

## La vérité est mathématique

Alain Connes

Lauréat de la médaille Fields, Professeur au Collège de France, organisateur de la “Rencontre du millénaire”, Alain Connes est l’un des grands “découvreurs” de notre époque. Défenseur de la doctrine platonicienne selon laquelle le monde mathématique a une existence indépendante des constructions mentales, il vient de publier “Triangle de pensées”, un livre d’entretiens avec André Lichnerowicz et Marco Schützenberger.

TANGENTE : Vous êtes le plus connu des mathématiciens français, mais vous l’êtes moins que d’autres scientifiques, les prix Nobel de physique, par exemple. Pourtant, la médaille Fields est en mathématiques l’équivalent du prix Nobel, et vos travaux figurent parmi ceux qui jouissent de la plus importante reconnaissance mondiale. On ne sait donc que peu de choses de vous. Einstein affirmait que l’univers appartenait aux monomaniaques. Avez-vous d’autres centres d’intérêt que les mathématiques ou la physique quantique ?

ALAIN CONNES : Les scientifiques connus du public ont tout fait pour qu’on parle d’eux. Pierre-Gilles de Gennes, par exemple, n’a pas hésité à faire le tour des établissements scolaires ou à prendre des positions discutables. Pour répondre à votre question, bien sûr qu’il y a d’autres activités dans la vie d’un chercheur ! La concentration fatigue. La musique, par exemple, permet de se libérer d’une certaine anxiété suscitée par cet excès de concentration.

**Le contact précoce avec la musique prépare à la profondeur du raisonnement mathématique.**

C’est ce qui m’arrive quand je joue du piano, surtout quand j’improvise. J’ai appris le piano à 5 ans, dans la ville de Draguignan où j’ai passé ma petite enfance. Puis je l’ai interrompu lorsque mon père, qui pensait que c’était préférable pour mon éducation, s’est installé à Marseille, adoptant pour la circonstance une vie dangereuse : d’inspecteur des contributions, il est devenu chef d’une brigade d’intervention qui arrêtait des trafiquants.

En reprenant le piano à 20 ans, je n’avais rien perdu de mes qualités (je peux jouer n’importe quel morceau d’oreille), mais j’ai eu du mal à me remettre à la discipline du solfège.

TANGENTE : La musique fait bon ménage avec les mathématiques, c’est connu. Avez-vous dû faire un choix entre disciplines littéraires et scientifiques ?

ALAIN CONNES : A passer des mathématiques à la musique, on ne ressent pas de véritable rupture. La similitude des structures ne peut être niée. Il y a là quelque chose de très profond. Songez au développement en fractions continues

de  $\log 3 / \log 2$  et à la partition du “Clavier bien tempéré” de J.-S. Bach. Mais j’ajouterais que le contact précoce avec la musique prépare à la profondeur du raisonnement mathématique.

Pour les disciplines littéraires, j’ai mis plus de temps à mûrir. Aujourd’hui, en revanche, j’apprécie hautement la littérature.

TANGENTE : Von Neumann aimait le gin, Hardy s’intoxiquait à la cigarette, Erdős avalait de la Benzédrine. D’après-vous, peut-on se dispenser de drogues dans une activité de recherche ?

ALAIN CONNES : Moi, je suis drogué au café. J’ai un autre stimulant : l’agression des autres. Lorsque je subis des attaques ou des préjugés, cela décuple mon énergie. Le premier exemple auquel je pense est une affaire de plagiat dont j’ai été victime alors que j’étais jeune et naïf. J’écrivais des lettres de vingt pages pour leur faire part de mes progrès à des chercheurs qui travaillaient sur le même thème que moi. Une fois, un de mes “espions” dans l’ex-Union Soviétique me rapporta un fascicule recensant mes dernières trouvailles sous la signature d’un mathématicien dont je tairai le nom. Le milieu scientifique n’échappe pas aux margoulin. Le plagiaire en question s’estimait-il protégé par le rideau de fer ? Toujours est-il que j’ai attendu une occasion favorable, qui s’est présentée aux Etats-Unis, pour le mettre en face de son imposture.

TANGENTE : Comment travaillez-vous ? Quelle est la part de la recherche dans votre emploi du temps ?

