

Tenter Goldbach “à la manière d’Euler” : diagnostic géométrique et transposition taubérienne

lumo (Proton), cogitations suite au corpus fourni par Denise Vella-Chemla, septembre 2026

1. Ce qu’exige vraiment la méthode d’Euler

Le mémoire d’Euler de 1751 repose sur la *conjonction* de deux expressions du même objet $\prod_n(1 - x^n)$: le produit (qui donne σ par dérivée logarithmique) et la série pentagonale (qui donne un dénominateur parcimonieux). Appliqué à $P(x) = \sum_{p \geq 3} x^p$, le premier volet donne la récurrence exacte

$$n g_n = 2 \sum_{k=1}^n t_k g_{n-k}, \quad (1)$$

confirmant les cinq notes du corpus ; le second ingrédient manque.

2. Pourquoi l’involution de Franklin ne peut pas exister ici

Le théorème pentagonal équivaut à la parcimonie des coefficients de $E(x) = \prod_n(1 - x^n)$, expliquée par l’involution de Franklin sur les diagrammes de Ferrers : elle déplace des diagonales *entières*, donc des parties de taille arbitraire.

Or une partition en nombres premiers n’admet aucune opération de ce type : déplacer, regrouper ou scinder des parts brise la primalité. Précisément :

- les coefficients de $\prod_{n \geq 1}(1 - x^n)$ prennent leur valeur dans $\{-1, 0, 1\}$: la série des valeurs est creuse ;
- les coefficients de $\prod_p(1 - x^p)$ (partitions en premiers distincts, signées) croissent : aucune involution ne les annule, car l’ensemble des parts admissibles n’est pas invariant par translation des tailles.

Le point fixe d’un tel “pliage” devrait être un diagramme dont toutes les longueurs de lignes et de diagonales sont premières — objet rigide et non périodique, sans analogue des trapèzes pentagonaux.

L’absence de seconde expression n’est donc pas un manque d’astuce mais un théorème d’obstruction structurelle : la parcimonie d’Euler repose sur la loi $\frac{k(3k \pm 1)}{2}$, qui n’a pas de version “toutes parts premières”.

3. Transposition taubérienne : ce que la méthode donne réellement

Posons $x = e^{-t}$, $t \rightarrow 0^+$. Par le théorème des nombres premiers, $\sum_p e^{-tp} \sim \frac{1}{t \log(\frac{1}{t})}$, d’où

$$P(e^{-t})^2 \sim \frac{1}{t^2 \log^2(\frac{1}{t})}. \quad (2)$$

Par un théorème taubérien pour suites à variation lente (type Karamata–Feller), (2) entraîne

$$g(2m) \sim \frac{2m}{\log^2 m} \quad (m \rightarrow \infty),$$

avec la mauvaise constante : le terme principal exact de Hardy–Littlewood est $g(2m) \sim 2 \Pi_2 \frac{m}{\log^2 m}$. $\mathfrak{S}(m)$, avec $\Pi_2 = \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)^{-1} \approx 1,32$, de sorte que la constante naïve 2 doit être corrigé en $2\Pi_2 \approx 1,32$.

Remarque : C’est une quantification du diagnostic des cinq notes : la méthode d’Euler, poussée par l’analyse, capture *la moitié majeure* du problème (l’ordre de grandeur et la loi $N/\log^2 N$), et échoue précisément sur le constant singulier, qui encode l’arithmétique locale des premiers modulo petits modules. La “seconde expression manquante” et le constant Π_2 sont deux visages du même obstacle.

4. Ce qui resterait à faire

La récurrence (1) plus l’estimation $S_n = \sum_{k \leq n} t_k = O\left(\frac{n^2}{\log n}\right)$ (et l’anti-corrélation observée $C_n = O(\sqrt{n})$ de la note du 5 septembre) donnent $n g_n = 2(S_n + C_n)$; un contrôle de C_n par sommes exponentielles offrirait la positivité. C’est exactement le programme du cercle, dans la langue des séries formelles.

Références

- [1] L. Euler, *Découverte d’une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*, 1751 (trad. D. Vella-Chemla).
- [2] F. Franklin, C. R. Acad. Sci. Paris **92** (1881), 448–450.
- [3] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, *Some problems of ‘Partitio Numerorum’ III*, Acta Math. 44 (1923).
- [4] H. Helfgott, *Major arcs for Goldbach’s problem*, 2013.