique, ça va donner le produit des réalisations géométriques. C'est un exercice immédiat de vérifier que c'est compatible avec la topologie. Ça ne présente pas de difficulté, la difficulté, elle est purement ensembliste. Et, Pierre, c'est toi qui as démontré ce théorème pour la première fois, non ? (Pierre Cartier répond "Milnor"). Oui, Milnor ou toi. Mais, ce qu'il faut bien voir, c'est que la notion de topos comprend cette chose-là. Elle comprend cette chose-là et elle la généralise à un point absolument incroyable, c'est-à-dire qu'un point d'un topos maintenant, va justement préserver non seulement les colimites arbitraires, mais va préserver les limites finies, donc va préserver les produits, etc.

Et c'est pourquoi quand on prend un point d'un topos, ça nous emmène vers la théorie des ensembles mais en respectant tout ce qu'on sait. C'est à dire que ça va transformer un groupe abélien dans le topos en un vrai groupe abélien ; ça va transformer toutes les notions élémentaires qu'on peut avoir en une vraie notion en théorie des ensembles. Alors, il y a un pas sur lequel je ne vais pas m'attarder du tout, mais qui est extrêmement important et dans lequel justement, il y a des travaux très très intéressants qui se font maintenant, qui est celui des topos classifiant. C'est-à-dire qu'exactement comme il y a un espace classifiant pour les fibrés, ou vectoriel, etc., il y a un topos classifiant pour des notions logiques. Et une des merveilles de ça, qui répond un peu à la question de Grothendieck quand il dit *"la sempiternelle catégorie Δ^{op}"*, c'est que le topos qui est associé, pas cette catégorie, mais le topos qui est associé à cette catégorie, c'est exactement le topos qui classifie les intervalles. C'est-à-dire que si on définit abstraitement ce que j'ai expliqué tout à l'heure, c'est-à-dire un intervalle, un ensemble totalement ordonné, mais il ne faut pas parler d'ensemble, dans une théorie arbitraire, eh bien, on s'aperçoit que cette notion a un topos classifiant et que ce topos classifiant, c'est exactement le dual de la catégorie Δ^{op}. Bon.

Alors on ne va pas rentrer dans les détails. Maintenant on va faire autre chose : je ne veux pas rentrer dans les détails techniques, je ne veux pas. On va revenir à Grothendieck, on va relire du Grothendieck et puis on terminera en lisant la fin de l'échange entre Grothendieck et Serre dans leur correspondance. Donc voilà ce que dit Grothendieck. Bon, c'est très important d'avoir parlé des topos, mais c'est encore plus important d'essayer d'avoir perçu la manière de travailler de Grothendieck, parce que c'est de ça dont nous avons besoin. Bon, bien sûr, on va peut-être utiliser les topos pour faire toutes sortes de choses, mais on a aussi besoin, terriblement, dans notre civilisation : quand on assiste maintenant à un laïus qui est fait en public, on s'aperçoit qu'il y a un tiers des gens qui ont leur ordinateur ouvert devant eux et qui font leurs emails, *(rires)*, ou qui font autre chose, ou téléphone portable. Mais c'est une catastrophe, parce que quand on lit Grothendieck et quand on s'imprègne de sa manière de penser, on s'aperçoit d'une chose, la chose qui frappe le plus, c'est le temps dont il disposait. On a l'impression qu'il disposait d'un temps infini, d'un temps infini, qu'il n'était pas constamment dérangé. Vous savez, maintenant, on parle de la génération Y, c'est-à-dire ce sont les gens qui font 3 choses à la fois. On croit qu'on gagne du temps, mais ça n'est pas vrai. On a un besoin maintenant fondamental, dans notre civilisation, de s'isoler, et de pouvoir penser lentement, et de prendre le temps de tout vérifier, pour être sûr des choses, pour le faire deux fois, pour le faire trois fois, etc. C'est pour ça que j'ai fait durer, quand Grothendieck parlait des faisceaux, ça durait, hein, *(rigolard)*, ça durait, mais c'est exprès que je l'ai fait, je l'ai fait à dessein, parce que je voulais que vous vous rendiez compte de cette lenteur fondamentale. C'est une lenteur qui, quand on la ressent au premier degré, est irritante. C'est la lenteur de la tortue et du lièvre *(rires)* Et c'est elle qui gagne. Donc voilà ce que dit Grothendieck :