ALAIN CONNES : Avec l’expérience, j’ai mis au point une méthode pour ne pas travailler dans le vide, et éviter que la mémoire de moments de recherche me trahisse : mes carnets. Ecrits au crayon mais très proprement, ils recèlent tous mes calculs et toutes mes idées qui ont abouti à quelque chose. D’un style plus libre que dans des articles, ils sont rigoureusement tenus à jour, au prix d’une ascèse quelquefois contraignante. Une sorte de “journal scientifique”. J’ai aujourd’hui cent carnets.

Il m’est arrivé de passer trois semaines sur le même calcul, à raison de huit heures par jour, pour vérifier un résultat (nous étions deux à calculer indépendamment). Il m’arrive aussi, par exemple après l’intense période de recherche que représente un cours au Collège de France, de rester un mois à me consacrer à la littérature.

## La recherche en temps réel

Un cours au Collège de France est un exercice extraordinaire de recherche en temps réel. Comme vous le savez, les cours ne doivent pas porter sur des sujets ayant déjà fait l’objet de publication. Alors, on prépare une piste, et on la suit, quinzaine après quinzaine, avec l’obligation d’apporter, d’un cours sur l’autre, de nouveaux résultats. Quelle stimulation ! La moitié de mes résultats de cette année a été produite pendant cette période de cours ! L’obligation de donner quelques cours - à dose homéopathique - est peut-être la seule chose qui manque au système français du CNRS, par ailleurs fort bon.

TANGENTE : Nous avons un bon système de recherche en France ?

ALAIN CONNES : Excellent. Je parle du CNRS et non des enseignants-chercheurs tiraillés entre deux missions incompatibles. A l'étranger, les situations des chercheurs sont fortement dépendantes de leur densité de publication. Vous connaissez le slogan "Publish or Perish". Alors, on est tenté de s'intéresser à des problèmes mineurs, pour faire paraître régulièrement des articles, au détriment des problèmes profonds, conceptuels. Savez-vous que Wiles, qui, pour parachever la démonstration du théorème de Fermat, n'a pas publié d'articles pendant quelques années, a failli perdre son poste ?

TANGENTE : Les sept problèmes du millénaire sélectionnés par le Clay Mathematic Institute sont conceptuels ? Est-ce pour cela qu'aucun d'entre eux ne peut être compris par le commun des mortels ?

ALAIN CONNES : Les sept problèmes résument l'inconnu d'un sujet, voire d'une branche des mathématiques, puisqu'ils ont été choisis pour recouvrir l'ensemble des domaines étudiés par les mathématiques. On ne peut donc les expliquer simplement, sauf à décrire en détail l'histoire de chaque sujet. Des questions explicables en peu de mots à un public non averti peuvent être intéressantes, elles resteront anecdotiques, sauf exception. Le miracle de Fermat, c'est qu'un problème a priori mineur a pu être résolu parce qu'on l'a transformé, quelques siècles plus tard, en problème conceptuel.

TANGENTE : Il reste une place pour la recherche en amateur ?

ALAIN CONNES : Bien sûr ! Je pense même que ce sont des non professionnels qui trouvent souvent les choses les plus merveilleuses ! Je pense, par exemple, à l'algorithme de Lucas (voir en fin d'article). Mais il est peu vraisemblable que des amateurs résolvent une des sept questions Clay.

TANGENTE : Cette difficulté n'a pas gêné la médiatisation très forte de leur proclamation. En aurait-on parlé autant s'il n'y avait pas eu les millions de dollars ?

ALAIN CONNES : Non, bien sûr ! Même ainsi, ce n'était pas gagné d'avance. Il a fallu déployer une énorme énergie pour faire de cette conférence une réussite. Mais une telle organisation est intéressante, et reposante pour le cerveau. Nous avons bénéficié de circonstances favorables, le travail fait par les différents acteurs de l'année mondiale des mathématiques, l'efficacité du service communication du Collège de France... Mais j'ai craint jusqu'au bout que la presse, ou même les mathématiciens, ne répondent pas à notre invitation.

## Un continent à explorer

TANGENTE : Il est important que la presse parle de mathématiques ?

ALAIN CONNES : Vital. Il faut que l'opinion publique, en particulier les jeunes en formation, comprennent ce que sont les mathématiques, et ce qu'elles ne sont pas.

Qu'elles sont à l'opposé de ce qu'Allègre a dit d'elles. Qu'elles n'ont pas vocation à être un instrument de sélection, qu'elle ne sont d'ailleurs plus. Qu'en aucun cas, et jamais, elles ne pourront être remplacées par des ordinateurs.