"Quand je suis curieux d'une chose, mathématique ou autre, je l'interroge. Je l'interroge, sans me soucier si ma question est peut-être stupide ou si elle va paraître telle, sans qu'elle soit à tout prix mûrement pesée. Souvent la question prend la forme d'une affirmation - une affirmation qui, en vérité, est un coup de sonde. J'y crois plus ou moins, à mon affirmation, ça dépend bien sûr du point où j'en suis dans la compréhension des choses que je suis en train de regarder. Souvent, surtout au début d'une recherche, l'affirmation est carrément fausse - encore fallait-il la faire pour pouvoir s'en convaincre. Souvent, il suffisait de l'écrire.".

Une chose fondamentale que fait souvent Grothendieck, c'est qu'il est capable d'écrire une idée qui n'est pas encore mûre. Il est capable de se mettre à écrire, ça, c'est fantastique comme qualité.

"Souvent, il suffisait de l'écrire pour que ça saute aux yeux que c'est faux, alors qu'avant de l'écrire il y avait un flou, comme un malaise, au lieu de cette évidence. Ça permet maintenant de revenir à la

charge avec cette ignorance en moins, avec une question-affirmation peut-être un peu moins "à côté de la plaque". Plus souvent encore, l'affirmation prise au pied de la lettre s'avère fausse, mais l'intuition qui, maladroitement encore, a essayé de s'exprimer à travers elle est juste, tout en restant floue."

Je m'arrête une seconde : quand il parle d'écrire, c'est encore une catastrophe l'ordinateur, parce qu'on écrit mieux, dans ce genre de situation lorsqu'on écrit sur du papier avec un crayon, parce que quand on écrit sur l'ordinateur, il faut que ça ait l'air parfait. On va se poser des question de LaTex, on va se poser des questions comme ça, mais c'est complètement ridicule, on n'en est pas là, on en est à un point où on a envie de laisser le crayon qui fait ce qu'il veut sur la feuille de papier. C'est très très important ça. Donc voilà ce qu'il dit :

"Cette intuition peu à peu va se décanter d'une gangue toute aussi informe d'abord d'idées fausses ou inadéquates, elle va sortir peu à peu des limbes de l'incompris qui ne demande qu'à être compris, de l'inconnu qui ne demande qu'à se laisser connaître, pour prendre une forme qui n'est qu'à elle, affiner et aviver ses contours, au fur et à mesure que les questions que je pose à ces choses devant moi se font plus précises ou plus pertinentes, pour les cerner de plus en plus près. Mais il arrive aussi que par cette démarche, les coups de sonde répétés convergent vers une certaine image de la situation,..."

Ca, ça veut dire qu'on est en train de se faire une image mentale.

"...sortant des brumes avec des traits assez marqués pour entraîner un début de conviction que cette image-là exprime bien la réalité - alors qu'il n'en est rien pourtant, quand cette image est entachée d'une erreur de taille, de nature à la fausser profondément. Le travail, parfois laborieux ; qui conduit au dépistage d'une telle idée fausse. à partir des premiers "décollages" constatés entre l'image obtenue et certains faits patents, ou entre cette image et d'autres qui avaient également notre confiance".

Il faut dire là, que c'est très bien, dans ces cas-là qu'il décrit, de prendre un peu de recul, de faire autre chose, et Grothendieck avait souvent, Cartier me disait souvent qu'il avait 100 fers au feu. Quand on voit que les choses ont tendance à déconner un petit peu, il vaut mieux prendre du champ, parce qu'en fait, on est viscéralement attaché aux idées qu'on avait, et on ne veut pas accepter qu'elles soient fausses.

"Ce travail est souvent marqué par une tension croissante, au fur et à mesure qu'on approche du noeud de la contradiction, qui de vague d'abord se fait de plus en plus criante - jusqu'au moment où enfin elle éclate, avec la découverte de l'erreur et l'écroulement d'une certaine vision des choses, survenant comme un soulagement immense, comme une libération. La découverte de l'erreur est un des moments cruciaux, un moment créateur entre tous, dans tout travail de découverte, qu'il s'agisse d'un travail mathématique, ou d'un travail de découverte de soi. C'est un moment où notre connaissance de la chose sondée soudain se renouvelle."

Et voilà maintenant un des paragraphes les plus magnifiques que je connaisse :

"Craindre l'erreur et craindre la vérité est une seule et même chose. Celui qui craint de se tromper est impuissant à découvrir. C'est quand nous craignons de nous tromper que l'erreur qui est en nous se fait immuable comme un roc. Car dans notre peur, nous nous accrochons à ce que nous avons décrété "vrai" un jour, ou à ce qui depuis toujours nous a été présenté comme tel. Quand nous sommes mûs, non par la peur de voir s'évanouir une illusoire sécurité, mais par une soif de connaître, alors l'erreur, comme la souffrance ou la tristesse, nous traverse sans se figer jamais, et la trace de son passage est une connaissance renouvelée.".

Si un jour, vous n'avez pas le moral ou tout ça, relisez cette phrase. C'est une espèce de talisman. Alors je vais terminer en... J'avais commencé par la discussion entre Serre et Grothendieck, au tout début, sur l'article de Tohoku de Grothendieck, et je vais terminer avec une note assez différente, d'une tonalité très différente, qui est justement la réaction de Serre quand il a reçu *Récoltes et Semailles*. Donc, bon, je ne sais pas si vous connaissez Serre, mais je veux dire, il n'a pas l'habitude de mâcher ses mots, et il n'aime pas trop les états d'âme en général et donc, je veux dire, c'est extrêmement intéressant que dans la correspondance entre Serre et Grothendieck, ils aient continué leurs échanges, au moment où Grothendieck s'était isolé délibérément du monde mathématique. Je veux dire, ce n'est pas le monde mathématique qui l'avait chassé, c'est Grothendieck qui s'est chassé lui-même, qui s'est isolé du monde mathématique, il a écrit ce texte ; tous les passages que je vous ai lus de Grothendieck sont dans *Récoltes et Semailles*, donc c'est un texte admirable, et il faut le lire avec un certain recul, bien entendu, parce qu'il y a des moments où, il dit des choses qui ne sont pas idéales, mais en tout cas, il s'exprime. Alors voilà ce que dit Serre après l'avoir reçu :

"Cher Grothendieck,
J'ai bien reçu le fascicule de Récoltes et semailles que tu m'as fait envoyer. Merci beaucoup. Il me manque encore l'avant-dernier fascicule, dont j'ai seulement quelques pages isolées." (rires)

Bon évidemment, il y a tellement de pages. Moi, je dois vous dire, d'ailleurs, que c'est un texte qu'il faut lire... il ne faut pas lire plus de 5 pages à la fois. Je me souviens d'avoir passé un été extraordinaire en lisant en parallèle *Récoltes et Semailles* et *A la recherche du temps perdu* de Proust. Et je veux dire, de la même manière. C'est-à-dire que, bien sûr, les gens qui cherchent des anecdotes croustillantes, ils vont le lire en sautant les pages, si vous faites ça, vous perdez tout. C'est exactement pareil avec Proust. Proust, on ne peut pas le lire en lisant plus de 5 pages à la fois, il faut les méditer, il faut les repenser, etc. Il faut se laisser pénétrer par une atmosphère qui est absolument extraordinaire. Donc voilà ce que dit Serre, il dit :

"Une chose me frappe. Dans les textes que j'ai pu voir, tu t'étonnes et tu t'indignes de ce que tes anciens élèves n'aient pas continué l'œuvre que tu avais entreprise et menée en grande partie à bien. Mais tu ne te poses pas la question la plus évidente, celle à laquelle tout lecteur s'attend à ce que tu répondes : "Pourquoi toi, tu as abandonné l'œuvre en question ?"." (rires)

C'est quand-même une sacrée question. Et alors après, ce qui est formidable, c'est que Serre a une réponse, et ce n'est pas du tout une réponse évidente. Non, non, mais c'est une lettre de Serre mais il continue sa lettre et il a une proposition pour expliquer pourquoi Grothendieck est parti. Alors voilà ce qu'il dit, il dit :

"J'ai l'impression que malgré ton énergie bien connue, Tu étais tout simplement fatigué de l'énorme travail que tu avais entrepris."