Qu'elles sont une irremplaçable usine à concepts.

Qu'elles constituent un continent à explorer qui n'attend que ses découvreurs.

TANGENTE : Un continent à explorer, c'est l'approche platonicienne que vous défendez depuis votre livre d'entretiens avec Jean-Pierre Changeux. Cette fois, dans "Triangle de pensées", les interlocuteurs sont des mathématiciens, aujourd'hui disparus. Le dialogue est plus crédible. car dans le premier livre, on avait souvent l'impression que Changeux ne comprenait rien à vos propos. Un livre passionnant, mais au prix de quels efforts de compréhension ! Pour qui ce livre est-il écrit ?

ALAIN CONNES : C'est vrai que le livre est difficile. Un de ses buts est de faire comprendre aux mathématiciens eux-mêmes les conséquences du théorème de Gödel. Une grande découverte du siècle, avec ses conséquences philosophiques.

TANGENTE : L'autre partie du livre est consacrée aux liens avec la physique, la physique quantique en particulier. Vous êtes au fait, si ce n'est au cœur, des derniers états de la recherche en physique théorique. Y a-t-il beaucoup d'autres mathématiciens dans ce cas ?

## Une explication à a renormalisation

ALAIN CONNES : La physique utilise la géométrie non commutative. Et j'ai eu la satisfaction extraordinaire d'apporter, avec le physicien Dirk Kreimer avec qui je travaille ici à l'IHES, une explication à la renormalisation (voir définition en fin d'article) en la reliant au vingt-et-unième problème de Hilbert, qui fait appel aux mathématiques les plus profondes.

C'est vrai que les mathématiciens n'abordent pas toujours les problèmes de physique comme il le faudrait. Il y a ceux qui les sortent de leur contexte pour les résoudre comme des problèmes de mathématiques, et à l'opposé ceux qui cherchent carrément à lire dans la pensée de Dieu.

Moi, ce qui m'intéressait, c'était de savoir pourquoi les physiciens utilisaient telle ou telle recette, et pourquoi elle marchait. Et nous avons fini par trouver ! Il faut dire que tout le monde n'a pas la chance d'avoir, comme ici à l'IHES, des chercheurs de haut niveau de l'autre discipline à proximité. C'est presque par hasard que j'ai rencontré Dirk Kreimer, en allant écouter une de ses conférences.

TANGENTE : Cela serait exceptionnel qu'un mathématicien obtienne, après la médaille Fields, le prix Nobel de physique ! Pourquoi n'avez-vous pas invité des physiciens à vos entretiens de "Triangle de pensées" ? A quand des entretiens avec un philosophe ?

ALAIN CONNES : C'est vrai, nous aurions pu inviter un physicien. Cela s'est trouvé comme cela. Mais ce furent des moments extraordinaires. Aujourd'hui, chaque fois que je relis ce livre, j'entends leurs voix. Un entretien avec un philosophe ? Curieusement, j'ai peur que nous ayons du mal à trouver un langage commun. Je redoute les tiroirs, la classification. J'apprécie la clarté de pensée, mais je crains une philosophie qui ne se heurte pas à une réalité. Je préférerais carrément un poète ! J'ai plus confiance dans la poésie que dans la philosophie.

TANGENTE : Pourtant, même à votre corps défendant, vous êtes vous-même un philosophe. Votre conception de la vérité mathématique est une philosophie. Vous avez affirmé dans *La Recherche* : "On s'apercevra un jour que la réalité matérielle se situe en fait à l'intérieur de la réalité mathématique". Qu'entendez-vous par là, et y voyez-vous une des raisons de la "redoutable efficacité des mathématiques" ?

ALAIN CONNES : Les grandes découvertes nous le disent : rien n'est trop beau pour être vrai. Considérez d'un côté les trajectoires paraboliques, de l'autre côté les orbites elliptiques. Newton arrive. Une équation, quelques principes et tout s'éclaire. Envisagez maintenant une idée terriblement abstraite : le principe d'exclusion de Pauli. Et qu'obtient-on à la sortie ? Le tableau périodique des éléments de Mendeleïev. Si vous passez l'effroyable complexité du monde matériel à travers le tamis de la vérité scientifique, que reste-t-il ? De merveilleuses pépites mathématiques.

*Propos recueillis par Francis Casiro et Gilles Cohen*

*Textes des encarts*

## La renormalisation

Les équations de la théorie quantique des champs engendrent des infinis et des divergences indésirables.

J. Schwinger, R. Feynman, S. Tomonaga et F. Dyson résolurent partiellement le problème aux alentours des années 50.

La théorie de la renormalisation permet d'escamoter par un tour de passe-passe mathématique les infinis qui pénalisaient la théorie.

Par exemple, un électron ne peut s'imaginer sans son champ électromagnétique. L'idée est de dissocier l'électron de sa charge, d'attribuer au premier une masse infinie et à la seconde une énergie infinie, et de s'arranger pour que les contributions réciproques se compensent afin de donner un résultat fini qui coïncide

avec la quantité observable.

## Le test de primalité de Lucas-Lehmer

$2^p - 1$  est un nombre premier si et seulement si  $2^p - 1$  divise  $L(p - 1)$ , où  $L(n)$  est la suite définie par  $L(1) = 4$  et  $L(n + 1) = L(n)^2 - 2$  pour  $n > 1$ .

On a successivement,  $L(1) = 4, L(2) = 14, L(3) = 194, L(4) = 37\ 634$ . Ainsi,  $15 = 2^4 - 1$  n'est pas premier car 15 ne divise pas  $L(3) = 194$ . En revanche,  $31 = 2^5 - 1$  est premier car 31 divise  $L(4) = 37\ 634 = 31 \times 1214$ .

## Ordinateur : le meilleur et le pire

TANGENTE : Quelle est donc la place de l'ordinateur dans la recherche mathématique ? Dans quelle mesure l'Internet a-t-il accéléré la vitesse de la transmission de l'information ? La masse des informations ne devient-elle pas démentielle ?

ALAIN CONNES : Mon opinion sur l'ordinateur est contrastée. Un ordinateur peut être un excellent assistant, mais il ne faut pas lui donner plus d'importance que cela.

Oui, pour la circulation des idées et des informations. Avoir accès de manière instantanée aux dernières recherches, pouvoir lire des abstracts, consulter des encyclopédies électroniques vous donnant de manière ramassée les bonnes définitions et les théorèmes essentiels, facilitent grandement la vie d'un chercheur et représentent un gain de temps formidable. Alors, tout cela représente une masse d'informations considérable, mais les outils existent pour la digérer. Les choses se simplifient avec le temps. On a coutume de dire que les derniers mathématiciens universels, à pouvoir embrasser l'ensemble des connaissances, furent Hilbert et Poincaré. Ce n'est que partiellement vrai.

En dehors de cela, l'ordinateur est, pour moi, essentiellement nocif. Faites l'expérience. Arpentez les couloirs d'un centre de recherche. Et que voyez-vous dans les bureaux ? Des chercheurs vissés à leur machine, consultant leur courrier électronique ou tapant un article. Ce n'est pas du boulot de chercheur. Autrefois, avant l'avènement de l'ordinateur, quand on pénétrait dans un bureau, on se cognait à un matheux allongé sur le plancher, les yeux fixés au plafond, ruminant une idée ou en quête d'une illumination. "Sécher" devant sa feuille blanche est indispensable. L'ordinateur propose une échappatoire nuisible. On devrait imposer chaque mois une semaine sans e-mails.

Il existe un argument plus subtil à opposer à l'engouement pour l'ordinateur. La puissance calculatoire de la machine nous prive du sentiment, de l'intuition que peuvent apporter de longs calculs faits à la main. Je vous ai raconté qu'avec un collègue, chacun de son côté, nous nous sommes lancés dans une longue suite de calculs. On a obtenu le même résultat. Résultat décevant par ailleurs. On était parvenu à une certaine somme de trente-six termes. Si on changeait le signe de huit termes, on tombait sur un cocycle. Résultat qui lui était pertinent. On a pensé à une erreur. On a recommencé nos calculs, en pure perte. En se concentrant sur les détails du calcul, on a constaté l'oubli d'une donnée qui contribuait de manière négative à deux fois l'apport des huit termes. On retombait ainsi sur

nos pieds. A travers des détails de mille petits calculs, on a vu poindre l'esprit d'une algèbre de Hopf. La machine nous aurait donné un résultat brut, inexploitable, nous privant ainsi d'un résultat intéressant.  
D'ailleurs vous pouvez constater qu'il n'y a pas d'ordinateur dans mon bureau.