Bon ça, tout le monde le comprendra. Je veux dire quand je parlais du temps, ça veut dire qu'il avait peu de temps pour faire autre chose. Donc je veux dire, c'est immense. Au début, je vous ai lu des passages dans lesquels il parlait de tout ce qu'il devait absorber, etc., bon je veux dire, c'est monstrueux comme quantité de travail.

"D'autant plus qu'il y avait aussi les SGA qui prenaient du retard, année après année. Je me souviens notamment de l'état plutôt désastreux de SGA5 où les rédacteurs se perdaient dans des masses de diagrammes, dont ils étaient réduits à affirmer sans preuve la commutativité, au signe près en étant optimistes." (rires)

"et ces commutativités étaient essentielles pour la suite. C'est à cet état désastreux et non pas idyllique, tel qu'on le croirait à lire Récoltes et Semailles que se réfère ma phrase du séminaire Bourbaki, la version définitive du SGA5 qui devrait être plus convaincante que les exposés et polycopiés existant."

C'est du Serre craché.

"On aimerait avoir tes impressions sur tout ceci, même modifié par 15 ans d'enterrement pour employer tes termes, on reste sur sa faim."

Alors maintenant, il va aller à une explication beaucoup plus profonde :

"on peut se demander par exemple s'il n'y a pas une explication plus profonde que la simple fatigue d'avoir à porter à bout de bras tant de milliers de pages. Tu décris quelque part ton approche des maths, où l'on n'attaque pas un problème de front, mais où on l'enveloppe et le dissout dans une marée montante de théorie générale."

C'est ce dont je parlais tout à l'heure quand je parlais de penser juste. Et par exemple, il y a une anecdote, Cartier ne me contredira pas, qui est qu'une fois, en remontant de la cafétéria à l'IHES, il y a je crois que c'est Demazure qui pose une question à Grothendieck sur $SL(\mathbb{Z})$ ou sur... voilà. Et alors Grothendieck dit que ça n'est pas la bonne manière de formuler cette question et le résultat, ça a été SGA3, c'est-à-dire la théorie des groupes algébriques de Grothendieck *(rires)*. Voilà, donc, ce que fait

Grothendieck, c'est... il peut avoir une question précise, on peut lui formuler une question précise, mais il va dire “cette question n'est pas dans le bon cadre”. Et il va développer une théorie générale de telle sorte que la question devienne naturelle. Et à partir du moment où la question est naturelle, et où on a pris la peine et le temps de penser juste, elle va tomber comme un fruit mûr. Donc c'est ce que dit Serre quand il dit :

“...mais où on l'enveloppe et le dissout dans une marée montante de théorie générale.”

Donc la question se dissout. Et dans *Récoltes et Semailles* d'ailleurs, Grothendieck a de très belles images, il parle d'une noix, et il dit qu'il y a deux manières de s'occuper de la noix : la première manière, c'est de prendre un marteau et de la casser, et la deuxième manière, c'est justement de la laisser s'assouplir dans de l'eau, etc., de telle sorte que finalement, elle s'ouvre d'elle-même.

“Très bien. C'est ta façon de travailler et ce que tu as fait montre que ça marche effectivement, du moins pour les EVT[5] *et la géométrie algébrique.”*

Alors voilà ce que dit Serre, et ça, c'est du sérieux. Il dit :

“C'est beaucoup moins clair pour la théorie des nombres, où les structures en jeu sont loin d'être évidentes, ou plutôt, toutes les structures possibles sont en jeu.”

Et je préfère terminer là-dessus. C'est-à-dire, c'est extrêmement frappant de voir ces deux manières de penser les mathématiques. La manière de Grothendieck, d'accord, qui est une manière qui consiste justement à essayer de penser juste, et à essayer de formuler, si un problème est donné, de le formuler de telle sorte qu'il tombe tout seul, d'explorer tous les coins, les moindres recoins. Dans sa demeure, la demeure dont il parle, il n'y a aucun coin qui est sale, qui n'est pas exploré, etc. Il veut que tout soit impecc. Et il ne peut penser que quand c'est comme ça. Et le prix à payer, c'est un travail colossal. Mais c'est un travail qui n'est pas vraiment difficile, au sens où, on développe les choses, etc., etc. A aucun moment donné, on n'est sur une falaise raide, et on risque de tomber, à aucun de ces moments-là. C'est un peu comme si vous connaissez IsraÃ«l, comme la manière dont les romains ont voulu attaquer Massada, je ne sais pas si vous connaissez. Bon, c'est quelque-chose de très frappant parce qu'ils ont remblayé de la terre, de la terre, de la terre, pour que ça arrive finalement au niveau... et ça leur a pris, je ne sais pas, je crois que c'est une dizaine d'années ou quelque-chose comme ça. *(le public donne son avis, 3 ou 4 ans).*

La méthode de Grothendieck, c'est ça. Et ce que l'on voit avec le recul, c'est tout ce qu'on peut en apprendre, de cette méthode. Tout ce que nous pouvons en apprendre... Par opposition à une autre méthode, que moi, j'aime beaucoup, qui consiste à, dans les couloirs de l'Ecole Normale, dans le temps, quand j'étais à l'Ecole, il y avait un copain qui m'avait posé un problème : il était au troisième étage et moi, j'étais au rez-de-chaussée, et puis j'étais parti en week-end, et puis j'avais passé tout mon week-end à essayer de résoudre... bon. C'est le problem solver, on vous donne un problème, et vous cherchez à le résoudre, eh bien, vous cherchez à le résoudre de la manière la plus efficace possible. Ce sont deux manières complètement orthogonales d'agir et en fait, Grothendieck a toute une discussion dans *Récoltes et Semailles* sur ces deux manières d'agir et il les distingue, bon, il les formule avec le yin et le yang. Bon, mais c'est très très important : il dit que la méthode qu'il a, elle est plus féminine, que l'autre, qui est une méthode masculine. Ca, c'est difficile de le dire exactement. Mais c'est très important, quand on fait des maths, de s'imprégner de cette idée, effectivement, qu'il y a ce besoin, et que souvent, on ne le croit pas. Par exemple, récemment, j'avais un collègue qui m'avait posé un problème à l'Académie que j'ai fini par résoudre, mais j'étais sidéré de voir que je l'ai résolu quand j'ai commencé à penser juste. Ça m'a sidéré ! Parce qu'on me dirait “mais tu veux résoudre un problème, mais pourquoi est-ce que tu te préoccupes de ça ?”. Non, ça n'est pas vrai, c'est quelque-chose de fondamental, arriver à penser juste, c'est quelque-chose d'absolument fondamental. Jamais, ça ne sera inutile d'essayer de penser juste. Jamais ça ne sera inutile, d'accord.

Donc j'espère que je vous aurai donné envie de lire *Récoltes et Semailles* et puis surtout, de manipuler des topos les plus simples, et d'essayer de vous en servir, par rapport à notre logique, qui est bien pauvre, même dans des circonstances tout à fait extérieures aux mathématiques. Evidemment, ça demande du travail, ça demande un travail qui est très lent, etc. qui est celui de s'approprier la notion. Et c'est une notion qui est maudite, elle est maudite : avec Pierre, et puis surtout avec Laurent Lafforgue, par exemple, on a essayé pendant plusieurs années, de soutenir une mathématicienne très très brillante, qui est Olivia

5. Espaces vectoriels topologiques

Caramello, et on s'est heurté à l'hostilité, pour ne pas dire le mépris, du monde mathématique en général. Et on a pu expérimenter à cette occasion à quel point il y a une espèce de, je ne sais pas, de fatalité, sur la notion de topos, il y a quelque-chose qui irrite les gens, parce que sans doute, ils ressentent, c'est ce que dit Grothendieck, il le dit tellement bien, il le dit explicitement, il l'avait déjà ressenti à son époque, sans doute, ils ressentent qu'il y a quelque-chose, mais ils ne le comprennent pas vraiment. Et pour le comprendre vraiment, il faut en faire, bien sûr, mais il y aura un moment où la notion va vous appartenir et vous allez arriver à vous l'approprier. Et la meilleure manière, c'est cette métaphore, c'est le fait que l'espace n'est pas au-devant de la scène, il est derrière, c'est une espèce de Deus ex machina, et c'est lui qui fait tourner les ensembles, c'est lui qui introduit un aléa, un aléa dans les ensembles, dans la théorie des ensembles. De même qu'il y a un aléa dans les nombres premiers, que nous connaissons tous, et de même qu'il y a un aléa du quantique, donc voilà, il faut garder tout cela en tête, et je vais m'arrêter là.